CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

EDMOND BONAN

Sur les *G*-structures de type quaternionien

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 9, n° 4 (1967), p. 389-463

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1967__9_4_389_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE

ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE *Vol. IX, 4*

SUR LES G-STRUCTURES DE TYPE QUATERNIONIEN

par Edmond BONAN

D'après Marcel Berger le groupe d'holonomie d'une variété riemannienne orientable V_m non localement symétrique, non localement réductible, fait partie de la liste suivante :

$$V_m[SO(m)],\quad V_{2n}[U(n)],\quad V_{2n}[SU(n)],\quad V_{4n}[Sp(n)],$$
$$V_{4n}[Sp(n)\otimes_H Sp(1)],\quad V_7[G_2],\quad V_8[Spin(7)],\quad V_{16}[Spin(9)].$$

Par l'introduction d'un système de biconjugaisons σ', σ'', σ''' sur le corps de quaternions, nous avons rendu possible une étude des structures presque quaternioniennes, sur une variété différentiable, dans le cadre d'une scission globale de l'hypercomplexifié du fibré tangent en quatre sous-espaces deux à deux biconjugués. Cette méthode permet de conduire les recherches d'une manière tout à fait analogue à celle classique des structures presque complexes : on retrouve l'existence équivalente de trois champs d'opérateurs globaux $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{J}$ et $\mathfrak{K}$ tels qu'ils ont été définis premièrement par C. Ehresmann, puis étudiés par P. Libermann, M. Obata et H. Wakakuwa.

Nous dégageons quatre projecteurs globaux sur les tenseurs notés $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}''$, $\mathfrak{S}'''$ qui se révèlent indispensables pour expliciter le tenseur de la $GL(n,H)$-structure. Nous développons la notion de connexion presque quaternionienne dans ce nouveau cadre; il existe alors une connexion canonique dont le tenseur de torsion s'identifie avec le tenseur de structure T mis en évidence pour la première fois :

$$T=\frac{2}{3}\{[\mathfrak{I},\mathfrak{I}]+[\mathfrak{J},\mathfrak{J}]+[\mathfrak{K},\mathfrak{K}]\},$$

où $[\mathfrak{I},\mathfrak{I}]$ par exemple est le tenseur de structure de la structure presque complexe définie par $\mathfrak{I}$.

On peut toujours construire une métrique sur une variété presque quaternionienne conduisant à une structure presque hermitienne quaternionienne subordonnée ou $Sp(n)$-structure. Nous définissons deux connexions presque hermitiennes quaternioniennes canoniques :

- La première, induite par la connexion riemannienne, est essentielle dans l'étude des transformations affines : Etant donnée une variété presque hermitienne compacte V_{4n}, le plus grand groupe connexe de transformations de V_{4n}, affines pour la première connexion canonique et qui préservent la structure presque quaternionienne, coïncide avec le plus grand groupe connexe d'automorphismes de la structure presque hermitienne quaternionienne de V_{4n}.

- La deuxième connexion est induite par la connexion presque quaternionienne canonique : sa torsion s'identifie au tenseur de la structure presque hermitienne quaternionienne.

La réductibilité des variétés riemanniennes à groupe d'holonomie $Sp(n)$ ne fait intervenir que des variétés de même type ou localement unitaires.

Mais cette notion de structure presque quaternionienne est insuffisante : par exemple l'espace projectif quaternionien n'en admet pas. Soit $H(V_{4n})$ un fibré de base V_{4n} de fibre type l'algèbre H des quaternions, de groupe structural le groupe $SO(3)$ des automorphismes d'algèbre. Soit $T(V_{4n})$ le fibré tangent. Une structure presque quaternale est la donnée d'un champ global associant à tout x de V_{4n} une représentation effective de H_x dans T_x. Les conditions suivantes sont alors équivalentes :

1) V_{4n} est presque quaternale.

2) V_{4n} est recouverte par une famille d'ouverts $U, V, \ldots$ Chaque ouvert est presque quaternionien $(\mathcal{I}^U, \mathcal{J}^U)$. Dans $U \cap V$ les algèbres engendrées par $(\mathcal{I}^U, \mathcal{J}^U)$ ou par $(\mathcal{I}^V, \mathcal{J}^V)$ coïncident.

3) Il existe un champ global associant à tout x un sous-espace H_x-vectoriel S_x de $T_x \otimes H_x$ de $T_x \otimes H_x = S_x \oplus S'_x \oplus S''_x \oplus S'''_x$ pour n'importe quel système de biconjugaisons σ'_x, σ''_x, σ'''_x de H_x.

4) Le fibré principal des repères tangents admet un sous-fibré principal de groupe structural $GL(n, H) \otimes_H Sp(1)$.

Une variété presque quaternionienne apparaît ainsi comme un cas particulier : celui où le fibré $H(V_{4n})$ est trivial.

L'un des projecteurs $\mathcal{S}_U$ associé aux structures presque quaternioniennes locales est en fait global. Il caractérise la structure : Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une connexion soit presque quaternale est que $\mathcal{S}$ soit à dérivée covariante nulle.

On peut construire une métrique sur une variété presque quaternale conduisant à une $Sp(n) \otimes_H Sp(1)$-structure ou structure presque hermitiale. Le projecteur global $\mathcal{S}$ fournit par complète antisymétrisation une 4-forme M de rang maximum : $\overset{n}{\wedge} M \neq 0$. Cette 4-forme est à dérivée covariante nulle dans toute connexion presque hermitiale. L'espace projectif quaternionien muni de sa métrique naturelle est un exemple de variété riemannienne à groupe d'holonomie $Sp(n) \otimes_H Sp(1)$.

La réductibilité de cette dernière n'introduit en dehors de variétés de même type que des variétés localement unitaires.

Des résultats très partiels sur les structures presque quaternales avaient déjà été obtenus par E. Martinelli et ensuite indépendemment de, et simultanément avec, l'auteur par Y. Kraines.

Nous étudions enfin deux variétés riemanniennes exceptionnelles. La première V_7 , à groupe d'holonomie G_2 , admet une 3-forme globale à dérivée covariante nulle. La seconde V_8, à groupe d'holonomie $Spin(7)$, admet une 4- forme globale à dérivée covariante nulle. Ces deux variétés sont à courbure de Ricci nulle.

Certains des résultats de ce travail ont été annoncés dans sept notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.

Je suis heureux d'exprimer ma profonde reconnaissance à M. André Lichnerowicz, dont je suis fier d'être l'élève, qui n'a cessé de me prodiguer ses conseils et encouragements avec la plus grande bienveillance .

Je tiens aussi à remercier Monsieur C. Ehresmann et Monsieur C. Pisot pour l'honneur qu'ils m'ont fait en ayant accepté de constituer le Jury de cette thèse (Paris 1967).

TABLE DES MATIERES

- :-:- : - :-:-:-:-

1. Préliminaires algébriques.

Nous désignerons par H le corps des quaternions muni de trois *involutions d'algèbre* non triviales notées σ', σ'', σ''' telles que

$$(1,\ 1) \qquad \sigma'^2 = \sigma''^2 = \sigma'''^2 = id, \quad \sigma'\sigma'' = \sigma''\sigma' = \sigma''',$$
$$\sigma''\sigma''' = \sigma'''\sigma'' = \sigma', \quad \sigma'''\sigma' = \sigma'\sigma''' = \sigma''.$$

Nous dirons que $q' = \sigma' q$ (resp. q'', q''') est un quaternion *biconjugué* de q.

Puisque H est une algèbre centrale simple, ces involutions sont des automorphismes intérieurs : on peut donc trouver trois quaternions i, j, k de norme 1 avec

$$\sigma' q = i q i^{-1}; \qquad \sigma'' q = j q j^{-1}; \qquad \sigma''' q = k q k^{-1}.$$

De $\sigma'^2 = id$, on tire $i^2 = \pm 1$, mais σ' n'étant pas triviale $i^2 = -1$. De même $j^2 = -1$. D'après $(1,\ 1)$ on a certainement

$$ij = -ji = k; \qquad k^2 = -1.$$

Il existe alors au moins une base $(1, i, j, k)$ de H satisfaisant aux relations suivantes :

$$(1,2) \quad \begin{aligned} & i = i' = -i'' = -i''';\ j = -j' = j'' = -j''';\ k = -k' = -k'' = k''';\\ & i^2 = j^2 = k^2 = -1;\ ij = -ji = k;\ jk = -kj = i;\ ki = -ik = j. \end{aligned}$$

D'une manière évidente nous avons la

PROPOSITION 1. *Tout calcul algébrique reste encore valable lorsqu'on remplace chaque quaternion qui y figure par son biconjugué relativement à l'une des involutions* σ', σ'', σ'''.

T_m désignant maintenant un espace vectoriel réel de dimension m, nous poserons

$$T_m^H = T_m \otimes_R H.$$

C'est un espace vectoriel à droite sur les quaternions, muni de trois semi-involutions :

$$\tau' = id \otimes \sigma', \qquad \tau'' = id \otimes \sigma''; \qquad \tau''' = id \otimes \sigma''' .$$

Nous dirons que T_m^H est *l'hypercomplexifié,* à droite, de T_m et qu'une semi- involution étendue à l'algèbre tensorielle, sur R, de T_m^H transforme un élément t en un *hypercomplexe biconjugué* noté t', t'' ou t'''. Si $q \to \bar{q}$ est la conjugaison habituelle, anti-involution de H et T_m^* le dual de T_m, nous désignerons par

$$(T_m^H)^* = H \otimes_R T_m^*, \qquad \overline{T}_m^H = H \otimes_R T_m, \qquad (\overline{T}_m^H)^* = T_m^* \otimes_R H$$

le dual, l'opposé et l'opposé du dual de T_m^H. Un élément invariant par une semi- involution sera dit complexe; on donnera le nom de *réel* à un élément invariant par toutes les semi- involutions.

Nous introduirons les notations suivantes :

(P. C) exprime qu'une proposition reste vraie lorsqu'on substitue à ses éléments d'autres éléments subordonnés à une ou plusieurs permutations circulaires simultanées.

(F. H. B) indique que l'on doit adjoindre au groupe de formules déjà écrites leurs formules hypercomplexes biconjuguées.

2. Structures presque quaternioniennes.

1°) Soit T_x l'espace tangent en un point x d'une variété différentiable V_{4n} de classe C^∞ et de dimension $4n$.

DEFINITION 1. *Une structure presque quaternionienne est définie sur* V_{4n} *par la donnée d'un champ de classe* C^∞ *de sous-espaces vectoriels* S_x^H *de* T_x^H *tel que* T_x^H *soit somme directe de* S_x^H *et de ses trois biconjugués :*

$$T_x^H = S_x^H \oplus \tau' S_x^H \oplus \tau'' S_x^H \oplus \tau''' S_x^H .$$

PROPOSITION 2. *Une structure presque quaternionienne sur* V_{4n} *définit deux champs globaux* $\mathfrak{I}$ *et* $\mathfrak{J}$ *d'opérateurs linéaires qui appliquent chaque* T_x *sur lui-même avec*

$$\mathfrak{I}^2 = \mathfrak{J}^2 = -id; \qquad \mathfrak{I}\mathfrak{J} + \mathfrak{J}\mathfrak{I} = 0.$$

En effet, tout vecteur a de T_x^H peut être mis d'une manière unique sous la forme

$$a = \lambda + \tau' \mu + \tau'' \nu + \tau'' \rho,$$

où les vecteurs λ, μ, ν, ρ appartiennent à S_x^H. On a

$$\tau' a = \mu + \tau' \lambda + \tau'' \rho + \tau''' \nu \quad (P.\ C)$$

et par suite les vecteurs réels a de T_x sont les vecteurs de T_x^H admettant la décomposition

$$(2.\ 1) \qquad a = \lambda + \tau' \lambda + \tau'' \lambda + \tau''' \lambda, \ \lambda \in S_x^H.$$

Nous définissons ainsi un R- isomorphisme h de S_x^H sur T_x. A tout vecteur réel $a = h(\lambda)$ les vecteurs $-\lambda i$, $-\lambda j$, $-\lambda k$ font correspondre par (2. 1) les vecteurs réels

$$\mathfrak{I}\, a = -\lambda i - (\tau' \lambda) i + (\tau'' \lambda) i + (\tau''' \lambda) i,$$
$$\mathfrak{J}\, a = -\lambda j + (\tau' \lambda) j - (\tau'' \lambda) j + (\tau''' \lambda) j,$$
$$\mathfrak{K} a = -\lambda k + (\tau' \lambda) k + (\tau'' \lambda) k - (\tau''' \lambda) k,$$

et l'on vérifie que

$$\mathfrak{I}^2 a = -a; \qquad \mathfrak{I}\mathfrak{J} a = -\mathfrak{J}\mathfrak{I} a = \mathfrak{K} a \qquad (P.\ C).$$

2°) Inversement, soit sur une variété V_m deux opérateurs vérifiant les hypothèses de la proposition 2 : considérons les extensions *semi-linéaires* des opérateurs $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{J}$ et $\mathfrak{K} = \mathfrak{I}\mathfrak{J}$ à T_x^H définies par

$$\breve{\mathfrak{I}} = \mathfrak{I} \otimes \sigma', \qquad \breve{\mathfrak{J}} = \mathfrak{J} \otimes \sigma'', \qquad \breve{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K} \otimes \sigma'''.$$

Ces opérateurs de T_x^H satisfont encore aux relations

$$\breve{\mathfrak{I}}^2 = -id, \quad \breve{\mathfrak{I}}\breve{\mathfrak{J}} = -\breve{\mathfrak{J}}\breve{\mathfrak{I}} = \breve{\mathfrak{K}} \quad (P.\ C).$$

Appelons vecteur *tripropre* pour (α, β, γ) un vecteur $\lambda \in T_x^H$ tel que

$$\breve{\mathfrak{I}} \lambda = \lambda \alpha, \ \breve{\mathfrak{J}} \lambda = \lambda \beta \text{ et par suite } \breve{\mathfrak{K}} \lambda = \lambda \gamma \text{ pour } \alpha, \beta \in H.$$

PROPOSITION 3.

A) $\breve{\mathfrak{I}}$ *(resp.* $\breve{\mathfrak{J}}, \breve{\mathfrak{K}}$*) admet pour seules valeurs propres* $\pm i$ *(resp.* $\pm j$, $\pm k$*).*

B) L'ensemble des vecteurs tripropres pour $(-i, -j, -k)$ *est un sous-espace vectoriel* S_x^H *de* T_x^H.

C) Le sous-espace $\tilde{\tau} S_x^H$ *est tripropre pour* $(-\tilde{i}, -\tilde{j}, -\tilde{k})$.

D) Les champs d'opérateurs $\mathfrak{I}$ *et* $\mathfrak{J}$ *tels que* $\mathfrak{I}^2 = \mathfrak{J}^2 = -id$ *et* $\mathfrak{I}\mathfrak{J} + \mathfrak{J}\mathfrak{I} = 0$ *ne peuvent exister que sur une variété de dimension* $4n$.

E) S_x^H *définit une structure presque quaternionienne de* V_{4n}.

DEMONSTRATION.

a) Soit v un vecteur propre de $\breve{\mathfrak{I}}$ dans T_x^H,

$$\breve{\mathfrak{I}} v = v\alpha \quad \text{où} \quad \alpha \in H \quad \text{et} \quad v \neq 0 .$$

En faisant opérer $\breve{\mathfrak{I}}$ sur les deux membres et puisque $v \neq 0$, nous voyons que le quaternion α satisfait à $\alpha\alpha' = -1$, soit $(\alpha i)^2 = 1$. Par suite $\alpha = \pm i$ et la propriété A s'obtient par *(P. C)*.

Supposons en particulier que $\breve{\mathfrak{I}} v = vi$ et soit q un quaternion arbitraire; il vient successivement

$$\breve{\mathfrak{I}}(vq) = (\tilde{\mathfrak{I}} v) q' = v i q' = (vq) i .$$

Il en résulte que les vecteurs propres de l'opérateur $\breve{\mathfrak{I}}$ pour l'une des valeurs $\pm i$ forment un *sous-espace vectoriel* de T_x^H.

b) Soit a un vecteur réel : $\breve{\mathfrak{I}}$ induit l'opérateur réel $\mathfrak{I}$ sur T_x et par suite, si nous considérons le vecteur λ de T_x^H défini par

$$\lambda = a + (\mathfrak{I} a) i + (\mathfrak{J} a) j + (\mathfrak{K} a) k , \tag{2.2}$$

il vient en faisant opérer $\breve{\mathfrak{I}}$ sur cette égalité

$$\breve{\mathfrak{I}} \lambda = \mathfrak{I} a - a i - (\mathfrak{K} a) j + (\mathfrak{J} a) k = -\lambda i \quad (P. C) .$$

Le vecteur λ est donc un vecteur propre de $\breve{\mathfrak{I}}$ (resp. $\breve{\mathfrak{J}}, \breve{\mathfrak{K}}$) avec la valeur propre $-i$ (resp. $-j, -k$), d'où la propriété B.

c) Soit S_x^H l'espace vectoriel des vecteurs tripropres pour $(-i, -j, -k)$. Par biconjugaison $\tilde{\tau} = \tau', \tau'', \tau'''$ il vient alors la propriété C.

d) La relation *(2. 2)* s'inverse par addition avec ses trois *(F. H. B)*:

nous obtenons

$$4a = \lambda + \tau' \lambda + \tau'' \lambda + \tau''' \lambda .$$

T_x est donc R - isomorphe à S_x^H et par suite $m = 4n$.

e) Montrons enfin que

$$T_x^H = S_x^H \oplus \tau' S_x^H \oplus \tau'' S_x^H \oplus \tau''' S_x^H .$$

Pour cela, il suffit de montrer que l'intersection de S_x^H avec la somme de ses trois biconjugués se réduit au vecteur nul. Soit donc λ un vecteur de S_x^H et supposons de plus que

$$\lambda \in S_x^H \cap \{ \tau' S_x^H + \tau'' S_x^H + \tau''' S_x^H \},$$

$$\lambda = \tau' \mu + \tau'' \nu + \tau''' \rho \quad \text{où} \quad \mu, \nu, \rho \in S_x^H .$$

$\breve{\mathfrak{I}}$ commutant avec les semi-involutions $\bar{\tau}$,

$$\breve{\mathfrak{I}} \lambda = - \lambda i = -(\tau' \mu + \tau'' \nu + \tau''' \rho) i =$$

$$\breve{\mathfrak{I}} (\tau' \mu + \tau'' \nu + \tau''' \rho) = -(\tau' \mu - \tau'' \nu - \tau''' \rho) i ;$$

λ se réduit à $\lambda = \tau' \mu$, mais

$$\breve{\mathfrak{J}} \lambda = - \lambda j = \tau' (\mathfrak{J} \mu) = \lambda j$$

et λ est par suite le vecteur nul.

3°) L'espace vectoriel réel T_x muni des opérateurs $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{J}$ peut être identifié à S_x^H au moyen de l'application h définie par *(2. 1)*.

Soit U_x^H un sous-espace de S_x^H de dimension hypercomplexe p. Il lui correspond par h un sous-espace de T_x de dimension $4p$ *invariant* par $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{J}$ et inversement.

Ainsi les sous-espaces de T_x invariants par $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{J}$ sont donc identifiés aux sous-espaces de S_x^H.

L'espace $(S_x^H)^*$, H - dual de S_x^H, définit aussi sur l'espace dual T_x^* de T_x une structure quaternionienne.

Pour tout vecteur λ de S_x^H nous devons avoir les relations

$$\omega(\tau' \lambda) = \omega(\tau'' \lambda) = \omega(\tau''' \lambda) = 0 \quad \text{et} \quad \omega(\lambda) = \alpha(\lambda).$$

Le produit tensoriel

$$T_x^H \otimes_H (T_x^H)^* \quad [\text{resp. } T_x^H \otimes_H \bar{T}_x^H ; \ (\bar{T}_x^H)^* \otimes_H (T_x^H)^*]$$

peut être décomposé en la somme directe des 16 espaces

$$\tilde{\tau} S_x^H \otimes_H (\hat{\tau} S_x^H)^* \quad [\text{resp. } \tilde{\tau} S_x^H \otimes \hat{\tau} \bar{S}_x^H ; (\tilde{\tau} \bar{S}_x^H)^* \otimes_H (\hat{\tau} S_x^H)^*] ,$$

pour $\tilde{\tau}$, $\hat{\tau} = id$, τ', τ'', τ'''.

En particulier un tenseur réel d'ordre 2 se décompose en 4 familles de 4 tenseurs : dans chaque famille les tenseurs sont deux à deux biconjugués et par suite chaque famille définit un tenseur réel, qui sera dit pur du genre 0, 1, 2, 3 selon que le produit $\tilde{\tau}\hat{\tau}$ vaut id, τ', τ'', τ'''. Ainsi :

PROPOSITION 4. *Tout tenseur réel d'ordre deux se décompose d'une manière unique en la somme de quatre tenseurs purs.*

A cette décomposition correspondent les projecteurs, notés $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}''$, $\mathfrak{S}'''$. On peut exprimer ces projecteurs à l'aide des opérateurs $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{J}$ et $\mathfrak{K}$. Un tenseur t d'ordre 2 pur et de type $\mathfrak{R}$ satisfait nécessairement aux deux égalités

$$(2.\ 3) \qquad \mathfrak{R}(\mathfrak{I})t = (-1)^u t \quad \text{et} \quad \mathfrak{R}(\mathfrak{J})t = (-1)^v t,$$

où (u, v) est un couple d'entiers valant $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ suivant que le genre est 0, 1, 2, 3. On en déduit pour un tenseur quelconque d'ordre 2 la décomposition suivant les tenseurs purs $\tilde{\mathfrak{S}}t$:

$$(2.\ 4) \quad 4\tilde{\mathfrak{S}}t = t + (-1)^u\mathfrak{R}(\mathfrak{I})t + (-1)^v\mathfrak{R}(\mathfrak{J})t + (-1)^{u+v}\mathfrak{R}(\mathfrak{K})t .$$

PROPOSITION 5. *Un tenseur ne peut être pur relativement à des paires d'indices non disjointes sans s'annuler.*

Il suffit de le prouver pour un élément de $T_x^* \otimes T_x \otimes T_x$. Les autres cas s'y apparentent.

Supposons donc que, pour tout couple de vecteurs (X, Y), nous ayons :

$$(2.\ 5) \quad \begin{aligned} t(X, Y) &= (-1)^u\mathfrak{I}^{-1}t(\mathfrak{I}X, Y) = (-1)^v\mathfrak{J}^{-1}t(\mathfrak{J}X, Y) = \\ &= (-1)^{u+v}\mathfrak{K}^{-1}t(\mathfrak{K}X, Y), \\ t(X, Y) &= (-1)^{u'}\mathfrak{I}^{-1}t(X, \mathfrak{I}Y) = (-1)^{v'}\mathfrak{J}^{-1}t(X, \mathfrak{J}Y) = \\ &= (-1)^{u'+v'}\mathfrak{K}^{-1}t(X, \mathfrak{K}Y). \end{aligned}$$

Il vient successivement

$$t(\mathcal{I}X,\ \mathcal{I}Y) = -\mathcal{I}^{-1}\mathcal{I}^{-1}t(\mathcal{I}X,\ \mathcal{I}Y) = (-1)^{u+1}\mathcal{I}^{-1}t(X,\ \mathcal{I}Y) =$$
$$= (-1)^{u+u'+1}t(X,\ Y)$$

et,par permutation circulaire,

$$t(\mathcal{J}X,\ \mathcal{J}Y) = (-1)^{v+v'+1}t(X,\ Y)$$

et

$$t(\mathcal{K}X,\ \mathcal{K}Y) = (-1)^{u+v+u'+v'+1}t(X,\ Y).$$

Mais aussi

$$t(\mathcal{K}X,\ \mathcal{K}Y) = t(\mathcal{I}\mathcal{J}X,\ \mathcal{I}\mathcal{J}Y) = (-1)^{u+u'+1}t(\mathcal{J}X,\ \mathcal{J}Y) =$$
$$= (-1)^{u+u'+1+v+v'+1}t(X,\ Y),$$

et par suite t se réduit à l'opérateur nul.

En particulier si nous avons (2.5), t ne peut être symétrique ou antisymétrique en X et Y sans être nul. Ce résultat sera fondamental dans l'existence d'une connexion canonique.

Remarquons enfin que $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{K}$ sont purs de genre respectivement 1, 2, 3.

3. Espaces fibrés attachés à une structure presque quaternionienne.

Nous ferons dans la suite les conventions suivantes : tout indice grec prend les valeurs $1, 2, \dots, n$ et tout indice latin les valeurs $1, 2, \dots, n, 1', 2', \dots, n'', 1''', 2''', \dots, n'''$.

Nous introduirons les opérateurs $'$, $''$, $'''$, sur les indices avec

$$(\alpha')' = (\alpha'')'' = (\alpha''')''' = \alpha, \qquad (\alpha')'' = (\alpha'')' = \alpha''',$$
$$(\alpha'')''' = (\alpha''')'' = \alpha', \qquad (\alpha''')' = (\alpha')''' = \alpha''.$$

La structure précédente peut encore être définie par un recouvrement de V_{4n} par des ouverts $U, V, \dots$ sur chacun desquels on se donne n formes à valeurs quaternioniennes

$$\{\theta^{\alpha}\} = \theta_U, \qquad \{\theta^{\beta^*}\} = \theta_V$$

telles que les $4n$ formes θ^{α}, $\theta^{\alpha'} = (\theta^{\alpha})'$, $\theta^{\alpha''}$, $\theta^{\alpha'''}$ soient linéairement indépendantes dans l'hypercomplexe et vérifient pour tout $x \in U \cap V$:

$$\theta^{\alpha} = A^{\alpha}_{\beta *}\,\theta^{\beta *} \quad \text{où} \quad (A^{\alpha}_{\beta *}) = {}^{b}A^{U}_{V} \in GL(n, H),$$

où $GL(n, H)$ désigne le groupe linéaire quaternionien.

Le champ de sous-espaces S^{H}_{x} est alors défini par :

$$\lambda \in S^{H}_{x} \text{ si et seulement si}$$

$$\forall \alpha,\ \theta^{\alpha}(\tau' \lambda) = \theta^{\alpha}(\tau'' \lambda) = \theta^{\alpha}(\tau''' \lambda) = 0.$$

Si $\{ \varepsilon_{\alpha} \}$ est une base de S^{H}_{x}, duale de $\{\theta^{\alpha}\}$, le système de vecteurs

$$\varepsilon_{\alpha},\ \varepsilon_{\alpha'} = \tau' \varepsilon_{\alpha},\quad \varepsilon_{\alpha''} = \tau'' \varepsilon_{\alpha},\quad \varepsilon_{\alpha'''} = \tau''' \varepsilon_{\alpha}$$

est une base de T^{H}_{x} qui sera dite *adaptée* à la structure quaternionienne de T_{x}.

Les changements de bases adaptées s'effectuent selon les relations

$$\varepsilon_{\beta *} = \varepsilon_{\alpha} A^{\alpha}_{\beta *},\quad \varepsilon_{\beta' *} = \varepsilon_{\alpha'} A^{\alpha'}_{\beta' *},\quad \varepsilon_{\beta'' *} = \varepsilon_{\alpha''} A^{\alpha''}_{\beta'' *},\ \varepsilon_{\beta''' *} = \varepsilon_{\alpha'''} A^{\alpha'''}_{\beta''' *},$$

où les coefficients $A^{\tilde{\alpha}}_{\tilde{\beta} *}$ sont définis par

$$A^{\alpha}_{\beta *} = \sigma' A^{\alpha'}_{\beta' *} = \sigma'' A^{\alpha''}_{\beta'' *} = \sigma''' A^{\alpha'''}_{\beta''' *}.$$

Les extensions *linéaires* des opérateurs $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ et $\mathcal{K}$ admettent, d'après l'étude des vecteurs propres de leurs extensions semi-linéaires, les composantes suivantes des tenseurs les représentant

$$\mathcal{I}^{\alpha}_{\beta'} = \mathcal{I}^{\alpha'}_{\beta} = -i\,\delta^{\alpha}_{\beta},\qquad \mathcal{I}^{\alpha''}_{\beta'''} = \mathcal{I}^{\alpha'''}_{\beta''} = i\,\delta^{\alpha}_{\beta} \quad (P.\ C)$$

les autres composantes étant toutes nulles.

Pour des bases adaptées, tout vecteur réel, élément de T_{x}, admet des composantes v^{i} telles que

$$v^{\tilde{\alpha}} = \tilde{\sigma}\, v^{\alpha} \quad (\tilde{\sigma} = \sigma',\ \sigma'',\ \sigma''').$$

Plus généralement, les composantes d'un tenseur réel qui se déduisent l'une de l'autre en tildaffiant tous les indices sont hypercomplexes biconjuguées par $\tilde{\sigma}$.

Etant donnée une base adaptée $(\varepsilon_{\alpha}, \varepsilon_{\alpha'}, \varepsilon_{\alpha''}, \varepsilon_{\alpha'''})$ de T^{H}_{x}, considérons les $4n$ vecteurs réels $(e_{\alpha}, e_{\alpha'}, e_{\alpha''}, e_{\alpha'''})$ définis par

$$
\begin{aligned}
e_{\alpha} &= \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\alpha'} + \varepsilon_{\alpha''} + \varepsilon_{\alpha'''}),\\
e_{\alpha'} &= \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{\alpha}\, i + \varepsilon_{\alpha'}\, i - \varepsilon_{\alpha''}\, i - \varepsilon_{\alpha'''}\, i) = \mathcal{I}^{-1} e_{\alpha},\\
e_{\alpha''} &= \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{\alpha}\, j - \varepsilon_{\alpha'}\, j + \varepsilon_{\alpha''}\, j - \varepsilon_{\alpha'''}\, j) = \mathcal{J}^{-1} e_{\alpha},\\
e_{\alpha'''} &= \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{\alpha}\, k - \varepsilon_{\alpha'}\, k - \varepsilon_{\alpha''}\, k + \varepsilon_{\alpha'''}\, k) = \mathcal{K}^{-1} e_{\alpha}.
\end{aligned}
$$

On en déduit inversement :

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{\alpha} &= \tfrac{1}{2}(e_{\alpha} - e_{\alpha'}\, i - e_{\alpha''}\, j - e_{\alpha'''}\, k),\\
\varepsilon_{\alpha'} &= \tfrac{1}{2}(e_{\alpha} - e_{\alpha'}\, i + e_{\alpha''}\, j + e_{\alpha'''}\, k),\\
\varepsilon_{\alpha''} &= \tfrac{1}{2}(e_{\alpha} + e_{\alpha'}\, i - e_{\alpha''}\, j + e_{\alpha'''}\, k),\\
\varepsilon_{\alpha'''} &= \tfrac{1}{2}(e_{\alpha} + e_{\alpha'}\, i + e_{\alpha''}\, j - e_{\alpha'''}\, k).
\end{aligned}
$$

Les vecteurs (e_{a}) définissent ainsi une base de T_x^H donc de T_x. Inversement de toute base du type

$$
e_{\alpha}, \qquad e_{\alpha'} = \mathcal{I}^{-1} e_{\alpha}, \qquad e_{\alpha''} = \mathcal{J}^{-1} e_{\alpha}, \qquad e_{\alpha'''} = \mathcal{K}^{-1} e_{\alpha}
$$

on déduit par les formules précédentes une base adaptée de T_x^H.

Si nous posons

$$
A = L + iM + jN + kP,
$$

où L, M, N, P sont des matrices $n \times n$, les bases (e_i) et (e_{j^*}) de T_x définies à l'aide des bases (ε_{α}) et (ε_{β^*}) de S_x^H se déduisent l'une de l'autre au moyen des formules

$$
\begin{aligned}
e_{\beta^*} &= e_{\alpha} L^{\alpha}_{\beta^*} + e_{\alpha'} M^{\alpha}_{\beta^*} + e_{\alpha''} N^{\alpha}_{\beta^*} + e_{\alpha'''} P^{\alpha}_{\beta^*},\\
e_{\beta'} &= -e_{\alpha} M^{\alpha}_{\beta^*} + e_{\alpha'} L^{\alpha}_{\beta^*} + e_{\alpha''} P^{\alpha}_{\beta^*} - e_{\alpha'''} N^{\alpha}_{\beta^*},\\
e_{\beta''} &= -e_{\alpha} N^{\alpha}_{\beta^*} - e_{\alpha'} P^{\alpha}_{\beta^*} + e_{\alpha''} L^{\alpha}_{\beta^*} + e_{\alpha'''} M^{\alpha}_{\beta^*},\\
e_{\beta'''} &= -e_{\alpha} P^{\alpha}_{\beta^*} + e_{\alpha'} N^{\alpha}_{\beta^*} - e_{\alpha''} M^{\alpha}_{\beta^*} + e_{\alpha'''} L^{\alpha}_{\beta^*}.
\end{aligned}
$$

Désignons par

$$
\overset{a}{A}{}^{U}_{V} = \begin{bmatrix} L & M & N & P \\ -M & L & P & -N \\ -N & -P & L & M \\ -P & N & -M & L \end{bmatrix}, \qquad \overset{\varepsilon}{A}{}^{U}_{V} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A''' \end{bmatrix}
$$

${}^{a}A^{U}_{V}$ est la représentation réelle de A; son déterminant est strictement positif.

Dans une base adaptée réelle les tenseurs représentant les opérateurs $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{K}$ sont :

$$I = \begin{bmatrix} 0 & -E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & -E & 0 \end{bmatrix}, \qquad J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -E \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La représentation réelle du groupe linéaire à n variables quaternioniennes $GL(n, H)$ peut être caractérisée comme le sous-groupe de $GL(4n, R)$ commutant avec I, J, K. Soient respectivement $E^{a}(V_{4n})$, $E^{g}(V_{4n})$, $E^{h}(V_{4n})$ les ensembles formés par tous les repères réels (e_{a}), repères hypercomplexes (ε_{a}) et sous-repères hypercomplexes (ε_{α}) adaptés à la structure presque quaternionienne et ayant leurs origines en tous points de V_{4n}. Ils admettent chacun, pour la projection naturelle, une structure d'espace fibré principal de classe C^{∞} ayant pour base V_{4n} et pour groupes structuraux les groupes G_{a}, G_{g}, G_{h} tous isomorphes à $GL(n, H)$, formés par les matrices des types respectifs ${}^{a}A^{U}_{V}$, ${}^{g}A^{U}_{V}$, ${}^{h}A^{U}_{V}$.

La représentation réelle des matrices A de $GL(n, H)$ étant à déterminant positif est donc dans la composante de l'identité de $GL(4n, R)$: il en résulte que toute variété presque quaternionienne est orientée.

4. Structures quaternioniennes.

f étant une fonction à valeurs quaternioniennes, différentiable des variables réelles x, y, z, t, on pose

$$q = x + iy + jz + kt .$$

Les conditions d'holomorphie à droite peuvent s'écrire

$$\frac{\partial f}{\partial q'} = \frac{\partial f}{\partial q''} = \frac{\partial f}{\partial q'''} = 0 ,$$

où nous avons posé

$$\frac{\partial f}{\partial q'} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} i + \frac{\partial f}{\partial z} j + \frac{\partial f}{\partial t} k\right) \quad (P.C).$$

Nous n'obtenons comme il est bien connu que les fonctions affines à droite.

Si V_{4n} est une variété réelle de dimension $4n$ admettant une structure « analytique quaternionienne », nous voyons avec C. Ehresmann que V_{4n} est *localement affine.* Il est clair que :

PROPOSITION 6. *Une structure quaternionienne sur une variété induit sur elle une structure presque quaternionienne.*

PROPOSITION 7. *Si deux structures quaternioniennes, subordonnées à la même structure différentiable, définissent sur la variété V_{4n} les mêmes opérateurs $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{J}$, elles coïncident.*

En effet, soit x un point de V_{4n}, (q^{α}) et (q^{λ^*}) deux systèmes de coordonnées locales quaternioniennes dont les domaines contiennent x et qui correspondent respectivement aux deux structures quaternioniennes envisagées. Les (q^{λ^*}) sont, à priori, R- différentiables des (x^i) et par suite des (q^i), avec

$$q^{\alpha} = x^{\alpha} + i x^{\alpha'} + j x^{\alpha''} + k x^{\alpha'''} , \qquad q^i = q^{\alpha},\ q^{\alpha'},\ q^{\alpha''},\ q^{\alpha'''}.$$

On en déduit :

$$d q^{\lambda^*} = b^{\lambda^*}_{\alpha} \cdot d q^{\alpha} + b^{\lambda^*}_{\alpha'}\, d q^{\alpha'} + b^{\lambda^*}_{\alpha''}\, dq^{\alpha''} + b^{\lambda^*}_{\alpha'''}\, dq^{\alpha'''} .$$

Mais à la structure quaternionienne $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{J}$ correspond un sous- espace S^H_x bien déterminé et par suite

$$b^{\lambda^*}_{\alpha'} = b^{\lambda^*}_{\alpha''} = b^{\lambda^*}_{\alpha'''} = 0 .$$

La condition $b^{\lambda^*}_{\alpha'} = 0$ signifie ici

$$b_{\alpha'}^{\lambda^*} = \frac{\partial q^{\lambda^*}}{\partial q^{\alpha'}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial q^{\lambda^*}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial q^{\lambda^*}}{\partial x^{\alpha'}} i + \frac{\partial q^{\lambda^*}}{\partial x^{\alpha''}} j + \frac{\partial q^{\lambda^*}}{\partial x^{\alpha'''}} k\right) = 0.$$

On en déduit que les (q^{λ^*}) sont des fonctions analytiques quaternioniennes des (q^{α}), et les deux structures quaternioniennes coïncident.

II

5. Structures presque hermitiennes quaternioniennes.

Une structure presque quaternionienne étant donnée sur V_{4n}, posons:

DEFINITION 2. *Une structure presque hermitienne quaternionienne est définie par une structure riemannienne dont le tenseur métrique g est pur de genre 0.*

Cette condition s'exprime par les relations

$$g(X, Y) = g(\mathcal{I}X, \mathcal{I}Y) = g(\mathcal{J}X, \mathcal{J}Y) \quad \forall X, Y,$$

où X, Y sont deux champs de vecteurs.

Etant donnée sur V_{4n} une structure riemannienne arbitraire de tenseur métrique h, on en déduit une structure presque hermitienne quaternionienne *subordonnée* à $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ en prenant sa composante pure de genre 0 qui est encore définie positive :

$$g = \mathcal{S}h = \tfrac{1}{4}(h + h \circ \mathcal{I} + h \circ \mathcal{J} + h \circ \mathcal{K}).$$

Une structure presque hermitienne quaternionienne détermine canoniquement *trois formes quadratiques extérieures F, G, H* partout de rang maximum $4n$. Elles sont définies par

$$(5.1)\quad F_{ij} = g_{kj}\mathcal{I}_i^k = -F_{ji}, \quad G_{ij} = g_{kj}\mathcal{J}_i^k = -G_{ji}, \quad H_{ij} = g_{kj}\mathcal{K}_i^k = -H_{ji},$$

d'où l'on tire inversement

$$(5.2)\qquad \mathcal{I}_i^j = F_{ik}\, g^{jk}, \qquad\qquad \mathcal{J}_i^j = G_{ik} g^{jk}.$$

En tenant compte de $\mathcal{S}g = g$ on déduit les relations

$$(5.3)\quad F_{ik}F_{jh}g^{kh} = G_{ik}G_{jh}g^{kh} = g_{ij}, \qquad (F_{ik}G_{jh} + F_{jk}G_{ih})g^{kh} = 0.$$

Nous traduirons (5.3) en disant que les deux formes F et G sont *orthoéchangeables* avec la métrique g.

Réciproquement, soient F et G deux formes quadratiques extérieures orthoéchangeables avec une métrique riemannienne g d'une variété V_m. A partir des formules *(5. 2)* et *(5. 3)* on montre que $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{J}$ définissent une structure presque quaternionienne de V_m.

Ainsi une structure presque hermitienne quaternionienne peut être définie sur V_{4n} par deux formes quadratiques extérieures F et G orthoéchangeables avec une métrique riemannienne.

6. Structure presque symplectique complexe.

Soit V_{2m} une variété à structure presque complexe $\mathfrak{K}$.

DEFINITION 3 (C. Ehresmann). *V_{2m} sera dite presque symplectique complexe s'il existe une forme quadratique extérieure μ de type (2. 0) partout de rang m.*

Il résulte d'une étude faite dans [19] p. 84 que m est lui-même pair. En posant

$$G = \mu + \overline{\mu}, \qquad F = i\mu - i\overline{\mu}\,,$$

nous définissons deux formes quadratiques extérieures de rang maximum $2m$. Celles-ci définissent canoniquement deux champs d'applications linéaires $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{F}$ inversibles de T_x sur son dual et le champ $\mathfrak{G}^{-1}\mathfrak{F}$ d'automorphismes de T_x n'est autre que la structure presque complexe de départ $\mathfrak{K}$.

PROPOSITION 8. *On peut toujours construire à partir d'une métrique arbitraire une autre métrique riemannienne orthoéchangeable avec F et G et par suite une structure presque hermitienne quaternionienne les admettant comme formes quadratiques fondamentales.*

A partir d'une métrique arbitraire, on peut tout d'abord construire la nouvelle métrique

$$\psi = h_{ij}\omega^i\omega^j$$

telle que $\mathfrak{K}$ soit échangeable avec ψ.

$$h_{kl}\mathfrak{K}_i^k\,\mathfrak{K}_j^l = h_{ij}\,, \tag{6. 1}$$

ce qui peut également s'écrire

$$h^{kl}\mathcal{K}^i_k\,\mathcal{K}^j_l = h^{ij}\,. \tag{6.2}$$

Dans ce qui suit, la seule métrique utilisée est la métrique ψ ; c'est celle qui intervient pour définir la dualité que nous faisons jouer.

$\mathcal{G}^{-1}\mathcal{F} = \mathcal{K}$ s'exprime par

$$F_{ij} = G_{il}\mathcal{K}^l_j \quad \text{ou} \quad G_{ij} = -F_{il}\mathcal{K}^l_j\,. \tag{6.3}$$

Posons

$$c_{ij} = h^{kl}(F_{ik}G_{jl} + F_{jk}G_{il}) = -h^{kl}(F_{ik}F_{jm}\mathcal{K}^m_l + F_{jk}F_{im}\mathcal{K}^m_l);$$

(6.2) s'écrit également

$$h^{kl}\mathcal{K}^m_l = -\,h^{ml}\mathcal{K}^k_l$$

et par suite

$$c_{ij} = -h^{kl}F_{ik}F_{jm}\mathcal{K}^m_l + h^{ml}F_{jk}F_{im}\mathcal{K}^k_l = 0\,,$$

$$(F_{ik}G_{jl} + F_{jk}G_{il})h^{kl} = 0. \tag{6.4}$$

Introduisons maintenant les deux opérateurs sur les vecteurs définis par

$$\mathcal{L}\,:\; v^k \to F^k_i v^i\,, \qquad\qquad \mathcal{M}\,:\; v^k \to G^k_i v^i\,;$$

(6.4) implique immédiatement

$$\mathcal{L}\mathcal{M} + \mathcal{M}\mathcal{L} = 0. \tag{6.5}$$

Ces opérateurs sont réguliers et nous avons

$$v.\mathcal{L}v = v.\mathcal{M}v = \mathcal{L}v.\mathcal{M}v = 0\,.$$

Par exemple, la dernière égalité s'établit comme suit :

$$\mathcal{L}v.\mathcal{M}v = h_{ij}F^i_kG^j_h v^k v^h = \tfrac{1}{2}\,h_{ij}(F^i_kG^j_h + F^i_hG^j_k)v^h v^k$$

$$= \tfrac{1}{2}\,h^{jl}(F_{kj}G_{hl} + F_{hj}G_{ki})v^h v^k = 0.$$

Construisons le tenseur symétrique

$$k_{ij} = F_{il}F_{jm}h^{lm} = G_{il}G_{jm}h^{lm} \tag{6.6}$$

La forme quadratique définie par les k_{ij} est définie positive : considérons les valeurs propres et vecteurs propres de (k_{ij}) relativement à (h_{ij}). Si u est un vecteur propre correspondant à la valeur propre ρ^2 $(\rho > 0)$, on a :

$$k_{ij}u^j = \rho^2\, h_{ij}u^j = \rho^2\, u_i, \tag{6.7}$$

soit

$$F^i_l\, F^l_j u^j = G^i_l\, G^l_j u^j = -\rho^2\, u^i. \tag{6.8}$$

Par multiplication contractée par F^h_i (resp. G^h_i), il vient

$$F^h_i\, F^i_l(\mathfrak{L}u)^l = -\rho^2(\mathfrak{L}u)^h, \qquad G^h_i\, G^i_l(\mathfrak{M}u)^l = -\rho^2(\mathfrak{M}u)^h,$$

soit

$$k_{hl}(\mathfrak{L}u)^l = \rho^2(\mathfrak{L}u)_h, \qquad k_{hl}(\mathfrak{M}u)^l = \rho^2(\mathfrak{M}u)_h.$$

Ainsi $\mathfrak{L}u$ et $\mathfrak{M}u$ sont vecteurs propres associés à la même valeur propre ρ^2. De plus (6.5) et (6.8) expriment que si S_x est le sous-espace de T_x des vecteurs propres associés à la valeur propre ρ^2, alors $\frac{1}{\rho}\mathfrak{L}$ et $\frac{1}{\rho}\mathfrak{M}$ le laissent invariant et définissent sur lui une *structure quaternionienne.*

Ceci posé, soient ρ^2_a $(a = 1, 2, \ldots, q)$ les différentes valeurs propres étudiées, S^a_x l'espace des vecteurs propres associés à ρ^2_a.

L'espace T_x admet la décomposition en somme directe

$$T_x = \bigoplus_{a=1}^{q} S^a_x,$$

où les S^a_x sont deux à deux orthogonaux et invariants par les opérateurs $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$. Pour une base de T_x, soit (e_i), déduite de bases (e_{i_a}) des S^a_x on a donc

$$F^{k_b}_{i_a} = G^{k_b}_{i_a} = 0, \qquad h_{i_a i_b} = 0 \quad (a \neq b),$$

et d'après (6.7) appliquée à un vecteur de S^a_x :

$$k_{i_a j_b} = 0 \quad (a \neq b), \quad k_{i_a j_a} = \rho^2_a h_{i_a j_a}. \tag{6.9}$$

Il en résulte d'après (6.4), (6.6), (6.9) que la métrique g_{ij} définie par

$$g_{i_a j_b} = 0 \quad (a \neq b), \quad g_{i_a j_a} = \rho_a h_{i_a j_a}$$

est orthoéchangeable avec les deux formes envisagées.

Si F^{ij} et G^{ij} sont les tenseurs représentant $\mathcal{F}^{-1}$ et $\mathcal{G}^{-1}$, nous allons montrer qu'on peut les obtenir à partir de F_{ij} et G_{ij} à l'aide de la nouvelle métrique g_{ij}. En effet en posant

$$\hat{F}_{ij} = F_{hl} g^{hi} g^{lj} ,$$

$$F_{ik} \hat{F}^{ij} = F_{ik} F_{hl} g^{hi} g^{lj} = g_{lk} g^{lj} = \delta^j_k ;$$

par suite $F^{ij} = \hat{F}^{ij}$ et ceci quelle que soit la métrique g_{ij} échangeable avec F.

Les opérateurs $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ définis comme l'ont été $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ mais à partir de g_{ij} définissent une structure quaternionienne de T_x.

L'opérateur $\mathcal{K} = \mathcal{G}^{-1}\mathcal{F}$ n'est autre que $\mathcal{I}\mathcal{J}$; car

$$\mathcal{K}^i_k = G^{ij} F_{ik} = G_{hl} g^{hi} g^{lj} F_{ik} = -\mathcal{J}^j_k \mathcal{I}^h_k = \mathcal{I}^j_l \mathcal{J}^l_k .$$

PROPOSITION 9. *Il y a identité entre la classe des variétés admettant une structure presque quaternionienne et celles qui admettent une structure presque symplectique complexe.*

7. Espaces fibrés attachés à une structure presque hermitienne quaternionienne.

1°) Supposons que V_{4n} soit munie d'une structure presque hermitienne quaternionienne. On peut construire sur chaque ouvert un champ de corepères adaptés à la structure presque quaternionienne. L'équation $\mathcal{S} g = g$ exprime que toutes les composantes dans de tels corepères du tenseur γ_{ij} représentant g sont nulles sauf celles de type

$$\gamma_{\alpha\beta} , \quad \gamma_{\alpha' \beta'} , \quad \gamma_{\alpha'' \beta''} , \quad \gamma_{\alpha''' \beta'''} .$$

Du caractère *réel* du tenseur $g = (\gamma_{ij})$ on déduit

$$\gamma_{\tilde{\tilde{\alpha}} \tilde{\tilde{\beta}}} = \tilde{\tilde{\sigma}} \gamma_{\alpha\beta} .$$

Posons

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + i g_{\alpha' \beta} + j g_{\alpha'' \beta} + k g_{\alpha''' \beta} ,$$

où les g_{ab} du second membre sont les composantes réelles de g dans le corepère réel associé au corepère adapté envisagé.

Du caractère *symétrique* de g, il résulte immédiatement

$$\overline{\gamma}_{\alpha\beta} = \gamma_{\beta\alpha}.$$

Ce qui se traduit par

$$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}, \qquad g_{\tilde{\alpha}\beta} = -g_{\tilde{\beta}\alpha} \qquad \forall\, \tilde{\sigma} = \sigma', \sigma'', \sigma'''.$$

La forme quadratique définie par le tenseur métrique

$$\Phi = g_{ab}\,\omega^a\,\omega^b$$

peut s'écrire

$$\Phi = 4\,\overline{\theta}^\alpha g_{\alpha\beta}\,\theta^\beta, \text{où } \theta^\alpha = \tfrac{1}{2}(\omega^\alpha + i\,\omega^{\alpha'} + j\,\omega^{\alpha''} + k\,\omega^{\alpha'''}).$$

Adjoignons à celle-ci la forme quadratique extérieure

$$\psi = \overline{\theta}^\alpha \wedge g_{\alpha\beta}\,\theta^\beta.$$

Elle est reliée aux 3 formes fondamentales par

$$2\psi = -(iF + jG + kH).$$

2°) Soit e_1 un champ local de vecteurs unitaires; soient

$$e_{1'} = -\mathcal{I}e_1, \qquad e_{1''} = -\mathcal{J}e_1, \qquad e_{1'''} = -\mathcal{K}e_1$$

ses transformés respectifs. Ces quatre champs locaux sont orthonormés. Si de plus e_2 est un champ local de vecteurs unitaires orthogonal en chaque point au 4-plan engendré par les précédents, les huit vecteurs en x

$$e_1,\ e_{1'},\ e_{1''},\ e_{1'''},\ e_2,\ e_{2'},\ e_{2''},\ e_{2'''}$$

sont orthonormés. En continuant, on construit de proche en proche un champ local de repères réels adaptés à la structure presque hermitienne quaternionienne.

Soit (ω^a) le champ local de corepères, dual du précédent. Dans ces conditions

$$\Phi = \sum_\alpha [(\omega^\alpha)^2 + (\omega^{\alpha'})^2 + (\omega^{\alpha''})^2 + (\omega^{\alpha'''})^2],$$

$$F = \sum_\alpha [\,\omega^{\alpha'} \wedge \omega^\alpha + \omega^{\alpha''} \wedge \omega^{\alpha'''}\,]; \quad G = \sum_\alpha [\,\omega^{\alpha''} \wedge \omega^\alpha + \omega^{\alpha'''} \wedge \omega^{\alpha'}\,],$$

$$H = \sum_\alpha [\,\omega^{\alpha'''} \wedge \omega^\alpha + \omega^{\alpha'} \wedge \omega^{\alpha''}\,].$$

Considérons les vecteurs hypercomplexes

$$\varepsilon_\alpha = \tfrac{1}{2}\,(e_\alpha - e_{\alpha'}\, i - e_{\alpha''}\, j - e_{\alpha'''}\, k)$$

qui définissent un champ local de repères adaptés à la structure presque quaternionienne de V_{4n}.

Le produit scalaire étant défini sur T_x^H par le tenseur γ_{ij}, il vient :

$$\bar{\varepsilon}_\alpha \cdot \varepsilon_\beta = \tfrac{1}{4}\,(e_\alpha + i\, e_{\alpha'} + j\, e_{\alpha''} + k\, e_{\alpha'''})(e_\beta - e_{\beta'}\, i - e_{\beta''}\, j - e_{\beta'''}\, k) =$$
$$= \delta_{\alpha\beta}\,.$$

Il en résulte :

$$\Phi = \sum_\alpha 4\,\bar{\theta}^\alpha\, \theta^\alpha, \qquad \psi = \sum_\alpha \bar{\theta}^\alpha \wedge \theta^\alpha.$$

Deux bases (ε_α) et (ε_{β^*}) adaptées à la structure presque hermitienne quaternionienne de T_x se déduisent l'une de l'autre par

$$\varepsilon_{\beta^*} = \varepsilon_\alpha\, A^\alpha_{\beta^*}\,,$$

où $A = (A^\alpha_{\beta^*})$ appartient au groupe unitaire quaternionien $Sp(n)$, défini par les matrices de $GL(n, H)$ satisfaisant à

$$\bar{A}^\alpha_{\beta^*} = A^{\beta^*}_\alpha\,,$$

où $(A^{\beta^*}_\alpha) = A^{-1}$.

La représentation réelle de $Sp(n)$ peut être caractérisée comme le sous-groupe de $SO(4n)$ commutant avec les matrices I et J définies antérieurement.

Son algèbre de Lie est réalisée comme l'ensemble des matrices $4n \times 4n$ antisymétrique pures du genre zéro.

Nous considérerons de manière analogue au paragraphe 3 les espaces fibrés principaux

$$\mathcal{E}^a(V_{4n}), \qquad \mathcal{E}^g(V_{4n}), \qquad \mathcal{E}^h(V_{4n})$$

des repères réels, hypercomplexes, et sous-repères hypercomplexes, tous adaptés à la structure presque hermitienne quaternionienne en tous points de V_{4n}. La base est V_{4n} et les groupes structuraux sont isomorphes à $Sp(n)$.

III

8. Connexions linéaires à valeurs quaternioniennes.

Etant donnée une variété différentiable V_m, de classe C^∞, soit $E(V_m)$ {resp. $E^H(V_m)$} l'espace fibré des repères tangents (resp. de leurs hypercomplexifiés) :

DEFINITION 4. *Nous appellerons connexion linéaire hypercomplexe une connexion infinitésimale sur* $E^H(V_m)$.

Elle peut être définie par la donnée sur chaque ouvert U d'un recouvrement de V_m, d'un champ local de corepères hypercomplexes $\theta^U = (\theta^i)$ et d'une *1*- forme locale ω_U à valeurs matricielles dans l'algèbre de Lie, sur R, de $GL(m, H)$, ces matrices quaternioniennes $m \times m$ satisfaisant dans $U \cap V$ à la condition de cohérence

$$\omega_V = (A^U_V)^{-1}\omega_U A^U_V + (A^U_V)^{-1} dA^U_V \quad \text{avec} \quad \theta^U = A^U_V \theta^V .$$

Si nous posons $\omega_U = (\omega^i_j)$, les ω^i_j $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$ sont des *1*-formes hypercomplexes.

Si les voisinages ont été munis de sections locales de $E(V_m)$, nous avons les mêmes formules, mais avec A appartenant à $GL(m, R)$ cette fois.

A toute connexion linéaire hypercomplexe de forme ω correspondent trois connexions dites ses *biconjuguées* dont les formes seront respectivement notées ω', ω'', ω''' ; toute connexion linéaire sur $E(V_m)$ définit une connexion linéaire sur $E^H(V_m)$ avec laquelle elle peut être identifiée et qui coïncide avec ses biconjuguées : elle sera dite *connexion linéaire réelle*.

La différentielle absolue dans une connexion linéaire hypercomplexe d'un tenseur est donnée par la formule habituelle

$$\nabla t = dt + \tilde{\mathfrak{R}}(\omega)t,$$

où $\tilde{\mathfrak{R}}$ est la représentation induite sur l'algèbre de Lie par la représentation $\mathfrak{R}$ du tenseur t envisagé.

En coordonnées locales, avec des notations évidentes, nous avons le groupe des formules : $\forall\, x \in U \subset V_m$

$$\nabla v^i = dv^i + \omega^i_k v^k, \quad \nabla f_j = df_j - f_h \omega^h_j, \quad (v^i) \in T^H_x, \quad (f_j) \in (T^H_x)^*,$$
$$\nabla t^i_j = dt^i_j + \omega^i_k t^k_j - t^i_h \omega^h_j, \qquad (t^i_j) \in T^H_x \otimes_H (T^H_x)^*,$$
$$\nabla t_{ij} = dt_{ij} - \overline{\omega}^h_i t_{hj} - t_{ik}\omega^k_j, \qquad (t_{ij}) \in (\overline{T}^H_x)^* \otimes_H (T^H_x)^*,$$
$$\nabla t^{ij} = dt^{ij} + \omega^i_h t^{hj} + t^{ik}\overline{\omega}^i_k, \qquad (t^{ij}) \in (T^H_x) \otimes_H (\overline{T}^H_x).$$

Torsion et courbure sont définies par

$$\Sigma^i = d\theta^i + \omega^i_h \wedge \theta^h, \qquad \Omega^i_j = d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j$$

et satisfont aux identités de Bianchi généralisées

$$d\Sigma^i = \Omega^i_k \wedge \theta^k - \omega^i_h \wedge \Sigma^h, \qquad d\Omega^i_j = \Omega^i_k \wedge \omega^k_j - \omega^i_h \wedge \Omega^h_j.$$

9. Connexions presque quaternioniennes.

Etant donnée une variété presque quaternionienne V_{4n}, posons :

DEFINITION 5. *Nous appellerons connexion presque quaternionienne toute connexion infinitésimale sur $E^h(V_{4n})$.*

Elle peut être définie par la donnée, sur tout ouvert U_h d'un recouvrement de V_{4n}, d'un champ local de sous-corepères adaptés $\theta^U = (\Theta^\alpha)$ et d'une 1-forme locale π_U à valeurs matricielles dans l'algèbre de Lie du groupe structural $GL(n, H)$.

Ces matrices $n \times n$ satisfaisant dans $U \cap V$ à la condition de cohérence

$$\pi_V = (\overset{h}{A}{}^U_V)^{-1} \pi_U \overset{h}{A}{}^U_V + (\overset{h}{A}{}^U_V)^{-1} d\overset{h}{A}{}^U_V \quad \text{avec} \quad \overset{h}{\theta}{}^U = \overset{h}{A}{}^U_V \overset{h}{\theta}{}^V,$$

où, si nous posons $\omega_U = (\omega^\alpha_\beta)$, les ω^α_β sont des 1-formes hypercomplexes.

Cette connexion π peut être identifiée à celles qui sont définies sur $E^g(V_{4n})$ (connexion linéaire hypercomplexe) et $E^a(V_{4n})$ (connexion linéaire réelle) par les matrices :

$$\begin{bmatrix} \pi^{\alpha}_{\beta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi'^{\alpha}_{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi''^{\alpha}_{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi'''^{\alpha}_{\beta} \end{bmatrix} (g), \quad \begin{bmatrix} \omega^{\alpha}_{\beta} & \omega^{\alpha'}_{\beta} & \omega^{\alpha''}_{\beta} & \omega^{\alpha'''}_{\beta} \\ -\omega^{\alpha'}_{\beta} & \omega^{\alpha}_{\beta} & \omega^{\alpha'''}_{\beta} & -\omega^{\alpha''}_{\beta} \\ -\omega^{\alpha''}_{\beta} & -\omega^{\alpha'''}_{\beta} & \omega^{\alpha}_{\beta} & \omega^{\alpha'}_{\beta} \\ -\omega^{\alpha'''}_{\beta} & \omega^{\alpha''}_{\beta} & -\omega^{\alpha'}_{\beta} & \omega^{\alpha}_{\beta} \end{bmatrix} (a),$$

où nous avons posé $\pi^{\alpha}_{\beta} = \omega^{\alpha}_{\beta} + i\,\omega^{\alpha'}_{\beta} + j\,\omega^{\alpha''}_{\beta} + k\,\omega^{\alpha'''}_{\beta}$, avec les ω^{i}_{j} réelles.

Une connexion presque quaternionienne est donc un *cas particulier* de connexion linéaire réelle.

10. Relation avec une connexion linéaire réelle.

a) Inversement, donnons-nous sur la variété presque quaternionienne V_{4n} une connexion linéaire réelle arbitraire, de forme π. Pour un recouvrement de V_{4n} par des voisinages munis de repères adaptés, la matrice de connexion dans un voisinage U (resp. V) est donnée par (π^{i}_{j}) (resp. $(\pi^{i^*}_{j^*})$).

La réalité de la connexion se traduit par les relations

$$\pi^{\tilde{i}}_{\tilde{j}} = \tilde{\sigma}\,\pi^{i}_{j} \quad \text{pour} \quad \tilde{\sigma} = \sigma', \ \sigma'', \ \sigma'''.$$

Introduisons pour $x \in U \cap V$ la matrice de passage $A = (A^{\alpha^*}_{\beta})$ d'un repère adapté à un autre. Il vient

$$\pi^{\lambda^*}_{\mu^*} = A^{\lambda^*}_{\alpha}\,\pi^{\alpha}_{\beta}\,A^{\beta}_{\mu^*} + A^{\lambda^*}_{\gamma}\,dA^{\gamma}_{\mu^*} \quad (F.H.B),$$
$$\pi^{\lambda^*}_{\tilde{\mu}^*} = A^{\lambda^*}_{\alpha}\,\pi^{\lambda^*}_{\tilde{\beta}}\,\tilde{A}^{\beta}_{\mu^*} \quad (F.H.B).$$

Ces relations prouvent que :

- Les éléments π^{α}_{β} définissent sur V_{4n} une connexion presque quaternionienne, désignée ultérieurement par $S\pi$, et qui sera dite induite par la connexion linéaire réelle envisagée ;

- Les éléments $\pi^{\alpha}_{\beta'}$ (resp. $\pi^{\alpha}_{\beta''}$; $\pi^{\alpha}_{\beta'''}$) définissent une *1*-forme tensorielle pure hypercomplexe et, par biconjugaisons et somme, une *1*-forme tensorielle pure réelle de type représentation adjointe et de genre *1* (resp. *2*, *3*) notée ultérieurement $\mathfrak{S}'\pi$ (resp. $\mathfrak{S}''\pi$, $\mathfrak{S}'''\pi$).

La formule

$$4\tilde{\mathcal{S}}t = t + (-1)^u \mathcal{I}^{-1} t\mathcal{I} + (-1)^v \mathcal{J}^{-1} t\mathcal{J} + (-1)^{u+v}\mathcal{K}^{-1} t\mathcal{K}$$

qui permet de décomposer un tenseur réel de type représentation adjointe en tenseurs purs s'étend, dans des repères adaptés, *sans modification* à la connexion envisagée. Il convient de rendre cette formule valable en repères quelconques. A cet effet, nous profitons de la constance des composantes de $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{K}$ pour écrire successivement :

$$(10.1) \qquad 4\mathcal{S}\pi = \pi - \mathcal{I}\pi\mathcal{I} - \mathcal{J}\pi\mathcal{J} - \mathcal{K}\pi\mathcal{K},$$

$$(10.2) \qquad 4\mathcal{S}'\pi = \pi - \mathcal{I}\pi\mathcal{I} + \mathcal{J}\pi\mathcal{J} + \mathcal{K}\pi\mathcal{K} \quad (\text{P. C}),$$

et puisque $d\mathcal{I} = 0$,

$$\nabla\mathcal{I} = \pi\mathcal{I} - \mathcal{I}\pi, \quad \text{soit} \quad \mathcal{I}\nabla\mathcal{I} = \mathcal{I}\pi\mathcal{I} + \pi \quad (\text{P. C}).$$

Ainsi en injectant ces relations dans *(10.1)* et *(10.2)*, il vient

$$(\mathcal{S}\pi)^i_j = \pi^i_j - \tfrac{1}{4}(\mathcal{I}^i_a \nabla\mathcal{I}^a_j + \mathcal{J}^i_a \nabla\mathcal{J}^a_j + \mathcal{K}^i_a \nabla\mathcal{K}^a_j),$$

$$(\mathcal{S}'\pi)^i_j = \tfrac{1}{4}(\mathcal{J}^i_a \nabla\mathcal{J}^a_j + \mathcal{K}^i_a \nabla\mathcal{K}^a_j - \mathcal{I}^i_a \nabla\mathcal{I}^a_j) \quad (\text{P.C}).$$

Ces formules étant désormais vraies dans tout repère.

b) Evaluons maintenant dans une connexion linéaire réelle arbitraire de forme π les différentielles absolues des tenseurs $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$. Rapportons tenseur et connexion à des repères adaptés. Il vient :

$$\nabla\mathcal{I}^{\alpha}_{\beta} = i\pi^{\alpha'}_{\beta} - \pi^{\alpha}_{\beta'} i = 0, \qquad \nabla\mathcal{I}^{\alpha'}_{\beta'} = i\pi^{\alpha'}_{\beta'} - \pi^{\alpha}_{\beta}\, i = 0 \ (\text{F. H. B}),$$

$$\nabla\mathcal{I}^{\alpha}_{\beta''} = i\pi^{\alpha'}_{\beta''} + \pi^{\alpha}_{\beta'''} i = 2i\pi^{\alpha'}_{\beta''}, \qquad \nabla\mathcal{I}^{\alpha}_{\beta'''} = 2i\pi^{\alpha'}_{\beta'''} \ (\text{F.H.B}),$$

$$\nabla\mathcal{J}^{\alpha}_{\beta} = \nabla\mathcal{J}^{\alpha}_{\beta''} = 0, \qquad \nabla\mathcal{J}^{\alpha}_{\beta'''} = 2j\pi^{\alpha''}_{\beta'''}, \quad \nabla\mathcal{J}^{\alpha}_{\beta'} = 2j\pi^{\alpha}_{\beta'} \ (\text{F.H.B}).$$

Nous en déduisons immédiatement la

PROPOSITION 10. *Toute connexion linéaire réelle sur une variété presque quaternionienne V_{4n} induit sur cette variété une connexion presque quaternionienne. Pour que la connexion linéaire soit naturellement associée à la connexion presque quaternionienne qu'elle induit, il faut et il suffit que les différentielles absolues des tenseurs $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ de la connexion linéaire soient nulles.*

COROLLAIRE. *Les projecteurs introduits $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}''$ et $\mathfrak{S}'''$ commutent avec la différentiation absolue dans une connexion presque quaternionienne.*

11. Connexions presque hermitiennes quaternioniennes.

DEFINITION 6. *Sur la variété presque hermitienne quaternionienne V_{4n} nous appelons connexion presque hermitienne quaternionienne une connexion infinitésimale sur l'espace fibré principal $\mathfrak{E}^h(V_{4n})$.*

Une telle connexion définit une connexion infinitésimale sur $\mathfrak{E}^g(V_{4n})$ et une connexion infinitésimale sur $\mathfrak{E}^a(V_{4n})$ avec lesquelles elle peut être identifiée. Il en résulte qu'à toute connexion presque hermitienne quaternionienne π sont associées naturellement une connexion presque *quaternionienne* et une connexion *euclidienne* et par suite une connexion linéaire réelle telle que les différentielles absolues des tenseurs presque quaternioniens et du tenseur métrique soient nulles.

Si la connexion linéaire est rapportée à des repères de $\mathfrak{E}^g(V_{4n})$, elle est représentée dans un voisinage par la matrice de connexion

$$\begin{bmatrix} \pi^\alpha_\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi^{\alpha'}_{\beta'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi^{\alpha''}_{\beta''} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi^{\alpha'''}_{\beta'''} \end{bmatrix}$$

puisque les différentielles absolues des tenseurs presque quaternioniens sont nulles.

Evaluons la différentielle absolue du tenseur métrique:

$$\nabla g_{\alpha\beta} = -\bar{\pi}^\rho_\alpha g_{\rho\beta} - g_{\alpha\rho}\pi^\rho_\beta = -(\bar{\pi}^\beta_\alpha + \pi^\alpha_\beta) \qquad \text{(F.H.B)},$$

$$\nabla g_{\alpha\beta'} = -\bar{\pi}^{\beta'}_\alpha - \pi^\alpha_{\beta'} = 0, \qquad \nabla g_{\alpha\beta''} = \nabla g_{\alpha\beta'''} = 0 \quad \text{(F.H.B)}.$$

Une connexion presque hermitienne quaternionienne est ainsi définie, pour un recouvrement par des voisinages munis de sections locales de $\mathfrak{E}^h(V_{4n})$, par des matrices de connexion (π^α_β) telles que

$$\pi^\alpha_\beta + \bar{\pi}^\beta_\alpha = 0 \tag{11.1}$$

et satisfaisant en outre dans l'intersection de deux voisinages, à la condition de cohérence relativement au groupe $Sp(n)$.

Torsion et courbure sont définies par les formules (également valables pour une connexion presque quaternionienne)

$$\Sigma^\alpha = d\theta^\alpha + \pi^\alpha_\rho \wedge \theta^\rho \,, \qquad \Omega^\alpha_\beta = d\pi^\alpha_\beta + \pi^\alpha_\rho \wedge \pi^\rho_\beta$$

et satisfont aux identités de Bianchi

$$d\Sigma^\alpha = \Omega^\alpha_\rho \wedge \theta^\rho - \omega^\alpha_\rho \wedge \Sigma^\rho \,, \qquad d\Omega^\alpha_\beta = \Omega^\alpha_\beta \quad \omega^\rho_\beta - \omega^\alpha_\rho \wedge \Omega^\rho_\beta \,.$$

La formule *(11. 1)* implique

$$\Omega^\alpha_\beta + \overline{\Omega}^\beta_\alpha = 0 \,.$$

12. Les deux connexions canoniques d'une variété presque hermitienne quaternionienne.

1°) Sur la variété presque hermitienne quaternionienne V_{4n} toute connexion euclidienne est définie par rapport à des repères de $\mathcal{E}^g(V_{4n})$ par une matrice de la forme $\pi = (\pi^i_j)$ avec

$$\pi^{\tilde{i}}_{\tilde{j}} = \tilde{\sigma}\, \pi^i_j \quad \text{et} \quad \pi^i_j + \overline{\pi}^j_i = 0 \,.$$

Cette connexion euclidienne induit, au sens du paragraphe 10, une connexion presque quaternionienne $\mathcal{S}\pi$ satisfaisant également à *(11. 1)* donc une connexion presque hermitienne quaternionienne. Soit γ la connexion *riemannienne* définie par la métrique. Nous sommes conduits à la

DEFINITION 7. *Nous appellerons première connexion presque hermitienne quaternionienne canonique, ou de Lichnerowicz, la connexion* α *induite par la connexion riemannienne* γ :

$$(12.\ 1) \qquad \alpha^i_j = (\mathcal{S}\gamma)^i_j = \gamma^i_j - \tfrac{1}{4}(\mathcal{I}^i_r \nabla \mathcal{I}^r_j + \mathcal{J}^i_r \nabla \mathcal{J}^r_j + \mathcal{K}^i_r \nabla \mathcal{K}^r_j).$$

2°) Considérons sur la variété *riemannienne* V_m une connexion *linéaire* arbitraire. Pour un recouvrement de V_m muni de repères orthonormés, si, pour $x \in U \cap V$, C^U_V désigne la matrice de passage d'un repère orthonormé à un autre, les matrices de connexion π_U satisfont à la condition de cohérence

$$(12.\ 2) \qquad \pi_V = \overset{-1}{C}{}^U_V\, \pi_U\, C^U_V + \overset{-1}{C}{}^U_V\, dC^U_V \,.$$

La matrice C_V^U appartenant au groupe $O(n)$, cette relation peut encore s'écrire, puisque ${}^tC_V^U = \overset{-1}{C}{}_V^U$:

$$(12.3) \qquad {}^t\pi_V = \overset{-1}{C}{}_V^U \, {}^t\pi_U \, C_V^U - \overset{-1}{C}{}_V^U \, dC_V^U ,$$

en désignant par ${}^tA$ la transposée de la matrice A.

Nous définissons ainsi une nouvelle connexion linéaire dont les matrices de connexion sont $(-{}^t\pi_U)$.

Considérons maintenant la connexion définie par la matrice

$$(12.4) \qquad \Phi\pi_U = \tfrac{1}{2}(\pi_U - {}^t\pi_U).$$

C'est une connexion linéaire associée à une connexion *euclidienne* puisque ses matrices de connexion sont antisymétriques. Nous énoncerons :

PROPOSITION 11. *Toute connexion linéaire induit une connexion euclidienne. Pour que la connexion linéaire soit naturellement associée à la connexion euclidienne qu'elle induit, il faut et il suffit que la différentielle absolue du tenseur métrique dans la connexion envisagée soit nulle.*

Puisque $\nabla g_{\alpha\beta} = -\pi_\beta^\alpha - \pi_\alpha^\beta$ dans les repères envisagés, la formule *(12.4)* n'est évidemment valable que pour un recouvrement de V_m muni de repères orthonormés. On profite de la constance des composantes du tenseur métrique g,

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m),$$

pour transformer *(12.4)*. En effet de

$$g^{\alpha\beta}\nabla g_{\rho\alpha} = -g^{\beta\rho}(g_{\sigma\alpha}\pi_\rho^\sigma + g_{\rho\sigma}\pi_\alpha^\sigma) = -\pi_\beta^\alpha - \pi_\alpha^\beta$$

on déduit en portant dans *(12.4)*

$$(12.5) \qquad (\Phi\pi)_\beta^\alpha = \tfrac{1}{2}(\pi_\beta^\alpha - \pi_\alpha^\beta) = \pi_\alpha^\beta + \tfrac{1}{2} g^{\beta\rho}\nabla g_{\rho\alpha}$$

qui est désormais valable dans n'importe quel repère.

3°) Soit maintenant V_{4n} une variété presque hermitienne quaternionienne. Soit π une connexion linéaire quelconque dont nous rapportons les coefficients à des repères de $\mathcal{E}^h(V_{4n})$.

π induit une connexion presque quaternionienne $\mathcal{S}\pi$ (resp. euclidienne $\Phi\pi$) dont les coefficients sont :

$$(\delta\pi)^{\alpha}_{\beta} = \pi^{\alpha}_{\beta}, \qquad (\delta\pi)^{\alpha}_{\tilde{\beta}} = 0, \qquad \tilde{\sigma} = \sigma', \sigma'', \sigma''' \qquad (\text{F.H.B}),$$

$$(\Phi\pi)^{i}_{j} = \tfrac{1}{2}(\pi^{i}_{j} - \overline{\pi}^{j}_{i}) \quad (i, j = 1, 2, \ldots, 4n), \ (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n).$$

Par suite, en calculant $\Phi\delta\pi$ (resp. $\delta\Phi\pi$) il vient :

$$(\Phi\delta\pi)^{\alpha}_{\beta} = \tfrac{1}{2}(\pi^{\alpha}_{\beta} - \overline{\pi}^{\beta}_{\alpha}) = (\delta\Phi\pi)^{\alpha}_{\beta}\ ; \ (\Phi\delta\pi)^{\alpha}_{\tilde{\beta}} = 0 = (\delta\Phi\pi)^{\alpha}_{\tilde{\beta}} \quad (\text{F. H. B}).$$

Ainsi ces deux connexions coïncident.

PROPOSITION 12. *Sur une variété presque hermitienne quaternionienne les projecteurs δ et Φ, qui commutent lorsqu'ils opèrent sur les tenseurs, commutent aussi lorsqu'ils opèrent sur les connexions.*

L'opérateur Φ sur les tenseurs est bien entendu l'opérateur d'antisymétrisation relativement à la métrique g :

$$\Phi t = \tfrac{1}{2}(t^{\alpha}_{\beta} - g^{\alpha\rho} g_{\beta\sigma} t^{\sigma}_{\rho}).$$

COROLLAIRE. *Toute connexion linéaire sur une variété presque hermitienne quaternionienne induit canoniquement une connexion presque hermitienne quaternionienne.*

Soit ω la connexion *presque quaternionienne canonique* d'Obata qui sera définie au paragraphe suivant.

DEFINITION 8. *Nous appellerons seconde connexion presque hermitienne quaternionienne canonique la connexion β induite par la connexion presque quaternionienne ω.*

$$\beta^{j}_{i} = \Phi\omega^{j}_{i} = \omega^{j}_{i} + \tfrac{1}{2} g^{ja} \nabla g_{ai}. \tag{12. 6}$$

IV

13. Tenseur de structure d'une variété presque quaternionienne.

1°) L'espace $T = \mathbf{R}^{4n}$ étant muni de la structure quaternionienne pour laquelle la base canonique est adaptée, soient $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{J}$ et $\mathfrak{K}$ les opérateurs presque quaternioniens : ceux-ci définissent quatre projecteurs

$\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}''$, $\mathfrak{S}'''$ deux à deux orthogonaux de somme l'identité.

$\underline{G} = \mathfrak{S}(T \otimes T^*)$ est l'algèbre de Lie du groupe $G = GL(n, H)$.

$\mathfrak{S}'(T \otimes T^*)$ est invariant par G ; car de

$$\gamma' \in \mathfrak{S}'(T \otimes T^*) \Longleftrightarrow \mathfrak{I}^{-1}\gamma'\mathfrak{I} = -\mathfrak{J}^{-1}\gamma'\mathfrak{J} = \gamma'$$

et

$$g \in G \Longrightarrow \mathfrak{I}^{-1} g \mathfrak{I} = \mathfrak{J}^{-1} g \mathfrak{J} = g,$$

on déduit immédiatement

$$\mathfrak{I}^{-1} g^{-1}\gamma' g \mathfrak{I} = -\mathfrak{J}^{-1} g^{-1}\gamma' g \mathfrak{J} = g^{-1}\gamma' g \Longleftrightarrow g^{-1}\gamma' g \in \mathfrak{S}'(T \otimes T^*).$$

L'espace

$$\Gamma = \mathfrak{S}'(T \otimes T^*) \oplus \mathfrak{S}''(T \otimes T^*) \oplus \mathfrak{S}'''(T \otimes T^*)$$

est donc supplémentaire de $\underline{G} = \mathfrak{S}(T \otimes T^*)$, invariant par G.

A $\mathfrak{I}$ nous associons l'opérateur linéaire $\tilde{\mathfrak{I}}$ de $\tilde{T} = T \otimes T^* \otimes T^*$, qui pour un élément décomposable

$$a \otimes \varphi \otimes \theta \quad (\text{où } a \in T,\ \varphi, \theta \in T^*)$$

s'écrit, en posant

$$a' = \mathfrak{I}^{-1} a, \qquad \varphi' = \varphi \circ \mathfrak{I}, \qquad \theta' = \theta \circ \mathfrak{I},$$

$$(13.1)\ \tilde{\mathfrak{I}}(a \otimes \theta \otimes \varphi) = \tfrac{1}{4}(a \otimes \theta \otimes \varphi + a' \otimes \theta' \otimes \varphi + a' \otimes \theta \otimes \varphi' - a \otimes \theta' \otimes \varphi'),$$

$\tilde{\mathfrak{I}}$ est un projecteur qui admet la restriction $\hat{\mathfrak{I}}$ à l'espace $\hat{T} = T \otimes \overset{2}{\wedge} T^*$, puisque $\tilde{\mathfrak{I}}$ commute avec la projection naturelle $\mathfrak{A} : \tilde{T} \to \hat{T}$.

Procédons de même pour $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{K}$: nous vérifions que l'opérateur

$$\tilde{\mathfrak{I}} + \tilde{\mathfrak{J}} + \tilde{\mathfrak{K}}$$

est de carré $\frac{3}{2}(\tilde{\mathfrak{I}} + \tilde{\mathfrak{J}} + \tilde{\mathfrak{K}})$. Ainsi

$$\tilde{\pi} = \frac{2}{3}(\tilde{\mathfrak{I}} + \tilde{\mathfrak{J}} + \tilde{\mathfrak{K}})$$

est un projecteur. Soit $\hat{\pi}$ sa restriction à $\hat{T} = T \otimes \overset{2}{\wedge} T^*$. Posons de plus

$$V_G = \mathfrak{A}(\underline{G} \otimes T^*), \qquad Z = \mathfrak{A}(\Gamma \otimes T^*).$$

$\hat{T}$ est évidemment somme de ces deux espaces.

Or V_G (resp. Z) est engendré par des éléments du type $g \wedge \varphi$

(resp. $\mathcal{I}^{-1}g \wedge \varphi \circ \mathcal{I}$, $\mathcal{J}^{-1}g \wedge \varphi \circ \mathcal{J}$, $\mathcal{K}^{-1}g \wedge \varphi \circ \mathcal{K}$), où g (resp. φ) parcourt $\underline{G}$ (resp. T^*). Appliquons $\hat{\pi}$ à de tels éléments; nous trouvons

$$(13.2) \qquad \hat{\pi}(g \wedge \varphi) = 0,$$

$$(13.3) \qquad \hat{\pi}(\mathcal{I}^{-1}g \wedge \varphi \circ \mathcal{I}) =$$
$$= \frac{1}{3}(2\mathcal{I}^{-1}g \wedge \varphi \circ \mathcal{I} - \mathcal{J}^{-1}g \wedge \varphi \circ \mathcal{J} - \mathcal{K}^{-1}g \wedge \varphi \circ \mathcal{K}) \ (\mathrm{P.C});$$

de cette dernière relation nous déduisons que le noyau de $\hat{\pi}$ dans Z est engendré par les éléments du type

$$(13.4) \qquad \zeta = \mathcal{I}^{-1}g \wedge \varphi \circ \mathcal{I} + \mathcal{J}^{-1}g \wedge \varphi \circ \mathcal{J} + \mathcal{K}^{-1}g \wedge \varphi \circ \mathcal{K}.$$

Nous remarquons maintenant que ζ peut encore s'écrire

$$\zeta = (g \wedge \varphi + \mathcal{I}^{-1}g \wedge \varphi \circ \mathcal{I} + \mathcal{J}^{-1}g \wedge \varphi \circ \mathcal{J} + \mathcal{K}^{-1}g \wedge \varphi \circ \mathcal{K}) - g \wedge \varphi,$$

où il apparaît que $\zeta \in V_G$. Ainsi le noyau de $\hat{\pi}$ dans $\hat{T}$ se réduit à l'espace V_G. Posons $W = \hat{\pi} Z$.

L'espace Z est invariant par $\mathfrak{R}(G)$, où

$$\mathfrak{R}(l) = l \otimes \overset{2}{\wedge} l^{-1};$$

et puisque $\hat{\pi}$ commute avec cette représentation, W est ainsi invariant par elle. Nous aboutissons à la

PROPOSITION 13. *Le projecteur $\hat{\pi}$ détermine une scission de $\hat{T}$ en deux espaces invariants par $\mathfrak{R}(G)$:*

$$\hat{T} = V_G \oplus W, \quad \hat{\pi} V_G = 0, \quad \hat{\pi} W = W.$$

Désignons maintenant par A la restriction de $\mathfrak{A}$ à l'espace $\underline{G} \otimes T^*$; un élément t du noyau $A^{-1}(0)$ est à la fois symétrique et pur du genre 0 :

$$t(a, b) = t(b, a), \quad t(a, b) = \mathcal{I}^{-1} t(\mathcal{I}a, b) = \mathcal{J}^{-1} t(\mathcal{J}a, b), \ a, b \in T.$$

Il résulte de la proposition 5 que t est nul. Ainsi

PROPOSITION 14. *L'application $A : \underline{G} \otimes T^* \to V_G$ est injective.*

2°) Soit V_{4n} une variété presque quaternionienne; les deux propositions 13 et 14 nous permettent, dans le cadre de la thèse de D. Bernard, d'appliquer le corollaire III 6.1 (p. 94).

PROPOSITION 15. *Sur une variété presque quaternionienne le tenseur de torsion d'une connexion presque quaternionienne est somme de deux tenseurs à valeurs dans W et V_G :*

Le premier ne dépend pas de la connexion et s'identifie au tenseur de structure.

Le second peut être choisi arbitrairement : il détermine alors biunivoquement la connexion presque quaternionienne.

Si ∇ est une connexion presque quaternionienne, sa torsion est donnée par

$$\Sigma(X, Y) = i(X)\nabla Y - i(Y)\nabla X - [X, Y] \quad \forall X, Y,$$

où X et Y sont deux champs de vecteurs.

Il vient alors aisément :

$$4(\hat{\mathfrak{I}}\Sigma)(X, Y) = [\mathfrak{I}X, \mathfrak{I}Y] - [X, Y] - \mathfrak{I}[X, Y] - \mathfrak{I}[X, \mathfrak{I}Y] =$$
$$= 4[\mathfrak{I}, \mathfrak{I}](X, Y).$$

Nous retrouvons ainsi un résultat classique, $[\mathfrak{I}, \mathfrak{I}]$ étant le tenseur de Nijenhuis associé à la structure presque complexe $\mathfrak{I}$. Par suite du théorème précédent le tenseur de structure T s'identifie à $\hat{\pi}\Sigma$. Il vient compte tenu de la relation précédente :

PROPOSITION 16. *Le tenseur de structure d'une variété presque quaternionienne est*

$$T = \frac{2}{3}([\mathfrak{I}, \mathfrak{I}] + [\mathfrak{J}, \mathfrak{J}] + [\mathfrak{K}, \mathfrak{K}]).$$

Une variété presque quaternionienne admet une connexion presque quaternionienne canonique de torsion T. Pour que le tenseur de structure soit nul, il faut et il suffit que la variété admette une connexion presque quaternionienne de torsion nulle.

Nous avons appelé *connexion d'Obata,* cette connexion presque quaternionienne canonique.

3°) Si V_{4n} admet une structure analytique quaternionienne, son tenseur de structure est nul puisqu'elle admet une connexion presque quaternionienne canonique de torsion nulle.

Cette connexion est également de courbure nulle puisque V_{4n} est localement affine.

Inversement, supposons que $T = 0$. La connexion d'Obata étant en particulier presque complexe relativement à $\mathcal{I}$ et à torsion nulle, $\mathcal{I}$ est analytique. Effectuons les calculs dans des repères complexes naturels. Les tenseurs représentant $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ admettent pour composantes

$$\mathcal{I}^{\alpha}_{\beta} = i\,\delta^{\alpha}_{\beta}\,, \qquad \mathcal{I}^{\alpha}_{\beta^*} = 0\,, \qquad \mathcal{J}^{\alpha}_{\beta^*}\,, \qquad \mathcal{J}^{\alpha}_{\beta} = 0 \quad (\text{F. C.C}),$$

où (F.C.C) signifie que l'on doit adjoindre au groupe de relations déjà écrites leurs formules complexes conjuguées et où $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, 2n$, $\alpha^* = \alpha + 2n$.

La connexion d'Obata étant de torsion nulle,

$$\omega^{\alpha}_{\beta} = \Gamma^{\gamma}_{\beta\gamma}\, dz^{\gamma}\,.$$

La dérivée covariante de $\mathcal{J}$ étant nulle,

$$\partial_{\gamma}\, \mathcal{J}^{\alpha}_{\rho^*} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\gamma}\, \mathcal{J}^{\lambda}_{\rho^*} = 0\,.$$

Il vient par multiplication contractée par $\mathcal{J}^{\rho^*}_{\beta}$:

$$(13.6) \qquad \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \mathcal{J}^{\rho^*}_{\beta}\, \partial_{\gamma}\, \mathcal{J}^{\alpha}_{\rho^*} = -\mathcal{J}^{\alpha}_{\rho^*}\, \partial_{\gamma}\, \mathcal{J}^{\rho^*}_{\beta} \quad (\text{F. C.C})\,.$$

Notons que, $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ étant symétrique, la nullité du tenseur de structure de $\mathcal{J}$ s'exprime par

$$(13.7) \qquad \partial_{\gamma}\, \mathcal{J}^{\alpha^*}_{\beta} = \partial_{\beta}\, \mathcal{J}^{\alpha^*}_{\gamma}\,.$$

Calculons le tenseur de courbure

$$(13.8) \qquad R^{\alpha}_{\beta\bar{\lambda}\mu} = R^{\alpha}_{\mu\bar{\lambda}\beta} = \partial_{\bar{\lambda}}(\mathcal{J}^{\rho^*}_{\beta}\, \partial_{\mu}\, \mathcal{J}^{\alpha}_{\rho^*}) \quad (\text{F.C. C})$$

les autres composantes étant nulles. Donc $T = 0$ *n'est pas une condition suffisante d'intégrabilité.*

En revanche, si de plus $R = 0$, la variété est localement affine.

14. Tenseur de structure d'une variété presque hermitienne quaternionienne.

1°) Reprenons les notations du paragraphe précédent et posons de plus

$$Sp(n) = S\,; \qquad V_S = A(\underline{S} \otimes T^*)\,.$$

$\underline{S}$ est l'ensemble des matrices antisymétriques de $\underline{G}$: $\underline{S}$ possède donc relativement à $\underline{G}$ un supplémentaire : c'est l'ensemble Y des matrices symétriques de $\underline{G}$. Y est invariant par S; en effet de

$$y \in Y \Longleftrightarrow y \in \underline{G}, \quad {}^t y = y,$$

et

$$s \in S \Longleftrightarrow {}^t s = s^{-1}, \quad s \in G,$$

on déduit

$$sys^{-1} \in \underline{G}, \quad {}^t(sys^{-1}) = sys^{-1}$$

et par suite

$$sys^{-1} \in Y.$$

Le sous-espace $Y \oplus \Gamma$ est donc un supplémentaire dans $T \otimes T^*$ de $\underline{S}$, également invariant par S. D'autre part puisque l'application A est injective,

$$A(\underline{S} \otimes T^*) \cap A(Y \otimes T^*) = 0.$$

Posons de plus $U = A(Y \otimes T^*)$: V_S admet donc le supplémentaire $W \oplus U$ invariant par $\mathfrak{R}(S)$. Appliquons de nouveau les résultats de D. Bernard :

PROPOSITION 17. *Sur une variété presque hermitienne quaternionienne V_{4n}, le tenseur de torsion d'une connexion presque hermitienne quaternionienne est somme de trois tenseurs à valeurs dans les espaces W, U, V_S :*

- Le premier est le tenseur de structure T de la variété considérée comme presque quaternionienne.

- Le second ne dépend pas non plus de la connexion envisagée. Sa somme avec le précédent est le tenseur de structure de la variété considérée comme presque hermitienne quaternionienne.

- Le troisième peut être choisi arbitrairement : il détermine alors biunivoquement la connexion.

2°) Considérons maintenant la seconde connexion presque hermitienne quaternionienne canonique β. La partie

$$\Sigma_{V_G} = \Sigma_U + \Sigma_{V_S}$$

de sa torsion ne peut provenir que du terme additionnel $\frac{1}{2} g^{-1} \nabla g$ qui, dans les repères adaptés, est « symétrique » et appartient par suite au sous-espace $Y \otimes T^*$. Donc, puisque A est injective, le tenseur $\Sigma_{V_S} = 0$ et par suite :

PROPOSITION 18. *Le tenseur de structure d'une variété presque hermitienne quaternionienne s'identifie à la torsion de la seconde connexion canonique.*

15. Transformation affine d'une variété presque hermitienne quaternionienne munie de sa première connexion canonique.

1°) Soit V_{4n} une variété presque hermitienne quaternionienne, γ la connexion riemannienne associée à la métrique, α la première connexion canonique de V_{4n}, c'est-à-dire la connexion presque hermitienne quaternionienne induite par γ :

$$\alpha = \mathcal{S}\gamma = \gamma - \tfrac{1}{4}(\mathcal{I}D\mathcal{I} + \mathcal{J}D\mathcal{J} + \mathcal{K}D\mathcal{K}),$$

où D désigne la différentielle absolue dans la connexion riemannienne γ.

Soit ξ une 1- forme de V_{4n} définissant par dualité une transformation infinitésimale qui laisse invariant le projecteur $\mathcal{S}$; dans ces conditions $\mathcal{L}(\xi)$ permute avec $\mathcal{S}$ et par suite :

$$\mathcal{L}(\xi)\alpha = \mathcal{S}\mathcal{L}(\xi)\gamma = \tfrac{1}{4}\{\mathcal{L}(\xi)\gamma + \mathcal{I}^{-1}[\mathcal{L}(\xi)\gamma]\mathcal{I} + \mathcal{J}^{-1}[\mathcal{L}(\xi)\gamma]\mathcal{J} + \\ + \mathcal{K}^{-1}[\mathcal{L}(\xi)\gamma]\mathcal{K}\}.$$

Si la transformation infinitésimale définie par ξ laisse en outre invariante la connexion α, nous avons

$$\mathcal{S}\mathcal{L}(\xi)\alpha = 0,$$

soit

$$(15.1)\quad [\mathcal{L}(\xi)\gamma]^i_{jk} - \mathcal{I}^i_a\mathcal{I}^b_j[\mathcal{L}(\xi)\gamma]^a_{bk} - \mathcal{J}^i_a\mathcal{J}^b_j[\mathcal{L}(\xi)\gamma]^a_{bk} - \\ - \mathcal{K}^i_a\mathcal{K}^b_j[\mathcal{L}(\xi)\gamma]^a_{bk} = 0.$$

Or pour la connexion riemannienne

$$[\mathcal{L}(\xi)\gamma]^{i}_{jk} = D_k D_j \xi^i + \xi^r R^i_{j,rk}\,.$$

Par contraction de i et j dans *(15. 1)*, il vient

$$4[\mathcal{L}(\xi)\gamma]^{i}_{ik} = 4\,\partial_k \delta\xi,$$

soit $d\delta\xi = 0$.

Maintenant nous notons d'abord que, $\mathcal{L}(\xi)\gamma$ étant une *1* - forme tensorielle, il en est par suite de même des termes

$$\mathcal{I}^{-1}[\mathcal{L}(\xi)\gamma]\,\mathcal{I}, \quad \mathcal{J}^{-1}[\mathcal{L}(\xi)\gamma]\,\mathcal{J} \quad \text{et} \quad \mathcal{K}^{-1}[\mathcal{L}(\xi)\gamma]\,\mathcal{K}.$$

Les quatre termes intervenant dans *(15. 1)* peuvent donc être évalués séparément. En particulier dans des repères différents. A cet effet, rapportons $\mathcal{I}$ et g à un repère adapté à la structure presque hermitienne définie par la structure presque complexe $\mathcal{I}$ et la métrique g : exceptionnellement les indices sont tels que

$$\alpha,\ \beta,\ \lambda = 1, 2, \ldots, 2n, \qquad \alpha^* = \alpha + 2n, \qquad (\alpha^*)^* = \alpha,$$

$$i, j, r = 1, 2, \ldots, 4n.$$

Par suite les seules composantes de $\mathcal{I}$ et g^{-1} non nulles sont

$$\mathcal{I}^{\beta}_{\alpha} = -\mathcal{I}^{\beta^*}_{\alpha^*} = i\,\delta^{\beta}_{\alpha}, \qquad g^{\alpha^*\beta} = g^{\alpha\beta^*} = \delta^{\alpha\beta}.$$

A l'aide du tenseur métrique, contractons j et k dans *(15. 1)*. En particulier .

$$(15.2) \qquad g^{jk}[\mathcal{I}^{-1}[\mathcal{L}(\xi)\gamma]\,\mathcal{I}]^{\alpha}_{jk} =$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{n} [D_{\lambda^*} D_{\lambda} \xi^{\alpha} + \xi^r R^{\alpha}_{\lambda,\, r\lambda^*} - D_{\lambda} D_{\lambda^*} \xi^{\alpha} - \xi^r R^{\alpha}_{\lambda^*,\, r\lambda}]\,.$$

Utilisons l'identité

$$(D_{\lambda^*} D_{\lambda} - D_{\lambda} D_{\lambda^*})\,\xi^{\alpha} = \xi^r R^{\alpha}_{r,\ \lambda^*\lambda}\,.$$

A cause de la relation de Ricci

$$R^{\alpha}_{r,\ \lambda^*\lambda} + R^{\alpha}_{\lambda,\, r\lambda^*} + R^{\alpha}_{\lambda^*,\ \lambda r} = 0,$$

les deux membres de *(15. 2)* sont nuls. Ainsi les trois derniers termes contractés de *(15. 1)* sont nuls. Par suite

$$(15.3) \qquad D^j D_j \xi^i + R^i_r \xi^r = 0.$$

Supposons de plus V_{4n} *compacte.*

De cette dernière relation et de $d\,\delta\xi = 0$, on déduit que ξ définit une isométrie infinitésimale de la variété presque hermitienne quaternionienne V_{4n} [19] .

PROPOSITION 19. *Etant donnée une variété presque hermitienne quaternionienne compacte V_{4n}, toute transformation infinitésimale affine pour la première connexion canonique et qui préserve le projecteur $\mathcal{S}$ est une isométrie infinitésimale.*

C'est en particulier le cas si ξ définit une transformation infinitésimale presque quaternionienne, c'est-à- dire préservant la structure presque quaternionienne de la variété.

PROPOSITION 20. *Etant donnée une variété presque hermitienne quaternionienne compacte V_{4n}, le plus grand groupe connexe de transformations de V_{4n}, affines pour la première connexion canonique et qui préservent la structure presque quaternionienne, coïncide avec le plus grand groupe connexe d'automorphismes de V_{4n} en tant que variété presque hermitienne quaternionienne.*

2°) Soit V_{4n} une variété presque hermitienne quaternionienne. Des formules définissant les deux connexions canoniques, il résulte qu'une transformation μ qui

a) est une homothétie pour la métrique,

b) laisse invariante la structure presque quaternionienne,

est une transformation affine pour l'une et l'autre de ces connexions.

En effet de *(12. 1)* et *(12. 6)* on tire :

$$\mu^*\alpha = \mu^*\mathcal{S}\gamma = \mathcal{S}\mu^*\gamma = \mathcal{S}\gamma = \alpha\,,$$

$$\mu^*\beta = \mu^*\Phi\,\omega = \Phi\,\mu^*\omega = \Phi\,\omega = \beta\,.$$

V

16. Propriétés relatives aux groupes d'holonomie.

Rappelons le théorème suivant :

PROPOSITION 21. *Tout champ de tenseurs à dérivée covariante nulle sur une variété* V_m, *munie d'une connexion linéaire, détermine au point* x *de* V_m *un tenseur invariant par le groupe d'holonomie homogène* $\psi_x(V_m)$.

Inversement, de tout tenseur en x, *invariant par* $\psi_x(V_m)$, *on déduit par transport un champ global de tenseurs à dérivée covariante nulle.*

1°) Soit V_{4n} une variété presque quaternionienne munie d'une connexion presque quaternionienne. Le groupe d'holonomie de cette connexion est certainement sous-groupe de $GL(n, H)$, et par suite le groupe d'holonomie homogène de la connexion linéaire réelle associée est pour les repères de $E^a(V_{4n})$ sous-groupe de la représentation réelle de $GL(n,H)$

Inversement, considérons une variété différentiable V_{4n} munie d'une connexion linéaire réelle et supposons qu'au point x de V_{4n} il existe un repère pour lequel le groupe d'holonomie homogène ψ_x soit sous-groupe de la représentation réelle de $GL(n, H)$. Les matrices éléments de ψ_x sont de la forme

$$\begin{bmatrix} L & M & N & P \\ -M & L & P & -N \\ -N & -P & L & M \\ -P & N & -M & L \end{bmatrix}$$

et ψ_x laisse invariants les tenseurs en x, une fois covariants, une fois contravariants, de composantes

$$I = \begin{bmatrix} 0 & -E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & -E & 0 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -E \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Compte tenu de la proposition 21, on déduit l'existence sur V_{4n} de trois champs de tenseurs $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{K}$ à dérivée covariante nulle dans la connexion envisagée et satisfaisant en tout point de V_{4n} aux égalités

$$\mathfrak{I}^2 = -id, \quad \mathfrak{I}\mathfrak{J} = -\mathfrak{J}\mathfrak{I} = \mathfrak{K} \quad (\mathrm{P.C}).$$

Ainsi la variété admet une structure presque quaternionienne et la connexion envisagée est la connexion linéaire réelle naturellement associée à une connexion presque quaternionienne pour cette structure.

En particulier, si une variété différentiable est munie d'une métrique riemannienne et d'une connexion euclidienne relative à cette métrique, et si, au point x de V_{4n}, il existe un repère orthonormé pour lequel le groupe d'holonomie homogène de la connexion soit sous-groupe de la représentation réelle de $Sp(n)$, la variété V_{4n} admet pour la métrique donnée une structure presque hermitienne quaternionienne et la connexion envisagée est la connexion euclidienne naturellement associée à une connexion presque hermitienne quaternionienne.

2°) On sait qu'à toute connexion presque hermitienne - complexe - correspond une *2-forme à valeur scalaire fermée.* Sur une variété presque hermitienne quaternionienne, il existe en particulier au moins une structure presque hermitienne et, le groupe d'holonomie restreint σ de cette variété étant sous-groupe de $Sp(n)$, nous récoltons les résultats suivants dûs à Lichnerowicz [18] :

PROPOSITION 22. *Sur une variété presque hermitienne quaternionienne munie d'une connexion presque hermitienne quaternionienne :*

a) Les formes de la connexion sont nulles.

b) La classe de Chern de degré deux est nulle.

3°) Soit V_{4n} une variété presque quaternionienne dont le tenseur de structure est nul. Une telle variété reçoit le nom de variété *pseudo-quaternionienne*, puisqu'une condition nécessaire est qu'il existe une connexion presque quaternionienne à torsion nulle.

Si la variété envisagée est munie d'une structure presque hermitienne quaternionienne subordonnée à sa structure pseudo-quaternionienne elle sera dite *pseudo-hermitienne quaternionienne.*

DEFINITION 9. *Nous appellerons variété kählérienne pseudo-quaternionienne une variété pseudo-hermitienne quaternionienne dont la connexion riemannienne est naturellement associée à une connexion presque quaternionienne.*

Il en résulte que les trois 2-formes F, G, H sont à dérivées covariantes nulles dans la connexion riemannienne et par suite sont fermées et cofermées.

D'après le 1°) de ce paragraphe, si au point x d'une variété V_{4n} il existe un repère orthonormé pour lequel le groupe d'holonomie homogène de la connexion riemannienne est sous-groupe de $Sp(n)$, la variété envisagée admet une structure kählérienne pseudo-quaternionienne et sa *courbure de Ricci est nulle* [18] .

La connexion riemannienne est ici la connexion d'Obata. Par suite en reprenant les notations du paragraphe 13- 3° :

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = g^{\alpha\rho^*} \partial_\gamma g_{\beta\rho^*} = \mathcal{J}^{\rho^*}_{\beta} \partial_\gamma \mathcal{J}^{\alpha}_{\rho^*} .$$

La forme $\mu_{\alpha\beta} = g_{\alpha\rho^*} \mathcal{J}^{\rho^*}_{\beta}$ de type $(2, 0)$ étant à dérivée covariante nulle, il vient $\bar{\partial}_\gamma \mu_{\alpha\beta} = 0$. Ainsi cette forme est holomorphe.

4°) Soit V_m une variété riemannienne compacte. Soit ξ une 1-forme définissant par dualité une isométrie infinitésimale :

$$D^i D_i \xi_j + R_{ij} \xi^i = 0, \quad d\delta\xi = 0. \qquad (16.1)$$

Supposons de plus la courbure de Ricci nulle. De $D^i D_i \xi_j = 0$ on déduit ([19] p. 4) que ξ est à dérivée covariante nulle et il en résulte que

$$d\xi = \delta\xi = 0 . \tag{16. 2}$$

Inversement, si ξ est harmonique,de (16. 2) il vient

$$D_i\xi_j + D_j\xi_i = 0, \qquad D_i\xi_j - D_j\xi_i = 0. \tag{16. 3}$$

ξ est à dérivée covariante nulle, vérifie (16. 1) et définit une isométrie infinitésimale. Dans ces conditions :

a) V_m est réductible et admet un feuilletage par des feuilles localement euclidiennes ;

b) Le plus grand groupe connexe des isométries est abélien.

PROPOSITION 23. *Le groupe des isométries d'une variété riemannienne compacte irréductible à courbure de Ricci nulle est discret.*

C'est par exemple le cas d'une G- variété pour $G = SU(n)$, $Sp(n)$, G_2, $Spin(7)$ [11] .

17. Réductibilité des variétés kählériennes pseudo-quaternioniennes.

Soit V_{4n} une variété kählérienne pseudo- quaternionienne; $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{J}$ désignent les opérateurs presque quaternioniens correspondants. Ils sont à dérivée covariante nulle dans la connexion riemannienne. Dans le cas où V_{4n} est supposée *simplement connexe* nous nous proposons d'étudier la réductibilité de la variété envisagée comme variété riemannienne.

Désignons par σ_x le groupe d'holonomie homogène en x de la variété considérée comme groupe de rotations. Il laisse invariants les opérateurs $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{J}$ en x et pour un choix convenable des repères est sous-groupe de la représentation réelle de $Sp(n)$.

Soit T_x^1 un sous-espace vectoriel réel de dimension $p + 1$ de T_x, invariant par σ_x et sur lequel σ_x induit une représentation *irréductible.* Les sous-espaces $\mathfrak{I}T_x^1$, $\mathfrak{J}T_x^1$, $\mathfrak{K}T_x^1$ (où $\mathfrak{K} = \mathfrak{I}\mathfrak{J}$) sont aussi invariants par σ_x et il en est par suite de même pour l'espace T_x^2 engendré par $\mathfrak{I}T_x^1$, $\mathfrak{J}T_x^1$ et $\mathfrak{K}T_x^1$. Il en résulte que $T_x^1 \cap T_x^2$ et invariant par σ_x. D'après l'irréductibilité, ou bien $T_x^1 \cap T_x^2 = T_x^1$ et T_x^1 est invariant par $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{J}$ et $\mathfrak{K}$ qui opèrent sur cet espace, ou bien $T_x^1 \cap T_x^2 = 0$ et par suite T_x^2 est la *somme directe* des espaces $\mathfrak{I} T_x^1$, $\mathfrak{J} T_x^1$ et $\mathfrak{K} T_x^1$.

Dans le premier cas $p = 4q$ et σ_x induit sur T_x^1 une *représentation irréductible qui pour un choix convenable des repères est sous-groupe de la représentation réelle de* $Sp(q)$.

Examinons le second cas : à cet effet considérons l'espace de dimension $4p$, défini par la somme directe

$$T_x^3 = T_x^1 \oplus \mathfrak{I} T_x^1 \oplus \mathfrak{J} T_x^1 \oplus \mathfrak{K} T_x^1 .$$

Sur T_x^3, $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{J}$ opèrent et définissent une structure quaternionienne.

Si T'_1 désigne le sous-espace de T_x^3 orthogonal à T_x^2, T'^1_x est invariant par σ_x et il en est de même de $T_x^1 \cap T'^1_x$.

Or on ne peut avoir $T_x^1 \cap T'^1_x = 0$; en effet la représentation induite par σ_x sur T_x^3 est le *produit direct* des représentations induites sur T_x^2 et T'^1_x; si $v_1 \in T_x^3$, il s'exprime d'une manière unique sous la forme

$$v_1 = v_2 + v'_1 , \quad \text{où} \quad v_2 \in T_x^2 \quad \text{et} \quad v'_1 \in T'^1_x .$$

Soit r un élément de σ_x qui induit l'identité sur T_x^2; il en résulte que

$$r v_1 = v_2 + r v'_1$$

et par suite

$$r v_1 - v_1 = r v'_1 - v'_1 , \tag{17.1}$$

où le premier membre appartient à T_x^1 et le second à T'^1_x. La représentation induite sur T_x^1 étant irréductible, on peut choisir r de façon que v_1 ne soit pas invariant par r, et par suite pour que la valeur commune des deux membres de (17.1) ne soit pas un vecteur nul. Ainsi $T_x^1 \cap T'^1_x = 0$. Il en résulte que

$$T_x^1 \cap T'^1_x = T_x^1$$

et que les deux espaces T_x^1 et T_x^2 sont orthogonaux.

Choisissons dans T_x^1 une base orthonormée e_A $(A = 1, 2, \dots, p)$.

Les $4p$ vecteurs e_A, $e_{A'} = -\mathcal{I} e_A$, $e_{A''} = -\mathcal{J} e_A$, $e_{A'''} = -\mathcal{K} e_A$ définissent une base orthonormée de T_x^3 et la représentation induite par σ_x sur T_x^3 est nécessairement définie relativement à cette base adaptée à la structure quaternionienne de T_x pour des matrices de la forme :

$$\begin{bmatrix} L & M & N & P \\ -M & L & P & -N \\ -N & -P & L & M \\ -P & N & -M & L \end{bmatrix} \quad \text{où } M = N = P = 0 \text{ et } L \in SO(p).$$

Cette représentation étant le *produit direct* des représentations induites sur T_x^1 et T_x^2 ne pourrait que se réduire à la représentation triviale.

Ainsi le second cas ne peut se produire.

Nous voyons que nous pouvons décomposer T_x en une somme directe de sous-espaces orthogonaux P_x^a $(a = 0, 1, \ldots, k)$ de dimension 4_{q_a}, invariants par $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ et $\mathcal{K}$ et par σ_x, tels que σ_x induise sur P_x^o la représentation identité et sur chaque P_x^a $(a \neq 0)$ une représentation irréductible qui pour un choix convenable du repère est sous-groupe de la représentation réelle de $Sp(q_a)$.

Les feuilles d'indice $a \neq 0$ correspondant à cette décomposition admettent, pour la structure riemannienne induite, un groupe d'holonomie sous-groupe de la représentation réelle de $Sp(q_a)$ et d'après un résultat relatif aux groupes d'holonomie sont kählériennes pseudo-quaternioniennes. Sur les feuilles d'indice 0 se trouvent définies des structures localement unitaires; il vient :

PROPOSITION 24. *La réductibilité d'une variété kählérienne pseudo-quaternionienne simplement connexe n'introduit que des variétés kählériennes pseudo-quaternioniennes irréductibles et des variétés localement unitaires.*

VI

18. Equivalence de deux structures quaternioniennes.

1°) Soient $(1, i, j, k)$ et $(1, u, v, w)$ deux bases de l'algèbre H des quaternions satisfaisant chacune à la table de multiplication habituelle; il existe un quaternion λ, déterminé à un facteur réel près, tel que $(1, u, v, w)$ soit l'image de $(1, i, j, k)$ par l'automorphisme intérieur associé à λ :

$$(18.1) \quad u = \lambda i \lambda^{-1}, \qquad v = \lambda j \lambda^{-1}, \qquad w = \lambda k \lambda^{-1}.$$

Dans ces relations on peut prendre λ de module 1, soit

$$\lambda^{-1} = \bar{\lambda} \Longleftrightarrow \lambda \in Sp(1).$$

Puisque u, v, w sont imaginaires purs :

$$(18.2) \qquad \begin{cases} u = \alpha\, i + \beta\, j + \gamma\, k \\ v = \alpha' i + \beta' j + \gamma' k \\ w = \alpha'' i + \beta'' j + \gamma'' k, \end{cases}$$

où la matrice

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{bmatrix}$$

est un élément de $SO(3)$.

Soit maintenant σ', σ'', σ''' (resp. σ^*, σ^{**}, σ^{***}) le système de biconjugaisons associé à la base (i, j, k) (resp. (u, v, w)).

Evaluons $\sigma^* q$ pour $q \in H$:

$$(18.3) \qquad \sigma^* q = u q u^{-1} = (\sigma' q) A + (\sigma'' q) B + (\sigma''' q) C,$$

où nous avons posé

$$A = \alpha(\alpha + \gamma j - \beta k) \quad \text{(P. C)}.$$

2°) Soit T_{4n} un espace vectoriel réel de dimension $4n$. Soit S_n^H

une structure quaternionienne de T_{4n} relativement au système de biconjugaisons $(\sigma', \sigma'', \sigma''')$ de H.

Si $\tau^* = id \otimes \sigma^*$ est l'opérateur de $T_{4n} \otimes H = T^H_{4n}$ prolongeant σ^*, il résulte de *(18. 3)* qu'en particulier pour tout vecteur ξ de S^H_n

$$(18.4) \qquad \tau^* \xi = (\tau' \xi)A + (\tau'' \xi)B + (\tau''' \xi)C.$$

Par suite $\tau^* S^H_n$ est dans la somme directe

$$(18.5) \qquad \tau' S^H_n \oplus \tau'' S^H_n \oplus \tau''' S^H_n .$$

Il en est de même pour $\tau^{**} S^H_n$, $\tau^{***} S^H_n$: ainsi S^H_n est d'intersection réduite au vecteur zéro avec la somme

$$\tau^* S^H_n + \tau^{**} S^H_n + \tau^{***} S^H_n .$$

Par biconjugaisons σ^*, σ^{**}, σ^{***} on en déduit que

$$T^H_{4n} = S^H_n \oplus \tau^* S^H_n \oplus \tau^{**} S^H_n \oplus \tau^{***} S^H_n .$$

Ainsi S^H_n apparaît comme une nouvelle structure quaternionienne de T_{4n}.

Sur S^H_n existent alors deux triples d'opérateurs quaternioniens $(\mathfrak{I}, \mathfrak{J}, \mathfrak{K})$ et $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})$ déterminés respectivement par les structures $(S^H_n, \sigma', \sigma'', \sigma''')$ et $(S^H_n, \sigma^*, \sigma^{**}, \sigma^{***})$ et l'on a

$$(18.6) \qquad \mathfrak{U} = \alpha \mathfrak{I} + \beta \mathfrak{J} + \gamma \mathfrak{K}, \quad (\mathfrak{V}, \mathfrak{W}).$$

Ainsi la donnée de S^H_n, sans autres conditions que *(18. 5)* pour un système particulier, détermine une classe d'équivalence de triples $(\mathfrak{I}, \mathfrak{J}, \mathfrak{K})$. Un opérateur tel que $\mathfrak{U}$ appartient évidemment à l'algèbre engendrée par $\mathfrak{I}, \mathfrak{J}, \mathfrak{K}$. Il revient alors au même de se donner directement une *représentation effective* de H dans T_{4n}.

S'il existe sur T_{4n} deux structures $(\mathfrak{I}, \mathfrak{J})$ et $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$ satisfaisant à des relations telles que *(18. 6)*, on en déduit, H étant muni d'un système de biconjugaisons, un sous-espace S^H_n caractérisant $(\mathfrak{I}, \mathfrak{J})$; $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$ est alors déterminé par ce même S^H_n, H étant muni du système de biconjugaisons défini par *(18. 3)*.

En effet, tout vecteur $\xi \in S^H_n$ s'écrit

$$\xi = x + \mathfrak{I} x i + \mathfrak{J} x j + \mathfrak{K} x k, \quad \text{où} \quad x \in T_{4n} .$$

Le vecteur η

$$\eta = x + \mathfrak{U} x u + \mathfrak{V} x v + \mathfrak{W} x w$$

s'écrit, compte tenu de *(18. 1)* et *(18. 6)*,

$$\begin{aligned}\eta = x &+ (\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2)\mathfrak{I}\, xi + (\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'')(\mathfrak{I}\, xj + \mathfrak{J}\, xi) \\ &+ (\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2)\mathfrak{J}\, xj + (\beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'')(\mathfrak{J}\, xk + \mathfrak{K}\, xj) \\ &+ (\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2)\mathfrak{K}\, xk + (\gamma\alpha + \gamma'\alpha' + \gamma''\alpha'')(\mathfrak{K}\, xi + \mathfrak{I}\, xk).\end{aligned}$$

Il vient immédiatement $\eta = \xi$.

3°) Soit maintenant $\mathfrak{L}$ l'opérateur linéaire de T_{4n} défini par multiplication à droite par λ :

$$\mathfrak{L} = a\mathfrak{E} + b\mathfrak{I} + c\mathfrak{J} + d\mathfrak{K},$$

où $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1;\ a,\ b,\ c,\ d \in R$: nous avons

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{L}\mathfrak{I}\mathfrak{L}^{-1}, \qquad \mathfrak{V} = \mathfrak{L}\mathfrak{J}\mathfrak{L}^{-1}, \qquad \mathfrak{W} = \mathfrak{L}\mathfrak{K}\mathfrak{L}^{-1}.$$

H étant toujours muni du système $(\sigma', \sigma'', \sigma''')$ le couple $(\mathfrak{I}, \mathfrak{J})$ (resp. $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$) détermine le sous- espace S_n^H (resp. Σ_n^H).

Tout vecteur $\xi \in S_n^H$ s'écrit d'une manière unique

$$\xi = x + (\mathfrak{I}x)i + (\mathfrak{J}x)j + (\mathfrak{K}x)k , \quad x \in T_{4n} .$$

Considérons le vecteur $y = \mathfrak{L}x$ et évaluons $\dot{\mathfrak{L}}\xi$, où $\dot{\mathfrak{L}}$ désigne l'extension linéaire de $\mathfrak{L}$ à T_{4n}^H :

$$\dot{\mathfrak{L}}\xi = \mathfrak{L}x + (\mathfrak{L}\mathfrak{I}x)i + (\mathfrak{L}\mathfrak{J}x)j + (\mathfrak{L}\mathfrak{K}x)k,$$

$$\dot{\mathfrak{L}}\xi = y + (\mathfrak{U}y)i + (\mathfrak{V}y)j + (\mathfrak{W}y)k.$$

Ainsi $\dot{\mathfrak{L}}\xi \in \Sigma_n^H$: $\dot{\mathfrak{L}}$ étant régulier, Σ_n^H est exactement l'image de S_n^H.

19. Structure presque quaternale sur une variété.

Soit V_m une variété différentiable de classe C^∞ et de dimension m. Nous désignerons par $H(V_m)$ un espace fibré localement trivial de base V_m, de fibre type l'algèbre H des quaternions, de groupe structural le groupe isomorphe à $SO(3)$ des automorphismes d'algèbres, de projection p. Soit $T(V_m)$ l'espace fibré tangent, projection q.

DEFINITION 10 · *Une structure presque quaternale sur* V_m *est la donnée d'un champ global* $\mathfrak{R}$ *de classe* C^∞, *associant, à tout point* x *de* V_m, *une représentation effective* $\mathfrak{R}_x$ *de* $p^{-1}(x) = H_x(V_m)$ *dans* $q^{-1}(x) = = T_x(V_m)$. (*)

PROPOSITION 25. *Il y a équivalence entre a, b et c.*

a) V_{4n} *est presque quaternale.*

b) V_{4n} *est recouverte par une famille d'ouverts* $U, V, \ldots$, *chaque ouvert est une variété presque quaternionienne* $(U; \mathcal{I}^U, \mathcal{J}^U)$. *Pour tout point* $x \in U \cap V \neq \emptyset$, *les algèbres engendrées par* $\mathcal{I}^U$ *et* $\mathcal{J}^U$ *ou par* $\mathcal{I}^V$ *et* $\mathcal{J}^V$ *coïncident.*

c) Il existe sur V_{4n} *un champ global associant à tout* x *un sous-espace* H_x*-vectoriel* S_x^H *du produit tensoriel sur* R, $T_x^H = T_x \otimes H_x$, *tel que pour un système de biconjugaisons* σ'_x, σ''_x, σ'''_x *de* H_x :

$$T_x \oplus H_x = S_x^H \oplus S_x'^H \oplus S_x''^H \oplus S_x'''^H ,$$

où $S_x'^H = (id \oplus \sigma'_x) S_x^H$.

Une structure presque quaternionienne de V_{4n} est une structure presque quaternale pour laquelle le fibré $H(V_m)$ est trivial.

V_{4n} peut être recouverte par une famille d'ouverts $U, V, \ldots$ Chaque ouvert U est muni de trois sections locales de H_x, soit

$$\forall x \in U \to (i_x^U, j_x^U, k_x^U), \quad {i_x^U}^2 = -1, \quad i_x^U j_x^U = -j_x^U i_x^U = k_x^U \qquad (\text{P.C}).$$

Par la représentation $\mathfrak{R}_x$ nous en déduisons trois champs locaux d'opérateurs presque quaternioniens

$$x \to \mathcal{I}_x^U, \ \mathcal{J}_x^U, \ \mathcal{K}_x^U ;$$

les opérateurs locaux possèdent dans $U \cap V \neq \emptyset$ la propriété annoncée $(a \Longrightarrow b)$.

Inversement, la condition b signifie que l'algèbre en chaque point x engendrée par $\mathcal{I}_x^U$, $\mathcal{J}_x^U$, $\mathcal{K}_x^U$ ne dépend pas du choix de U et par suite nous en déduisons le fibré $H(V_m)$ ainsi que la représentation.

$c \Longrightarrow b$ est évident.

(*) Il en résulte évidemment que $m = 4n$.

Montrons que $a \Longrightarrow c$: cela résulte de l'étude faite au paragraphe précédent. L'espace défini par la structure $\mathcal{I}^U_x$, $\mathcal{J}^U_x$, $\mathcal{K}^U_x$ et le système de biconjugaisons associé à i^U_x, j^U_x, k^U_x ne dépend pas de U.

20. Espaces fibrés attachés à une structure presque quaternale.

Un repère adapté en x à la structure presque quaternale est un repère adapté à l'une quelconque des structures presque quaternioniennes subordonnées à la structure presque quaternale. Ainsi H étant rapportée à un système de biconjugaisons, chaque structure $(\mathcal{I}^U_x, \mathcal{J}^U_x)$ définit un sous-espace $S^H_x(U) \subset T_x \otimes H$ et par suite nous savons ce qu'est un sous-repère adapté $\{\varepsilon^U_\alpha\}$, auquel se trouve associé par biconjugaisons un repère hypercomplexe adapté $\{\varepsilon^U_\alpha, \varepsilon^U_{\alpha'}, \varepsilon^U_{\alpha''}, \varepsilon^U_{\alpha'''}\}$, et par passage au réel un repère réel adapté $\{e^U_a\}$.

Les résultats obtenus se traduisent par l'existence, pour tout $x \in U \cap V \neq \emptyset$:

- d'une matrice $A^{h}{}^{U}_x = (A^\alpha_\beta) \subset GL(n, H)$,
- d'un opérateur $\mathcal{L}^U_x$ appartenant à l'algèbre engendrée par $\mathcal{I}^U_x$, $\mathcal{J}^U_x$:

$$\mathcal{L} = a\mathcal{E} + b\mathcal{I} + c\mathcal{J} + d\mathcal{K}.$$

Désignons par $\dot{\mathcal{L}}$ l'extension *linéaire* de $\mathcal{L}$ à $T_x \otimes H$. Il vient alors

$$\varepsilon^V_\lambda = \dot{\mathcal{L}}(\varepsilon^U_\alpha A^\alpha_\lambda) = \dot{\mathcal{L}}(\varepsilon^U_\alpha) A^\alpha_\lambda \qquad \text{(F.H. B)}.$$

Si $\mathcal{A}$ désigne la représentation réelle de A :

$$\varepsilon^V_a = \mathcal{A}^l_a \mathcal{L}^b_l e^U_b = \mathcal{L}^l_a \mathcal{A}^b_l e^U_b .$$

Ainsi se trouvent mis en évidence trois espaces $E^a(V_{4n})$, $E^g(V_{4n})$, $E^h(V_{4n})$ des ensembles formés par tous les repères réels $\{e_a\}$, repères hypercomplexes $\{\varepsilon_\alpha\}$ et sous-repères hypercomplexes $\{\varepsilon_\alpha\}$, adaptés à la structure presque quaternale et ayant leurs origines en tous points de V_{4n}. Ils admettent chacun pour la projection naturelle une structure d'espace fibré principal ayant pour base V_{4n} et pour groupes structuraux les groupes G_a, G_g, G_h tous isomorphes à $GL(n, H) \otimes_H Sp(1)$.

Précisons que le groupe G_a est le groupe engendré par la réunion des groupes $GL_a(n, H)$ et $Sp_a(1)$, représentations matricielles $4n \times 4n$ des groupes $GL(n, H)$ et $Sp(1)$. Chaque élément $\gamma \in G_a$ se trouve décomposé de deux manières uniquement :

$$\gamma = gs = sg = (-g)(-s), \text{où } g \in GL_a(n, H), \quad s \in Sp_a(1).$$

Si on lève la restriction $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ équivalente à $\mathfrak{L} \in Sp_a(1)$, le groupe obtenu serait en apparence $GL(n, H) \otimes GL(1, H)$. Mais le groupe engendré par la réunion de $GL_a(n,H)$ et $GL_a(1, H)$ demeure G_a. La notation correcte de G_a est en fait

$$\{GL(n, H) \otimes_H Sp(1)\}_a [\equiv \{GL(n, H) \otimes_H GL(1, H)\}_a] .$$

PROPOSITION 25. *La donnée d'une structure presque quaternale sur* V_{4n} *est équivalente à la donnée d'un sous-fibré principal*

$$E^a[V_{4n}, GL(n, H) \otimes_H Sp(1)]$$

du fibré des repères tangents à V_{4n}.

Une section globale d'unités relatives $x \to i_x$ $(i_x^2 = -1)$ de $H(V_{4n})$ conduit à l'existence d'une structure presque complexe de V_{4n} qui sera dite alors *presque complexe quaternale* : le groupe structural se réduit à $GL(n, H) \otimes_H U(1)$.

21. Invariants associés à une structure presque quaternale.

1°) Chaque structure presque quaternionienne locale $(\mathfrak{I}^U, \mathfrak{J}^U)$ détermine quatre projecteurs $\mathcal{S}_U$, $\mathcal{S}'_U$, $\mathcal{S}''_U$, $\mathcal{S}'''_U$: mais seul le premier $\mathcal{S}_U$ est indépendant du choix de U. En effet, pour tout 2-tenseur A, de type représentation adjointe par exemple,

$$4\mathcal{S}_U A = A + \mathfrak{I}^{-1\,U} A \mathfrak{I}^U + \mathfrak{J}^{-1\,U} A \mathfrak{J}^U + \mathfrak{K}^{-1\,U} A \mathfrak{K}^U,$$

où il apparaît que $\mathcal{S}_U$ opère à l'aide du tenseur (2. 2) :

$$\mathcal{C}_U = \mathfrak{I}^U \otimes \mathfrak{I}^U + \mathfrak{J}^U \otimes \mathfrak{J}^U + \mathfrak{K}^U \otimes \mathfrak{K}^U .$$

Si $U \cap V \neq \emptyset$, il est clair que $\mathcal{C}_U|_V = \mathcal{C}_V|_U$ et par suite $\mathcal{C}_U$ est la restriction d'un tenseur global $\mathcal{C}$. Nous verrons, plus loin, que ce tenseur caractérise même la structure presque quaternale.

PROPOSITION 27. *Sur une variété presque quaternale, il existe un projecteur global* $\mathcal{S}$ *sur les tenseurs d'ordre 2.*

2°) D'après l'étude du tenseur de structure d'une variété presque quaternionienne, nous savons que la structure presque quaternionienne locale $(\mathcal{I}^U, \mathcal{J}^U)$ admet comme tenseur de structure

$$T^U = \frac{2}{3}\{[\mathcal{I}^U, \mathcal{I}^U] + [\mathcal{J}^U, \mathcal{J}^U] + [\mathcal{K}^U, \mathcal{K}^U]\}.$$

Dans $U \cap V \neq \emptyset$, j'ai vérifié directement, sur les expressions locales du type

$$4[\mathcal{I}, \mathcal{J}]^i_{jk} = \mathcal{I}^a_j(\partial_a \mathcal{J}^i_k - \partial_k \mathcal{J}^i_a) - \mathcal{J}^a_k(\partial_a \mathcal{I}^i_j - \partial_j \mathcal{I}^i_a),$$

à l'aide des relations

$$\mathcal{I}^U = a\mathcal{I}^V + b\mathcal{J}^V + c\mathcal{K}^V \ldots,$$

que l'on obtient

$$T^U \equiv T^V \ \textit{modulo}\ a \wedge \mathcal{L},$$

où a (resp. $\mathcal{L}$) est un champ local de covecteurs (resp. d'opérateurs quaternioniens $\mathcal{L}^2 = -id$).

Mais ce résultat s'obtient aussi en remarquant que $GL(n, H)$ est sous-groupe de $GL(n, H) \otimes_H Sp(1)$: il convient donc de calculer le tenseur de structure $\mathcal{T}$ de la variété presque quaternale $U \subset V_{4n}$ par passage au quotient par la relation d'équivalence définie ci-dessus, puisque $a \wedge \mathcal{L}$ est générique de l'espace

$$\mathcal{A}(Sp(1) \otimes T^*),$$

où $\mathcal{A}$ est l'opérateur d'antisymétrisation

$$\mathcal{A} : T \otimes T^* \otimes T^* \to T \otimes \overset{2}{\wedge} T^* \quad (\text{cf. } \S\, 13).$$

PROPOSITION 28. *Le tenseur de structure* $\mathcal{T}$ *d'une variété presque quaternale* V_{4n} *est défini localement par*

$$\mathcal{T} \equiv T^U \ (\textit{modulo}\ a \wedge \mathcal{L}),$$

où T^U *est le tenseur de structure d'une quelconque structure presque quaternionienne locale* $(\mathcal{I}^U, \mathcal{J}^U)$ *subordonnée à la structure presque quaternale de* V_{4n}.

VII

22. Structure presque hermitiale.

Une structure presque quaternale étant donnée sur V_{4n}, posons:

DEFINITION 11. *Une structure presque hermitiale est une structure riemannienne dont le tenseur métrique g est invariant par le projecteur global $\mathcal{S}$.*

Lorsque V_{4n} est munie d'une métrique riemannienne quelconque h, nous pouvons toujours construire $g = \mathcal{S}h$ qui est encore définie positive, et par suite une structure presque hermitiale subordonnée à la structure presque quaternale donnée.

Reportons-nous au paragraphe précédent : V_{4n} est recouverte par une famille d'ouverts $U, V, \ldots$ presque quaternioniens.

Soient alors F^U, G^U, H^U les formes quadratiques fondamentales de la structure presque hermitienne quaternionienne locale définie sur U par $(\mathcal{I}^U, \mathcal{J}^U)$ et la restriction de la métrique g. Construisons sur U la 4-forme

$$M^U = F^U \wedge F^U + G^U \wedge G^U + H^U \wedge H^U.$$

Mais, pour $\forall\, x \in U \cap V \neq \emptyset$,

$$M^U \mid_V = M^V \mid_U .$$

Ainsi les M^U sont les restrictions d'une 4-forme globale M qui sera dite *forme fondamentale* de la variété presque hermitiale.

PROPOSITION 29. *Sur une variété presque hermitiale il existe une 4-forme globale de rang maximum (i. e. $\overset{n}{\wedge} M = M^n \neq 0$).*

En vue d'effectuer une démonstration par récurrence nous poserons successivement :

$$F_n = \sum_{\alpha=1}^{n} (\omega^{\alpha'} \wedge \omega^{\alpha} + \omega^{\alpha''} \wedge \omega^{\alpha'''}), \quad (\text{P. C})$$

$$f = \omega^{o'} \wedge \omega^{o} + \omega^{o''} \wedge \omega^{o'''}, \quad (\text{P.C})$$

$$M_n = F_n \wedge F_n + G_n \wedge G_n + H_n \wedge H_n,$$

$$m = f \wedge f + g \wedge g + h \wedge h.$$

Il vient immédiatement

$$(22.1)\, f\wedge f = -2\,\omega^{o} \wedge \omega^{o'} \wedge \omega^{o''} \wedge \omega^{o'''} = \frac{1}{3}\, m;\quad f\wedge g = 0 \quad (\mathrm{P.C}).$$

Faisons l'hypothèse de récurrence

$$(22.2)\quad (M_n)^n = (-1)^n (2n+1)!\ \prod_{\alpha=1}^{n} \omega^{\alpha} \wedge \omega^{\alpha'} \wedge \omega^{\alpha''} \wedge \omega^{\alpha'''}.$$

Celle-ci est vérifiée pour $n = 1$ (relation (22.1) : $n = 1$). Pour la dimension $n+1$ nous poserons de plus :

$$F_{n+1} = f + F_n \qquad (\mathrm{P.C}),$$

$$(22.3)\ M_{n+1} = F_{n+1} \wedge F_{n+1} + G_{n+1} \wedge G_{n+1} + H_{n+1} \wedge H_{n+1}.$$

Développons (22.3) compte tenu de (22.1) :

$$M_{n+1} = M_n + 2(f \wedge F_n + g \wedge G_n + h \wedge H_n) + m.$$

Elevons les deux membres à la puissance extérieure $n+1$. Omettons les termes dont la contribution est trivialement nulle :

$$(M_{n+1})^{n+1} = (n+1)(M_n)^n \wedge m +$$
$$+ 2n(n+1)(M_n)^{n-1}(f \wedge F_n + g \wedge G_n + h \wedge H_n)^2.$$

Développons le dernier terme

$$(f \wedge F_n + g \wedge G_n + h \wedge H_n)^2 = f \wedge f \wedge F_n \wedge F_n +$$
$$+ g \wedge g \wedge G_n \wedge G_n + h \wedge h \wedge H_n \wedge H_n = \frac{m}{3} \wedge M_n.$$

Ainsi

$$(M_{n+1})^{n+1} = (2n+3)(n+1)(M_n)^n \wedge \frac{m}{3}.$$

Tenant compte de (22.2) pour $n = n$ et $n = 1$: il vient

$$(M_{n+1})^{n+1} = (-1)^{n+1}(2n+3)!\ \prod_{\alpha=0}^{n} \omega^{\alpha} \wedge \omega^{\alpha'} \quad \omega^{\alpha''} \wedge \omega^{\alpha'''},$$

cette dernière relation étant la même que (22.2). D'où la proposition 28.

Remarquons que cette 4-forme M s'obtient à partir du tenseur $(2,2)$ $\mathcal{C}$ à l'aide de la métrique puis complète antisymétrisation.

Nous considérerons d'une manière analogue au paragraphe 20 les 3 espaces fibrés $\mathcal{E}^{q}(V_{4n})$, $\mathcal{E}^{g}(V_{4n})$, $\mathcal{E}^{h}(V_{4n})$ des repères adaptés à la structure presque hermitiale (i. e. à l'une quelconque des structures presque hermitiennes quaternioniennes subordonnées) de base V_{4n} et de groupes structuraux tous isomorphes à $Sp(n) \otimes_H Sp(1)$.

VIII

23 . Connexions presque quaternales.

1°) Etant donnée une variété presque quaternale :

DEFINITION 12. *Nous appellerons connexion presque quaternale une connexion infinitésimale sur* $E^b(V_{4n})$.

Elle peut être définie par la donnée, sur tout ouvert U d'un recouvrement de V_{4n}, d'un champ local de repères adaptés et de deux 1-formes locales ω_U et σ_U :

- ω_U est à valeurs matricielles $n \times n$ quaternioniennes.
- σ_U est à valeurs quaternioniennes et sera en fait identifiée à une forme matricielle $4n \times 4n$ à l'aide des opérateurs $\mathfrak{I}^U$, $\mathfrak{J}^U$ et $\mathfrak{K}^U$ locaux.

Dans $U \cap V$ ces deux formes locales satisfont à la condition de cohérence

$$\omega_V = (A^U_V)^{-1}\, \omega_U\, A^U_V + \overset{-1}{A}{}^U_V\, d A^U_V \, ,$$

$$\sigma_V = \overset{-1}{\mathfrak{L}}{}^U_V\, \sigma_U\, \mathfrak{L}^U_V + \overset{-1}{\mathfrak{L}}{}^U_V\, d\mathfrak{L}^U_V \, .$$

(Les notations sont celles du paragraphe 20).

Les $\mathfrak{L}^U_V$ sont les éléments de recollement du fibré des bases de H_x ($\forall x \in V_{4n}$) qui peut être ainsi envisagé comme un sous-fibré principal de $E^b(V_{4n})$. La deuxième relation exprime alors que les σ_U définissent *une connexion infinitésimale qui permet en particulier la différentiation absolue des sections de* $H(V_{4n})$.

En revanche, il n'existe pas, en général, de sous-fibré de $E^b(V_{4n})$ dont les A^U_V seraient les éléments de recollement.

La connexion $(\omega_U, \sigma_U) = \pi_U$ peut être identifiée à celles qui sont définies sur $E^g(V_{4n})$ et $E^a(V_{4n})$ par biconjugaisons et passage au réel. Désormais dans l'un ou l'autre de ces deux cas on aura :

$$\pi_U = \omega_U + \sigma_U ,$$

où ω_U et σ_U désignent maintenant, par abus de notations, les matrices $4n \times 4n$ à valeurs quaternioniennes ou réelles obtenues à partir des formes données antérieurement.

La forme ω_U définit par restriction à U une connexion presque quaternionienne d'ailleurs induite par π_U, soit $\omega_U = \mathcal{S}_U \pi_U$: le tenseur $\mathcal{S}$ sur les tenseurs ne s'étend pas comme dans le cas presque quaternionien aux connexions; cependant dans chaque ouvert U presque quaternionien, $\mathcal{S}$ se prolonge en un projecteur $\mathcal{S}_U$ opérant sur les connexions, celui-ci dépendant de la structure presque quaternionienne locale.

PROPOSITION 30. *Pour qu'une connexion soit presque quaternale, il faut et il suffit que la différentiation absolue commute avec le projecteur* $\mathcal{S}$.

En effet, dans l'ouvert U, la connexion est déterminée par la forme

$$\pi_U = \omega_U + a\mathfrak{I}^U + b\mathfrak{J}^U + c\mathfrak{K}^U ,$$

où a, b, c sont trois 1-formes locales réelles et ω_U l'élément de connexion presque quaternionienne locale dans des repères adaptés :

$$(23.1) \qquad (\nabla \mathfrak{I})^U = d\mathfrak{I}^U + \pi_U \mathfrak{I}^U - \mathfrak{I}^U \pi_U = 2b\,\mathfrak{K}^U - 2c\,\mathfrak{J}^U ,$$

$$(\nabla \mathfrak{J})^U = 2c\mathfrak{I}^U - 2a\,\mathfrak{K}^U ; \qquad (\nabla \mathfrak{K})^U = 2a\,\mathfrak{J}^U - 2b\,\mathfrak{I}^U .$$

Ces trois relations locales caractérisent une connexion presque quaternale.

Le projecteur global $\mathcal{S}$ s'exprime à l'aide du tenseur $\mathcal{C}$ dont l'expression locale est

$$C^U = \mathfrak{I}^U \otimes \mathfrak{I}^U + \mathfrak{J}^U \otimes \mathfrak{J}^U + \mathfrak{K}^U \otimes \mathfrak{K}^U .$$

Il vient alors :

$$(\nabla C)^U = (2b\mathfrak{K}^U - 2c\mathfrak{J}^U) \otimes \mathfrak{I}^U + (2c\mathfrak{I}^U - 2a\mathfrak{K}^U) \otimes \mathfrak{J}^U +$$
$$+ (2a\mathfrak{J}^U - 2b\mathfrak{I}^U) \otimes \mathfrak{K}^U + \mathfrak{I}^U \otimes (2b\mathfrak{K}^U - 2c\mathfrak{J}^U) + \mathfrak{J}^U \otimes (2c\mathfrak{I}^U - 2a\mathfrak{K}^U) +$$
$$+ \mathfrak{K}^U \otimes (2a\mathfrak{J}^U - 2b\mathfrak{I}^U)$$

et tous les termes du second membre s'éliminent. Ainsi $(\nabla C)^U = 0$ et ∇ commute avec $\mathcal{S}$.

Inversement, soit π une connexion linéaire possédant cette propriété : Pour tout tenseur A tel que, rapporté à des repères hypercomplexes adaptés, il admette les composantes

$$A^{\alpha}_{\beta}, \quad A^{\alpha}_{\beta'} = A^{\alpha}_{\beta''} = A^{\alpha}_{\beta'''} = 0, \qquad (\text{F.H.B})$$

on a

$$(\nabla A)^{\alpha}_{\beta'} = (\nabla A)^{\alpha}_{\beta''} = (\nabla A)^{\alpha}_{\beta'''} = 0. \qquad (\text{F. H. B})$$

Nous prendrons successivement pour tenseurs locaux des tenseurs admettant pour composantes :

$$\alpha \neq \beta, \quad A^{\alpha}_{\beta} = 1 \text{ ou } i \text{ ou } j; \quad A^{\rho}_{\sigma} = 0 \quad \forall \rho \neq \alpha \text{ et } \forall \sigma \neq \beta; \qquad (\text{F.H.B})$$

où le couple (α, β) est donné.

La connexion admet à priori les éléments

$$\pi^{\alpha}_{\beta}, \quad \pi^{\alpha}_{\beta'}, \quad \pi^{\alpha}_{\beta''}, \quad \pi^{\alpha}_{\beta'''}. \qquad (\text{F.H.B})$$

Explicitons les composantes nulles de ∇A :

$$(\nabla A)^{\alpha}_{\beta'} = \pi^{\alpha}_{\alpha'} A^{\alpha'}_{\beta'} - A^{\alpha}_{\beta} \pi^{\beta}_{\beta'} = 0, \qquad (\nabla A)^{\beta}_{\beta'} = \pi^{\beta}_{\alpha'} A^{\alpha'}_{\beta'} = 0,$$

où nous rappelons que (α, β) est fixé. Prenons successivement pour A^{α}_{β} les valeurs particulières 1 ou i ou j. Il vient immédiatement :

$$\pi^{\alpha}_{\alpha'} - \pi^{\beta}_{\beta'} = 0; \quad \pi^{\beta}_{\alpha'} = 0; \quad \pi^{\alpha}_{\alpha'} i - i \pi^{\beta}_{\beta'} = 0; \quad -\pi^{\alpha}_{\alpha'} j - j \pi^{\beta}_{\beta'} = 0.$$

De ces relations, en faisant maintenant varier (α, β), on déduit l'existence d'une forme locale réelle a telle que

$$\pi^{\alpha}_{\beta'} = i\, \delta^{\alpha}_{\beta}\, a \qquad \forall \alpha, \beta. \qquad (\text{F.H. B})$$

On montrerait de même l'existence locale de deux autres formes réelles b et c telles que

$$\pi^{\alpha}_{\beta''} = j\, \delta^{\alpha}_{\beta}\, b, \qquad \pi^{\alpha}_{\beta'''} = k\, \delta^{\alpha}_{\beta}\, c. \qquad (\text{F.H.B})$$

Ainsi la connexion envisagée est presque quaternale.

24. Connexions presque hermitiales.

Soit maintenant une variété presque hermitiale.

DEFINITION 13. *Nous appellerons connexion presque hermitiale une connexion infinitésimale sur* $\mathcal{E}^h(V_{4n})$.

Nous pouvons développer les mêmes considérations que pour une connexion presque quaternale.

A une connexion presque hermitiale sont associées une connexion presque quaternale et une connexion euclidienne : le tenseur métrique et le projecteur $\mathcal{S}$ sont alors à dérivées covariantes nulles.

Une connexion presque hermitiale est définie, pour un recouvrement de V_{4n} par des voisinages munis de repères adaptés de $\mathcal{E}^h(V_{4n})$, par des matrices de connexion (ω, σ) satisfaisant en outre à

$$\omega^{\alpha}_{\beta} + \overline{\omega}^{\beta}_{\alpha} = 0.$$

Soit maintenant π une connexion presque quaternale sur V_{4n}. Elle induit alors, par

$$\pi \to \Phi\pi = \pi + \tfrac{1}{2} g^{-1} \nabla g,$$

une connexion presque hermitiale :

$\Phi\pi$ est d'abord une connexion euclidienne. Il faut de plus montrer qu'elle est presque quaternale : π rapportée à des repères adaptés à la structure presque hermitiale admet pour éléments :

$$\pi^{\alpha}_{\beta}, \quad \pi^{\alpha}_{\alpha'} = i\,a, \quad \pi^{\alpha}_{\alpha''} = j\,b, \quad \pi^{\alpha}_{\alpha'''} = k\,c, \qquad (\text{F.H.B})$$

les autres étant tous nuls.

La connexion $\Phi\pi$, calculée dans ces repères, admet les éléments :

$$(\Phi\pi)^{\alpha}_{\beta} = \tfrac{1}{2}(\pi^{\alpha}_{\beta} - \overline{\pi}^{\alpha}_{\beta}), \quad (\Phi\pi)^{\alpha}_{\alpha'} = i\,a, \quad (\Phi\pi)^{\alpha}_{\alpha''} = j\,b, \quad (\text{F.H.B})$$

$$(\Phi\pi)^{\alpha}_{\alpha'''} = k\,c.$$

Nous en déduisons que $\Phi\pi$ est presque quaternale.

PROPOSITION 31. *La dérivée covariante de la 4-forme fondamentale dans une connexion presque hermitiale est nulle.*

Localement M s'écrit :

$$M^U = F^U \wedge F^U + G^U \wedge G^U + H^U \wedge H^U .$$

Si ∇ est une connexion presque hermitiale

$$\nabla F^U = 2b \wedge H^U - 2c \wedge G^U , \quad \text{(P.C)}$$

cette relation étant impliquée par *(23. 1)*. Par suite

$$\begin{aligned}\nabla M^U = {} & (2b \wedge H^U - 2c \wedge G^U) \wedge F^U + F^U \wedge (2b \wedge H^U - 2c \wedge G^U) \\ & + (2c \wedge F^U - 2a \wedge H^U) \wedge G^U + G^U \wedge (2c \wedge F^U - 2a \wedge H^U) \\ & + (2a \wedge G^U - 2b \wedge F^U) \wedge H^U + H^U \wedge (2a \wedge G^U - 2b \wedge F^U),\end{aligned}$$

et tous les termes du second membre s'éliminent.

DEFINITION 14. *Nous appellerons variété presque kählérienne une variété presque hermitiale dont la 4 - forme fondamentale est fermée.*

Si $*M$ est la forme adjointe de M, $\deg *M = 4n - 4$.

PROPOSITION 32. *$*M = kM^{n-1}$, où k est constante sur V_{4n}.*

M étant invariante par le groupe $Sp(n) \otimes_H Sp(1)$, il en est de même de M^{n-1} et de $*M$. Par suite si $*M \neq kM^{n-1}$, il existerait une 4-forme, à savoir $*M^{n-1}$, non colinéaire à M invariante par $Sp(n) \otimes_H Sp(1)$.

En particulier, nous verrons plus tard que l'espace projectif quaternionien $P_n(H)$ admet une structure kählériale naturelle : toute forme à dérivée covariante nulle dans la connexion riemannienne est harmonique, et par suite le nombre de Betti $b_4(P_n(H))$ serait strictement supérieur à 1. Or $b_4(P_n(H)) = 1$. D'où la proposition 32.

PROPOSITION 33. *Sur une variété presque kählériale, la forme fondamentale est non seulement fermée mais également cofermée.*

En effet, $\delta M = *^{-1} d * M = *^{-1} d(kM^{n-1}) = 0$.

PROPOSITION 34. *Les nombres de Betti de rang $4n$ $(0 \leq k \leq h)$ d'une variété presque kählériale compacte sont différents de zéro.*

Plus généralement, une variété compacte admettant une 4 - forme M réelle fermée partout de rang $4n$ est telle que

$$\int_{V_{4n}} M^n \neq 0 .$$

La forme M^n ne peut être homologue à zéro d'après la formule de Stokes et il en est de même nécessairement des formes M^r $(0 \leq r \leq n)$; ainsi $b_{4n}(V_{4n}) \neq 0$.

DEFINITION 15. *Lorsque la connexion riemannienne est naturellement associée à une connexion presque quaternale, nous dirons que la variété est pseudo-kählériale.*

Cette variété est à fortiori presque kählériale, puisqu'alors la forme fondamentale à dérivée covariante nulle dans une connexion sans torsion est nécessairement fermée.

Sur une variété pseudo-kählériale, on peut introduire cinq opérateurs notés $K_k(M)$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$ associés à la forme fondamentale M à dérivée covariante nulle [18, IV] dans la connexion riemannienne. Ces opérateurs transforment toute forme harmonique de degré p en une forme harmonique de degré $p + 4 - 2k$. $K_0(M)$ et $K_4(M)$ ne sont autres que les opérateurs

$$\varphi \to M \wedge \varphi = K_0(M)\varphi, \qquad K_4(M) = *^{-1} K_0(M) * .$$

IX

25. Réductibilité des variétés pseudo-kählériales.

PROPOSITION 35. *La réductibilité d'une variété pseudo-kählériale simplement connexe n'introduit que des variétés pseudo-kählériales irréductibles et des variétés localement unitaires.*

Soit V_{4n} une variété pseudo-kählériale simplement connexe. Soit, pour chaque ouvert U muni d'une structure presque quaternionienne, $\mathfrak{I}^U$ et $\mathfrak{J}^U$ les opérateurs correspondants. Dans la connexion riemannienne *ceux-ci ne sont pas à dérivée covariante nulle.* Désignons par σ_x le groupe d'holonomie homogène en $x \in U$ de la variété, considéré comme groupe de rotations. Un élément de σ_x transforme les opérateurs $\mathfrak{I}^U_x$, $\mathfrak{J}^U_x$ et $\mathfrak{K}^U_x = \mathfrak{I}^U_x \mathfrak{J}^U_x$ en $\mathfrak{I}'^U_x$, $\mathfrak{J}'^U_x$, $\mathfrak{K}'^U_x$ avec

$$\mathcal{I}'^U_x = \alpha\, \mathcal{I}^U_x + \beta\, \mathcal{J}^U_x + \gamma\, \mathcal{K}^U_x, \quad \mathcal{J}'^U_x, \quad \mathcal{K}'^U_x \ldots$$

Pour un choix convenable des repères, σ_x est sous-groupe de la représentation réelle de $Sp(n) \otimes_H Sp(1)$.

Soit T^1_x un sous-espace vectoriel réel de dimension $p \neq 1$ de T_x, invariant par σ_x et sur lequel σ_x induit une représentation linéaire *irréductible.*

Les sous-espaces $\mathcal{I}^U T^1_x$, $\mathcal{J}^U T^1_x$, $\mathcal{K}^U T^1_x$ ne sont pas alors nécessairement invariants par σ_x. Mais l'espace T^2_x, somme des espaces $\mathcal{I}^U T^1_x$, $\mathcal{J}^U T^1_x$, $\mathcal{K}^U T^1_x$, est invariant par σ_x.

Il en résulte que $T^1_x \cap T^2_x$ est invariant par σ_x. D'après l'irréductibilité : ou bien $T^1_x \cap T^2_x = T^1_x$ et T^1_x est invariant par $\mathcal{I}^U_x$, $\mathcal{J}^U_x$ et $\mathcal{K}^U_x$ qui opèrent sur cet espace, ou bien

$$T^1_x \cap T^2_x = 0,$$

et par suite T^2_x est la somme directe des espaces $\mathcal{I}^U T^1_x$, $\mathcal{J}^U T^1_x$ et $\mathcal{K}^U T^1_x$.

Dans le premier cas $p = 4q$ et σ_x induit sur T^1_x une représentation irréductible qui, pour un choix convenable des repères, est sous-groupe de la représentation réelle de $Sp(n) \otimes_H Sp(1)$.

L'examen du second cas se fait d'une manière analogue à celui du paragraphe 17. Celui-là ne peut se produire.

X

26. Etude particulière de l'espace projectif quaternionien.

$P_n(H)$ n'admet pas de structure presque complexe, donc à fortiori pas de structure presque quaternionienne.

En revanche nous allons montrer que $P_n(H)$ est très naturellement kählérial.

L'espace projectif quaternionien de dimension réelle $4n$ peut être défini de la manière suivante :

Dans l'espace numérique H^{n+1}, envisagé comme espace vectoriel à droite sur le corps H, muni de la métrique hermitienne quaternionienne habituelle, considérons la sphère S^{4n+3} définie par les vecteurs x de H^{n+1} satisfaisant à

(26. 1) $$\bar{x}.x = 1.$$

Prenons l'espace quotient de cette sphère par la relation d'équivalence suivante :

- deux vecteurs $\hat{x}$ et x sont équivalents s'il existe un quaternion λ tel que

$$\hat{x} = x\lambda,$$

où λ est nécessairement de module 1 ($\lambda^{-1} = \bar{\lambda}$).

Ainsi nous pouvons écrire, le point désignant une classe d'équivalence,

(26. 2) $$P_n(H) = \{ x^{\bullet} \mid x \in H^{n+1},\ \bar{x}.x = 1,\ x \sim x\lambda, \forall \lambda \in H,\ \bar{\lambda}\lambda = 1 \}.$$

L'espace fibré des vecteurs tangents $T(P_n(H))$ peut être réalisé comme le quotient de l'ensemble des couples (x, t) de vecteurs de H^{4n+1}, où $x \in S^{4n+3}$ et tels que

$$\bar{t}.x = 0,$$

par la relation d'équivalence :

- Deux couples $(\hat{x}, \hat{t})$ et (x, t) sont équivalents s'il existe un quaternion λ de norme 1 tel que

$$\hat{x} = x\lambda \quad \text{et} \quad \hat{t} = t\lambda .$$

Ainsi nous pouvons écrire :

(24.3) $$T(P_n(H)) = \{ (x, t)^{\bullet} \mid x \in H^{n+1},\ \bar{x}.x = 1,\ \ t \in H^{n+1},\ \bar{t}.x = 0,$$
$$(x, t) \sim (x\lambda, t\lambda)\ \ \forall \lambda \in H,\ \bar{\lambda}\lambda = 1 \}.$$

Définissons enfin l'espace fibré en algèbres de quaternions $H(P_n(H))$ comme le quotient de l'ensemble des couples (x, q), où $x \in S^{4n+3}$ et $q \in H$, par la relation d'équivalence :

Deux couples $(\hat{x}, \hat{q})$ et (x, q) sont équivalents s'il existe λ de norme 1, tel que

$$\hat{x} = x\lambda \quad \text{et} \quad \hat{q} = \lambda^{-1} q \lambda .$$

Ainsi nous pouvons écrire :

(24. 4) $H(P_n(H)) = \{(x, q)^{\bullet} \mid x \in H^{n+1},\ \bar{x}.x = 1,\ q \in H,$

$$(x, q) \sim (x\lambda, \lambda^{-1} q \lambda) \ \forall\, \lambda \in H,\ \bar{\lambda}\lambda = 1\}.$$

On peut remarquer pour la suite que $\lambda \in H$, $\bar{\lambda}\lambda = 1$ est équivalent à $\lambda \in Sp(1)$.

Nous définissons maintenant une *représentation* de $H(P_n(H))$ dans $T(P_n(H))$ comme suit :

(24. 5) $$(x, q)^{\bullet} : (x, t)^{\bullet} \to (x, tq)^{\bullet} .$$

Nous vérifions que

$$\overline{(tq)}x = 0, \qquad (x, tq) \sim (x\lambda, t\lambda\, \lambda^{-1} q\lambda) = (x\lambda, tq\lambda).$$

La *forme vectorielle fondamentale* est alors déterminée par la classe d'équivalence *modulo* $Sp(1)$ de

(24.6) $$(x, \theta), \text{ où } \theta = dx - x(\bar{x}.dx).$$

En effet,

$$\bar{x}.\theta = \bar{x}.dx - (\bar{x}.x)(\bar{x}.dx) = 0$$

et

$$(x, \theta)\{(x, t)\} = (x, t);$$

de plus,

$$d(x\lambda) - x\lambda(\bar{\lambda}\bar{x}.d(x\lambda)) =$$

$$= (dx)\lambda + x\,d\lambda - x(\bar{x}.dx)\lambda - x(\bar{x}.x)d\lambda = (dx - x(\bar{x}.dx))\lambda .$$

C'est donc bien une forme vectorielle invariante par $Sp(1)$.

Nous munissons maintenant $P_n(H)$ de la *métrique* suivante :

(26. 7) $$(x, t)^{\bullet} \to \bar{t}.t.$$

C'est la métrique de la sphère invariante par $Sp(1)$:

$$(\overline{t\lambda}).(t\lambda) = \bar{\lambda}(\bar{t}.t)\lambda = (\bar{t}.t)\bar{\lambda}\lambda = \bar{t}.t.$$

Nous en déduisons immédiatement le ds^2 de la sphère également invariant par $Sp(1)$.

Il suffit en effet de remplacer dans (26.7) t par θ défini dans (26.6). Il vient

$$ds^2 = [d\bar{x} - (d\bar{x}.x)\bar{x}] . [dx - x(\bar{x}.dx)] .$$

Soit en développant

$$ds^2 = d\bar{x}.dx - (d\bar{x}.x)(\bar{x}.dx) - (d\bar{x}.x)(\bar{x}.dx) +$$
$$+ (d\bar{x}.x)(\bar{x}.x)(\bar{x}.dx).$$

Nous obtenons

$$(26.8) \qquad ds^2 = d\bar{x}.dx - (d\bar{x}.x)(\bar{x}.dx).$$

Nous pouvons d'ailleurs vérifier directement que ce ds^2 est invariant par $Sp(1)$ opérant sur la sphère.

Soit maintenant ∇ la *connexion linéaire* définie par :

$$(26.9) \qquad (x, \nabla t) = (x, dt + x(d\bar{x}.t) - t(\bar{x}.dx)).$$

Il nous faut montrer successivement que le second membre de (26.9) est bien une forme vectorielle invariante par $Sp(1)$.

$$\bar{x}.\nabla t = \bar{x}.[dt + x(d\bar{x}.t) - t(\bar{x}.dx)]$$
$$= \bar{x}.dt + d\bar{x}.t = d(\bar{x}.t) = 0,$$

$$\nabla(t\lambda) = d(t\lambda) + (x\lambda)[d(\overline{\lambda}\bar{x})].(t\lambda) - (t\lambda)(\overline{\lambda}\bar{x}.d(x\lambda))$$
$$= (dt)\lambda + td\lambda + x(\lambda\overline{\lambda})d\bar{x}.t\lambda + x\lambda d\overline{\lambda}\bar{x}.t\lambda -$$
$$- t\lambda\overline{\lambda}\bar{x}.(dx)\lambda - t\lambda\overline{\lambda}\bar{x}.x d\lambda.$$

Soit

$$\nabla(t\lambda) = (dt)\lambda + x(d\bar{x}.t)\lambda - t(\bar{x}.dx)\lambda = (\nabla t)\lambda.$$

∇ est bien une connexion sur $P_n(H)$.

Celle-ci est *euclidienne*, car, de

$$\nabla(\bar{t}.t) = (\nabla\bar{t}).t + \bar{t}.\nabla t,$$

il vient successivement :

$$\nabla(\bar{t}.t) = d\bar{t}.t + (\bar{t}.dx)(\bar{x}.t) - (d\bar{x}.x)(\bar{t}.t)$$
$$+ \bar{t}.dt + (\bar{t}.x)(d\bar{x}.t) - (\bar{t}.t)(\bar{x}.dx).$$

Ainsi

$$\nabla(\bar{t}.t) = d(\bar{t}.t);$$

donc, si t est localement constant, $\nabla(\bar{t}.t) = 0$.

Calculons sa *forme de torsion* définie par

$$(X, \Sigma) = (x, d\theta + x(d\bar{x}. \wedge \theta) + \theta \wedge (\bar{x}.dx)). \tag{26.10}$$

Développons l'expression de Σ, compte tenu de *(26. 6)* : il vient

$$\begin{aligned} \Sigma = &-dx \wedge (\bar{x}.dx) - x(d\bar{x} \wedge .dx) + \\ &+ x(d\bar{x} \wedge .dx) - x(d\bar{x} \wedge .x)(\bar{x}.dx) + \\ &+ dx \wedge (\bar{x}.dx) - x(\bar{x}.dx) \wedge (\bar{x}.dx). \end{aligned}$$

Les termes se détruisant deux à deux, la forme de torsion est donc nulle et ainsi la connexion introduite n'est autre que la *connexion riemannienne*

Calculons enfin la *2- forme de courbure* (x, Ω) à l'aide de la formule

$$(x, \nabla^2 t) = (x, \Omega t). \tag{26.11}$$

Il vient successivement, compte tenu de *(26. 9)*,

$$\begin{aligned} \nabla^2 t &= d(\nabla t) + x(d\bar{x} \wedge .\nabla t) + \nabla t \wedge (\bar{x}.dx) \\ &= dx \wedge (d\bar{x}.t) - x(d\bar{x} \wedge .dt) - dt \wedge (\bar{x}.dx) + \\ &- t(d\bar{x} \wedge .dx) + x(d\bar{x} \wedge .dt) + x(d\bar{x} \wedge .x)(d\bar{x}.t) + \\ &- x(d\bar{x} . \wedge t(\bar{x}.dx)) + dt \wedge (\bar{x}.dx) + x(d\bar{x}.t) \wedge (\bar{x}.dx) + \\ &- t(\bar{x}.dx) \wedge (\bar{x}.dx). \end{aligned}$$

Il vient, après simplification,

$$\begin{aligned} \nabla^2 t = &[dx - x(\bar{x}.dx)] \wedge d\bar{x}.t + \\ &- t[d\bar{x} + (\bar{x}.dx)\bar{x}] \wedge .dx. \end{aligned}$$

Nous obtenons, compte tenu de *(24. 6)*

$$\nabla^2 t = \theta \wedge (\bar{\theta}.t) - t(\bar{\theta} \wedge .\theta). \tag{26.12}$$

Ainsi la *2*- forme de courbure est donnée par

$$(x, \Omega)(x, t) = (x, \theta \wedge (\bar{\theta}.t) - t(\bar{\theta} \wedge .\theta)). \tag{26.13}$$

La 2 - forme

$$\mu = d\bar{x} \wedge . dx - (d\bar{x} . x) \wedge (\bar{x} . dx) = \bar{\theta} \wedge . \theta$$

est à valeur dans $HP_n(H)$:

(26.14) $\overline{\mu(x)} = -\mu(x)$, $\mu(x\lambda) = \lambda^{-1}\mu(x)\lambda$.

Construisons la 4 - forme

$$\overline{M(x)} = M(x), \qquad M(x\lambda) = \lambda^{-1}M(x)\lambda = M(x).$$

C'est la 4 - *forme fondamentale* de la variété kählériale $P_n(H)$.

XI

27. Constructions d'exemples.

1°) Soit X une variété presque complexe de dimension $2n$. Désignons par

$V_{4n} = T(X)$ le fibré des vecteurs non nuls tangents à X,

p la projection canonique $z \in V_{4n} \Longrightarrow x = pz \in X$,

v le vecteur de $T_x(X)$ défini par z,

π une connexion régulière de vecteurs [1] ,

D la différentiation absolue dans π .

Pour tout ouvert U d'un recouvrement de X, muni d'un champ de corepères $\omega_z^U = [\,\omega^\alpha(z), \omega^{\alpha'}(z)\,]$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$, l'ensemble $(\omega^\alpha, \omega^{\alpha'}, Dv^\alpha, Dv^{\alpha'})$ est un champ de corepères sur $p^{-1}U$. Supposons de plus que ω_z^U soit adapté réel à la structure presque complexe de X.

Nous définirons une structure presque quaternionienne sur V_{4n} en considérant sur chaque U les n - formes locales à valeurs quaternioniennes:

(27. 1) $$\theta_z^\alpha = \tfrac{1}{2}(\omega^\alpha + i\omega^{\alpha'} + jDv^\alpha + kDv^{\alpha'}).$$

On vérifie immédiatement que, si dans $U \cap V \neq \emptyset$ pour $pz \in U \cap V$ on a

$$\omega_z^V = A_U^V \omega_z^U, \quad \text{où } A_U^V = \begin{bmatrix} L_U^V & M \\ -M_U^V & L_U^V \end{bmatrix},$$

les formes vectorielles quaternioniennes

$$\theta_z^U = (\theta^\alpha) \quad \text{et} \quad \theta_z^V$$

satisfont à

$$\theta_z^V = \mathfrak{A}_U^V(z)\, \theta_z^U, \quad \text{où} \quad \mathfrak{A} = L_U^V + iM_U^V .$$

PROPOSITION 36. *Une connexion linéaire régulière de vecteurs détermine canoniquement une structure presque quaternionienne sur le fibré tangent à une variété presque complexe.*

2°) L'exemple suivant s'apparente en un certain sens à celui que nous venons d'étudier. L'idée provient de la lecture de [12] .

PROPOSITION 37. *Soit X une variété presque complexe munie d'une connexion linéaire de vecteurs. Il existe alors un voisinage de la diagonale Δ de $X \times X$ qui admet une structure presque quaternonionienne.*

La variété presque complexe X étant munie d'une connexion, à tout $x \in X$ nous pouvons faire correspondre un voisinage normal $U_x \subset X$. Pour tout v de U_x, soit τ_x^y l'isomorphisme de $T_x(X)$ sur $T_y(X)$, défini par le transport le long de l'unique géodésique joignant x à y.

Considérons dans $X \times X$ le voisinage V_{4n} de la diagonale Δ :

$$\Delta = \{(x,y) \in X \times X \mid x = y\},$$

$$V_{4n} = \{(x,y) \in X \times X \mid y \in U_x\}.$$

Soit $(x, y, u, v) \in T_{(x,y)}(V_{4n})$ (i.e. $u \in T_x(X)$, $v \in T_y(X)$). Définissons la structure presque quaternionienne $\mathfrak{I}, \mathfrak{J}$ de V_{4n} par :

$$\mathfrak{I}(x,y,u,v) = (x, y, \mathfrak{I}_x u, -\tau_x^y \mathfrak{I}_x \tau_x^{-1y} v),$$

$$\mathfrak{J}(x,y,u,v) = (x, y, \tau_x^{-1y} v, -\tau_x^y u).$$

On vérifie immédiatement que

$$\mathfrak{I}^2 = \mathfrak{J}^2 = -id, \qquad \mathfrak{I}\mathfrak{J} + \mathfrak{J}\mathfrak{I} = 0.$$

Un cas particulier est celui de la sphère S^6 munie de la structure presque complexe définie à l'aide de l'algèbre des octaves de Cayley : Pour tout $x \in S^6$ supposée plongée dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^7$, il existe une rotation canonique de $\mathbf{R}^7$ amenant x sur tout point $y \in S^6 - x'$, où x' désigne le point antipodal de x. Par suite si nous désignons par $\overline{\Delta}$ la sous-variété fermée de $S^6 \times S^6$ définie par

$$\overline{\Delta} = \{(x, x') \in S^6 \times S^6 \mid x' \text{ antipode de } x\},$$

la variété $S^6 \times S^6 - \overline{\Delta}$ est presque quaternionienne d'après le raisonnement précédent (τ_x^y n'est autre, ici, que l'isomorphisme défini par la rotation canonique amenant T_x sur T_y).

Remarquons maintenant que, par $(x, y) \Longrightarrow (x, y')$, on peut transporter la structure presque quaternionienne de $S^6 \times S^6 - \overline{\Delta}$ sur $S^6 \times S^6 - \Delta$:

PROPOSITION 38. *La variété $S^6 \times S^6$ privée de la diagonale est canoniquement presque quaternionienne.*

3°) La sphère S^{4n+3} peut être réalisée de la manière suivante

$$S^{4n+3} = \{x \in \mathbf{H}^{n+1} \mid \overline{x}.x = 1\}.$$

Par suite, tout vecteur tangent t à S^{4n+3} en x se décompose d'une manière unique en

$$t = x\lambda + \tau,$$

où $\lambda \in \mathbf{H}$, $\tau \in \mathbf{H}^{n+1}$ avec $\overline{\lambda} = -\lambda$, $\overline{x}.\tau = 0$.

Ainsi S^{4n+3} est naturellement munie d'une structure presque quaternionienne partielle, c'est-à-dire possède un champ global de n-plans quaternioniens tangents $\mathcal{Q}_x$:

$$\tau \in \mathcal{Q}_x \Longleftrightarrow \overline{x}.\tau = 0, \qquad \mathcal{I}\tau = \tau i, \qquad \mathcal{J}\tau = \tau j,$$

et de trois champs globaux de vecteurs unitaires transversaux à $\mathcal{Q}_x$:

$$xi,\ xj,\ xk.$$

Par suite la variété $S^{4n+3} \times S^{4n'+3} \times S^{4n''+3} \times S^{4n'''+3}$ possède un champ global de $(n + n' + n'' + n''')$-plans quaternioniens tangents et 4×3 champs globaux de vecteurs unitaires transversaux que nous pouvons identifier à $\mathbf{H}^3$.

De même $S^{4n+3} \times S^1$ possède un champ global de n-plans quaternioniens tangents et 4 champs globaux de vecteurs unitaires transversaux que nous identifions à $\mathbf{H}$.

PROPOSITION 39. *Les variétés* $S^{4n+3} \times S^{4n'+3} \times S^{4n''+3} \times S^{4n'''+3}$ *et* $S^{4n+3} \times S^{1}$ *sont presque quaternioniennes.*

Ce sont les premiers exemples connus de variétés presque quaternioniennes non intégrables *compactes.*

XII

28. G_2 et $Spin(7)$-variétés.

1°) Soit $(1, e_i)$, $i \in Z_7$, une base de l'algèbre des octaves de Cayley : chaque triplet

$$(e_i, e_{i+1}, e_{i+3})$$

forme un système quaternionien.

Faisons opérer le groupe $SO(7)$ sur $\mathbf{R}^7$:

$$\mathbf{R}^7 = \bigoplus_{i \in Z_7} \mathbf{R} e_i .$$

Soit G_2 le plus grand sous-groupe de $SO(7)$ préservant la table de multiplication T, qui est une 2-forme vectorielle :

$$\forall X, Y \in \mathbf{R}^7 \Longrightarrow T(X, Y) = X.Y \in \mathbf{R}^7, \qquad X.Y = -Y.X.$$

$\mathbf{R}^7$ est, d'autre part, muni du produit scalaire canonique :

$$\forall X, Y \in \mathbf{R}^7 \Longrightarrow (X, Y) = \sum_{i \in Z_7} X^i Y^i .$$

Construisons la forme trilinéaire α :

$$\forall X, Y, Z \in \mathbf{R}^7 \Longrightarrow \alpha(X, Y, Z) = (X, Y.Z).$$

Cette forme est alternée comme on peut le vérifier en prenant successivement pour les X, Y, Z les e_i. Si nous désignons par (ω^i) la base duale de (e_i), il vient immédiatement :

$$\alpha = \sum_{i \in Z_7} \omega^i \wedge \omega^{i+1} \wedge \omega^{i+3} .$$

Nous construisons encore la 4-forme β :

$$\beta = \sum_{i \in Z_7} \omega^i \wedge \omega^{i+1} \wedge \omega^{i+2} \wedge \omega^{i+5}.$$

PROPOSITION 40. *G_2 laisse invariantes α et β.*

L'algèbre de Lie de G_2 peut être réalisée comme l'ensemble des matrices 7×7 : $A = (A_{ij})$ satisfaisant aux relations

$$A_{ij} + A_{ji} = 0, \quad A_{i+1,\, i+3} + A_{i+4,\, i+5} + A_{i+2,\, i+6} = 0.$$

Nous remarquons que les trois triplets

$$(e_i,\ e_{i+1,\, i+3}), \qquad (e_{i+3},\ e_{i+5},\ e_i), \qquad (e_{i+6},\ e_i,\ e_{i+2})$$

sont précisément ceux qui font intervenir e_i pour former un système quaternionien.

Désignons par φ_p une forme de degré p.

LEMME. *$\alpha \wedge \varphi_p = 0$ si et seulement si $\varphi_p = 0$ $(p \leq 2)$.*

Il suffit de démontrer ce lemme pour $p = 2$.

Soit φ_2 une 2-forme telle que $\alpha \wedge \varphi = 0$. Evaluons $\alpha \wedge \varphi$:

$$(\alpha \wedge \varphi)_{01235} = \varphi_{01} - \varphi_{25},$$

$$(\alpha \wedge \varphi)_{01346} = \varphi_{01} + \varphi_{46},$$

$$(\alpha \wedge \varphi)_{23456} = -\varphi_{46} + \varphi_{25}.$$

Par somme il vient $\varphi_{01} = 0$.

PROPOSITION 41. *Pour $p \leq 5$ toute p-forme φ_p admet une décomposition unique en somme directe du type*

$$\varphi_p = \alpha \wedge \mu_{p-3} + \mu_p, \quad \text{où} \quad \alpha \wedge (*\mu_{\bullet}) = 0.$$

Cette proposition est vraie pour $r = 0, 1, 2$ à cause du degré de α. Démontrons-la pour $p = r + 3$.

Si μ_{r+3} satisfait à $\alpha \wedge *\mu_{r+3} = 0$, il en résulte que, pour toute μ_r,

(28. 1) $$(*^{-1}\alpha \wedge *\mu_{2+3},\ \mu_r) = 0,$$

soit encore

$$(\mu_{2+3}, \alpha \wedge \mu_r) = 0. \tag{28. 2}$$

Inversement, si μ_{r+3} est orthogonale dans $\overset{r+3}{\wedge} \mathbf{R}^7$ à $\alpha \wedge \mu_r$, nous en déduisons *(29. 1)* pour tout μ_r (puisque $\alpha \wedge \mu_r \neq 0 \Longrightarrow \mu_r \neq 0$), donc $\alpha \wedge * \mu_{r+3} = 0$. D'où la décomposition annoncée.

2°) Faisons opérer *Spin (7)* $\subset$ *SO(8)* dans $\mathbf{R}^8$

$$\mathbf{R}^8 = \mathbf{R}\, e_{7'} \oplus [\underset{i \in Z_7}{\oplus} \mathbf{R}\, e_i] .$$

Le précédent groupe G_2 est le groupe d'isotropie du vecteur $e_{7'}$ et opère dans le 7-plan d'équation $\omega^{7'} = 0$, où nous désignons par (ω^α) la base duale de (e_α) $[\alpha \in \{7'\} \cap \mathbf{Z}_7]$.

Le groupe de Lie de *Spin (7)* peut être réalisé comme l'ensemble des matrices $A = (A_{\alpha\beta})$ satisfaisant aux relations :

$$\begin{aligned} &A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha} = 0, \\ &A_{7'i} + A_{i+1,\, i+3} + A_{i+4,\, i+5} + A_{i+2,\, i+6} = 0. \end{aligned} \tag{28.3}$$

Construisons la *4* - forme γ :

$$\gamma = \omega^{7'} \wedge \alpha' + \beta' ,$$

où α' et β' sont les extensions suivantes de α et β à $\mathbf{R}^8$:

$$\alpha' = \alpha \circ P, \qquad\qquad \beta' = \beta \circ P,$$

où P désigne la projection évidente de $\mathbf{R}^8$ sur $\mathbf{R}^7$.

$$\begin{aligned} \gamma = &\sum_{i \in Z_7} \omega^{7'} \wedge \omega^i \wedge \omega^{i+1} \wedge \omega^{i+3} + \\ &+ \sum_{i \in Z_7} \omega^i \wedge \omega^{i+1} \wedge \omega^{i+2} \wedge \omega^{i+5}. \end{aligned} \tag{28.4}$$

PROPOSITION 42 · *Spin(7) laisse* γ *invariante.*

Nous avons effectué le calcul direct.

LEMME. $\gamma \wedge \varphi_p = 0$ *si et seulement si* $\varphi_p = 0$ $(p \leq 2)$.

Soit φ une *2* - forme telle que $\gamma \wedge \varphi = 0$. Evaluons $\gamma \wedge \varphi$:

$$(\gamma \wedge \varphi)_{132645} = \varphi_{13} + \varphi_{26} + \varphi_{45}$$
$$(\gamma \wedge \varphi)_{264507'} = -\varphi_{26} - \varphi_{45} + \varphi_{07'}$$
$$(\gamma \wedge \varphi)_{4507'13} = -\varphi_{45} + \varphi_{07'} - \varphi_{13}$$
$$(\gamma \wedge \varphi)_{07'1326} = \varphi_{07'} - \varphi_{13} - \varphi_{26}.$$

Il vient immédiatement $\varphi_{07'} = 0$, puis $\varphi_{13} = 0\ldots$

PROPOSITION 43. *Pour $p \leq 3$, toute p-forme φ_p admet une décomposition unique en somme directe du type*

$$\varphi_p = \gamma \wedge \mu_{p-4} + \mu_p, \quad où\ \gamma \wedge * \mu = 0.$$

La démonstration est analogue au cas précédent.

3°) Soit G un sous-groupe fermé du groupe orthogonal $O(d)$.

DEFINITION 16. *Nous appelons G-variété une variété riemannienne V_d de dimension d dont le groupe d'holonomie homogène est un sous-groupe de G. L'espace fibré des repères tangents $E[V_d, O(d)]$ admet un sous-fibré $E^a[V_d, G]$.*

Les résultats précédents s'appliquent alors en tout point $x \in V_d$; en particulier :

PROPOSITION. *Toute G_2-variété V_7 admet une 3-forme globale et une 4-forme globale à dérivées covariantes nulles dans la connexion riemannienne.*

PROPOSITION. *Toute Spin(7)-variété V_8 admet une 4-forme globale à dérivée covariante nulle.*

Les décompositions établies aux paragraphes 1°) et 2°) sont globales.

En manipulant les nombres de Betti $b_k(V_d)$, il vient, en supposant V_d compacte :

$$b_3(V_7) \neq 0, \qquad b_3(V_7) \geq b_1(V_7),$$
$$b_4(V_8) \neq 0, \qquad b_4(V_8) \geq b_3(V_8).$$

4°) Désignons maintenant par R_{ijkl} le tenseur de courbure de la connexion riemannienne de V_7. Rapporté à des repères de $E^a[V_7, G_2]$ il satisfait, en outre, aux relations suivantes :

$$(28.5)\ R_{i+1,\, i+3,\, kl} + R_{i+4,\, i+5,\, kl} + R_{i+2\,,\, i+6,\, kl} \quad \forall k, l, i \in Z_7 .$$

Calculons le tenseur de Ricci

$$R_{ij} = \sum_{l \in Z_7} \mathbf{R}_{iljl} .$$

Il nous suffit de calculer R_{oo} et R_{o1}.

$$R_{oo} = R_{o1o1} + R_{o2o2} + R_{o3o3} + R_{o4o4} + R_{o5o5} + R_{o6o6} ,$$

$$R_{o1} = R_{o212} + R_{o313} + R_{o414} + R_{o515} + R_{o616} .$$

Utilisons les relations *(28. 5)* et tenons compte de $R_{ijkl} = R_{klij}$:

$$\begin{aligned} R_{oo} = {} & R_{o125} + R_{o164} + R_{o243} + R_{o251} + R_{o324} + R_{o356} \\ & + R_{o416} + R_{o432} + R_{o512} + R_{o563} + R_{o635} + R_{o641} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{oo} = {} & R_{o2o5} + R_{o236} + R_{o354} + R_{o362} + R_{o435} \\ & + R_{o46o} + R_{o543} + R_{o52o} + R_{o623} + R_{o6o4} . \end{aligned}$$

Ces deux expressions sont nulles en vertu des identités de Ricci.

PROPOSITION 44. *Toute G_2-variété V_7 est à courbure de Ricci nulle.*

De même :

PROPOSITION 45. *Toute Spin(7)-variété V_8 est à courbure de Ricci nulle.*

A ces deux variétés se trouve appliqué le théorème établi au paragraphe 16.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. AKBAR-ZADEH. Variétés finslériennes, Thèse, Paris (1959).

[2] H. AKBAR-ZADEH et E. BONAN. Structure presque kählérienne sur le fibré tangent à une variété finslérienne. C. R. Acad. Sc., Paris, t. 259 (1964), p. 5581.

[3] M. BERGER. Sur les groupes d'holonomie homogènes des variétés riemanniennes, Thèse, Paris, (1955).

[4] M. BERGER. Remarques sur les groupes d'holonomie des variétés riemanniennes, C. R. Acad. Sc., Paris, t. 262, (1966), p. 1313.

[5] D. BERNARD. Sur les G-structures, Thèse, Paris, (1960).

[6] E. BONAN. Sur les structures presque quaternioniennes, C. R. Acad. Sc., Paris, t. 258, (1964), p. 792.

[7] E. BONAN. Connexions presque quaternioniennes, C. R. Acad. Sc., Paris, t. 258, (1964), p. 1696.

[8] E. BONAN. Structures presque hermitiennes quaternioniennes, C. R. Acad. Sc., Paris, t. 258, (1964), p. 1988.

[9] E. BONAN. Tenseur de structure..., C. R. Acad. Sc., Paris, t. 259, (1964), p. 45.

[10] E. BONAN. Structure presque quaternale, C. R. Acad. Sc., Paris, t. 261, (1965), p. 5445.

[11] E. BONAN. Sur les variétés riemanniennes à groupe d'holonomie G_2 ou *Spin(7)*, C. R. Acad. Sc., Paris, t. 262, (1966), p. 127.

[12] C. EHRESMANN. Sur la théorie des espaces fibrés, Coll. Top. Alg., Paris, (1947).

[13] C. EHRESMANN. Les connexions infinitésimales dans un espace fibré, Coll. Top. Alg., Bruxelles (1950).

[14] V. Y. KRAINES. Topology of quaternionic manifolds, Bull. Amer. Math. Soc., (1965), p. 71.

[15] P. LIBERMANN. Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales, Annali di Matematica, (1954).

[16] P. LIBERMANN. Sur les structures presque complexes et autres structures infinitésimales régulières, Bull. Soc. Math. France, 83 (1955).

[17] A. LICHNEROWICZ. Généralisation de la géométrie kählérienne globale, Coll. Géométrie Différentielle, Louvain, (1951).

[18] A. LICHNEROWICZ. Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie, Dunod, Paris, (1954).

[19] A. LICHNEROWICZ. Géométrie des groupes de transformations, Dunod, Paris, (1958).

[20] E. MARTINELLI. Annali di Matematica (4), 1960, p. 49.

[21] M. OBATA. Affine connections on manifolds with almost complex, quaternion or hermitian structure, Jap. J. Math., 26, (1956).

[22] M. OBATA. Affine connections in a quaternion manifold and transformations preserving the structure, J. Math. Soc. Japan, 9, (1957).

[23] M. OBATA. Hermitian manifolds with quaternion structure, Tôhoku Math. J., 10, (1958).

[24] H. WAKAKUWA. On riemannian manifolds with homogenous holonomy groups $Sp(n)$, Tôhoku Math. J., 10, (1958).

[25] H. WAKAKUWA. On almost complex symplectic manifolds, Tôhoku Math. J., 12, (1960).

[26] H. WAKAKUWA. On some affine connections in manifolds with almost quaternion structure, Tensor, 11, (1961).

[27] H. WAKAKUWA. On affine connections in an almost complex symplectic manifold, Tensor, 11, (1961).