CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

MICHEL HACQUE

Les T-espaces et leurs applications préfaisceaux et faisceaux sur les situations

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 9, n° 3 (1967), p. 281-388

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1967__9_3_281_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE

ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE *IX, 3*

LES T - ESPACES ET LEURS APPLICATIONS
PREFAISCEAUX ET FAISCEAUX SUR LES SITUATIONS

par Michel HACQUE (*)

SOMMAIRE

(*) Thèse de Doctorat d'Etat soutenue à Paris le 16 Juin 1967.

LES T- ESPACES ET LEURS APPLICATIONS

INTRODUCTION

De nombreux auteurs ont été amenés, pour des raisons diverses, à introduire et à étudier des structures voisines des structures fondamentales d'espace topologique et d'espace uniforme. Parmi les principales, on peut signaler les espaces pré-topologiques de G. Choquet [2], les espaces quasi-uniformes de D. Tamari [7] et les espaces de proximité de Yu M. Smirnov [6]. Fondées sur un outil privilégié (convergences des filtres, entourages, relations de proximité, etc...) chacune de ces théories possède un vocabulaire propre et des méthodes particulières. Dans un but unificateur, on montre que la structure de T- espace introduite ici et pour laquelle on dispose simultanément des principales notions de caractères topologiques telles que : voisinages, adhérence, proximité, éloignement, continuité, etc...) constitue une généralisation commune de ces structures dont on donne diverses caractérisations et qu'elle est appropriée à une étude systématique des « structures de types topologiques » dont les propriétés fournissent de nouvelles applications aux espaces topologiques et aux espaces uniformes.

L'étude des T- espaces définis sur un même ensemble met en évidence plusieurs procédés permettant d'associer à un T- espace d'un type donné, un T- espace d'un autre type donné. Ces procédés permettent d'étudier l'ensemble des T- espaces d'un certain type, compatibles avec un T- espace donné, ce qui fournit en particulier plusieurs caractérisations des espaces topologiques faiblement proximisables, proximisables et uniformisables, ainsi que des espaces de proximité faible et de proximité.

L'étude des espaces pré-uniformes associés à un espace topologique conduit à diverses caractérisations des espaces topologiques quasinormaux, normaux, localement quasi- compacts et localement compacts qui complètent et généralisent certains résultats connus démontrés par R. Doos [4] et P. Samuel [5] .

Ces résultats sont obtenus de façon interne en n'utilisant que des T- espaces définis sur un même ensemble, sans recours à des compactifications ou à des complétions. De même, la notion de famille dyadique continue évite l'usage des fonctions numériques continues qui ne figurent que dans un seul théorème indépendant du contexte et qui est destiné à montrer que certains des résultats obtenus donnent en particulier de nouvelles démonstrations de propriétés classiques telles que le premier théorème de Urysohn.

1. INTRODUCTION DES T- ESPACES SIMPLES

1.1. Les T - espaces simples.

DEFINITION 1.1.1. *Une T - application* sur un ensemble E est une application ρ de $\mathcal{P}(E)$ dans l'ensemble $\mathcal{H}(E)$ des parties non vides, héréditaires à droite et filtrantes à gauche de $\mathcal{P}(E)$, vérifiant :

(T_1) $\rho(\emptyset) = \mathcal{P}(E)$;

(T_2) $Z \in \rho(X)$ implique $X \subset Z$;

(T_3) $\rho(X \cup Y) = \rho(X) \cap \rho(Y)$.

Par exemple, toute topologie sur E détermine une T - application ρ pour laquelle $\rho(X)$ est l'ensemble des voisinages de X.

L'ensemble $\mathcal{E}(E)$ des T - applications sur E est ordonné par la relation $\rho_1 \subset \rho_2$ (ρ_2 est *plus fine* que ρ_1) et il est muni d'une loi de composition pour laquelle $\rho = \rho_1 \circ \rho_2$ est caractérisée par

$$\rho(X) = \bigcup_{Y \in \rho_2(X)} \rho_1(Y).$$

Il en résulte facilement que $\mathcal{E}(E)$ est *un demi-groupe réticulé complet entier avec zéro.*

DEFINITION 1.1.2. Un *T - espace simple* est un ensemble E muni d'une T - application ρ sur E qui détermine une *T - structure d'ordre* ρ.

Par exemple, tout espace topologique est un T - espace simple.

DEFINITION 1.1.3. Une *relation de proximité* sur un ensemble E est une relation binaire δ sur $\mathcal{P}(E)$ vérifiant :

(P_1) $Y \delta X$ implique $Y \neq \emptyset$ et $X \neq \emptyset$;

(P_2) $Y \cap X \neq \emptyset$ implique $Y \delta X$;

(P_3) $(Y_1 \cup Y_2) \delta X$ est équivalent à $Y_1 \delta X$ ou $Y_2 \delta X$;

(P_4) $Y \delta (X_1 \cup X_2)$ est équivalent à $Y \delta X_1$ ou $Y \delta X_2$.

La négation $\overline{\delta}$ d'une relation de proximité δ est une *relation d'éloignement.*

PROPOSITION 1.1.4. *Entre l'ensemble des* T*-applications* ρ *sur* E *et l'ensemble des relations de proximité* δ *sur* E, *il existe une bijection canonique caractérisée par la condition :*

« $Y \delta X$ équivaut à l'existence d'un filtre plus fin que $\rho(X)$ porté par Y ».

La démonstration est laissée aux soins du lecteur.

CONSEQUENCE 1.1.5. Un T-*espace simple* sur un ensemble E peut être caractérisé par une T-*application* ρ, par une *relation de proximité* δ ou par une *relation d'éloignement* $\bar{\delta}$, ces trois éléments étant *associés.*

Soit $(E, \rho) = (E, \delta) = (E, \bar{\delta})$ un T-espace simple.

Les éléments $Y \in \rho(X)$ sont les ρ-*voisinages* ou les *voisinages d'ordre* ρ de X et X est alors ρ-*intérieur* à Y.

Si $Y \delta X$, alors Y est ρ-*proche* de X et X est ρ-*adhérent* à Y.

Si $Y \bar{\delta} X$, alors Y est ρ-*éloigné* de X et X est ρ-*extérieur* à Y.

REMARQUES 1.1.6. Pour $X \neq \emptyset$, les parties Y ρ-*proches* de X sont les éléments de la *grille* [3] associée au *filtre* des ρ-voisinages de X.

De plus, si le T-espace simple est un espace topologique, les notions précédentes coïncident avec les notions analogues dans un espace topologique.

1.2. Caractérisation de certaines espèces de T-espaces simples.

DEFINITION 1.2.1. Un T-espace simple $(E, \rho) = (E, \delta)$ sera dit :

(*a*) *Ponctuel* si $\rho(X) = \bigcap_{x \in X} \rho(x)$.

(*b*) *Parfait* s'il est ponctuel et si les filtres $\rho(X)$ sont principaux.

(*c*) *Symétrique* si δ est symétrique.

(*d*) *Idempotent* si $\rho^2 = \rho$.

Une T-application ρ sur E associée à δ, détermine une application α_ρ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ définie par la condition

$$\alpha_\rho(Y) = \{x ; Y \delta x\} .$$

LEMME 1.2.2. *Pour toute* T-*application* ρ, *l'application* α_ρ *est une pré-adhérence* [2] *sur* E *et, réciproquement, toute pré-adhérence* α *sur* E

détermine une T-application ponctuelle ρ_α associée à δ qui est caractérisée par la condition :

$$Y \delta X \Longleftrightarrow \alpha(Y) \cap X \neq \emptyset.$$

Il est facile de montrer que α_ρ vérifie les conditions

$$\alpha_\rho(\emptyset) = \emptyset, \ Y \subset \alpha_\rho(Y) \ \text{ et } \ \alpha_\rho(X \cup Y) = \alpha_\rho(X) \cup \alpha_\rho(Y),$$

ce qui prouve que α_ρ est une pré-adhérence. Réciproquement si α est une pré-adhérence, il est immédiat que ρ_α est une T-application ponctuelle.

COROLLAIRE 1.2.3. *Entre l'ensemble des T-applications ponctuelles ρ sur E associées à δ et l'ensemble des pré-adhérences α sur E, il existe une bijection canonique caractérisée par :*

$$\complement Y \in \rho(X) \Longleftrightarrow Y \overline{\delta} X \Longleftrightarrow \alpha(Y) \cap X = \emptyset.$$

En effet, il est immédiat que, si $\rho = \rho_\alpha$, alors $\alpha = \alpha_\rho$.

LEMME 1.2.4. *Pour qu'une pré-adhérence α sur E soit une adhérence [2] ($\alpha^2 = \alpha$), il faut et il suffit que la T-application ponctuelle ρ associée soit idempotente ($\rho^2 = \rho$).*

La démonstration est laissée aux soins du lecteur.

LEMME 1.2.5. *Pour qu'un T-espace simple symétrique (E, δ) soit idempotent, il faut et il suffit que deux parties Y et X ρ-éloignées ($Y \overline{\delta} X$) admettent des ρ-voisinages V_Y et V_X disjoints.*

La démonstration est laissée aux soins du lecteur.

RAPPELS 1.2.6. Les notions classiques voisines de la notion d'espace topologique comportent en particulier les *espaces pré-topologiques* [2] et les *espaces de proximité* [6].

Un *espace pré-topologique* au sens de G. Choquet est un ensemble E muni d'une structure caractérisée par la donnée, pour tout $x \in E$, d'un filtre $\rho(x)$ de *pseudo-voisinages* ou par la donnée d'une *pré-adhérence* α sur E.

Un *espace de proximité* au sens de Efremovič ou de Yu-M.Smirnov est un ensemble E muni de la structure définie par une relation binaire δ sur $\mathcal{P}(E)$ vérifiant un système d'axiomes équivalent au suivant :

(EP_1) $Y \delta X \Rightarrow X \delta Y$;

(EP_2) $(Y_1 \cup Y_2) \delta X \Longleftrightarrow Y_1 \delta X$ ou $Y_2 \delta X$;

(EP_3) $x \delta x$ pour tout $x \in E$;

(EP_4) $Y \overline{\delta} \emptyset$ pour tout $Y \in \mathcal{P}(E)$;

(EP_5) Si $Y \overline{\delta} X$, il existe U et V vérifiant

$$Y \overline{\delta} (E - U), \quad X \overline{\delta} (E - V), \quad U \cap V = \emptyset .$$

En remarquant que, pour tout espace topologique, la relation δ définie par

$$Y \overline{\delta} X \Longleftrightarrow \overline{Y} \cap X = Y \cap \overline{X} = \emptyset$$

vérifie les quatre premiers axiomes précédents mais non nécessairement (EP_5), il sera utile d'envisager la structure suivante.

DEFINITION 1.2.7. Un *espace de proximité faible* est un ensemble E muni d'une relation binaire δ sur $\mathcal{P}(E)$ vérifiant les axiomes (EP_1), (EP_2), (EP_3), (EP_4).

THEOREME 1.2.8. *Les T-espaces admettent les sous-espèces suivantes :*

(a) Les espaces pré-topologiques *sont les* T-espaces simples ponctuels.

(b) Les espaces topologiques *sont les* T-espaces simples ponctuels idempotents.

(c) Les espaces de proximité faible *sont les* T-espaces simples symétriques.

(d) Les espaces de proximité *sont les* T-espaces simples symétriques idempotents.

L'assertion *(a)* résulte du corollaire 1.2.3 et du fait que les espaces pré-topologiques peuvent être caractérisés par une pré-adhérence [2]. Pour $X \neq \emptyset$, le filtre $\rho(X)$ est l'intersection des filtres de pseudo-voisinages $\rho(x)$ des éléments $x \in X$ et la pré-adhérence α est associée à ρ.

L'assertion *(b)* résulte de *(a)* et du lemme 1.2.4, puisque les espaces topologiques peuvent être caractérisés par une adhérence α.

L'assertion *(c)* résulte du fait que la symétrie de δ et les axiomes (P_1), (P_2), (P_3), (P_4) constituent une condition équivalente aux axiomes (EP_1), (EP_2), (EP_3), (EP_4).

L'assertion *(d)* résulte de *(c)* et du lemme 1.2.5 qui montre que la condition $\rho^2 = \rho$ équivaut à l'axiome (EP_5).

1.3. Applications T-continues.

DEFINITION 1.3.1. Soient $S = (E, \rho) = (E, \delta)$ et $S' = (E', \rho') = (E', \delta')$, deux T-espaces simples.

Une application f de S dans S' est *T-continue* si, pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, l'image réciproque par f de tout ρ'-voisinage de $f(X)$ est un ρ-voisinage de X.

Etant donnée une application f de E dans E', pour toute relation de proximité δ' sur E', il est immédiat que la relation $f^*[\delta']$ dans $\mathcal{P}(E)$ caractérisée par

$$Y(f^*[\delta'])X \Longleftrightarrow f(Y)\,\delta' f(X)$$

est une relation de proximité sur E, appelée *l'image réciproque de* δ' *par* f.

De même, en posant $\tilde{f} = \complement_{E'} \circ f \circ \complement_E$, pour toute T-application ρ' sur E', il est facile de vérifier que l'application $f^*[\rho']$ caractérisée par

$$f^*[\rho'] = \tilde{f}^{-1} \circ \rho' \circ f$$

est une T-application sur E, appelée *l'image réciproque de* ρ' *par* f.

THEOREME 1.3.2. *Soient* $S = (E, \rho) = (E, \delta)$ *et* $S' = (E', \rho') = (E', \delta')$ *deux T-espaces simples. Pour toute application f de E dans E', il y a équivalence des conditions suivantes :*

(a) L'application f est une application T-continue *de S dans S'.*

(b) $f^*[\rho'] \subset \rho$. *[L'image réciproque $f^*[\rho']$ de ρ' par f est* moins fine *que* ρ].

(c) $\delta \subset f^*[\delta']$. [*L'image réciproque* $f^*[\delta']$ *de* δ' *par* f est moins fine *que* δ].

(d) Si Y *est* ρ*-proche de* X*, alors* $f(Y)$ *est* ρ'*-proche de* $f(X)$.

(e) Si Y' *est* ρ'*-éloigné de* X'*, alors* $f^{-1}(Y')$ *est* ρ*-éloigné de* $f^{-1}(X')$.

En posant $X' = f(X)$ et $Z' = \complement_{E'} f(Y)$, la condition *(a)* entraîne que la relation $f(Y)\,\overline{\delta'}\,f(X)$, qui s'écrit $Z' \in \rho'(X')$, implique $f^{-1}(Z') \in \rho(X)$ avec $f^{-1}(Z') \cap Y = \emptyset$, ce qui donne $Y\,\overline{\delta}\,X$. Ainsi *(a)* implique *(d)*. Il est immédiat que *(d)* implique *(e)*. Si $Z' \in \rho'[f(X)]$, en posant

$$X' = f(X), \quad Y' = \complement_{E'} Z' \quad \text{et} \quad Z = f^{-1}(Z') = \complement_E f^{-1}(Y'),$$

il en résulte $Y'\,\overline{\delta'}\,X'$ et la condition *(e)* entraîne alors $f^{-1}(Y')\,\overline{\delta}\,f^{-1}(X')$, qui donne $Z \in \rho[f^{-1}(X')]$, et par suite $Z \in \rho(X)$. Ainsi *(e)* implique *(a)*. L'équivalence de *(c)* et de *(d)* est évidente. Comme il est facile de vérifier que $f^*[\rho']$ et $f^*[\delta']$ sont associées, il en résulte l'équivalence de *(b)* et de *(c)*, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 1.3.3. *Le composé de deux applications T-continues est une application T-continue.*

1.4. Exemples de T-espaces simples.

Les principaux exemples de T-espaces simples sont donnés par le théorème 1.2.8. Ce sont donc les *espaces pré-topologiques, topologiques, de proximité faible et de proximité.*

REMARQUE 1.4.1. Le théorème 1.3.2 montre que la notion d'application *T-continue* de S dans S' coïncide avec la notion d'application *pseudo-continue* si S et S' sont *pré-topologiques*, et avec la notion d'application *continue* si S et S' sont *topologiques.* De même, si S et S' sont des *espaces de proximité*, les applications T-continues de S dans S' sont les morphismes habituellement associés aux espaces de proximité.

De plus, il n'y a plus d'obstacle à envisager par exemple une application T-continue d'un espace topologique dans un espace de proximité ou dans un espace de proximité faible.

Par exemple, pour tout espace S pré-topologique ou topologique sur E, la relation de proximité δ définie par

$$Y\overline{\delta}X \Longleftrightarrow \overline{Y} \cap X = Y \cap \overline{X} = \emptyset$$

caractérise le plus fin des espaces de proximité faible sur E moins fins que S.

2. INTRODUCTION DES T-ESPACES

2.1. Les T-espaces.

Une *T-base* sur un ensemble E est un *ensemble filtrant à droite* de T-applications sur E. L'ensemble des T-bases sur E est *pré-ordonné* par la relation $r \subset r'$ [r' est *plus fine* que r] caractérisée par la condition: pour toute $\rho_i \in r$, il existe $\rho'_j \in r'$ telle que $\rho_i \subset \rho'_j$. Cette relation de pré-ordre détermine une *relation d'équivalence* et une relation d'ordre sur l'ensemble quotient.

DEFINITION 2.1.1. Avec la terminologie précédente un *T-système* sur un ensemble E est une *classe d'équivalence* de *T-bases* sur E.

Par abus de notations, un T-système sera souvent désigné par l'une de ses T-bases.

Par exemple, toute T-application ρ caractérise une T-base simple $\{\rho\}$ qui détermine un T-système simple noté simplement $[\rho]$ ou même ρ.

DEFINITION 2.1.2. Un *T-espace* est un ensemble E muni d'un T-système $[\rho_i]$ sur E.

Par exemple, les T-espaces simples sont les T-espaces admettant une *T-base simple,* c'est-à-dire une T-base caractérisée par une seule T-application.

Dans un T-espace $(E, [\rho_i])$, chaque T-application $\rho_i \in [\rho_i]$ détermine une T-structure simple d'ordre ρ_i sur E qui donne naissance aux notions d'ordre ρ_i [ρ_i-voisinages, relation de proximité δ_i, etc...].

REMARQUE 2.1.3. Un T-espace $(E, [\rho_i])$ est caractérisé par un *système inductif filtrant à droite* de T-espaces simples (E, ρ_i).

DEFINITION 2.1.4. Une T-base $[\rho_i]$ est *pré-idempotente* si elle est équivalente à la T-base $[\rho_i^2]$.

Un T-espace est *pré-idempotent* s'il admet une T-base pré-idempotente.

Par exemple, pour un T-espace simple (E, ρ), l'équivalence de $[\rho]$ et de $[\rho^2]$ se traduit par l'égalité $\rho^2 = \rho$. Les T-espaces simples pré-idempotents sont donc les T-espaces simples idempotents.

DEFINITION 2.1.5. Un T-espace sera dit d'un certain type (par exemple ponctuel, parfait, symétrique, idempotent) s'il admet une T-base constituée de T-applications de ce type.

2.2. Caractérisation de certaines espèces de T-espaces.

LEMME 2.2.1. *Entre l'ensemble des T-applications parfaites ρ sur E associées à δ et l'ensemble des sur-ensembles V de la diagonale Δ de $E \times E$, il existe une bijection canonique caractérisée par la condition*

$$Y \in \rho(X) \Longleftrightarrow V(X) \subset Y$$

ou par la condition

$$Y \delta X \Longleftrightarrow \text{il existe } y \in Y \text{ et } x \in X \text{ tels que } (x, y) \in V.$$

De plus, pour que δ soit symétrique, il faut et il suffit que V soit symétrique. En outre, si ρ et ρ' sont associées à V et V', la relation $\rho \subset \rho'^2$ est équivalente à $V'^2 \subset V$.

La démonstration est laissée aux soins du lecteur.

RAPPELS 2.2.2. Un *espace uniforme* est un ensemble E muni de la structure déterminée par un filtre $\mathcal{V}$ sur $E \times E$ vérifiant :

(U_1) Tout élément $V \in \mathcal{V}$ contient la diagonale Δ de $E \times E$.

(U_2) La relation $V \in \mathcal{V}$ entraîne $V^{-1} \in \mathcal{V}$.

(U_3) Pour tout $V \in \mathcal{V}$, il existe $W \in \mathcal{V}$ tel que $W^2 \subset V$.

Il sera commode d'appeler *filtre diagonal* un filtre $\mathcal{V}$ sur $E \times E$

vérifiant (U_1).

Un *espace quasi-uniforme* au sens de Tamari [7] est un ensemble E muni de la structure définie par un filtre diagonal $\mathcal{U}$ vérifiant (U_3).

Il sera utile d'envisager les notions suivantes.

DEFINITION 2.2.3. Un *espace pré-uniforme* est un ensemble E muni de la structure définie par un filtre diagonal $\mathcal{U}$.

Un *espaces faiblement uniforme* est un ensemble E muni de la structure définie par un filtre diagonal $\mathcal{U}$ vérifiant (U_2).

THEOREME 2.2.4. *Les T-espaces admettent les sous-espèces suivantes:*

(a) Les espaces pré-uniformes *sont les T-* espaces parfaits.

(b) Les espaces faiblement uniformes *sont les T-* espaces parfaits symétriques.

(c) Les espaces quasi-uniformes *sont les T-* espaces parfaits pré-idempotents.

(d) Les espaces uniformes *sont les T-* espaces parfaits symétriques pré-idempotents.

Cela résulte immédiatement des définitions et du lemme 2.2.1.

2.3. Applications T-continues.

DEFINITION 2.3.1. Soient $S = (E, [\rho_i])$ et $S' = (E', [\rho'_j])$ deux T-espaces. Une application f de S dans S' est T-*continue* si, pour toute $\rho'_j \in [\rho'_j]$, il existe $\rho_i \in [\rho_i]$ telle que l'application f soit T-continue du T-espace simple (E, ρ_i) dans le T-espace simple (E', ρ'_j).

Cette définition est compatible avec la terminologie introduite antérieurement puisque, pour des T-espaces simples, la notion de T-continuité ainsi caractérisée coïncide avec celle de la définition 1.3.1.

Les applications T-continues possèdent des caractérisations analogues à celles du théorème 1.3.2 à condition de faire intervenir les divers ordres ρ'_j et ρ_i, de façon évidente.

2.4. Exemples de T-espaces.

Les principaux exemples de T-espaces sont constitués par les différents exemples de T- espaces simples déjà indiqués, auxquels s'ajoutent les *espaces pré-uniformes, faiblement uniformes, quasi-uniformes* et *uniformes* donnés par le théorème 2. 2. 4.

REMARQUE 2. 4. 1. La notion d'application T- continue de S dans S' coïncide avec la notion d'application *uniformément continue* si S et S' sont des espaces uniformes.

De plus, il n'y a plus d'obstacle à envisager par exemple une application T- continue d'un espace topologique ou d'un espace de proximité dans un espace uniforme.

En résumé, il est possible de dire que les catégories des espaces pré- topologiques, topologiques, de proximité faible, de proximité, pré-uniformes, faiblement uniformes, quasi-uniformes et uniformes sont des *sous- catégories pleines* de la *catégorie des T- espaces,* les morphismes étant *les applications T - continues.*

Ce point de vue permettra de comparer facilement ces différents types d'espaces définis sur un même ensemble E.

3. PROPRIETES DES T- ESPACES DEFINIS SUR UN MÊME ENSEMBLE

Dans la suite, il ne sera envisagé que des T- espaces appartenant au treillis complet $\mathcal{T}$ des T- espaces définis sur un même ensemble E.

Le T- espace S' de type *(t') engendré* par un T- espace S de type (t) est, *s'il existe,* le moins fin des T- espaces de type (t') plus fins que S. Si S engendre S', alors S est un T-espace de type (t) *compatible* avec S'.

3. 1. Le T- espace simple engendré par un T- espace.

Pour tout T- espace $S = (E, [\rho_i])$, il est immédiat que le T- espace simple $S_p = (E, p)$ engendré par S est déterminé par la T- application p indépendante du choix de la T- base de S et caractérisée par la relation

$$p = \bigcup_{i \in I} \rho_i .$$

La condition $\sigma_p(S) = S_p$ caractérise une application σ_p de $\mathcal{T}$ dans le sous-ensemble $\mathcal{T}_o$ des T- espaces simples.

LEMME 3.1.1. *Si S est pré-idempotent, alors $\sigma_p(S)$ est idempotent et, si S est symétrique, alors $\sigma_p(S)$ est symétrique.*

La démonstration est immédiate.

THEOREME 3.1.2. *L'application σ_p est un projecteur isotone vérifiant :*

(a) Si S est pré-uniforme, alors $\sigma_p(S)$ est un T- espace simple.

(b) Si S est faiblement uniforme, alors $\sigma_p(S)$ est un espace de proximité faible.

(c) Si S est quasi-uniforme, alors $\sigma_p(S)$ est un T- espace simple idempotent.

(d) Si S est uniforme, alors σ_p est un espace de proximité.

Cela résulte immédiatement de la définition de σ_p, du lemme 3.1.1 et des théorèmes 1.2.8 et 2.2.4.

3.2. L'espace pré-topologique engendré par un T- espace simple.

Pour tout T- espace simple $S = (E, p)$ il est immédiat que le T- espace simple ponctuel, c'est-à-dire l'espace pré-topologique $S_t = (E, t)$ engendré par S, est déterminé par la T- application t caractérisée par

$$t(X) = \bigcap_{x \in X} p(x).$$

La condition $\sigma_t(S) = S_t$ caractérise une application σ_t de $\mathcal{T}_o$ dans le sous-ensemble $\mathcal{T}_1$ des espaces pré-topologiques.

LEMME 3.2.1. *Si S est idempotent, alors $\sigma_t(S)$ est idempotent.*

La démonstration est laissée aux soins du lecteur.

THEOREME 3.2.2. *L'application σ_t est un projecteur isotone à valeurs dans l'ensemble des espaces pré-topologiques, qui transforme un T- espace simple idempotent en un espace topologique.*

En particulier il transforme un espace de proximité faible en un espace pré-topologique et un espace de proximité en un espace topologique.

Cela résulte immédiatement du lemme 3.2.1 et du théorème 1.2.8.

COROLLAIRE 3.2.3. *L'application* $\sigma_1 = \sigma_t \circ \sigma_p$ *est un projecteur isotone qui associe, à tout* T*-espace* S*, l'espace pré-topologique* $\sigma_1(S)$ *engendré par* S.

En outre si S *est pré-idempotent, alors* $\sigma_1(S)$ *est un espace topologique.*

En particulier, si S *est pré-uniforme ou faiblement uniforme, alors* $\sigma_1(S)$ *est un espace pré-topologique et, si* S *est quasi-uniforme ou uniforme, alors* $\sigma_1(S)$ *est un espace topologique.*

C'est une conséquence immédiate de ce qui précède.

REMARQUE 3.2.4. Si S est un espace de proximité, $\sigma_t(S)$ est bien l'espace topologique habituellement associé à S et, si S est un espace uniforme, $\sigma_1(S)$ est bien l'espace topologique engendré par S au sens usuel.

DEFINITION 3.2.5. Un T-espace est *séparé* si deux points distincts admettent des voisinages d'un même ordre disjoints.

PROPOSITION 3.2.6. *Pour tout* T*-espace* S*, les* T*-espaces* S*,* $\sigma_p(S)$ *et* $\sigma_1(S)$ *sont simultanément séparés ou simultanément non séparés.*

Cela résulte immédiatement des définitions.

COROLLAIRE 3.2.7. *Un espace uniforme* S*, l'espace de proximité* $\sigma_p(S)$ *associé et l'espace topologique* $\sigma_1(S)$ *associé sont simultanément séparés ou simultanément non séparés.*

3.3. Relations entre les T-espaces et les T-espaces simples.

DEFINITION 3.3.1. Une T-application de *type fini* sur un ensemble E est une T-application parfaite ρ ne prenant qu'un nombre fini de valeurs distinctes.

Un T-espace est de *type fini* s'il admet une base constituée de T-applications de type fini.

PROPOSITION 3.3.2. *Les* T*-espaces de type fini sont les espaces pré-*

uniformes $(E, \mathcal{V})$ *pour lesquels le filtre* $\mathcal{V}$ *admet une base constituée de pré-entourages* V *de* type fini, *c'est-à-dire de la forme*

$$V = \bigcup_{k=1}^{k=n} [X_k \times Z_k] ,$$

dans laquelle les X_k *sont les éléments d'une partition finie de* E, *avec* $X_k \subset Z_k$.

Cela résulte des définitions et du théorème 2.2.4.

DEFINITION 3.3.3. Un espace pré-uniforme $(E, \mathcal{V})$ est *totalement borné* si, pour tout pré-entourage $V \in \mathcal{V}$, il existe un recouvrement fini de E petit d'ordre V, c'est-à-dire constitué de parties A petites d'ordre V caractérisées par la condition $A \times A \subset V$.

PROPOSITION 3.3.4. *Tout espace pré-uniforme de type fini est totalement borné. Pour qu'un espace quasi-uniforme soit totalement borné, il faut et il suffit qu'il soit de type fini.*

La première assertion découle facilement de la proposition 3.3.2.

Soit $S = (E, \mathcal{V})$ un espace quasi-uniforme totalement borné. Pour tout $V \in \mathcal{V}$, il existe un recouvrement fini de E petit d'ordre V. Il existe donc une partition finie de E dont les éléments X_k sont petits d'ordre V. En posant

$$Z_k = V(X_k) \quad \text{et} \quad V' = \bigcup_{k=1}^{k=n} [X_k \times Z_k] ,$$

il est facile de vérifier qu'il en résulte la relation $V \subset V' \subset V^2$.

Puisque les éléments V et V^2 constituent une base de $\mathcal{V}$, les éléments V' constituent une base de type fini de $\mathcal{V}$, ce qui montre que S est de type fini et achève la démonstration.

THEOREME 3.3.5. *L'application* σ_p *de l'ensemble des espaces pré-uniformes dans l'ensemble des* T-*espaces simples est* surjective. *Pour tout* T-*espace simple* $S = (E, p)$, *l'ensemble* $\sigma_p^{-1}(S)$ *des espaces pré-uniformes compatibles avec* S *possède* un élément minimum $S' = \sigma'(S)$ *qui est* l'unique espace pré-uniforme de type fini de $\sigma_p^{-1}(S)$.

En outre, le filtre $\mathcal{V}$ *des pré-entourages de* S' *admet les caractérisations suivantes :*

(a) Si $\{(Z_\alpha, X_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ *désigne la famille des couples de parties* Z_α *et* X_α *tels que* Z_α *soit un* p*-voisinage de* X_α*, le filtre* $\mathcal{V}$ *admet une base constituée des intersections finies des éléments de la forme*

$$V_\alpha = [X_\alpha \times Z_\alpha] \cup [\complement X_\alpha \times E] .$$

(b) Le filtre $\mathcal{V}$ *admet une base constituée des éléments de la forme*

$$V = \bigcup_{k=1}^{k=n} [A_k \times B_k] ,$$

dans laquelle les B_k *sont des* p*-voisinages arbitraires des éléments* A_k *d'une partition finie* $(A_k)_{k \in [1, n]}$ *quelconque de* E.

Soit ρ_α la T-application de type fini associée à V_α. Comme ρ_α est la moins fine des T-applications ρ vérifiant $Z_\alpha \in \rho(X_\alpha)$, il en résulte $\rho_\alpha \subset p$. D'autre part, puisque, pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$ et tout $Y \in p(X)$, il existe un indice $\alpha \in A$ tel que $Y \in \rho_\alpha(X)$, il en résulte :

$$p = \bigcup_{\alpha \in A} \rho_\alpha . \tag{1}$$

Soit K l'ensemble des parties finies J de A. En posant

$$\rho_J = \bigcup_{\alpha \in J} \rho_\alpha$$

pour $J \in K$, ces T-applications de type fini constituent un ensemble filtrant à droite qui détermine une T-base $\{\rho_J\}_{J \in K}$ d'un espace pré-uniforme de type fini $S' = (E, [\rho_J])$ sur E, dont le filtre $\mathcal{V}$ des pré-entourages est déterminé par la première caractérisation. La relation *(1)* entraîne

$$p = \bigcup_{J \in K} \rho_J , \tag{2}$$

qui montre que S' engendre le T-espace simple S. L'application σ_p de l'ensemble des espaces pré-uniformes dans l'ensemble des T-espaces simples est donc surjective.

Si $\Sigma = (E, [\rho'_i])$ est un élément de l'ensemble $\sigma_p^{-1}(S)$ des espaces pré-uniformes compatibles avec S, la relation $p = \bigcup_{i \in I} \rho'_i$ implique que, pour tout $\alpha \in A$, il existe au moins un indice $i(\alpha) \in I$ tel que

$$Z_\alpha \in \rho'_{i(\alpha)}(X_\alpha),$$

ce qui entraîne $\rho_\alpha \subset \rho'_{i(\alpha)}$ et par suite, pour tout $J \in K$,

$$\rho_J = \bigcup_{\alpha \in J} \rho_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in J} = \rho'_{i(\alpha)}.$$

Il en résulte, puisque J est fini, qu'il existe au moins un indice $i(J) \in I$ tel que

$$\rho_J \subset \rho'_{i(J)},$$

ce qui montre que Σ est plus fin que S'.

L'ensemble $\sigma_p^{-1}(S)$ des espaces pré-uniformes compatibles avec S admet donc un élément minimum qui est l'espace pré-uniforme de type fini $S' = \sigma'(S)$.

Soit S'' l'espace pré-uniforme défini par l'ensemble r des T-applications de type fini associées aux éléments V de la forme indiquée dans la seconde caractérisation. Puisque tout $\rho \in r$ est un élément ρ_J, il en résulte $S'' \subset S'$. D'autre part, puisque r est constitué par toutes les T- applications de type fini ρ vérifiant $\rho \subset p$, il en résulte $S' \subset S''$, qui entraîne donc $S' = S''$, et cette égalité montre l'équivalence des deux caractérisations de $\mathcal{O}$ et que tout espace pré-uniforme de type fini compatible avec S doit être moins fin que $S'' = S'$, donc identique à S'.

L'espace pré-uniforme $S' = \sigma'(S)$ est donc le seul espace pré-uniforme de type fini compatible avec S.

COROLLAIRE 3.3.6. *L'application σ' qui, à tout espace simple S, associe l'unique espace pré-uniforme de type fini $S' = \sigma'(S)$ compatible avec S, est une bijection isotone entre l'ensemble des T-espaces simples et l'ensemble des espaces pré-uniformes de type fini.*

En particulier, tout T-espace simple est pré-uniformisable, *en général de plusieurs manières, mais de façon unique par un espace pré-uniforme de type fini.*

LEMME 3.3.7. *L'application σ' possède les propriétés suivantes :*

(a) Si S est un espace de proximité faible, alors $S' = \sigma'(S)$ est faiblement uniforme.

(b) Si S est idempotent, alors $S' = \sigma'(S)$ est quasi-uniforme.

En effet, dans le premier cas, il est facile de vérifier que, pour tout $\alpha \in A$, il existe $\alpha' \in A$ tel que $V_\alpha^{-1} = V_{\alpha'}$ et, dans le second cas, il est possible de montrer que, pour tout $\alpha \in A$, il existe deux indices α' et α'' tels que $(V_{\alpha'} \cap V_{\alpha''})^2 \subset V_\alpha$, ce qui permet de conclure.

THEOREME 3.3.8. *L'application σ' détermine par restriction :*

(a) Une bijection isotone entre l'ensemble des espaces de proximité faible et l'ensemble des espaces faiblement uniforme de type fini.

(b) Une bijection isotone entre l'ensemble des T-espaces simples idempotents et l'ensemble des espaces quasi-uniformes totalement bornés.

(c) Une bijection isotone entre l'ensemble des espaces de proximité et l'ensemble des espaces uniformes totalement bornés.

Cela résulte du corollaire 3.3.6, du lemme 3.3.7, du théorème 1.2.8 et de la proposition 3.3.4.

REMARQUE 3.3.9. D'après la proposition 3.3.4, la notion d'espace pré-uniforme de type fini généralise la notion d'espace uniforme totalement borné ou précompact. Les théorèmes 3.3.5 et 3.3.8 constituent donc une généralisation du résultat de Alphen et Fenstad [1] qui consiste en la partie *(c)* du théorème 3.3.8.

Pour compléter les théorèmes 3.3.5 et 3.3.8, le lecteur pourra vérifier que, pour tout espace de proximité $S = (E, p)$, le filtre $\mathcal{O}$ des entourages de l'espace uniforme $S' = \sigma'(S)$ admet une base constituée par les *entourages des p-recouvrements finis* de E, c'est-à-dire les entourages de la forme

$$V' = \bigcup_{k=1}^{k=n} [B_k \times B_k],$$

dans laquelle les B_k sont des p-voisinages arbitraires des éléments A_k

d'un recouvrement fini quelconque E.

3.4. Relations entre les T-espaces simples et les espaces pré-topologiques.

DEFINITION 3.4.1. Pour tout espace pré-topologique S_t, *l'espace de proximité faible universel* S_{ρ_1} *associé* est caractérisé par la relation de proximité δ_1 définie par

$$Y \overline{\delta}_1 X \iff \overline{Y} \cap X = Y \cap \overline{X} = \emptyset$$

et *l'espace de proximité faible canonique* S_{ρ_2} *associé* est caractérisé par la relation de proximité δ_2 définie par

$$Y \overline{\delta}_2 X \iff \overline{Y} \cap \overline{X} = \emptyset .$$

PROPOSITION 3.4.2. *Pour tout espace pré-topologique* S_t, *l'espace de proximité faible universel* S_{ρ_1} *associé est le plus fin des espaces de proximité faible moins fins que* S_t.

Les espaces de proximité faible universel S_{ρ_1} *et canonique* S_{ρ_2} *associés à* S_t *vérifient :*

$$S_{\rho_2} \subset S_{\rho_1} \subset S_t .$$

La démonstration est laissée aux soins du lecteur.

THEOREME 3.4.3. *Pour qu'un espace pré-topologique* S_t *soit* faiblement proximisable, *c'est-à-dire compatible avec au moins un espace de proximité faible, il faut et il suffit que soit vérifiée l'une des conditions équivalentes suivantes :*

(a) La relation binaire sur E *caractérisée par* $y \in \overline{\{x\}}$ *est symétrique.*

(b) L'espace de proximité faible universel S_{ρ_1} *associé à* S_t *est compatible avec* S_t.

En outre, si S_t *est topologique, ces conditions sont équivalentes à chacune des conditions suivantes :*

(a') Les adhérences distinctes des points de E *constituent une partition de* E.

(c) L'espace de proximité faible canonique S_{ρ_2} *associé à* S_t *est compatible avec* S_t.

D'après la proposition 3.4.2, pour que S_t soit faiblement proximisable, il faut et il suffit que $\sigma_t(S_{\rho_1}) = S_t$, ce qui exprime la condition *(b)*.

Les T- applications t et ρ_1 étant caractérisées par les conditions

$$t(X) = \{ Z ;\ Z = \complement Y ;\ \overline{Y} \cap X = \emptyset \}$$

et

$$\rho_1(X) = \{ Z ;\ Z = \complement Y ;\ \overline{Y} \cap X = Y \cap \overline{X} = \emptyset \},$$

la condition *(b)*, qui s'écrit $t(x) = \rho_1(x)$ pour tout $x \in E$, se traduit par la condition

$$\overline{Y} \cap \{x\} = \emptyset \Longrightarrow Y \cap \overline{\{x\}} = \emptyset ,$$

qui est équivalente à la condition *(a)*.

Lorsque S_t est topologique, la relation $y \in \overline{\{x\}}$ est transitive et puisqu'elle est toujours réflexive, la condition *(a)* signifie que cette relation est une relation d'équivalence, ce qui se traduit par la condition *(a')*.

Lorsque S_t est topologique, d'après les relations :

$$t(x) = \{ Z ;\ Z = \complement Y ,\ \overline{Y} \cap \{x\} = \emptyset \}$$

et

$$\rho_2(x) = \{ Z ;\ Z = \complement Y ,\ \overline{Y} \cap \overline{\{x\}} = \emptyset \},$$

la condition *(a')* entraîne l'équivalence des relations

$$\overline{Y} \cap \{x\} = \emptyset \quad \text{et} \quad \overline{Y} \cap \overline{\{x\}} = \emptyset ,$$

ce qui implique $t(x) = \rho_2(x)$ pour tout $x \in E$, c'est-à-dire la condition *(c)*, et inversement *(c)* implique *(b)*, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 3.4.4. *Tout espace topologique séparé est faiblement proximisable et faiblement uniformisable.*

Cela résulte de la condition *(a')* du théorème 3.4.3 et de la propriété *(a)* du théorème 3.3.8.

3.5. Relations entre les espaces de proximité et les espaces topologiques.

Soient $J_n = [\,0\,,\,2^n + 1\,]$, $J'_n = [\,1\,,\,2^n\,]$ et $K_n = [\,0\,,\,2^n\,]$ pour tout entier naturel n, et soit

$$A = \{\,\alpha = (n\,,\,j),\ j \in J_n\}\ .$$

DEFINITION 3.5.1. Etant données deux parties disjointes Y et X d'un ensemble E, *une famille dyadique* (ω), d'extrémités Y et X, est une famille $\{\,\omega^n_j = \omega_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de parties de E vérifiant :

(a) Pour tout entier naturel n, $\omega^n_o = Y$ et $\omega^n_{2^n+1} = X$.

(b) Pour tout entier naturel n, les ω^n_j $(j \in J_n)$ disjoints constituent un recouvrement de E.

(c) Pour tout entier naturel n et tout $j \in J'_n$: $\omega^n_j = \omega^{n+1}_{2j-1} \cup \omega^{n+1}_{2j}$.

Pour tout entier naturel n et tout $q \in K_n$ soient :

$$\Omega^n_q = \bigcup_{j=0}^{j=q} \omega^n_j \quad \text{et} \quad \Omega'^n_q = \bigcup_{j=q+1}^{j=2^n+1} \omega^n_j\ .$$

PROPOSITION 3.5.2. *Dans un espace de proximité* $S = (E\,,\,p) = (E\,,\,\delta)$ *pour deux parties* p*- éloignées* Y *et* X *de* E, *il existe au moins une famille dyadique* (ω) *d'extrémités* Y *et* X *vérifiant les conditions équivalentes suivantes :*

(a) Pour tout n *et tout couple d'éléments* q *et* q' *de* K_n *vérifiant* $q < q'$, *alors* $\Omega^n_q\, \overline{\delta}\, \Omega'^n_{q'}$.

(b) Pour tout n *et tout couple d'éléments* i *et* j *de* J_n *non consécutifs, alors* $\omega^n_i\, \overline{\delta}\, \omega^n_j$.

D'après le lemme 1.2.5, Y et X admettent des p- voisinages V_Y et V_X disjoints pour lesquels il est possible de supposer qu'ils constituent un recouvrement de E. Il en résulte

$$\omega^1_o = Y,\ \ \omega^1_1 = V_Y - Y,\ \ \omega^1_2 = V_X - X,\ \ \omega^1_{2+1} = X,$$

vérifiant les conditions (a) et (b) pour $n = 1$.

La suite de la construction s'effectue alors par récurrence. Pour $m = n+1$, et pout $q \in J'_n$, les parties Ω^n_{q-1}, ω^n_q, Ω'^n_q constituent une partition de E et, puisque d'après l'hypothèse de récurrence Ω^n_{q-1} et Ω'^n_q sont p- éloignées, en leur appliquant une construction analogue à celle qui a été utilisée pour les parties p- éloignées $\omega^1_o = Y$ et $\omega^1_{2+1} = X$, il est possible de trouver des parties ω^{n+1}_{2q-1} et ω^{n+1}_{2q} jouant des rôles analogues à ceux des éléments ω^1_1 et ω^1_2. Il en résulte

$$\omega^n_q = \omega^{n+1}_{2q-1} \cup \omega^{n+1}_{2q} .$$

Le lecteur pourra vérifier que les éléments ω^m_j $(j \in J_m)$ ainsi définis vérifient les conditions *(a)* et *(b)* pour m ainsi que les conditions de la définition 3.5. 1.

DEFINITION 3. 5. 3. Dans un espace topologique S_t, une famille dyadique (ω) d'extrémités Y et X est *continue* si, pour tout entier naturel n et pour tout $q \in J'_n$, les parties Ω^n_{q-1} et Ω'^n_q admettent des voisinages disjoints.

PROPOSITION 3. 5. 4. *Pour qu'une famille dyadique (ω) d'extrémités Y et X soit continue, il faut et il suffit que soient vérifiées les conditions équivalentes suivantes :*

(a) Pour tout n et tout $q \in J'_n$, Ω^n_q est un voisinage de Ω^n_{q-1} et Ω'^n_{q-1} est un voisinage de Ω'^n_q. (Cette condition est équivalente à la condition $\overline{\Omega}^n_{q-1} \subset \Omega^n_q$ et $\overline{\Omega}'^n_q \subset \Omega'^n_{q-1}$.

(b) En posant $\omega^n_{-1} = \omega^n_{2^n+2} = \emptyset$, pour tout n et tout $q \in J_n$, la partie $\omega^n_{q-1} \cup \omega^n_q \cup \omega^n_{q+1}$ est un voisinage de ω^n_q.

Ceci résulte immédiatement des définitions.

DEFINITION 3. 5. 5. Dans un espace topologique S_t, deux parties Y et X sont *normalement séparées* s'il existe au moins une famille dyadique continue (ω) d'extrémités Y et X.

LEMME 3. 5. 6. *Si un espace de proximité S_p engendre un espace topologique S_t, pour que deux parties Y et X soient p- éloignées, il faut et il suffit que leurs adhérences $\overline{Y}$ et $\overline{X}$ dans S_t soient p- éloignées, et alors elles sont normalement séparées dans S_t.*

Il est évident que $\overline{Y}\,\overline{\delta}\,\overline{X}$ implique $Y\,\overline{\delta}\,X$. Réciproquement si $Y\,\overline{\delta}\,X$, la proposition 3.5.2 entraîne l'existence d'une famille dyadique (ω) d'extrémités Y et X qui est continue d'après la proposition 3.5.4, ce qui montre que Y et X sont normalement séparées, et les relations

$$\overline{Y} = \overline{\Omega^n_o} \subset \Omega^n_1 \quad \text{et} \quad \overline{X} = \overline{\Omega'^n_{2^n}} \subset \Omega'^n_{2^n-1}$$

impliquent $\overline{Y}\,\overline{\delta}\,\overline{X}$.

PROPOSITION 3.5.7. *Pour tout espace topologique* S_t, *la condition*

$$Y\,\overline{\delta'}\,X \Longleftrightarrow Y \text{ et } X \text{ sont normalement séparés}$$

caractérise une relation de proximité δ' *qui détermine un espace de proximité* $S_{p'} = \sigma'_p(S_t)$, *appelé* l'espace de proximité universel associé à S_t *et qui est le plus fin des espaces de proximité moins fins que* S_t.

Tout d'abord, à l'aide de la définition des familles dyadiques continues, le lecteur pourra vérifier que $S_{p'}$ est bien un espace de proximité.

Si S_p est un espace de proximité moins fin que S_t, d'après le lemme 3.5.6 deux parties Y et X p-éloignées sont normalement séparées dans l'espace topologique engendré par S_p, donc à fortiori dans S_t qui est le plus fin et par suite elles sont p-éloignées, ce qui entraîne $S_p \subset S_{p'}$.

THEOREME 3.5.8. *Pour tout espace topologique* S_t, *il y a équivalence des conditions suivantes :*

(a) L'espace topologique S_t *est* uniformisable.

(b) L'espace topologique S_t *est* proximisable.

(c) L'espace de proximité universel $S_{p'} = \sigma'_p(S_t)$ *associé à* S_t *est compatible avec* S_t.

(d) Tout point $x \in E$ *est normalement séparé des complémentaires de ses voisinages dans* S_t.

L'équivalence de *(a)* et de *(b)* résulte de la partie *(c)* du théorème 3.3.8 et, compte tenu de la proposition *3.5.7*, l'équivalence de *(b)* et de *(c)* est évidente.

La proposition 3.5.7 entraîne que $S_{p'} = \sigma'_p(S_t)$ est aussi l'espace de proximité universel associé à $S_{t'} = \sigma_t(S_{p'})$. Puisque dans $S_{t'}$

les voisinages de tout point x sont les complémentaires des parties p'-éloignées de x, c'est-à-dire normalement séparées de x dans S_t, la condition (c), qui se traduit par $S_t = S_{t'}$, est équivalente à la condition $S_t \subset S_{t'}$, qui se traduit par la condition (d).

THEOREME 3.5.9. *Dans un espace topologique S_t, pour que deux parties Y et X soient normalement séparées, il faut et il suffit qu'il existe une application continue f de S_t dans $[0, 1]$ telle que $Y \subset f^{-1}(0)$ et $X \subset f^{-1}(1)$.*

Si Y et X sont normalement séparées par une famille dyadique continue (ω), les ω_q^n $(q \in J_n)$ constituent une partition de E. Pour tout $x \in E$ et tout n, il existe un entier $q(n, x)$ unique vérifiant $x \in \omega^n_{q(n,x)}$. Les intervalles $A_n(x) = [\frac{q(n,x)-1}{2^n}, \frac{q(n,x)}{2^n}]$ de diamètre $\frac{1}{2^n}$ constituent une base d'un filtre qui converge vers un nombre réel $y = f(x)$ de l'intervalle $[0, 1]$. Il en résulte une application f de S_t dans $[0, 1]$.

La proposition 3.5.4 montre que les parties

$$V_n(x) = [\omega^n_{q(n,x)-1} \cup \omega^n_{q(n,x)} \cup \omega^n_{q(n,x)+1}]$$

sont des voisinages de x pour lesquels $f[V_n(x)]$ a un diamètre inférieur ou égal à $\frac{3}{2^n}$, ce qui entraîne que f est continue et la construction implique $Y \subset f^{-1}(0)$ et $X \subset f^{-1}(1)$.

Réciproquement, une application continue f vérifiant les conditions indiquées détermine une famille dyadique (ω) d'extrémités Y et X caractérisée par

$$\omega^n_o = Y,\ \omega^n_1 = f^{-1}([0, \frac{1}{2^n}[) - Y,\ \omega^n_{2^n} = f^{-1}([\frac{2^n-1}{2^n}, 1]) - X,$$

$$\omega^n_{2^n+1} = X \text{ et } \omega^n_q = f^{-1}([\frac{q-1}{2^n}, \frac{q}{2^n}[) \text{ pour } 2 \leq q \leq 2^n - 1,$$

ce qui achève la démonstration.

Il convient de remarquer que le théorème 3.5.9 montre que la condition de séparation normale introduite coïncide avec la notion ordinaire définie à l'aide des fonctions numériques continues qui se présente par exemple dans les espaces normaux et dans la caractérisation classique des espaces topologiques uniformisables, équivalente à la condition *(d)* du théorème 3.5.8.

4. APPLICATIONS AUX ESPACES UNIFORMES ET AUX ESPACES TOPOLOGIQUES

4.1. Espaces pré-uniformes associés à un espace topologique.

PROPOSITION 4.1.1. *Pour tout espace topologique S_t, la condition*

$Y \overline{\delta}_3 X \Longleftrightarrow \overline{Y} \cap \overline{X} = \emptyset$ *et l'un au moins des fermés $\overline{Y}$ et $\overline{X}$ est quasi-compact*

caractérise une relation de proximité δ_3 qui détermine un espace de proximité faible S_{ρ_3} appelé l'espace de proximité faible pseudo-minimal *associé à S_t.*

Cela est immédiat puisque la réunion de deux parties quasi-compactes est quasi-compacte et que tout fermé d'une partie quasi-compacte est quasi-compact.

PROPOSITION 4.1.2. *Pour tout espace topologique S_t, les espaces de proximité faible universel S_{ρ_1}, canonique S_{ρ_2}, et pseudo-minimal S_{ρ_3} associés à S_t vérifient :*

$$S_{\rho_3} \subset S_{\rho_2} \subset S_{\rho_1} \subset S_t.$$

C'est une conséquence de la proposition 3.4.2 et de la définition de S_{ρ_3}.

PROPOSITION 4.1.3. *Si un espace de proximité S_p est compatible avec un espace topologique uniformisable S_t, pour toute partie X quasi-compacte alors $p(X) = t(X)$.*

La relation $p \subset t$ implique d'abord $p(X) \subset t(X)$.

La condition $Y \in t(X)$ se traduit par $Y \in t(x)$ pour tout $x \in X$, c'est-à-dire par $Y \in p(x)$ pour tout $x \in X$. L'idempotence de p implique l'existence d'une famille $\{Z_x\}_{x \in X}$ vérifiant $Y \in p(Z_x)$ et $Z_x \in p(x)$. Les relations $Z_x \in p(x)$, équivalentes aux relations $Z_x \in t(x)$, montrent que les intérieurs dans S_t des parties Z_x constituent un recouvrement ouvert de X. Si X est quasi-compact, il existe un nombre fini de points x_i tels que les Z_{x_i} constituent un recouvrement fini de X. Les relations $Y \in p(Z_{x_i})$ impliquent $Y \in p(\bigcup_i Z_{x_i})$, avec $X \subset \bigcup_i Z_{x_i}$, ce qui entraîne $Y \in p(X)$ et achève la démonstration.

PROPOSITION 4.1.4. *Etant donné un espace topologique uniformisable S_t, pour tout espace de proximité S_p compatible avec S_t, les espaces de proximité faible universel S_{ρ_1}, canonique S_{ρ_2} et pseudo-minimal S_{ρ_3} associés à S_t et l'espace de proximité universel $S_{p'}$ associé à S_t vérifient:*

$$S_{\rho_3} \subset S_p \subset S_{p'} \subset S_{\rho_2} \subset S_{\rho_1} \subset S_t.$$

Puisque la proposition 3.5.7 implique $S_p \subset S_{p'}$ et que le lemme 3.5.6 implique $S_{p'} \subset S_{\rho_2}$, d'après la proposition 4.1.2, tout revient à montrer la relation $S_{\rho_3} \subset S_p$.

Or la relation $Y \bar{\delta}_3 X$ implique $\overline{Y} \cap \overline{X} = \emptyset$ et que l'un au moins des fermés $\overline{Y}$ et $\overline{X}$, par exemple $\overline{X}$, est quasi-compact. La relation $\overline{Y} \cap \overline{X} = \emptyset$ implique $\complement \overline{Y} \in t(\overline{X})$, d'où $\complement Y \in t(\overline{X})$. D'après la proposition 4.1.3 qui donne $t(\overline{X}) = p(\overline{X})$, il en résulte $\complement Y \in p(\overline{X})$, ce qui entraîne que Y et X sont p-éloignées et par suite $S_{\rho_3} \subset S_p$.

DEFINITION 4.1.5. Pour tout espace topologique S_t, alors :

(a) *L'espace faiblement uniforme canonique* S'_2 associé à S_t est l'espace faiblement uniforme de type fini $\sigma'(S_{\rho_2})$ associé à l'espace de proximité faible canonique S_{ρ_2} associé à S_t.

(b) *L'espace faiblement uniforme d'Alexandroff* S'_3 associé à S_t est l'espace faiblement uniforme de type fini $\sigma'(S_{\rho_3})$ associé à l'espace de proximité faible pseudo-minimal S_{ρ_3} associé à S_t.

(c) *L'espace uniforme de Čech* S'_* associé à S_t est l'espace uniforme totalement borné $\sigma'(S_{p'})$ associé à l'espace de proximité universel $S_{p'}$ associé à S_t.

PROPOSITION 4.1.6. *Pour tout espace topologique S_t, alors :*

(a) Le filtre $\mathcal{O}_2$ des pré-entourages de l'espace faiblement uni-

forme canonique S'_2 *associé à* S_t *admet pour base les pré-entourages*

$$W = \bigcup_{i \in I} [\, U_i \times U_i \,]$$

des recouvrements ouverts finis $\{U_i\}_{i \in I}$ *de* E.

(b) Le filtre $\mathfrak{V}_3$ *des pré-entourages de l'espace faiblement uniforme d'Alexandroff* S'_3 *associé à* S_t *admet pour base les pré-entourages*

$$W = \bigcup_{i \in I} [\, U_i \times U_i \,]$$

des recouvrements ouverts finis $\{U_i\}_{i \in I}$ *de* E *pour lesquels l'un des* U_i *au moins admet un complémentaire quasi-compact.*

Pour un espace de proximité faible S_p, les théorèmes 3.3.5 et 3.3.8 entraînent facilement que le filtre $\mathfrak{W}$ des pré-entourages de l'espace pré-uniforme de type fini $S' = \sigma'(S_p)$ associé à S_p admet pour base les intersections finies des éléments symétriques de la forme

$$W_\beta = [\, \complement Y_\beta \times \complement Y_\beta \,] \cup [\, \complement X_\beta \times \complement X_\beta \,] \;,$$

associés aux couples (Y_β, X_β) constitués de parties p-éloignées.

Dans le cas *(a)*, les W_β sont des pré-entourages de recouvrements ouverts binaires (U_1, U_2) de E et, dans le cas *(b)*, il faut en plus que l'un des ouverts U_1 ou U_2 admette un complémentaire quasi-compact. Un lemme technique dont la démonstration est laissée aux soins du lecteur permet de montrer que les intersections finies des W_β admettent les formes indiquées respectivement dans *(a)* et dans *(b)*.

PROPOSITION 4.1.7. *Tout espace uniforme totalement borné* S' *compatible avec un espace topologique uniformisable* S_t *vérifie* $S'_3 \subset S' \subset S'_2$.

Cela résulte de la proposition 4.1.4 et du théorème 3.3.8.

REMARQUE 4.1.8. Pour un T-espace simple S_ρ engendré par au moins un espace uniforme, soit $\mathfrak{U}(\rho)$ l'ensemble des espaces uniformes compatibles avec S_ρ. Il est facile de vérifier que l'ensemble ordonné $\mathfrak{U}(\rho)$ est inductif. D'après le théorème de Zorn, l'ensemble $\mathfrak{U}(\rho)$ admet au moins un élément maximal. Pour que $\mathfrak{U}(\rho)$ admette *un élément maximum,* il faut et il suffit que $\mathfrak{U}(\rho)$ soit stable pour la formation des bornes supérieures de parties finies. Cette condition est sûrement satisfaite si S_ρ est ponctuel. Ce résultat montre que l'ensemble $\mathfrak{U}(t)$ des espaces uniformes compatibles avec un espace uniformisable S_t admet un élément maximum S^*, appelé *l'espace uniforme universel* associé à S_t. De même, l'ensemble $\mathfrak{U}(p)$ des espaces uniformes compatibles avec un espace de proximité S_p admet au moins un élément maximal, mais en général il n'est pas possible d'affirmer que $\mathfrak{U}(p)$ admet un élément maximum. Néanmoins, pour l'espace de proximité universel $S_{p'}$ associé à un espace topologique uniformisable S_t, l'ensemble $\mathfrak{U}(p')$ des espaces uniformes compatibles avec $S_{p'}$ coïncide avec $\sigma_p^{-1}(S_{p'})$, et il en résulte qu'il admet pour élément minimum l'espace uniforme de Čech S'_* et pour élément maximum l'espace uniforme universel S^*, associés à S_t.

En particulier, tout espace uniforme S compatible avec un espace topologique uniformisable S_t est moins fin que l'espace uniforme universel S^* associé à S_t et plus fin que l'espace faiblement uniforme d'Alexandroff S'_3 associé à S_t.

4.2. Espaces topologiques quasi- normaux et normaux.

THEOREME 4.2.1. *Pour qu'un espace topologique S_t [resp. séparé] soit quasi- normal [resp. normal], il faut et il suffit que soit vérifiée l'une des conditions équivalentes suivantes :*

(a) L'espace de proximité universel $S_{p'}$ coïncide avec l'espace de proximité faible canonique S_{ρ_2}.

(b) L'espace de proximité faible canonique S_{ρ_2} est un espace de proximité.

(c) L'espace uniforme de Čech S'_* coïncide avec l'espace faiblement uniforme canonique S'_2 caractérisé par les pré- entourages des recouvrements ouverts finis.

(d) L'espace faiblement uniforme canonique S'_2 caractérisé par les pré- entourages des recouvrements ouverts finis est un espace uniforme.

(e) Deux ensembles fermés disjoints quelconques sont normale-

ment séparés.

L'équivalence de *(a)* et *(b)* résulte de la proposition 3.5.7 et de la relation $S_{p'} \subset S_{\rho_2} \subset S_t$. Le théorème 3.3.8 entraîne l'équivalence de *(a)* et *(c)* ainsi que celle de *(b)* et *(d)*, ce qui montre également que *(a)* se traduit par $S_{\rho_2} \subset S_{p'}$, c'est-à-dire par *(e)*. Puisque les voisinages de X dans S_{ρ_2} sont les voisinages de $\overline{X}$ dans S_t, la condition *(b)* signifie que S_t est quasi-normal ou normal s'il est séparé.

REMARQUE 4.2.2. Compte tenu du théorème 3.5.9, la condition *(e)* du théorème 4.2.1 exprime le premier théorème d'Urysohn.

COROLLAIRE 4.2.3. *Pour qu'un espace topologique S_t quasi-normal soit uniformisable, il faut et il suffit qu'il soit faiblement proximisable.*

En particulier, tout espace normal est uniformisable.

Cela résulte, des théorèmes 3.4.3 et 4.2.1.

4.3. Espaces topologiques localement quasi-compacts et localement compacts.

PROPOSITION 4.3.1. *Pour qu'un espace topologique S_t soit faiblement proximisable, il faut et il suffit que l'espace de proximité faible pseudo-minimal S_{ρ_3} associé soit compatible avec S_t.*

La démonstration est laissée aux soins du lecteur.

LEMME 4.3.2. *Pour tout espace topologique S_t quasi-régulier et localement quasi-compact, S_{ρ_3} est un espace de proximité.*

Tout espace topologique S_t faiblement proximisable, tel que S_{ρ_3} soit un espace de proximité, est localement quasi-compact.

En particulier, pour qu'un espace topologique uniformisable S_t soit localement quasi-compact, il faut et il suffit que S_{ρ_3} soit un espace de proximité.

La première assertion résulte facilement du lemme 1.2.5 et du fait que, si S_t est quasi-régulier et localement quasi-compact, alors tout fermé admet un système fondamental de voisinages fermés quasi-compacts.

Lorsque S_t est faiblement proximisable, d'après la proposition 4.3.1 S_{ρ_3} est compatible avec S_t et, si S_{ρ_3} est un espace de proximité, il en résulte que S_t est uniformisable et par suite quasi-régulier. Si E est quasi-compact, il en résulte immédiatement que S_t est localement quasi-compact. Il reste à examiner le cas où E n'est pas quasi-compact. Cette hypothèse entraîne facilement que tout point $x \in E$ admet un voisinage ouvert $V(x)$ dont le complémentaire est un fermé non quasi-compact. Puisque $t(x) = t(\{\overline{x}\})$ et que $\{\overline{x}\}$ est quasi-compact, en posant $Y = \complement V(x)$ la relation $\overline{Y} \cap \{x\} = Y \cap \{\overline{x}\} = \emptyset$ entraîne $Y \overline{\delta}_3 x$. Comme S_{ρ_3} est un espace de proximité, Y et x admettent des ρ_3-voisinages disjoints. Il existe donc des fermés U et Z vérifiant $Y \overline{\delta}_3 U$, $Z \overline{\delta}_3 x$ et $U \cup Z = E$. L'ensemble ouvert $W = \complement Z$ est un voisinage ouvert de x vérifiant $W \subset U$. La relation $Y \overline{\delta}_3 U$ implique $\overline{Y} \cap \dot{U} = Y \cap U = \emptyset$ et que l'un des fermés Y et U est quasi-compact. Puisque Y n'est pas quasi-compact, U est quasi-compact. Ainsi tout point x admet donc un voisinage U fermé quasi-compact, ce qui achève la démonstration puisque S_t est quasi-régulier.

LEMME 4.3.3. *Si S_p est un espace de proximité compatible avec un espace topologique uniformisable S_t et si S_p est strictement plus fin que S_{ρ_3}, alors il existe un espace de proximité S_{p_1} compatible avec S_t et strictement moins fin que S_p.*

Puisque S_p est strictement plus fin que S_{ρ_3}, il existe deux fermés Y_o et X_o p-éloignés qui ne sont pas ρ_3-éloignés. La première condition implique $\overline{Y}_o \cap \overline{X}_o = \emptyset$ et la seconde entraîne que les deux fermés disjoints Y_o et X_o ne sont pas quasi-compacts. Il existe donc deux filtres $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{X}$ sans points adhérents et portés respectivement par Y_o et X_o. Soit $\mathcal{Z}$ le filtre intersection de $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{X}$.

En posant $\mathcal{Z}' = \bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} p(Z)$, il est immédiat que $\mathcal{Z}'$ est un filtre.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties de E dont les complémentaires sont des éléments de $\mathcal{Z}'$ et soit $\mathcal{G}$ la grille [3] associée au filtre $\mathcal{Z}'$. Il est immédiat que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ constituent une partition de $\mathcal{P}(E)$.

Le lecteur pourra vérifier que les conditions

$$p_1(X) = p(X) \text{ si } X \in \mathcal{F},$$

$$p_1(X) = \bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} p(X \cup Z) \text{ si } X \in \mathcal{G}$$

caractérisent une T- application p_1 dont la relation de proximité δ_{p_1} est liée à la relation de proximité δ_p associée à p par la condition

$$Y \overline{\delta}_{p_1} X \Longleftrightarrow Y \overline{\delta}_p X \quad \text{et} \quad (Y \in \mathcal{F} \text{ ou } X \in \mathcal{F}),$$

et que ces éléments p_1 et δ_{p_1} caractérisent un espace de proximité S_{p_1} vérifiant $S_{p_1} \subset S_p$.

Puisque les filtres $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{X}$ sont sans points adhérents, pour tout $x \in E$, il existe $Y \in \mathcal{Y}$ et $X \in \mathcal{X}$ disjoints d'un voisinage $V(x)$ de x dans S_t qui est aussi un voisinage de x dans S_p, puisque S_p est compatible avec S_t. Il en résulte que le point x est p- éloigné de l'élément $Z = Y \cup X$ de $\mathcal{Z}$, ce qui montre que $\{x\} \in \mathcal{F}$. Il en résulte la relation $t(x) = p(x) = p_1(x)$ pour tout $x \in E$, qui entraîne que S_{p_1} est compatible avec S_t.

Les filtres $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{X}$ étant portés par Y_o et X_o, il en résulte $Y_o \notin \mathcal{F}$ et $X_o \notin \mathcal{F}$, ce qui entraîne $Y_o \delta_{p_1} X_o$. Cette relation et la relation $Y_o \overline{\delta}_p X_o$ montrent que S_{p_1} est strictement moins fin que S_p.

THEOREME 4.3.4. *Pour qu'un espace topologique uniformisable S_t [resp. séparé] soit localement quasi-compact [resp. localement compact] il faut et il suffit que soit vérifiée l'une des conditions équivalentes suivantes :*

(a) L'espace de proximité faible pseudo-minimal S_{ρ_3} est un espace de proximité (qui est alors le moins fin des espaces de proximité compatibles avec S_t).

(b) L'ensemble des espaces de proximité compatibles avec S_t admet un élément minimal (qui est alors minimum et identique à S_{ρ_3}).

(c) L'espace faiblement uniforme d'Alexandroff S'_3 est un espace uniforme (qui est alors le moins fin des espaces uniformes compatibles avec S_t).

(d) L'ensemble des espaces uniformes compatibles avec S_t admet un élément minimal (qui est alors minimum et identique à l'espace uniforme d'Alexandroff S'_3) [5] .

La condition *(a)* résulte du lemme 4.3.2. La proposition 4.1.4 montre que *(a)* implique *(b)* et le lemme 4.3.3 montre que *(b)* implique *(a)*. Le théorème 3.3.8 implique l'équivalence de *(a)* et de *(c)*. Puisque, d'après les théorèmes 3.3.5 et 3.3.8, tout espace uniforme compatible avec S_t est plus fin qu'un espace uniforme totalement borné compatible avec S_t, un élément minimal dans l'ensemble des espaces uniformes compatibles avec S_t est nécessairement totalement borné. L'équivalence de *(b)* et *(d)* résulte alors du théorème 3.3.8.

LEMME 4.3.5. *S'il existe un espace uniforme S non totalement borné compatible avec un espace topologique uniformisable S_t, alors il existe deux ensembles fermés $\bar{A}$ et $\bar{B}$ normalement séparés et non quasi-compacts.*

Il existe un entourage symétrique W' de S tel qu'il n'existe aucun recouvrement fini de E par des ensembles petits d'ordre W'. Pour un entourage W vérifiant $W^2 \subset W'$, une construction par récurrence permet la détermination d'une suite $\{x_n\}$ de points de E vérifiant $(x_i, x_j) \notin W$ pour $i \neq j$. Pour un entourage V vérifiant $V^4 \subset W$, il en résulte

$$V(x_i) \cap V(x_j) = \emptyset \text{ pour } i \neq j$$

et de plus, pour tout $x \in E$, le voisinage $V(x)$ de x ne rencontre au plus qu'un seul ensemble $V(x_n)$, ce qui montre que l'adhérence d'une sous-famille de la suite $\{x_n\}$ est constituée par la réunion des adhérences de ses points.

En posant $a_m = x_{2m-1}$ et $b_m = x_{2m}$, les ensembles

$$A = \bigcup_m \{a_m\} \quad \text{et} \quad B = \bigcup_m \{b_m\}$$

admettent pour adhérences :

$$\bar{A} = \bigcup_m \{\bar{a}_m\} \quad \text{et} \quad \bar{B} = \bigcup_m \{\bar{b}_m\}.$$

Si U_m est un voisinage ouvert de a_m inclus dans $V(a_m)$, alors la famille des U_m constitue un recouvrement ouvert de $\bar{A}$ dont il est impossible d'extraire un recouvrement fini. Il en résulte que $\bar{A}$ est non quasi-compact. Il en est de même pour $\bar{B}$.

La construction de $\{x_n\}$ entraîne la relation $V(A) \cap V(B) = \emptyset$ qui montre que A et B sont éloignés dans $\sigma_p(S)$ et le lemme 3.5.6 entraîne que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont normalement séparés.

PROPOSITION 4.3.6. *Pour tout espace topologique uniformisable* S_t, *il y a équivalence des conditions suivantes :*

(a) Il n'existe qu'un seul espace uniforme compatible avec S_t.

(b) Il n'existe qu'un seul espace de proximité compatible avec S_t.

(c) Il n'existe aucun couple de parties fermées non quasi-compactes normalement séparées.

De plus, ces conditions entraînent que S_t *est localement quasi-compact et l'unique espace uniforme compatible est totalement borné* [4].

D'après le théorème 4.3.4, la condition *(b)* se traduit par la relation $S_{p'} = S_{\rho_3}$ qui est équivalente à la condition *(c)*. Les théorèmes 3.3.5 et 3.3.8 montrent que *(a)* implique *(b)* et le lemme 4.3.5 montre que *(b)* équivalent à *(c)* implique *(a)*.

COROLLAIRE 4.3.7. *Pour tout espace topologique uniformisable* S_t *quasi-compact, il n'existe qu'un seul espace uniforme* S *compatible avec* S_t. *Le filtre* $\mathcal{V}$ *des entourages de* S *est le filtre des voisinages de la diagonale et* S_t *est quasi-normal.*

Cela résulte de la proposition 4.3.6 et de la relation $S = S'_*$.

COROLLAIRE 4.3.8. *Tout espace topologique compact* S_t *est uniformisable et normal. Il n'existe qu'un seul espace uniforme* S *compatible avec* S_t *dont le filtre des entourages est le filtre des voisinages de la diagonale.*

Ce résultat bien connu peut être retrouvé de la façon suivante. L'espace compact S_t étant normal, le corollaire 4.2.3 entraîne qu'il est uniformisable, ce qui permet d'appliquer le corollaire 4.3.7.

COROLLAIRE 4.3.9. *Tout espace topologique localement compact est uniformisable. Pour qu'un espace topologique séparé* S_t *soit localement compact, il faut et il suffit que soit vérifiée l'une des conditions équivalentes du théorème 4.3.4* [5].

La première assertion résulte du corollaire 4.3.8 et du caractère local de la condition *(d)* du théorème 3.5.8.

Si S_t est localement compact, la première affirmation entraîne qu'il est uniformisable et le théorème 4.3.4 entraîne que S_t vérifie les quatre conditions de ce théorème.

Réciproquement, soit S_t un espace topologique séparé vérifiant ces conditions. Le corollaire 3.4.4 montre que S_t est faiblement proximisable et la proposition 4.3.1 entraîne que S_{ρ_3} est compatible avec S_t. La condition *(a)* du théorème 4.3.4 entraîne que S_t est uniformisable et le théorème 4.3.4 implique S_t est localement quasi-compact et par suite localement compact.

REMARQUE. Les propriétés signalées ci-dessus ont été obtenues de façon directe et interne. Plus précisément, les démonstrations ne font intervenir que des structures définies sur un même ensemble E, sans recours à des compactifications ou à des complétions. De même, les démonstrations n'utilisent pas la notion de fonction numérique continue. Cette notion ne figure pas dans le théorème 3.5.9 totalement indépendant des autres résultats, et qui ne sert qu'à montrer l'identité de quelques définitions ou critères avec des définitions ou des critères classiques exprimés à l'aide des fonctions numériques continues.

BIBLIOGRAPHIE I

[1] E.M. ALPHEN and J. E.FENSTAD. On the equivalence between proximity structures and totally bounded uniform structures. Math. Scand., 7, 1959, 353 - 360.

[2] G. CHOQUET. Convergences. Ann. Univ. Grenoble, nouvelle série, 23, 1947, 57 - 112.

[3] G. CHOQUET. Sur les notions de filtre et de grille. C. R. Acad. Sciences, 224, 1947, 171 - 173.

[4] R. DOSS. On uniform spaces with a unique structure. Amer. J. of Math., 71, 1949, 19 - 23.

[5] P. SAMUEL. Ultrafilters and compactification of uniform spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 64, 1948, 100 - 132.

[6] Y.M. SMIRNOV. O prostranstvakl blizosti. Mat. Sbornik, nouvelle série, 31, 1952, 543 - 574.

[7] D. TAMARI. On a generalization of uniform structures and spaces. Bull. Res. Council Israël, 3, 1954, 417 - 428.

DEUXIEME PARTIE

PREFAISCEAUX ET FAISCEAUX SUR LES SITUATIONS

INTRODUCTION

Les préfaisceaux et les faisceaux jouent un rôle important non seulement sur les espaces topologiques, mais également sur des structures plus générales telles que les « Topologies de Grothendieck » [1] et les « sites » au sens de Giraud [8] . L'étude des préfaisceaux à valeurs dans une catégorie à priori quelconque, conduite dans le but de préserver la possibilité d'appliquer les méthodes cohomologiques, amène à introduire la notion de « situation » dont les sites constituent un cas particulier, et pour laquelle les faisceaux sont caractérisés par la notion générale d'objet invariant. En dehors des résultats de nature cohomologique, l'étude des propriétés générales des faisceaux sur les situations examine en particulier « le problème du faisceau associé » , abordé antérieurement pour les espaces topologiques par divers auteurs tels que A. Heller et K. A. Rowe dans [13] et J. W. Gray dans [10] et [11] .

Le paragraphe 1 expose deux méthodes de construction d'un foncteur cohomologique universel H^* dont les composantes H^n sont les satellites d'un foncteur exact à gauche Γ d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ dans une autre $\mathcal{C}$. Il donne également un théorème général de réduction. L'une de ces deux méthodes est assez voisine de celle des résolutions simpliciales standard de Godement [9] , mais elle en diffère par une hypothèse beaucoup plus faible et des conclusions plus fortes. Par exemple, son applications à la cohomologie des espaces topologiques évite les vérifications laborieuses des conditions (A) et (B) dont Godement souligne qu'il serait utile d'améliorer les démonstrations. Ces méthodes et leurs duales s'appliquent également sans calculs, à la cohomologie et à l'homologie des algèbres associatives, des algèbres supplémentées, des monoïdes à unité, des groupes, des algèbres de Lie. En particulier, pour l'homologie des algèbres associatives, il en résulte que les H_n calculés par la méthode de Hochschild [4] sont isomorphes aux $Tor_n^{\Lambda^e}(\,.\,,\Lambda)$ lorsque Λ est K-plate, ce qui généralise et améliore la démonstration classique de l'existence de ces isomorphismes qui est connue lorsque Λ est K-projective [4].

Dans le paragraphe 2, on considère la catégorie fondamentale $\underline{\mathcal{E}}$ qui est la catégorie des petites catégories et pour toute catégorie $\mathcal{C}$, la catégorie $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ des préfaisceaux à valeurs dans $\mathcal{C}$, qui est cofibrée sur $\underline{\mathcal{E}}^o$ et dont les objets sont les foncteurs des objets $\mathcal{E}$ de $\underline{\mathcal{E}}$ dans $\mathcal{C}$. On donne quelques conditions nécessaires et suffisantes pour que $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ soit fibrée sur $\underline{\mathcal{E}}^o$; la catégorie $\mathcal{C}$ est dite sectionnante lorsqu'elles sont satisfaites. Il existe alors un foncteur canonique Γ de $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{C}$. Lorsque $\mathcal{C}$ est une catégorie abélienne vérifiant $AB4^*$, les deux méthodes exposées antérieurement déterminent une suite $\{H^n\}$ de foncteurs de $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{C}$, vérifiant $H^o \simeq \Gamma$ et qui constitue un « foncteur semi-cohomologique universel» H^* de $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{C}$, caractérisé par le fait que pour tout objet $\mathcal{E}$ de $\underline{\mathcal{E}}$, sa restriction $H^*_{\mathcal{E}}$ à la fibre abélienne $\mathcal{P}(\mathcal{E}, \mathcal{C})$, constitue un foncteur cohomologique universel dont les composantes $H^n_{\mathcal{E}}$ sont les satellites de $\Gamma_{\mathcal{E}}$. On démontre également un théorème de réduction pour le calcul des H^n. Ces résultats donnent en particulier une présentation globale de la cohomologie des monoïdes à unité et des groupes, à valeurs dans $\mathcal{C}$, ainsi qu'une généralisation des théorèmes de réduction de S. Eilenberg et S. Mac Lane [6]. Enfin, pour tout objet $\mathcal{E}$ de $\underline{\mathcal{E}}$, les composantes $H^n_{\mathcal{E}}$ de $H^*_{\mathcal{E}}$ sont les satellites du foncteur limite projective $\Gamma_{\mathcal{E}}$, ce qui généralise les résultats de Jan Erick Roos [15], relatifs au cas où $\mathcal{E}$ est un ensemble ordonné.

Le paragraphe 3 introduit la catégorie $\mathcal{S}$ des « situations» qui constitue une extension fibrée de $\underline{\mathcal{E}}$ et toute catégorie $\mathcal{C}$ détermine alors la catégorie

$$\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C}) = \mathcal{P}(\mathcal{C}) \underset{\underline{\mathcal{E}}^o}{\times} \mathcal{S}^o$$

des préfaisceaux sur les situations et à valeurs dans $\mathcal{C}$. Lorsque $\mathcal{C}$ est une catégorie complètement sectionnante, c'est-à-dire sectionnante et avec limites inductives filtrantes exactes, le foncteur Γ de $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{C}$ détermine canoniquement un foncteur $\check{\Gamma}$ de $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ dans $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$, respectant les fibres $\check{\mathcal{P}}(S, \mathcal{C})$ au-dessus des objets S de $\mathcal{S}$, ainsi qu'un morphisme fonctoriel $\check{\omega}$ du foncteur identique $\check{I}$ de $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$, dans $\check{\Gamma}$. Lorsque $\mathcal{C}$ est une catégorie abélienne vérifiant $AB4^*$ et $AB5$, l'application des résultats préliminaires donne deux méthodes de construction d'un foncteur semi-cohomologique universel $\check{H}^*$ de $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ dans $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$, vérifiant $\check{H}^o \simeq \check{\Gamma}$ et caractérisé par le fait que pour tout objet S de $\mathcal{S}$, sa restriction $\check{H}^*_S$ est un foncteur cohomologique universel de la catégorie abélienne $\check{\mathcal{P}}(S, \mathcal{C})$ dans elle-même. On démontre également un théorème de réduction pour le calcul des $\check{H}^n$. On montre que tout objet $\mathfrak{S}$ de $\underline{\mathfrak{S}}$ peut être muni canoniquement d'une situation de cofinalité et d'une situation naturelle, cette dernière permettant en particulier d'associer une situation à une paratopologie [2] ou à un espace topologique. Plus généralement, on montre que pour tout univers $\underline{\mathcal{U}}$, il existe un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des $\underline{\mathcal{U}}$ sites [8] (avec pour morphismes les comorphismes de $\underline{\mathcal{U}}$-sites) dans la catégorie des situations. Les préfaisceaux sur les situations constituent donc une généralisation des préfaisceaux sur les sites et le foncteur $\check{H}^*$ caractérise la «cohomologie à la Cech» des situations, qui englobe donc celle des sites. On remarque enfin, que pour un choix convenable de S, le foncteur $\check{\Gamma}_S$ constitue une généralisation d'un foncteur classique utilisé dans l'étude de la localisation dans une catégorie de modules [7], [3].

Compte tenu de cette remarque, le paragraphe 4 commence par l'étude des rapports entre une localisation au sens de Gabriel [7], définie dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ par une sous-catégorie localisante et une autre notion de localisation définie soit par une sous-catégorie locale, soit par un système localisant, et qui conserve un sens dans une catégorie quelconque. Dans ce contexte, si $\mathcal{C}$ est complètement sectionnante, la catégorie $\tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ des faisceaux sur les situations est la sous-catégorie pleine de $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ caractérisée par les « objets invariants» par le système $(\check{\Gamma}, \check{\omega})$ et on la compare à la catégorie $\tilde{\mathcal{P}}_a(\mathcal{C})$ caractérisée par une généralisation de la définition classique. On donne ensuite les trois propriétés importantes du système $(\check{\Gamma}, \check{\omega})$ lorsque $\mathcal{C}$ est une catégorie parfaitement sectionnante, c'est-à-dire complètement sectionnante et vérifiant l'axiome *(D)*, et on démontre que les catégories abéliennes de cette espèce sont celles qui vérifient $AB\,3^*$ et $AB\,6$.

Le paragraphe 5 est consacré aux propriétés générales des faisceaux sur les situations. On donne d'abord diverses conditions nécessaires et suffisantes pour que $\tilde{\mathcal{P}}_a(\mathcal{C})$ soit fibrée, cofibrée ou bifibrée sur $\mathcal{S}^o$. On démontre ensuite que pour que $\tilde{\mathcal{P}}_a(\mathcal{C})$ soit fibrée et exactement cofibrée sur $\mathcal{S}^o$, il faut et il suffit que $\mathcal{C}$ soit sectionnante et que $\tilde{\mathcal{P}}_a(\mathcal{C})$ soit une sous-catégorie locale de $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$, induisant une localisation exacte sur chaque fibre $\check{\mathcal{P}}(S, \mathcal{C})$. Ces conditions entrainent que $\mathcal{C}$ est complètement sectionnante et que $\tilde{\mathcal{P}}_a(\mathcal{C}) = \tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$. En manière de réciproque, on démontre que si $\mathcal{C}$ est parfaitement sectionnante, alors $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ est fibrée et exactement cofibrée sur $\mathcal{S}^o$ et $\tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ est une sous-catégorie locale de $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ déterminée par le système localisant (L, Ψ) défini par $L = \check{\Gamma}^2$ et $\Psi = (\check{\omega}\check{\Gamma}) \circ \check{\omega}$. Le foncteur localisant $\tilde{L}$ associé, constitue le « foncteur faisceau associé» , ce qui montre que ces propriétés généralisent un résultat connu pour les faisceaux sur les sites dans le cas où $\mathcal{C}$ est la catégorie des ensembles ou des groupes abéliens [1] . De plus, si $\mathcal{C}$ est abélienne vérifiant $AB\,3^*$ et $AB\,6$, pour toute situation S, la catégorie $\tilde{\mathcal{P}}(S, \mathcal{C})$ des faisceaux est équivalente à la catégorie quotient au sens de Gabriel [7] , de $\check{\mathcal{P}}(S, \mathcal{C})$ par la sous-catégorie localisante $Ker\,\Gamma_S$. On examine ensuite deux conjectures de J. W. Gray en montrant que la première est exacte si $\mathcal{C}$ est parfaitement sectionnante et que la seconde est inexacte en général. Néanmoins, elle conduit à la notion de situation $\mathcal{C}$-locale, caractérisée par la propriété du système $(\check{\Gamma}_S, \check{\omega}_S)$ d'être localisant et qu'on étudie dans le cas où $\mathcal{C}$ est abélienne. Un espace topologique T étant local si la situation S associée est $\mathcal{C}$-locale pour toute catégorie $\mathcal{C}$ de modules, on en donne diverses caractérisations dont l'une s'exprime par l'existence d'isomorphismes $\tilde{H}^*_S \simeq \check{H}^*_S \tilde{\Gamma}_S$ et $\tilde{H}^*_S \tilde{L}_S \simeq \check{H}^*_S$, ce qui entraîne en particulier que « la bonne cohomologie » pour les faisceaux sur un espace topologique local T, peut être calculée par « la méthode de Čech » .

Je tiens à exprimer ici toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur G. Choquet qui m'a prodigué de précieux encouragements et qui a bien voulu me faire l'honneur de présider le Jury de cette thèse.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur le Professeur C. Ehresmann pour l'aide très efficace qu'il m'a apportée par ses suggestions et ses conseils.

Monsieur le Professeur P. Samuel a bien voulu s'intéresser à mon travail, me guider dans sa rédaction et me donner un second sujet; je l'en remercie très vivement.

BIBLIOGRAPHIE II

[1] M. ARTIN. Grothendieck topologies. Notes multigraphiées. Harvard (1962).

[2] J. BENABOU. Treillis locaux et paratopologies. Séminaire de Topologie et de Géométrie différentielle (C. Ehresmann), Année 57-58.

[3] N. BOURBAKI. Algèbre commutative. Ch. I, Modules Plats et Ch. II, Localisation, Paris Hermann (Act. scient. et ind. 1290; Eléments de Mathématiques).

[4] H. CARTAN et S. EILENBERG. Holomogical Algebra, Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton Mathematical Series, 19).

[5] C. CHEVALLEY. Introduction à la Theorie des Schémas. Cours professé à l'I.H.P. Année 1964-65, édité par le Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique.

[6] S. EILENBERG et S. MAC-LANE. Cohomology theory in abstract groups I. Ann. Math. 48 (1947), 51-78.

[7] P. GABRIEL. Des catégories abéliennes. Bull. Soc. Math. Fr. 90 (1962), 323-448 (Thèse Sc. Math. Paris 1961).

[8] J. GIRAUD. Analysis Situs. Séminaire Bourbaki, Mai 1963.

[9] R. GODEMENT. Topologie algébrique et théorie des faisceaux. Paris, Hermann, 1958 (Act. Scient. et ind. 1252, Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 13).

[10] J.W. GRAY. Category-valued sheaves. Bull. Amer. Math. Soc. 68 (1962), 451-453.

[11] J.W. GRAY. Sheaves with values in a category. Topology, Pergamon Press, 3 (1965), 1-18.

[12] A. GROTHENDIECK. Sur quelques points d'algèbre homologique. Tohuku math J. série 2, 9 (1957), 111-221.

[13] A. HELLER et K.A. ROWE. On category of sheaves. Amer. J. Math. 84 (1962), 205-216.

[14] D. PAPERT et S. PAPERT. Sur les treillis des ouverts et les paratopologies. Séminaire de Topologie et de Géométrie différentielle (C. Ehresmann), année 1957-1958.

[15] J.E. ROOS. Sur les foncteurs dérivés de $\underleftarrow{\lim}$. Applications, C.R. Ac. Sc., 252 (1961), 3702-3704.

1. DEUX METHODES DE CONSTRUCTION D'UN FONCTEUR COHOMOLOGIQUE

Etant données deux catégories abéliennes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$, pour tout foncteur exact à gauche Γ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}$, il est possible de calculer ses satellites au moyen de résolutions injectives lorsque $\mathcal{A}$ *possède suffisamment d'injectifs*. Sans utiliser cette hypothèse sur $\mathcal{A}$, la notion d'immersion exacte et Γ- exacte donne deux méthodes de calcul de foncteurs cohomologiques H^* et H'^* vérifiant $H^o = H'^o = \Gamma$. Pour assurer qu'ils sont *universels* [12] (ce qui entraîne qu'ils sont isomorphes et que les $H^n = H'^n$ sont les satellites de Γ) il suffit d'une seule hypothèse supplémentaire constituée par l'une des quatre relations qui expriment les conditions (A) et (B) de l'Appendice de [9] .

L'une de ces méthodes est donc voisine de celle des résolutions simpliciales standard, mais elle en diffère par une hypothèse beaucoup plus faible et des conclusions plus fortes.

1.1. Foncteurs résolution et pseudo-résolution.

Une *immersion* $\mathcal{J} = (D, j)$ définie dans une catégorie $\mathcal{A}$ est constituée par un *foncteur* D de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ et un *monomorphisme fonctoriel* j du foncteur identique I de $\mathcal{A}$ dans D.

Elle est dite *exacte* si D est exact.

DONNEES. Soit $\mathcal{J} = (D, j)$ une immersion définie dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$.

Il existe alors un *foncteur co-immersion* Q caractérisé par l'exactitude d'une suite de la forme :

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{j} D \xrightarrow{s} Q \longrightarrow 0.$$

Les foncteurs

$$R'^n = D'^{(n+1)} = D\,Q^n$$

et les morphismes fonctoriels

$$d'_n = jQ^{n+1} \circ sQ^n ,$$

définis pour $n \geq 0$, caractérisent, avec l'augmentation $I \xrightarrow{j} D$, un foncteur R'^* de $\mathfrak{A}$ dans la catégorie des complexes augmentés sur $\mathfrak{A}$.

De même, pour tout entier $n \geq 0$ et pour $0 \leq p \leq n + 1$, en posant

$$d^p_n = D^p j D^{n+1-p} ,$$

les foncteurs

$$R^n = D^n$$

et les morphismes fonctoriels

$$d_n = \sum_{p=0}^{p=n+1} (-1)^p \, d^p_n ,$$

définis pour $n \geq 0$, caractérisent, avec l'augmentation $I \xrightarrow{j} D$, un foncteur R^* de $\mathfrak{A}$ dans la catégorie des complexes agmentés sur $\mathfrak{A}$, lorsque D est *additif.*

LEMME 1. 1. 1. *Si* $\mathcal{J}$ *est* exacte, *alors :*

(a) R'^* *est un foncteur exact de* $\mathfrak{A}$ *dans la catégorie des complexes augmentés acycliques sur* $\mathfrak{A}$.

(b) R^* *est un foncteur exact de* $\mathfrak{A}$ *dans la catégorie des complexes augmentés sur* $\mathfrak{A}$ *tel que la suite* $0 \to I \xrightarrow{j} D \xrightarrow{d_o} D^2$ *soit exacte.*

(c) Il existe un morphisme fonctoriel canonique u *de* R^* *dans* R'^* *tel que* $u_{-1} = id_I$.

L'assertion *(a)* résulte de la définition de R'^*, de l'exactitude de D et de l'exàctitude de Q qui en découle.

La première partie de l'assertion *(b)* résulte d'un calcul classique valable lorsque D est additif, ce qui est une conséquence de son exactitude.

En posant $u_{-1} = id_I$ et $u_o = id_D$, le morphisme fonctoriel u est défini par récurrence pour $n \geq 1$ par :

$$u_n = D(sQ^{n-1} \circ u_{n-1}) .$$

Il suffit alors de vérifier les relations

$$u_n \circ d_{n-1} = d'_{n-1} \circ u_{n-1}$$

dont la démonstration est laissée aux soins du lecteur .

Enfin l'exactitude de la suite

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{j} D \xrightarrow{d_o} D^2$$

résulte de l'existence de u et de l'exactitude de la suite :

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{j} D \xrightarrow{d'_o} DQ \ .$$

DEFINITION 1. 1. 2. Lorsque l'immersion $\mathcal{J}$ est exacte, R'^* est le *foncteur résolution* et R^* est le *foncteur pseudo-résolution* associés à $\mathcal{J}$.

1.2. Foncteurs cochaîne et cochaîne normalisée.

Etant donné un foncteur Γ d'une catégorie $\mathcal{A}$ dans une catégorie $\mathcal{C}$, une immersion $\mathcal{J} = (D, j)$ dans $\mathcal{A}$ est dite Γ- *exacte* si ΓD est exact.

DONNEES. Soit $\mathcal{J} = (D, j)$ une immersion exacte dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$. *Soit* Γ *un foncteur exact à gauche de* $\mathcal{A}$ *dans une catégorie abélienne* $\mathcal{C}$.

Les foncteurs $C^n = \Gamma R^n$ et les morphismes fonctoriels $\delta^n = \Gamma d_n$, définis pour $n \geq 0$, caractérisent un foncteur

$$C^* = \Gamma R^* \qquad (n \geq 0)$$

de $\mathcal{A}$ dans la catégorie des complexes de cochaines sur $\mathcal{C}$.

De même, les foncteurs $C'^n = \Gamma R'^n$ et les morphismes fonctoriels $\delta'^n = \Gamma d'_n$, définis pour $n \geq 0$, caractérisent un foncteur

$$C'^* = \Gamma R'^* \qquad (n \geq 0)$$

de $\mathcal{A}$ dans la catégorie des complexes de cochaînes sur $\mathcal{C}$.

LEMME 1. 2. 1. *Si de plus,* $\mathcal{J}$ *est* Γ- *exacte, alors* C^* *et* C'^* *sont des foncteurs exacts de* $\mathcal{A}$ *dans la catégorie des complexes de cochaînes sur* $\mathcal{C}$. *En outre, il existe un morphisme fonctoriel canonique de* C^* *dans* C'^*.

Cela résulte du lemme 1. 1. 1 et de l'exactitude de ΓD.

DEFINITION 1.2.2. Lorsque l'immersion $\mathcal{J}$ est exacte et Γ- exacte, C^* est le *foncteur cochaîne* et C'^* est le *foncteur cochaîne normalisée* associés à $\mathcal{J}$ et à Γ.

Sous ces hypothèses, en posant $H^n = H'^n = 0$ pour $n < 0$ et

$$H^n = H^n[C^*] , \qquad H'^n = H^n[C'^*]$$

pour $n \geq 0$, les suites $\{H^n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ et $\{H'^n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ de foncteurs de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}$ déterminent des foncteurs cohomologiques H^* et H'^*, puisque C^* et C'^* sont exacts.

D'après l'exactitude des suites

$$0 \to I \xrightarrow{j} D \xrightarrow{d_o} D^2 \qquad \text{et} \qquad 0 \to I \xrightarrow{j} D \xrightarrow{d_o} DQ,$$

l'exactitude à gauche de Γ entraîne :

$$H^o \simeq H'^o \simeq \Gamma .$$

Il en résulte donc :

PROPOSITION 1.2.3. *Etant données deux catégories abéliennes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$, pour tout foncteur exact à gauche Γ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}$ et pour toute immersion $\mathcal{J}$ dans $\mathcal{A}$,* exacte et Γ- exacte, *le foncteur cochaîne C^* et le foncteur cochaîne normalisée C'^* déterminent deux* foncteurs cohomologiques *H^* et H'^*, nuls en degrés négatifs et vérifiant $H^o = H'^o = \Gamma$.*

En outre, il existe un morphisme fonctoriel canonique de H^* dans H'^*.

1.3. Foncteurs cohomologiques universels.

Une immersion $\mathcal{J} = (D, j)$ dans une catégorie $\mathcal{A}$ est dite *adaptée* s'il existe un morphisme fonctoriel $p : D^2 \to D$ vérifiant la relation

$$(1) \qquad p \circ jD = id_D ,$$

c'est-à-dire la moitié de la condition (A) de l'appendice de [9] .

LEMME 1.3.1. *Si $\mathcal{J}$ est une immersion exacte et adaptée dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$, alors :*

(a) R^*D est homotope à zéro

(b) R'^*D est homotope à zéro.

La démonstration est assez longue. Il n'en sera donné que les principales étapes.

DEMONSTRATION DE *(a)*. En posant $\theta = jD \circ p$, la relation *(1)* permet la construction d'un morphisme fonctoriel σ de QD dans D^2 caractérisé par

$$\sigma \circ sD = id_{D^2} - \theta$$

et vérifiant

$$sD \circ \sigma = id_{QD} \ .$$

En posant $\alpha_o = jD$ et $\alpha_n = d_{n-1}D$ pour $n \geq 1$, il suffit de construire des morphismes fonctoriels h_n, pour $n \geq 0$, vérifiant :

$$h_o \circ \alpha_o = id_D$$

et

$$h_n \circ \alpha_n + \alpha_{n-1} \circ h_{n-1} = id_{D^{n+1}} \text{ pour } n \geq 1.$$

Les h_n sont définis pour $n \geq 0$ par

$$h_n = (-1)^n D^n p.$$

La première relation résulte de *(1)*.

La relation pour $n = 1$ résulte de $\alpha_o \circ h_o = \theta$ et de la démonstration assez facile de la relation $h_1 \circ \alpha_1 = -\theta + id_{D^2}$.

Les relations pour $n > 1$ se démontrent alors par récurrence grâce à la relation

$$h_n \circ \alpha_n + \alpha_{n-1} \circ h_{n-1} = D(h_{n-1} \circ \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} \circ h_{n-2})$$

qui se démontre à l'aide des relations

$$h_n = -D h_{n-1} \quad \text{et} \quad \alpha_n = jD^{n+1} - D\alpha_{n-1}.$$

DEMONSTRATION DE *(b)*. En posant $\alpha_o = jD$ et $\alpha_n = d'_{n-1}D$ pour $n \geq 1$, il suffit de construire des morphismes fonctoriels h_n pour $n \geq 0$, vérifiant

$$b_o \circ \alpha_o = id_D$$

et

$$b_n \circ \alpha_n + \alpha_{n-1} \circ b_{n-1} = id_{D\,Q^{n-1}D} \quad \text{pour} \quad n \geq 1 .$$

Les b_n sont définis par

$$b_o = p, \qquad\qquad b_1 = pD \circ D\sigma$$

et, pour $n \geq 2$, par la formule de récurrence :

$$b_n = DQ^{n-2}sD \circ b_{n-1}D \circ DQ^{n-1}\sigma .$$

La première relation résulte de *(1)*.

La relation pour $n = 1$ résulte de $\alpha_o \circ b_o = \theta$ et de la démonstration assez facile de la relation $b_1 \circ \alpha_1 = id_{D^2} - \theta$.

La relation pour $n = 2$ résulte des relations

$$\alpha_1 \circ b_1 = DsD \circ (\alpha_o \circ b_o)D \circ D\sigma$$

et

$$b_2 \circ \alpha_2 = DsD \circ (b_1 \circ \alpha_1)D \circ D\sigma,$$

jointes à la relation

$$sD \circ \sigma = id_{QD} .$$

Les relations pour $n > 2$ se démontrent alors par récurrence. La démonstration des relations

$$\alpha_q \circ DQ^{q-2}sD = DQ^{q-1}sD \circ \alpha_{q-1}D$$

et

$$DQ^{q-1}\sigma \circ \alpha_q = \alpha_{q-1}D \circ DQ^{q-2}\sigma ,$$

pour $q \geq 2$, permet alors d'établir les relations

$$\alpha_{n-1} \circ b_{n-1} = DQ^{n-2}sD \circ (\alpha_{n-2} \circ b_{n-2})D \circ DQ^{n-2}\sigma$$

et

$$b_n \circ \alpha_n = DQ^{n-2}sD \circ (b_{n-1} \circ \alpha_{n-1})D \circ DQ^{n-2}\sigma$$

qui permettent de conclure, grâce à la relation

$$s D \circ \sigma = id_{Q D} .$$

COROLLAIRE 1.3.2. *Sous les hypothèses de la proposition 1.2.3, si* $\mathcal{J}$ *est adapté alors pour* $n \geq 1$:

$$H^n D = H'^n D = 0 .$$

Cela résulte du lemme 1.3.1 et de la construction des H^n et des H'^n.

THEOREME 1.3.3. *Etant données deux catégories abéliennes* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{C}$, *pour tout foncteur exact à gauche* Γ *de* $\mathcal{A}$ *dans* $\mathcal{C}$ *et pour toute immersion* $\mathcal{J}$ exacte, Γ-exacte *et* adaptée, *le foncteur cochaîne* C^* *et le foncteur cochaîne normalisée* C'^* *déterminent des* foncteurs cohomologiques H^* *et* H'^* *nuls en degrés négatifs, vérifiant* $H^o = H'^o = \Gamma$, universels *et* isomorphes.

Les composantes $H^n \simeq H'^n$ *sont les* satellites *de* Γ.

En effet, le corollaire 1.3.2 exprime que les foncteurs cohomologiques H^* et H'^* caractérisés par la proposition 1.2.3 sont *effaçables* en degrés strictement positifs par l'immersion $\mathcal{J}$. La proposition 2.2.1 de [12] implique alors qu'ils sont universels. Etant isomorphes en degré zéro, il en résulte qu'ils sont isomorphes et que les composantes $H^n \simeq H'^n$ sont les satellites de Γ.

COROLLAIRE 1.3.4 (THEOREME DE REDUCTION). *Sous les hypothèses du théorème 1.3.3, si* Q *est le foncteur co-immersion associé à* $\mathcal{J}$, *alors :*

(a) Il existe un épimorphisme fonctoriel ∂^o *du foncteur* $H^o D = \Gamma Q$ *sur le foncteur* H^1 *vérifiant la suite exacte :*

$$0 \to \Gamma \xrightarrow{\Gamma j} D \xrightarrow{\Gamma s} Q \xrightarrow{\partial^o} H^1 \to 0 .$$

(b) Pour $n \geq 1$, *il existe un* isomorphisme fonctoriel ∂^n *du foncteur* $H^n Q$ *sur le foncteur* H^{n+1}.

Cela résulte du corollaire 1.3.2 et de la suite exacte de cohomologie déterminée par la suite exacte qui caractérise Q.

REMARQUES 1.3.5.

(a) Une immersion adaptée $\mathcal{J}$ est dite *bien adaptée* si de plus :

(2) $$p \circ D j = id_D \, .$$

Il est alors possible de montrer qu'il existe un monomorphisme fonctoriel v de R'^* dans R^* tel que $u \circ v$ soit le morphisme fonctoriel identique de R'^*. Les isomorphismes réciproques entre H^* et H'^* se déduisent alors de u et v.

(b) Les résultats précédents relatifs à un foncteur Γ exact à gauche donnent *par dualité* des résultats analogues relatifs à un foncteur L *exact à droite.* Il suffit d'utiliser une immersion $\mathcal{J}$ dans $\mathcal{A}^o$ qui donne dans $\mathcal{A}$ une co-immersion $\mathcal{J}^o$. Si elle est *exacte, L-exacte* et *adaptée,* il en résulte un *foncteur chaîne* C_* et un *foncteur chaîne normalisée* C'_* qui fournissent des *foncteurs homologiques* H_* et H'_* nuls en degrés positifs, vérifiant $H_o = H'_o = L$, *universels* et *isomorphes* dont les composantes $H_n \simeq H'_n$ sont les *satellites* (à gauche) de L. Il est facile d'exprimer un théorème de réduction analogue au corollaire 1.3.4.

(c) La recherche des immersions adaptées est facilitée par le résultat suivant :

PROPOSITION 1.3.6. *Etant donnée une catégorie $\mathcal{A}$, si un foncteur* fidèle *T de $\mathcal{A}$ dans une catégorie $\mathcal{B}$ admet un adjoint à droite S, alors $D = S T$ et le morphisme fonctoriel d'adjonction $j = \Psi : I_{\mathcal{A}} \to S T$ caractérisent une immersion $\mathcal{J} = (D, j)$ adaptée (et même bien adaptée) dans $\mathcal{A}$.*

En effet, d'après les propriétés générales des foncteurs adjoints, j est un monomorphisme fonctoriel puisque T est fidèle et le morphisme fonctoriel $p : D^2 \to D$ défini par $p = S \Phi T$, où $\Phi : T S \to I_{\mathcal{B}}$ est le second morphisme fonctoriel d'adjonction, vérifie $p \circ j D = id_D$ et même $p \circ D j = id_D$.

1.4. Applications.

1.4.1. A L'AMELIORATION DE LA METHODE DES RESOLUTIONS SIMPLICIALES STANDARD DE GODEMENT.

Pour utiliser la méthode de Godement exposée dans l'Appendice de [9] il faut, du point de vue des hypothèses,

(a) vérifier les deux conditions (A) et (B),

(b) s'assurer directement que R^* constitue une *résolution.*

Avec les méthodes exposées ci-dessus, l'opération (b) est absolument inutile et la vérification souvent pénible de *(A)* et *(B)* est remplacée par la démonstration de la seule relation *(1)* qui résulte automatiquement et pratiquement toujours de la proposition 1.3.6.

Enfin, du point de vue des conclusions, la méthode des résolutions simpliciales standard ne permet pas d'affirmer, comme avec le théorème 1.3.3, qu'il est possible d'obtenir les satellites de Γ et elle ne donne pas de théorème de réduction.

Il est possible d'objecter qu'il faut par contre s'assurer que l'immersion $\mathcal{J}$ utilisée est exacte et Γ-exacte, mais comme le montrent les exemples suivants, ces hypothèses sont toujours faciles à vérifier et permettent même d'affaiblir les hypothèses classiques (voir par exemple l'homologie des algèbres associatives).

1.4.2. A LA COHOMOLOGIE DES ESPACES TOPOLOGIQUES.

En prenant pour $\mathcal{C}$ la catégorie des groupes abéliens ou une catégorie de modules, soit $\mathcal{A}$ la catégorie des faisceaux sur un espace topologique X, à valeurs dans $\mathcal{C}$. Pour calculer les satellites du foncteur $\Gamma = H^o(X, .)$ il suffit d'appliquer le théorème 1.3.3 avec l'immersion $\mathcal{J}$ définie par *l'immersion flasque canonique qui est adaptée,* puisqu'elle résulte de la proposition 1.3.6 en prenant pour T le foncteur image réciproque Ψ^* et pour S le foncteur image directe Ψ_* associés à l'application continue canonique Ψ de l'espace discret sous-jacent à X dans X. En effet, la détermination de $\mathcal{J}$ montre immédiatement qu'elle est exacte et Γ-exacte.

Il est donc totalement inutile d'effectuer la vérification laborieuse des conditions *(A)* et *(B),* ce qui donne une réponse au souhait de Godement qui écrit : «Il serait utile d'améliorer les démonstrations de *(A)* et *(B)* que nous avons exposées ci-dessus, démonstrations dont l'obscurité n'est que trop évidente».

La *résolution flasque canonique* est donnée par R'^*, la *résolution simpliciale canonique* est donnée par R^* et l'utilité des faisceaux flasques résulte uniquement de l'exactitude de ΓD.

1.4.3. A LA COHOMOLOGIE DES ALGEBRES ASSOCIATIVES :

Soit Λ une algèbre unitaire sur un anneau commutatif unitaire K. En posant $\mathcal{C} = Mod_K$ et $\mathcal{A} = Bimod_\Lambda$, identifiée à Mod_{Λ^e} (catégorie des modules à gauche sur l'algèbre enveloppante, $\Lambda^e = \Lambda \otimes_K \Lambda^*$), soit Γ le foncteur exact à gauche de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}$ défini par :

$$\Gamma = Hom_{\Lambda^e}(\Lambda, .) .$$

Le foncteur canonique *fidèle* T de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B} = Mod_{\Lambda^*}$ admet un adjoint *à droite* S pour lequel SN est le K-module $Hom_K(\Lambda, N)$ muni de la structure de Λ-bimodule définie par les situations $({}_K\Lambda_\Lambda, {}_K N)$ et $({}_K\Lambda, {}_K N_\Lambda)$ [4]. La proposition 1.3.6 détermine donc une immersion *adaptée* $\mathcal{J} = (D, j)$, avec $D = ST$.

En désignant par T_o le foncteur canonique exact de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}$, la relation

$$\Gamma DM = Hom_{\Lambda^e}(\Lambda, STM) \simeq Hom_{\Lambda^*}(T\Lambda, TM) \simeq T_o M$$

montre que $\mathcal{J}$ est Γ-*exacte.*

Pour que $\mathcal{J}$ soit *exacte,* il faut et il suffit que Λ soit K-*projective,* et sous cette hypothèse les deux méthodes du théorème 1.3.3 donnent alors

$$H^n \simeq Ext^n_{\Lambda^e}(\Lambda, .) .$$

La première méthode de calcul de H^n par C^* donne la méthode de Hochschild, ce qui donne donc une démonstration immédiate et sans calcul de l'isomorphisme des H^n calculés par la méthode de Hochschild et des $Ext^n_{\Lambda^e}(\Lambda, .)$.

Le complexe C^*M est alors identique au complexe de cochaînes

$$Hom_{\Lambda^e}(S_n(\Lambda), M) = Hom_{\Lambda^e}(\Lambda^e \otimes S_n(\Lambda), M) = Hom_K(\widetilde{S}_n(\Lambda), M),$$

muni de la différentielle δ et où $S(\Lambda)$ est le *complexe standard de* Λ utilisé par Cartan et Eilenberg [4] pour la démonstration du résultat précédent.

Le lecteur pourra expliciter la forme du second complexe C'^*M et du foncteur co-immersion Q, pour lequel le corollaire 1.3.4 donne un théorème de réduction analogue à celui de Hochschild.

1.4.4. A L'HOMOLOGIE DES ALGEBRES ASSOCIATIVES.

Soit Λ une algèbre unitaire sur un anneau commutatif unitaire K. En posant $\mathcal{C} = Mod_K$ et $\mathcal{A} = Bimod_\Lambda$, identifiée à $Mod_{(\Lambda^e)^*}$ catégorie des modules à droite sur l'algèbre enveloppante : $\Lambda^e = \Lambda \otimes_K \Lambda^*$, soit L le foncteur exact à droite de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}$ défini par :

$$L = .\otimes_{\Lambda^e} \Lambda .$$

Le foncteur canonique *fidèle* T' de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}' = Mod_\Lambda$ admet un adjoint *à gauche* S' pour lequel $S'N$ est le K-module $N \otimes_K \Lambda$ muni de la structure de Λ-bimodule définie par les situations $({}_\Lambda N_K, {}_K\Lambda)$ et $(N_K, {}_K\Lambda_\Lambda)$ [4]. En passant aux catégories duales $\mathcal{A}^o$ et $\mathcal{B}'^o$, la proposition 1.3.6 détermine donc *dans* $\mathcal{A}^o$ une immersion *adaptée* $\mathcal{J}' = (D', j')$ avec $D' = S'T'$. Il en résulte donc une *co-immersion* $\mathcal{J}^o = (D', s)$ *adaptée dans* $\mathcal{A}$.

En désignant par T'_o le foncteur canonique exact de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}$, la relation

$$L D' M = (M \otimes_K \Lambda) \otimes_{\Lambda^e} \Lambda \simeq T'_o M$$

montre que $\mathcal{J}^o$ est *L-exacte.*

Pour que $\mathcal{J}^o$ soit *exacte,* il faut et il suffit que Λ soit *K-plate* et, sous cette hypothèse, d'après la remarque 1.3.5 (b), les deux méthodes du théorème dual du théorème 1.3.3 donnent alors :

$$H_n \simeq Tor_n^{\Lambda^e}(., \Lambda).$$

En plus de l'obtention d'un théorème de réduction et de la possibilité d'utiliser deux types de complexes que le lecteur pourra expliciter, ce qui précède généralise le résultat de Cartan et Eilenberg démontré à l'aide du *complexe standard* sous l'hypothèse plus forte : Λ est *K-projective.*

1.4.5. A LA COHOMOLOGIE DES ALGEBRES SUPPLEMENTEES :

Soit Λ une K-algèbre supplémentée par $\varepsilon : \Lambda \to K$. En posant $\mathcal{A} = Mod_\Lambda$ et $\mathcal{C} = Mod_K$, soit Γ le foncteur exact à gauche de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}$, défini par :

$$\Gamma M = Hom_{\Lambda}(K, M) = M^{\Lambda} = Hom_{\Lambda^e}(\Lambda, M_{\varepsilon}).$$

Le lecteur vérifiera qu'il existe une immersion $\mathcal{J}$ dans $\mathcal{A}$ définie de façon analogue à celle de 1.4.3, telle que, lorsque Λ est *K-projective*, le théorème 1.3.3 donne deux méthodes de calcul de

$$H^n \simeq Ext^n_{\Lambda}(K, .) \simeq Ext^n_{\Lambda^e}(\Lambda, (.)_{\varepsilon}).$$

Ces méthodes sont toujours applicables à *la cohomologie des monoïdes et des groupes.*

Pour *la cohomologie d'une algèbre de Lie* $\mathcal{G}$, il en résulte deux méthodes de calcul de

$$H^n \simeq H^n(\mathcal{G}, .) \simeq Ext^n_{\mathcal{G}^e}(K, .),$$

lorsque $\mathcal{G}^e$ est *K-projective.*

1.4.6. A L'HOMOLOGIE DES ALGEBRES SUPPLEMENTEES.

Soit Λ une K-algèbre supplémentée par $\varepsilon : \Lambda \to K$. En posant $\mathcal{A} = Mod_{\Lambda^*}$ et $\mathcal{C} = Mod_K$, soit L le foncteur exact à droite de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}$, défini par

$$LM = M \otimes_{\Lambda} K = M_{\Lambda} = {}_{\varepsilon}M \otimes_{\Lambda^e} \Lambda.$$

Le lecteur vérifiera qu'il existe une co-immersion $\mathcal{J}^o$ dans $\mathcal{A}$, définie de façon analogue à celle de 1.4.4, telle que, lorsque Λ est *K-plate,* le dual du théorème 1.3.3 donne deux méthodes de calcul de

$$H_n \simeq Tor^n_{\Lambda}(., K) \simeq Tor^n_{\Lambda^e}({}_{\varepsilon}(.), \Lambda).$$

Ces deux méthodes sont toujours applicables à *l'homologie des monoïdes et des groupes.*

Pour l'homologie d'une algèbre de Lie $\mathcal{G}$, il en résulte deux méthodes de calcul de

$$H_n \simeq H_n(\mathcal{G}, .) \simeq Tor^{\mathcal{G}^e}_n(., K),$$

lorsque $\mathcal{G}^e$ est *K-plate.*

Les exemples 1.4.5 et 1.4.6 donnent lieu à des théorèmes de réduction dont la formulation explicite est laissée aux soins du lecteur.

1.4.7. AUX SATELLITES DES FONCTEURS LIMITES PROJECTIVES :

Cet exemple sera traité dans la suite.

2. PREFAISCEAUX SUR LES PETITES CATEGORIES

2.1. Les catégories de préfaisceaux.

La catégorie dont les objets sont les *petites catégories* et dont les morphismes sont les foncteurs munis de la loi de composition habituelle sera notée $\underline{\mathcal{E}}$ et appelée *la catégorie fondamentale.*

Pour toute catégorie $\mathcal{C}$ et pour tout objet $\mathcal{E}$ de $\underline{\mathcal{E}}$, soit $\mathcal{P}(\mathcal{E},\mathcal{C})$ la catégorie des foncteurs covariants de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{C}$. Toute flèche $\rho : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ détermine un foncteur ρ_* de $\mathcal{P}(\mathcal{E},\mathcal{C})$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{E}',\mathcal{C})$, défini par la composition par ρ.

Toute catégorie $\mathcal{C}$ détermine une catégorie $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ *cofibrée* et *scindée* sur la duale $\underline{\mathcal{E}}^o$ de $\underline{\mathcal{E}}$, dont les fibres sont isomorphes aux catégories $\mathcal{P}(\mathcal{E},\mathcal{C})$ et dont la cofibration est caractérisée par les *foncteurs images directes* ρ_* associés aux flèches *cocartésiennes* au-dessus des flèches ρ de $\underline{\mathcal{E}}$ [5] .

DEFINITION 2.1.1. La catégorie $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ cofibrée sur $\underline{\mathcal{E}}^o$ ainsi caractérisée est *la catégorie des préfaisceaux* à valeurs dans $\mathcal{C}$.

Soient K et K' les foncteurs canoniques de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ et dans la sous-catégorie pleine $\mathcal{P}_o(\mathcal{C})$ de $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ au-dessus de <u>*Ens*</u> obtenus en identifiant $\mathcal{C}$ à la fibre de $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ et de $\mathcal{P}_o(\mathcal{C})$ au-dessus d'un point, objet final de $\underline{\mathcal{E}}$.

Le foncteur d'oubli $\mathcal{E} \mapsto |\mathcal{E}|$ de $\underline{\mathcal{E}}$ dans <u>*Ens*</u> détermine un foncteur *fidèle* T de $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{P}_o(\mathcal{C})$, tel que, pour tout objet $\mathcal{E}$ de $\underline{\mathcal{E}}$, sa restriction constitue un foncteur $T_{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{P}(\mathcal{E},\mathcal{C})$ dans $\mathcal{P}(|\mathcal{E}|,\mathcal{C})$.

PROPOSITION 2.1.2. *Pour toute catégorie $\mathcal{C}$, il y a équivalence des conditions suivantes :*

(a) La catégorie $\mathcal{C}$ est avec produits (infinis);

(b) K' admet un adjoint à droite S' ;

(c) Chaque $T_{\mathcal{E}}$ *admet un adjoint à droite* $S_{\mathcal{E}}$.

L'équivalence de *(a)* et de *(b)* est évidente.

Pour tout objet X de $\mathcal{E}$, soit $\mathcal{E}_o(X)$ la catégorie des objets de $\mathcal{E}$ au-dessous de X, munie du foncteur but ε_X de $\mathcal{E}_o(X)$ dans $\mathcal{E}$. Toute flèche $f: X \to Y$ dans $\mathcal{E}$ définit un foncteur f^* de $\mathcal{E}_o(Y)$ dans $\mathcal{E}_o(X)$ compatible avec ε_X et ε_Y. Ces éléments caractérisent un foncteur $\Sigma_{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}$ dans la duale de la catégorie des objets de $\mathcal{E}$ au-dessus de $\mathcal{E}$. Par composition avec T, il donne un foncteur $T\Sigma_{\mathcal{E}}$ de $\bar{\mathcal{E}}$ dans la duale de la catégorie des objets de *Ens* au-dessus de $|\mathcal{E}|$.

Grâce aux foncteurs images directes associés aux flèches de *Ens*, il en résulte un foncteur $\Sigma'_{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E} \times \mathcal{P}(|\mathcal{E}|, \mathcal{C})$ dans $\mathcal{P}_o(\mathcal{C})$.

Lorsque *(b)* est satisfaite, le foncteur $S'\Sigma'_{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E} \times \mathcal{P}(|\mathcal{E}|, \mathcal{C})$ dans $\mathcal{C}$ caractérise un foncteur $S_{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{P}(|\mathcal{E}|, \mathcal{C})$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{E}, \mathcal{C})$.

Ce foncteur $S_{\mathcal{E}}$ étant défini, la vérification du fait qu'il est adjoint à droite à $T_{\mathcal{E}}$ est laissée aux soins du lecteur.

Ainsi *(b)* implique *(c)*, et la réciproque résulte d'un choix convenable de $\mathcal{E}$ et d'objets P' de $\mathcal{P}(|\mathcal{E}|, \mathcal{C})$.

COROLLAIRE 2.1.3. *Sous les conditions équivalentes de la proposition 2.1.2, alors :*

(a) Il existe une immersion adaptée $\mathcal{J} = (D, j)$ *définie dans* $\mathcal{P}(\mathcal{C})$, *dans laquelle* le foncteur disloquant D *est caractérisé par ses restrictions* $D_{\mathcal{E}} = S_{\mathcal{E}} T_{\mathcal{E}}$ *aux fibres* $\mathcal{P}(\mathcal{E}, \mathcal{C})$;

(b) L'immersion $\mathcal{J}$ *caractérise un noyau du double morphisme fonctoriel* (jD, Dj);

(c) Le foncteur produit *étant* $\Pi = ST$, *il existe un isomorphisme fonctoriel :*

$$Hom_{\mathcal{P}(\mathcal{C})}(K\,\cdot, D\,\cdot) \simeq Hom_{\mathcal{C}}(\cdot, \Pi\,\cdot).$$

L'adjonction de $S_{\mathcal{E}}$ à $T_{\mathcal{E}}$ et les relations $T_{\mathcal{E}'}\rho_* = |\rho|_* T_{\mathcal{E}}$ permettent de montrer que toute flèche $\rho: \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ détermine un morphisme fonctoriel

$$m_\rho : \rho_* D_{\mathcal{E}} \to D_{\mathcal{E}'} \rho_* .$$

Le lecteur pourra s'assurer de l'existence de ces m_ρ et montrer qu'ils vérifient des relations qui permettent la définition d'un foncteur D de $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ caractérisé par ses restrictions $D_{\mathfrak{S}} = S_{\mathfrak{S}} T_{\mathfrak{S}}$. L'assertion *(a)* résulte alors des propositions 1.3.6 et 2.1.2 et du fait que les $T_{\mathfrak{S}}$ sont fidèles.

Les vérifications de *(b)* et *(c)* sont laissées aux soins du lecteur,

REMARQUE 2.1.4. Les morphismes fonctoriels jD et Dj de D dans D^2 déterminent deux morphismes fonctoriels du foncteur

$$Hom_{\mathcal{P}(\mathcal{C})}(K\,.\,, D\,.) \simeq Hom_{\mathcal{C}}(\,.\,, \Pi\,.)$$

dans le foncteur

$$Hom_{\mathcal{P}(\mathcal{C})}(K\,.\,, D^2\,.) \simeq Hom_{\mathcal{C}}(\,.\,, \Pi D\,.),$$

qui proviennent donc de deux morphismes fonctoriels δ^o_o et δ^o_1 de Π dans ΠD.

LEMME 2.1.5. *Si $\mathcal{B}$ est une catégorie cofibrée sur $\mathcal{A}$, pour que $\mathcal{B}$ soit fibré sur $\mathcal{A}$ il faut et il suffit que, pour toute flèche α de $\mathcal{A}$, le foncteur image directe α_* admette un adjoint à droite α^* (qui est alors un foncteur image réciproque).*

La nécessité de la condition est bien connue [5] et la démonstration de la réciproque est laissée aux soins du lecteur.

LEMME 2.1.6. *Si K admet un adjoint à droite Γ, alors, pour toute flèche ρ de $\underline{\mathfrak{S}}$, le foncteur image directe ρ_* admet un adjoint à droite ρ^*.*

Pour toute flèche $\rho : \mathfrak{S}' \to \mathfrak{S}$, le «produit fibré par ρ» du foncteur $\Sigma_{\mathfrak{S}}$, utilisé dans la démonstration de la proposition 2.1.2, détermine un foncteur $\Sigma_{\mathfrak{S},\rho}$ de $\mathfrak{S}$ dans la duale de la catégorie des objets de $\underline{\mathfrak{S}}$ au-dessus de $\mathfrak{S}'$.

Grâce aux foncteurs images directes associés aux flèches de $\underline{\mathfrak{S}}$, il en résulte un foncteur $\Sigma'_{\mathfrak{S},\rho}$ de $\mathfrak{S} \times \mathcal{P}(\mathfrak{S}',\mathcal{C})$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{C})$.

Le foncteur $\Gamma\Sigma'_{\mathfrak{S},\rho}$ de $\mathfrak{S} \times \mathcal{P}(\mathfrak{S}',\mathcal{C})$ dans $\mathcal{C}$ caractérise alors un foncteur ρ^* de $\mathcal{P}(\mathfrak{S}',\mathcal{C})$ dans $\mathcal{P}(\mathfrak{S},\mathcal{C})$.

Ce foncteur ρ^* étant défini, la vérification du fait qu'il est adjoint à droite à ρ_* est laissée aux soins du lecteur.

THEOREME 2.1.7. *Pour toute catégorie $\mathcal{C}$, il y a équivalence des conditions suivantes :*

(a) La catégorie $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ est fibrée *(donc bifibrée) sur $\overline{\mathcal{E}}^o$;*

(b) Pour toute flèche ρ de $\overline{\mathcal{E}}$, le foncteur image directe ρ_* admet un adjoint à droite ρ^* ;

(c) Le foncteur K admet un adjoint à droite Γ;

(d) Pour tout objet $\mathcal{E}$ de $\overline{\mathcal{E}}$, le foncteur constant $K_{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{E}, \mathcal{C})$ admet un adjoint à droite $\Gamma_{\mathcal{E}}$ qui caractérise un foncteur limite projective *sur $\mathcal{P}(\mathcal{E}, \mathcal{C})$.*

L'équivalence de *(a)* et de *(b)* résulte du lemme 2.1.5. Il est immédiat que *(b)* implique *(d)*, en prenant pour ρ l'unique foncteur de $\mathcal{E}$ sur un point. Il est évident que *(d)* implique *(c)*, et enfin *(c)* implique *(b)* d'après le lemme 2.1.6.

La méthode classique de calcul des *foncteurs limites projectives* découle d'une spécialisation du complément du théorème 2.1.7 donné par le résultat suivant :

COROLLAIRE 2.1.8. *Pour que la catégorie $\mathcal{C}$ soit* sectionnante, *c'est-à-dire vérifie les conditions équivalentes du théorème 2.1.7, il faut et il suffit que $\mathcal{C}$ soit* avec produits *(infinis) et* avec noyaux de doubles flèches *(ou avec* produits fibrés*).*

Le foncteur section *Γ est alors caractérisé par un* noyau de double morphisme fonctoriel *(δ^o_o, δ^o_1) de Π dans ΠD, c'est-à-dire par un* diagramme exact à gauche :

$$\Gamma \longrightarrow \Pi \overset{\delta^o_o}{\underset{\delta^o_1}{\rightrightarrows}} \Pi D .$$

La nécessité des conditions résulte de la traduction de la partie *(d)* du théorème 2.1.7 avec un choix convenable de $\mathcal{E}$ et des objets de $\mathcal{P}(\mathcal{E}, \mathcal{C})$.

Réciproquement, si $\mathcal{C}$ est avec produits et avec noyaux de doubles flèches d'après le corollaire 2.1.3 et la remarque 2.1.4, il est possible de construire un foncteur. N de $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{C}$, caractérisé par un diagramme exact à gauche :

$$N \longrightarrow \Pi \overset{\delta_o^o}{\underset{\delta_1^o}{\rightrightarrows}} \Pi D\ .$$

La partie (b) du corollaire 2.1.3 donne un diagramme exact à gauche

$$I \xrightarrow{j} D \overset{jD}{\underset{Dj}{\rightrightarrows}} D^2$$

Ils donnent naissance aux deux diagrammes exacts à gauche

$$Hom_{\mathcal{C}}(\cdot, N\cdot) \to Hom_{\mathcal{C}}(\cdot, \Pi\cdot) \rightrightarrows Hom_{\mathcal{C}}(\cdot, \Pi D\cdot)$$

et

$$Hom_{\mathcal{P}(\mathcal{C})}(K\cdot, \cdot) \to Hom_{\mathcal{P}(\mathcal{C})}(K\cdot, D\cdot) \rightrightarrows Hom_{\mathcal{P}(\mathcal{C})}(K\cdot, D^2\cdot),$$

dans lesquels les flèches sont caractérisées de façon évidente et pour lesquels les foncteurs des deux derniers «couples verticaux» sont liés par des isomorphismes compatibles avec les flèches d'après le corollaire 2.1.3 et les définitions de δ_o^o et δ_1^o.

Il en résulte un isomorphisme fonctoriel des noyaux

$$Hom_{\mathcal{C}}(\cdot, N\cdot) \simeq Hom_{\mathcal{P}(\mathcal{C})}(K\cdot, \cdot),$$

qui montre que K admet pour adjoint à droite N, isomorphe au foncteur section Γ.

REMARQUE 2.1.9. Lorsque $\mathcal{C}$ est sectionnante, la partie (c) du corollaire 2.1.3 entraîne les relations $\delta_o^o = \Gamma jD$ et $\delta_1^o = \Gamma Dj$ et détermine un isomorphisme fonctoriel $\Gamma D \simeq \Pi$.

Il en résulte que le diagramme exact à gauche du corollaire 2.1.8 qui caractérise Γ est isomorphe au diagramme exact à gauche

$$\Gamma \xrightarrow{\Gamma j} \Gamma D \overset{\delta_o^o = \Gamma jD}{\underset{\delta_1^o = \Gamma Dj}{\rightrightarrows}} \Gamma D^2$$

obtenu en appliquant l'adjoint à droite Γ, qui est exact à gauche, au diagramme exact à gauche défini par la partie *(b)* du corollaire 2.1.3 et qui caractérise l'immersion $\mathcal{J} = (D, j)$ comme un noyau de double flèche.

2.2. Cohomologie abélienne des petites catégories.

PROPOSITION 2.2.1. *Pour qu'une catégorie abélienne $\mathcal{C}$ soit sectionnante, il faut et il suffit qu'elle vérifie l'axiome $AB3^*$.*

Le foncteur section Γ *est alors caractérisé par un* noyau du morphisme fonctoriel $\delta^o = \delta^o_o - \delta^o_1$ *de* Π *dans* ΠD*, c'est-à-dire par une* suite exacte :

$$0 \to \Gamma \to \Pi \xrightarrow{\delta^o} \Pi D.$$

Cela résulte immédiatement du corollaire 2.1.8.

LEMME 2.2.2. *Si $\mathcal{C}$ est une catégorie abélienne vérifiant l'axiome $AB3^*$, il existe un «foncteur co-immersion» Q de $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ et un épimorphisme fonctoriel s du foncteur disloquant D sur Q tels que les restrictions à chaque fibre abélienne $\mathcal{P}(\mathfrak{S}, \mathcal{C})$ donnent une suite exacte :*

$$0 \to I_{\mathfrak{S}} \xrightarrow{j_{\mathfrak{S}}} D_{\mathfrak{S}} \xrightarrow{s_{\mathfrak{S}}} Q_{\mathfrak{S}} \to 0.$$

La démonstration est laissée aux soins du lecteur.

LEMME 2.2.3. *Si $\mathcal{C}$ est une catégorie abélienne vérifiant l'axiome $AB3^*$, il y a équivalence des conditions suivantes :*

(a) La catégorie $\mathcal{C}$ vérifie l'axiome $AB4^*$;

(b) Dans chaque fibre $\mathcal{P}(\mathfrak{S}, \mathcal{C})$, l'immersion $\mathcal{J}_{\mathfrak{S}} = (D_{\mathfrak{S}}, j_{\mathfrak{S}})$ est exacte;

(c) Dans chaque fibre $\mathcal{P}(\mathfrak{S}, \mathcal{C})$, l'immersion $\mathcal{J}_{\mathfrak{S}} = (D_{\mathfrak{S}}, j_{\mathfrak{S}})$ est $\Gamma_{\mathfrak{S}}$-exacte.

L'équivalence de *(a)* et de *(b)* résulte de la définition des foncteurs $D_{\mathfrak{S}}$, et l'équivalence de *(a)* et *(c)* résulte de l'isomorphisme $\Gamma D \simeq \Pi$.

DEFINITION 2.2.4. Etant données deux catégories $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ fibrées ou cofibrées sur des catégories $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$, telles que les fibres au-dessus de chaque objet de $\mathfrak{A}$ et de $\mathfrak{A}'$ soient abéliennes, un *foncteur semi-cohomo-*

logique (resp. universel) H^* de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$ est une suite $\{H^n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ de foncteurs de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$, telle que les restrictions à chaque fibre abélienne de $\mathcal{B}$ constituent un *foncteur cohomologique* (resp. *universel*) à valeurs dans une fibre abélienne de $\mathcal{B}'$.

Pour une catégorie abélienne $\mathcal{C}$, les fibres $\mathcal{P}(\mathcal{E},\mathcal{C})$ de $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ sont abéliennes. Si $\mathcal{C}$ vérifie l'axiome $AB3^*$, bien que $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ ne soit pas abélienne, le foncteur section Γ, l'immersion adaptée $\mathcal{J} = (D, j)$ et le foncteur co-immersion Q « qui respectent les fibres » permettent la construction d'un *foncteur cochaîne* C^* et d'un *foncteur cochaîne normalisée* C'^*, définis par des méthodes analogues à celles des paragraphes 1.1 et 1.2, et tels que leurs restrictions $C^*_{\mathcal{E}}$ et $C'^*_{\mathcal{E}}$ aux fibres abéliennes $\mathcal{P}(\mathcal{E},\mathcal{C})$ soient effectivement le foncteur cochaîne et le foncteur cochaîne normalisée associés au foncteur exact à gauche $\Gamma_{\mathcal{E}}$ et à l'immersion adaptée $\mathcal{J}_{\mathcal{E}} = (D_{\mathcal{E}}, j_{\mathcal{E}})$.

En posant $H^n = H'^n = 0$ pour $n < 0$ et

$$H^n = H^n[\,C^*\,], \qquad\qquad H'^n = H^n[\,C'^*\,]$$

pour $n \geq 0$, il en résulte deux suites H^* et H'^* de foncteurs de $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{C}$.

THEOREME 2.2.5. *Lorsque $\mathcal{C}$ est une catégorie abélienne vérifiant l'axiome $AB4^*$, le* foncteur cochaîne *C^* et le* foncteur cochaîne normalisée *C'^* déterminent deux* foncteurs semi-cohomologiques *H^* et H'^* de $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{C}$, nuls en degrés négatifs, vérifiant $H^0 = H'^0 = \Gamma$,* universels *et* isomorphes.

Les composantes $H^n \simeq H'^n$ sont les « semi-satellites » *du* foncteur section Γ.

En effet, c'est une conséquence du théorème 1.3.3 appliqué aux immersions $\mathcal{J}_{\mathcal{E}} = (D_{\mathcal{E}}, j_{\mathcal{E}})$ qui sont adaptées, exactes et $\Gamma_{\mathcal{E}}$-exactes d'après le lemme 2.2.3 et l'axiome $AB4^*$.

COROLLAIRE 2.2.6 (THEOREME DE REDUCTION). *Sous l'hypothèse du théorème 2.2.5 et si Q est le foncteur co-immersion associé à $\mathcal{J}$, alors :*

(a) Il existe un épimorphisme fonctoriel ∂^0 du foncteur $H^0 Q = \Gamma Q$ sur le foncteur H^1 vérifiant la suite exacte :

$$0 \to \Gamma \overset{\Gamma j}{\to} \Gamma D \overset{\Gamma s}{\to} \Gamma Q \overset{\partial^o}{\to} H^1 \to 0;$$

(b) Pour $n \geq 1$, *il existe un* isomorphisme fonctoriel ∂^n *du foncteur* $H^n Q$ *sur le foncteur* H^{n+1}.

Cela résulte du corollaire 1.3.4.

2.3. Applications.

2.3.1. A LA COHOMOLOGIE DES MONOIDES AVEC UNITES:

Tout monoïde avec unité Λ détermine canoniquement une petite catégorie $\mathcal{E} = \mathcal{E}_\Lambda$ ayant un seul objet et dont Λ est le monoïde des endomorphismes. Pour toute catégorie $\mathcal{C}$, la catégorie des préfaisceaux

$$\mathcal{P}(\mathcal{E}, \mathcal{C}) \simeq \mathcal{P}(\Lambda, \mathcal{C}) = \mathcal{C}^\Lambda$$

est la catégorie des objets de $\mathcal{C}$ sur lesquels opère Λ.

Lorsque $\mathcal{C}$ est abélienne et vérifie l'axiome $AB4^*$, le *foncteur cohomologique universel* $H^*_{\mathcal{E}} = H^*[\Lambda, .]$ caractérise *la cohomologie de* Λ *à valeurs dans* $\mathcal{C}$. Ses composantes $H^n[\Lambda, .]$ sont les satellites du foncteur $\Gamma_{\mathcal{E}} = H^o[\Lambda, .]$ qui associe à tout objet P de $\mathcal{C}^\Lambda$ le plus grand sous-objet $\Gamma_{\mathcal{E}} P = P^\Lambda$ sur lequel Λ opère trivialement.

Cette situation généralise la cohomologie classique des monoïdes avec unité, obtenue avec une catégorie de modules $\mathcal{C} = Mod_A$.

Il est facile d'expliciter les foncteurs $C'^*_{\mathcal{E}} = C^*[\Lambda, .]$ et $C^*_{\mathcal{E}} = C'^*[\Lambda, .]$. La relation $\Gamma D = \Pi$ permet de montrer que le foncteur co-immersion $Q_{\mathcal{E}} = Q[\Lambda, .]$ est isomorphe à un foncteur $C'^1_\sigma[\Lambda, .]$ obtenu à partir de $C'^1[\Lambda, .]$ en faisant opérer Λ d'une façon que le lecteur pourra préciser. Le corollaire 2.2.6 donne alors un théorème de réduction facile à exprimer.

2.3.2. A LA COHOMOLOGIE DES GROUPES :

Il suffit d'appliquer ce qui précède à un groupe quelconque G. Lorsque $\mathcal{C}$ est abélienne et vérifie l'axiome $AB4^*$, le *foncteur cohomologique universel* $H^*[G, .]$ caractérise *la cohomologie de G à valeurs dans* $\mathcal{C}$. Ses composantes $H^n[G, .]$ sont les satellites du foncteur $H^o[G, .]$. Ils sont obtenus par restriction des foncteurs H^n de $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{C}$ à la fibre $\mathcal{P}(G, \mathcal{C})$ au-dessus de G. De plus, le foncteur co-immersion $Q[G,.]$ est isomorphe à un second foncteur $C'^{1}_{T}[G,.]$ obtenu à partir de $C'^{1}[G,.]$ en faisant opérer G d'une seconde façon que le lecteur pourra préciser. Le corollaire 2.2.6 donne alors deux théorèmes de réduction faciles à exprimer. Ils constituent des généralisations des théorèmes de réduction de S. Eilenberg et S. Mac Lane [6] qui peuvent être retrouvés en prenant pour $\mathcal{C}$ la catégorie des groupes abéliens.

2.3.3. AUX SATELLITES DES FONCTEURS LIMITES PROJECTIVES.

Pour toute catégorie abélienne $\mathcal{C}$ vérifiant l'axiome $AB4^*$, le foncteur semi-cohomologique universel H^* de $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{C}$ admet pour composantes les foncteurs H^n dont les restrictions aux fibres abéliennes $\mathcal{P}(\mathfrak{S},\mathcal{C})$ sont *les satellites des foncteurs limites projectives* relatifs à toute petite catégorie $\mathfrak{S}$.

Ce résultat généralise celui de Jan Erik Roos [15] relatif au cas où $\mathfrak{S}$ est *un ensemble ordonné.*

De plus, le corollaire 2.2.6 montre que ces satellites calculés globalement de deux façons, à l'aide de C^* et C'^*, peuvent s'obtenir par itération grâce aux isomorphismes $H^{n+1} \simeq H^1 Q^n$ pour $n \geq 1$.

3. EXTENSIONS DE LA CATEGORIE FONDAMENTALE

Sous les hypothèses du théorème 2.2.5, toute flèche $\rho : \mathfrak{S}' \to \mathfrak{S}$ détermine un foncteur cohomologique $H^*_\rho = H^*_{\mathfrak{S}'} \rho_*$ de $\mathcal{P}(\mathfrak{S},\mathcal{C})$ dans $\mathcal{C}$. En général H^*_ρ n'est pas *universel.* Pour qu'il soit universel, il suffit que ρ vérifie une condition simple indépendante de la catégorie $\mathcal{C}$ et qui caractérise la classe des *flèches disloquantes.*

Cette classe permet la construction de la *catégorie des dominations* dont les objets V sont constitués par un objet $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{S}$, muni d'une structure qui permet de remplacer $\Gamma_{\mathfrak{S}}$ par un foncteur $\hat{\Gamma}^{-}_{V}$ de $\mathcal{P}(\mathfrak{S},\mathcal{C})$ dans $\mathcal{C}$, dont il est facile de calculer les satellites qui permettent une étude *plus fine* de $\mathfrak{S}$. Par exemple, pour un ensemble ordonné $\mathfrak{S}$ ayant un premier élément, $H^*_{\mathfrak{S}}$ est trivial, alors qu'il est possible de choisir V pour que le nouveau foncteur cohomologique universel H^*_V soit approprié à l'étude de *l'extrémité droite* de $\mathfrak{E}$.

Enfin, une nouvelle extension de $\underline{\mathfrak{E}}$ conduit à la *catégorie* $\overline{\mathfrak{S}}$ des *pré-situations* qui donne lieu à un théorème analogue au théorème 2.2.5, mais dans lequel Γ est remplacé par un foncteur $\overline{\Gamma}$ d'une catégorie $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ dans elle-même. Cette circonstance posera le problème de l'étude des *objets invariants* par $\overline{\Gamma}$ qui constitueront une bonne généralisation des *faisceaux*. Leur étude ne se révèlera fructueuse qu'en se limitant aux faisceaux sur des pré-situations particulières qui appartiennent à la *catégorie* $\mathfrak{S}$ *des situations.* Comme tout *site* détermine une situation, l'étude des faisceaux sur les situations englobera celles des *faisceaux sur les sites.*

3.1. Flèches disloquantes.

Pour tout objet $\mathfrak{E}$ de $\underline{\mathfrak{E}}$ et pour tout objet X de $\mathfrak{E}$, soit $\mathfrak{E}_o(X)$ la catégorie des objets de $\mathfrak{E}$ au-dessous de X. Une flèche $\rho : \mathfrak{E}' \to \mathfrak{E}$ détermine pour tout objet X' de $\mathfrak{E}'$ un foncteur $\rho_o(X')$ de $\mathfrak{E}'_o(X')$ dans $\mathfrak{E}_o[\,\rho(X')\,]$.

DEFINITION 3.1.1. Une flèche $\rho : \mathfrak{E}' \to \mathfrak{E}$ de la catégorie fondamentale est *disloquante* si, pour tout objet X' de $\mathfrak{E}'$, l'application $|\rho_o(X')|$ est *bijective.*

DEFINITION 3.1.2. La *catégorie des domaines* est la sous-catégorie pleine $\mathfrak{D}$ de la catégorie des flèches de $\underline{\mathfrak{E}}$, déterminée par les flèches disloquantes.

Il est immédiat que $\underline{\mathfrak{E}}$ est équivalente à une sous-catégorie de $\mathfrak{D}$.

Puisque $\underline{\mathfrak{E}}$ admet des produits fibrés, le foncteur but de la catégorie des flèches de $\underline{\mathfrak{E}}$ dans $\underline{\mathfrak{E}}$ est bifibrant. Toute flèche $\rho : \mathfrak{E}' \to \mathfrak{E}$ de $\underline{\mathfrak{E}}$ détermine donc un foncteur image directe $\rho_\bullet$ et un foncteur image réciproque $\rho^\bullet$. L'image par $\rho_\bullet$ d'une flèche disloquante n'est pas nécessairement disloquante, mais le lecteur pourra vérifier que l'image par $\rho^\bullet$ d'une flèche disloquante est disloquante. Il en résulte donc que ρ détermine un *foncteur image réciproque,* noté également $\rho^\bullet$, de la fibre $\mathfrak{D}(\mathfrak{E})$ des domaines sur $\mathfrak{E}$ dans la fibre $\mathfrak{D}(\mathfrak{E}')$ des domaines sur $\mathfrak{E}'$.

EXEMPLES 3.1.3.

(a) Pour tout objet $\mathfrak{S}$ de $\underline{\mathfrak{S}}$ et tout objet X de $\mathfrak{S}$, il est immédiat que le foncteur but ε_X de $\mathfrak{S}_o(\overline{X})$ dans $\mathfrak{S}$ est une flèche disloquante. De même pour toute flèche $f: X \to Y$, le foncteur $f^*: \mathfrak{S}_o(Y) \to \mathfrak{S}_o(X)$ est une flèche disloquante.

(b) Pour que le foncteur canonique ρ d'une sous-catégorie $\mathfrak{S}'$ dans $\mathfrak{S}$ soit une flèche disloquante, il faut et il suffit que $\mathfrak{S}'^o$ soit un *crible* de $\mathfrak{S}^o$ [8]. Une telle sous-catégorie $\mathfrak{S}'$ de $\mathfrak{S}$ sera appelée *co-crible* de $\mathfrak{S}$.

(c) Tout composé de flèches disloquantes est une flèche disloquante.

PROPOSITION 3.1.4. *Lorsque $\mathcal{C}$ est une catégorie avec produits infinis, pour toute flèche disloquante $\rho: \mathfrak{S}' \to \mathfrak{S}$, le morphisme fonctoriel*

$$m_\rho : \rho_* D_{\mathfrak{S}} \to D_{\mathfrak{S}'} \rho_*$$

est un isomorphisme fonctoriel.

Cela résulte facilement de la construction du foncteur disloquant D, de la caractérisation de m_ρ et de la définition d'une flèche disloquante.

COROLLAIRE 3.1.5. *Sous les hypothèses du théorème 2.2.5, si $\rho: \mathfrak{S}' \to \mathfrak{S}$ est une* flèche disloquante, *alors le foncteur cohomologique*

$$H^*_\rho = \overset{*}{H}_{\mathfrak{S}'} \rho_*$$

de $\mathcal{P}(\mathfrak{S}, \mathcal{C})$ dans $\mathcal{C}$ est universel.

En effet, il en résulte les relations

$$H^n_\rho D_{\mathfrak{S}} = \overset{n}{H}_{\mathfrak{S}'} \rho_* D_{\mathfrak{S}} \simeq \overset{n}{H}_{\mathfrak{S}'} D_{\mathfrak{S}'} \rho_*$$

et, pour $n \geq 1$, les relations

$$\overset{n}{H}_{\mathfrak{S}'} D_{\mathfrak{S}'} = 0$$

entraînent les relations

$$H^n_\rho D_{\mathfrak{S}} = 0,$$

qui montrent que H_ρ est *effaçable* en degrés strictement positifs par l'immersion $\mathcal{J}_{\mathcal{E}} = (D_{\mathcal{E}}, j_{\mathcal{E}})$. D'après la proposition 2.2.1 de [12], il en résulte donc que H^*_ρ est universel.

3.2. Les dominations.

Soit $\mathcal{J}_g$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathcal{E}}$ caractérisée par les *ensemble ordonnés filtrants à gauche.* Pour toute catégorie $\mathcal{C}$, soit $\mathcal{P}_g(\mathcal{C})$ la restriction de $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ au-dessus de la sous-catégorie $\mathcal{J}_g$ de $\underline{\mathcal{E}}$.

DEFINITION 3.2.1. Pour tout objet $\mathcal{E}$ de $\underline{\mathcal{E}}$, la catégorie $\mathcal{V}(\mathcal{E})$ des *dominations* sur $\mathcal{E}$ est caractérisée par

$$\mathcal{V}(\mathcal{E}) = \mathcal{P}_g[\mathfrak{D}(\mathcal{E})] .$$

Pour toute flèche $\rho : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$, le foncteur image réciproque $\rho^\bullet$ de de $\mathfrak{D}(\mathcal{E})$ dans $\mathfrak{D}(\mathcal{E}')$ détermine un foncteur, noté également $\rho^\bullet$, de $\mathcal{V}(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{V}(\mathcal{E}')$. Le lecteur pourra vérifier qu'il existe une catégorie $\mathcal{V}$ *fibrée* sur $\underline{\mathcal{E}}$ dont les fibres sont isomorphes aux catégories $\mathcal{V}(\mathcal{E})$ et dont la fibration est caractérisée par les foncteurs images réciproques $\rho^\bullet$ associés aux flèches cartésiennes au-dessus des flèches ρ de $\underline{\mathcal{E}}$. Il est immédiat que $\underline{\mathcal{E}}$ et $\mathfrak{D}$ sont canoniquement équivalentes à des sous-catégories de $\mathcal{V}$.

DEFINITION 3.2.2. *La catégorie des dominations* est la catégorie $\mathcal{V}$ *fibrée* sur $\underline{\mathcal{E}}$ ainsi caractérisée et qui constitue une extension fibrée de la catégorie fondamentale $\underline{\mathcal{E}}$.

Pour deux dominations V' et V sur des objets $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}$, relatives à des ensembles ordonnés filtrants à gauche I' et I, une flèche v de V' dans V est donc caractérisée par une flèche $\rho : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ et une flèche $v' : V' \to \rho^\bullet V$ dans $\mathcal{V}(\mathcal{E}')$ qui est déterminée par une flèche $\varphi : I \to I'$ dans $\mathcal{J}_g$ et une flèche $\beta' : \varphi_* V' \to \rho^\bullet V$ dans $\mathcal{P}[I, \mathfrak{D}(\mathcal{E}')]$.

DEFINITION 3.2.3. La flèche $v : V' \to V$ est *simple* dans $\mathcal{V}$ si $\varphi_* V' = = \rho^\bullet V$ et si $\beta = id$. Les flèches simples déterminent *la sous-catégorie* $\mathcal{V}'$ des *dominations simples.*

DEFINITION 3.2.4. Pour toute catégorie $\mathcal{C}$, la catégorie $\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ des *préfaisceaux au-dessus des dominations* et *à valeurs dans* $\mathcal{C}$ est la catégorie *cofibrée* au-dessus de $\mathcal{V}^o$ caractérisée par

$$\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{C}) = \mathcal{P}(\mathcal{C}) \times_{\underline{\mathcal{E}}^o} \mathcal{V}^o .$$

Soit $\mathcal{J}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathcal{E}}$ caractérisée par les *ensembles ordonnés filtrants à droite*. Pour toute catégorie $\mathcal{C}$ et pour tout objet I de $\mathcal{J}$, soit $\mathcal{P}(I, \mathcal{C})$ la catégorie des foncteurs covariants de I dans $\mathcal{C}$. Toute flèche $\varphi: I' \to I$ détermine un foncteur φ^* de $\mathcal{P}(I, \mathcal{C})$ dans $\mathcal{P}(I', \mathcal{C})$, défini par la composition par φ. Le lecteur pourra vérifier qu'il existe une catégorie $\mathcal{P}_f(\mathcal{C})$ *fibrée* et *scindée* sur $\mathcal{J}$, dont les fibres sont isomorphes aux catégories $\mathcal{P}(I, \mathcal{C})$ et dont la fibration est caractérisée par les *foncteurs images réciproques* φ^* associés aux flèches cartésiennes au-dessus des flèches φ de $\mathcal{J}$. Il convient de ne pas confondre la catégorie $\mathcal{P}_f(\mathcal{C})$ avec la restriction de $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ au-dessus de $\mathcal{J}$. Une démonstration analogue à celle du théorème 2.1.7 montre que, si la catégorie $\mathcal{C}$ est avec *limites inductives filtrantes*, il existe un *foncteur limite inductive filtrante* $\varinjlim$ de $\mathcal{P}_f(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{C}$.

LEMME 3.2.5. *Pour toute catégorie $\mathcal{C}$, il existe un foncteur canonique de $\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{P}_f[\mathcal{P}(\mathcal{C})]$.*

Un objet de $\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ est constitué par un couple (P, V) dans lequel P est un objet de $\mathcal{P}(\mathcal{E}, \mathcal{C})$ et V un objet de $\mathcal{V}(\mathcal{E})$ au-dessus d'un objet I de $\mathcal{J}_g$, c'est-à-dire un foncteur de I dans $\mathcal{D}(\mathcal{E})$. Grâce à la cofibration de $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ au-dessus de $\underline{\mathcal{E}}^o$ et à la donnée de P, ce foncteur V de I dans $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ «se relève» en un foncteur *contravariant* de I dans $\mathcal{P}(\mathcal{C})$, identifiable à un foncteur *covariant* P_V de l'objet I^o de $\mathcal{J}$, dual de l'objet I de $\mathcal{J}_g$, dans $\mathcal{P}(\mathcal{C})$, c'est-à-dire un objet de $\mathcal{P}_f[\mathcal{P}(\mathcal{C})]$. Ainsi tout objet (P, V) de $\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ détermine un objet P_V de $\mathcal{P}_f[\mathcal{P}(\mathcal{C})]$ et le lecteur pourra vérifier que cette correspondance se prolonge bien en un foncteur de $\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{P}_f[\mathcal{P}(\mathcal{C})]$.

COROLLAIRE 3.2.6. *Si $\mathcal{C}$ est une catégorie avec* limites inductives filtrantes, *tout foncteur F de $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{C}$ admet une* extension canonique

$\hat{F}$ *de* $\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ *dans* $\mathcal{C}$.

En effet, $\hat{F}$ est défini par la composition du foncteur canonique de $\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{P}_f[\mathcal{P}(\mathcal{C})]$, de l'extension de F de $\mathcal{P}_f[\mathcal{P}(\mathcal{C})]$ dans $\mathcal{P}_f(\mathcal{C})$ et du foncteur $\underrightarrow{lim}$ de $\mathcal{P}_f(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{C}$.

DEFINITION 3.2.7. Si $\mathcal{C}$ est une *catégorie sectionnante* et avec *limites inductives filtrantes*, le *foncteur section* $\hat{\Gamma}$ de $\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{C}$ est l'extension canonique du foncteur Γ de $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{C}$.

3.3. Cohomologie abélienne des dominations.

Pour toute catégorie $\mathcal{C}$ avec produits infinis, le produit fibré du foncteur identique de $\mathcal{O}^o$ et du foncteur disloquant D de $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ détermine un *foncteur disloquant* $\hat{D}$ de $\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ dans $\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$, qui caractérise une immersion adaptée $\hat{\mathcal{J}} = (\hat{D}, \hat{j})$ dans $\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$. De même, lorsque $\mathcal{C}$ est abélienne, Q détermine un *foncteur co-immersion* $\hat{Q}$ de $\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ et un *épimorphisme fonctoriel* $\hat{s}$ de $\hat{D}$ sur $\hat{Q}$.

LEMME 3.3.1. *Si* $\mathcal{C}$ *est une catégorie avec produits infinis et avec limites inductives filtrantes, pour tout foncteur* F *de* $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ *dans* $\mathcal{C}$, *l'extension canonique* $\hat{F}$ *de* $\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ *dans* $\mathcal{C}$ *vérifie la relation :*

$$\hat{F}\,\hat{D} = \widehat{FD}\,.$$

D'après la proposition 3.1.4, toute flèche disloquante $\rho : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ entraîne les relations

$$F_\rho D_{\mathcal{E}} = F_{\mathcal{E}'}\,\rho_* D_{\mathcal{E}} \simeq F_{\mathcal{E}'} D_{\mathcal{E}'}\,\rho_* = (FD)_{\mathcal{E}'}\,\rho_* = (FD)_\rho\,.$$

Alors, pour toute domination V, par passage à la limite inductive suivant les domaines ρ qui interviennent dans V, les relations

$$F_\rho D_{\mathcal{E}} = (FD)_\rho$$

entraînent bien la relation

$$\hat{F}_V \hat{D}_V = (\widehat{FD})_V\,.$$

PROPOSITION 3.3.2. *Si* $\mathcal{C}$ *est une catégorie abélienne vérifiant les axiomes* $AB4^*$ *et* $AB5$, *alors pour toute domination* V, *le foncteur* $\hat{\Gamma}_V$ *de la* *catégorie abélienne* $\hat{\mathcal{P}}(V, \mathcal{C})$ *dans* $\mathcal{C}$ *est exact à gauche et l'immersion adaptée* $\hat{\mathcal{J}}_V = (\hat{D}_V, \hat{j}_V)$ *dans* $\hat{\mathcal{P}}(V, \mathcal{C})$ *est exacte et* $\hat{\Gamma}_V$*-exacte.*

Cela résulte immédiatement du lemme 3.3.1, qui donne la relation

$$\hat{\Gamma}_V \hat{D}_V = \widehat{(\Gamma D)}_V = \hat{\Pi}_V,$$

et de l'exactitude des limites inductives filtrantes qu'exprime l'axiome *AB5*.

LEMME 3.3.3. *Si* $\mathcal{C}$ *est une catégorie abélienne vérifiant les axiomes AB3* et AB5, les extensions canoniques des foncteurs* C^* *et* C'^* *constituent le* foncteur cochaîne $\hat{C}^*$ *et le* foncteur cochaîne normalisée $\hat{C}'^*$ *associés à* $\hat{\Gamma}$ *et à l'immersion adaptée* $\hat{\mathcal{J}} = (\hat{D}, \hat{j})$.

Cela résulte facilement du lemme 3.3.1.

THEOREME 3.3.4. *Lorsque* $\mathcal{C}$ *est une catégorie abélienne vérifiant les axiomes AB4* et AB5, le* foncteur cochaîne $\hat{C}^*$ *et le* foncteur cochaîne normalisée $\hat{C}'^*$ *déterminent deux* foncteurs semi-cohomologiques $\hat{H}^*$ *et* $\hat{H}'^*$ *de* $\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ *dans* $\mathcal{C}$, *nuls en degrés négatifs, vérifiant* $\hat{H}^o = \hat{H}'^o = \hat{\Gamma}$, universels *et* isomorphes *à* l'extension canonique *du* foncteur semi-cohomologique universel H^* *de* $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ *dans* $\mathcal{C}$.

Les composantes $\hat{H}^n \simeq \hat{H}'^n$ *sont les* «semi-satellites» *du foncteur section* $\hat{\Gamma}$.

En effet, c'est une conséquence du lemme 3.3.3, du théorème 1.3.3. appliqué aux immersions adaptées $\hat{\mathcal{J}}_V$ exactes et $\hat{\Gamma}_V$-exactes d'après la proposition 3.3.2, et du fait que l'extension canonique de H^* est un foncteur semi-cohomologique universel d'après le corollaire 3.1.5 et l'axiome *AB5*.

COROLLAIRE 3.3.5. (THEOREME DE REDUCTION). *Sous les hypothèses du théorème 3.3.4 et si* $\hat{Q}$ *est le foncteur co-immersion associé à* $\hat{\mathcal{J}}$, *alors :*

(a) Il existe un épimorphisme fonctoriel $\hat{\partial}^o$ *du foncteur* $\hat{H}^o \hat{Q} = \hat{\Gamma} \hat{Q}$ *sur le foncteur* $\hat{H}^1$ *vérifiant la suite exacte*

$$0 \to \hat{\Gamma} \xrightarrow{\hat{\Gamma}\hat{j}} \hat{\Gamma}\hat{D} \xrightarrow{\hat{\Gamma}\hat{s}} \hat{\Gamma}\hat{Q} \xrightarrow{\hat{\partial}^o} \hat{H}^1 \to 0.$$

(b) Pour $n \geq 1$, *il existe un* isomorphisme fonctoriel $\hat{\partial}^n$ *du foncteur* $\hat{H}^n \hat{Q}$ *sur le foncteur* $\hat{H}^{n+1}$.

Cela résulte du corollaire 1.3.4.

3.4. Les pré-situations.

Pour tout objet $\mathcal{E}$ de $\underline{\mathcal{E}}$, soit $\Sigma_{\mathcal{E}}$ l'objet de $\mathcal{P}(\mathcal{V}^o)$ qui coïncide avec l'objet de $\mathcal{P}(\mathcal{D}^o)$ caractérisé par le foncteur de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{D}^o$ qui associe, à tout objet X de $\mathcal{E}$, le domaine défini par le foncteur but ε_X de la catégorie $\mathcal{E}_o(X)$ des objets de $\mathcal{E}$ au-dessous de X, dans $\mathcal{E}$, et à toute flèche $f: X \to Y$ la flèche dans $\mathcal{D}^o$ déterminée par

$$f^* : \mathcal{E}_o(Y) \to \mathcal{E}_o(X).$$

Toute flèche $\rho : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ détermine une flèche Σ_ρ de $\Sigma_{\mathcal{E}}$ dans $\Sigma_{\mathcal{E}'}$, caractérisée par ρ et par les flèches $\rho_o(X')$ de $\mathcal{E}'_o(X')$ dans $\mathcal{E}_o[\rho(X')]$ pour tout objet X' de $\mathcal{E}'$.

Ces éléments caractérisent un foncteur Σ de $\underline{\mathcal{E}}^o$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{D}^o) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{V}^o)$. Par composition avec le foncteur source de $\overline{\mathcal{D}}$ dans $\underline{\mathcal{E}}$, Σ détermine un foncteur Σ^o de $\underline{\mathcal{E}}^o$ dans $\mathcal{P}(\underline{\mathcal{E}}^o)$.

Soit θ_o le foncteur de $\mathcal{P}(\overline{\mathcal{V}^o})$ dans $\mathcal{P}(\underline{\mathcal{E}}^o)$ défini par le composé du foncteur canonique de $\mathcal{P}(\mathcal{V}^o)$ dans $\underline{\mathcal{E}}^o$, associé à la cofibration de $\mathcal{P}(\mathcal{V}^o)$ sur $\underline{\mathcal{E}}^o$, et du foncteur Σ^o de $\underline{\mathcal{E}}^o$ dans $\mathcal{P}(\underline{\mathcal{E}}^o)$.

Soit θ_1 le foncteur de $\mathcal{P}(\overline{\mathcal{V}^o})$ dans $\mathcal{P}(\underline{\mathcal{E}}^o)$ déduit du foncteur canonique de $\mathcal{V}^o$ sur $\underline{\mathcal{E}}^o$ associé à la fibration de $\overline{\mathcal{V}}$ sur $\underline{\mathcal{E}}$.

DEFINITION 3.4.1. La *catégorie des pré-situations* est la *duale* $\overline{\mathcal{S}}$ de la sous-catégorie de $\mathcal{P}(\mathcal{V}^o)$ *noyau de la double flèche* (θ_o, θ_1). La *catégorie des pré-situations simples* est la sous-catégorie $\overline{\mathcal{S}}'$ de $\overline{\mathcal{S}}$ caractérisée de façon analogue en remplaçant $\mathcal{V}$ par $\mathcal{V}'$.

Une pré-situation S sur un objet $\mathcal{E}$ de $\underline{\mathcal{E}}$ est donc caractérisée par un foncteur de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{V}^o$ tel que, pour tout objet X de $\mathcal{E}$, la domination S_X soit définie sur $\Sigma^o_{\mathcal{E}}(X) = \mathcal{E}_o(X)$ et que, pour toute flèche $f: X \to Y$ dans $\mathcal{E}$, la flèche $S_f : S_Y \to S_X$ dans $\mathcal{V}$ soit au-dessus de f^*.

Il est immédiat que le foncteur Σ de $\underline{\mathcal{E}}^o$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{V}^o)$ détermine un foncteur $\overline{\Sigma}$ de $\underline{\mathcal{E}}$ dans $\overline{\mathcal{S}}$ et même dans $\overline{\mathcal{S}'}$. Pour tout objet $\mathcal{E}$ de $\underline{\mathcal{E}}$,

$\overline{\Sigma}(\mathfrak{E})$ est la *pré-situation grossière* sur $\mathfrak{E}$.

PROPOSITION 3.4.2. *La catégorie des pré-situations* $\overline{\mathfrak{S}}$ [*resp. des pré-situations simples* $\overline{\mathfrak{S}}'$] *est une* extension fibrée *de la catégorie fondamentale* $\underline{\mathfrak{E}}$ *qui est équivalente à la sous-catégorie* $\overline{\mathfrak{S}}_g$ *des pré-situations grossières.*

Il existe un foncteur canonique $\overline{\Sigma}_o$ [*resp.* $\overline{\Sigma}'_o$] *de* $\overline{\mathfrak{S}}$ [*resp.* $\overline{\mathfrak{S}}'$] *dans* $\overline{\mathfrak{S}}_g$ *et un morphisme fonctoriel canonique* σ [*resp.* σ'] *du foncteur identique de* $\overline{\mathfrak{S}}$ [*resp.* $\overline{\mathfrak{S}}'$] *dans* $\overline{\Sigma}_o$ [*resp.* $\overline{\Sigma}'_o$].

La fibration de $\overline{\mathfrak{S}}$ [resp. $\overline{\mathfrak{S}}'$] sur $\underline{\mathfrak{E}}$ résulte par restriction de la co-fibration de $\mathcal{P}(\mathcal{V}^o)$ sur $\mathfrak{E}^o$. En effet, pour toute flèche $\rho : \mathfrak{E}' \to \mathfrak{E}$, le foncteur image réciproque $\overline{\rho}$ de $\overline{\mathfrak{S}}(\mathfrak{E})$ dans $\overline{\mathfrak{S}}(\mathfrak{E}')$ est caractérisé, pour toute pré-situation S sur $\mathfrak{E}$, par la pré-situation $S' = \overline{\rho}\, S$ sur $\mathfrak{E}'$ telle que, pour tout objet X' de $\mathfrak{E}'$,

$$S'_{X'} = [\,\rho_o(X')\,]^{\bullet}\, S_{\rho(X')}\,.$$

Enfin, il est immédiat que $\overline{\Sigma}$ établit une équivalence entre $\underline{\mathfrak{E}}$ et la sous-catégorie $\overline{\mathfrak{S}}_g$ des pré-situations grossières, ce qui entraîne facilement l'existence de σ et de σ'.

DEFINITION 3.4.3. Pour toute catégorie $\mathcal{C}$, la catégorie $\overline{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ des *pré-faisceaux au-dessus des pré-situations* et *à valeurs dans* $\mathcal{C}$ est la catégorie *cofibrée* au-dessus de $\overline{\mathfrak{S}}^o$ caractérisée par :

$$\overline{\mathcal{P}}(\mathcal{C}) = \mathcal{P}(\mathcal{C}) \times_{\underline{\mathfrak{E}}^o} \overline{\mathfrak{S}}^o\,.$$

LEMME 3.4.4. *Pour toute catégorie* $\mathcal{C}$, *il existe un foncteur canonique de* $\overline{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ *dans* $\mathcal{P}\,[\,\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{C})\,]$.

Un objet de $\overline{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ est constitué par un couple (P, S) dans lequel P est un objet de $\mathcal{P}(\mathfrak{E}, \mathcal{C})$ et S un objet de $\overline{\mathfrak{S}}(\mathfrak{E})$, c'est-à-dire un foncteur particulier de $\mathfrak{E}$ dans $\mathcal{V}^o$. Grâce à la cofibration de $\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ au-dessus de $\mathcal{V}^o$ et à la donnée de P, ce foncteur S de $\mathfrak{E}$ dans $\mathcal{V}^o$ «se relève» en un foncteur P_S de $\mathfrak{E}$ dans $\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$, identifiable à un objet de $\mathcal{P}\,[\,\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{C})\,]$. Ainsi tout objet (P, S) de $\overline{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ détermine un objet P_S de $\mathcal{P}\,[\,\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{C})\,]$

et le lecteur pourra vérifier que cette correspondance se prolonge bien en un foncteur de $\overline{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{P}[\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{C})]$.

COROLLAIRE 3.4.5. *Si* $\mathcal{C}$ *est une catégorie* avec limites inductives filtrantes, *tout foncteur* F *de* $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ *dans* $\mathcal{C}$ *admet une* extension canonique $\overline{F}$ *de* $\overline{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ *dans* $\overline{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$.

En effet, d'après la définition de $\overline{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ comme produit fibré, le foncteur $\overline{F}$ est entièrement caractérisé par la projection canonique de $\overline{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ sur $\overline{\mathcal{S}}^o$ et par le foncteur de $\overline{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ obtenu par la composition du foncteur canonique de $\overline{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{P}[\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{C})]$, caractérisé par le lemme 3.4.4 et par le foncteur de $\mathcal{P}[\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{C})]$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ déduit du foncteur $\hat{F}$ de $\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{C}$ déterminé par le corollaire 3.2.6.

DEFINITION 3.4.6. Si $\mathcal{C}$ est une *catégorie sectionnante* et *avec limites inductives filtrantes,* le *foncteur section* $\overline{\Gamma}$ de $\overline{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ dans $\overline{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ est l'extension canonique du foncteur Γ de $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{C}$.

PROPOSITION 3.4.7. *Sous les hypothèses précédentes, il existe un morphisme fonctoriel canonique* $\overline{\omega}$ *du foncteur identique* $\overline{I}$ *de* $\overline{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ *dans le foncteur section* $\overline{\Gamma}$.

Pour toute catégorie $\mathcal{C}$, le foncteur $\overline{\Sigma}_o$ de $\overline{\mathcal{S}}$ dans $\overline{\mathcal{S}}_g \subseteq \overline{\mathcal{S}}$ détermine un foncteur $\overline{I}_o$ de $\overline{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ dans $\overline{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$, et le morphisme fonctoriel σ du foncteur identique de $\overline{\mathcal{S}}$ dans $\overline{\Sigma}_o$ détermine un morphisme fonctoriel σ_o de $\overline{I}_o$ dans $\overline{I}$. Sous les hypothèses indiquées, il est facile de vérifier que $\overline{\Gamma}\,\overline{I}_o$ est le foncteur identique $\overline{I}$ de $\overline{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$. Il en résulte alors un morphisme fonctoriel canonique $\overline{\omega} = \overline{\Gamma}\,\sigma_o$ de $\overline{I}$ dans $\overline{\Gamma}$.

3.5. Cohomologie abélienne des pré-situations.

Pour toute catégorie $\mathcal{C}$ avec produits infinis, le produit fibré du foncteur identique de $\overline{\mathcal{S}}^o$ et du foncteur disloquant D de $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ détermine un *foncteur disloquant* $\overline{D}$ de $\overline{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ dans $\overline{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ qui caractérise une immersion adaptée $\overline{\mathcal{J}} = (\overline{D}, \overline{j})$ dans $\overline{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$. De même, lorsque $\mathcal{C}$ est abélienne, Q détermine un *foncteur co-immersion* $\overline{Q}$ de $\overline{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ dans $\overline{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ et un *épimorphisme fonctoriel* $\overline{s}$ de $\overline{D}$ sur $\overline{Q}$.

LEMME 3.5.1. *Si* $\mathcal{C}$ *est une catégorie avec produits infinis et avec limites* *inductives filtrantes, pour tout foncteur* F *de* $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ *dans* $\mathcal{C}$, *l'extension canonique* $\overline{F}$ *de* $\overline{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ *dans* $\overline{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ *vérifie*

$$\overline{F}.\overline{D} = \overline{FD}.$$

Cela résulte de la construction de $\overline{F}$ et du lemme 3.3.1.

PROPOSITION 3.5.2. *Si* $\mathcal{C}$ *est une catégorie abélienne vérifiant les axiomes* $AB4^*$ *et* $AB5$, *alors, pour toute pré-situation* S, *le foncteur* $\overline{\Gamma}_S$ *de la catégorie abélienne* $\overline{\mathcal{P}}(S, \mathcal{C})$ *dans elle-même est exact à gauche et l'immersion adaptée* $\mathcal{J}_S = (\overline{D}_S, \overline{j}_S)$ *dans* $\overline{\mathcal{P}}(S, \mathcal{C})$ *est exacte et* $\overline{\Gamma}_S$*-exacte.*

Cela résulte immédiatement du lemme 3.5.1 qui donne la relation

$$\overline{\Gamma}_S \overline{D}_S = (\overline{\Gamma D})_S = \overline{\Pi}_S$$

et de l'exactitude des limites inductives filtrantes qu'exprime l'axiome $AB5$.

LEMME 3.5.3. *Si* $\mathcal{C}$ *est une catégorie abélienne vérifiant les axiomes* $AB3^*$ *et* $AB5$ *les extensions canoniques des foncteurs* C^* *et* C'^* *constituent le* foncteur cochaîne $\overline{C}^*$ *et le* foncteur cochaîne normalisée $\overline{C}'^*$ *associés à* $\overline{\Gamma}$ *et à l'immersion adaptée* $\mathcal{J} = (\overline{D}, \overline{j})$.

Cela résulte facilement du lemme 3.5.1.

THEOREME 3.5.4. *Lorsque* $\mathcal{C}$ *est une catégorie abélienne vérifiant les axiomes* $AB4^*$ *et* $AB5$, *le* foncteur cochaîne $\overline{C}^*$ *et le* foncteur cochaîne normalisée $\overline{C}'^*$ *déterminent deux* foncteurs semi-cohomologiques $\overline{H}^*$ *et* $\overline{H}'^*$ *de* $\overline{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ *dans* $\overline{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$, *nuls en degrés négatifs, vérifiant* $\overline{H}^o = \overline{H}'^o = \overline{\Gamma}$, universels *et* isomorphes *à* l'extension canonique *du foncteur* semi-cohomologique universel H^* *de* $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ *dans* $\mathcal{C}$.

Les composantes $\overline{H}^n \simeq \overline{H}'^n$ *sont les* «semi-satellites» *du foncteur section* $\overline{\Gamma}$.

En effet, c'est une conséquence du lemme 3.5.3, du théorème 1.3.3 appliqué aux immersions adaptées $\mathcal{J}_S$ exactes et $\overline{\Gamma}_S$-exactes d'après la proposition 3.5.2 et du fait que l'extension canonique de H^* est un foncteur semi-cohomologique universel d'après le corollaire 3.1.5 et l'axiome $AB5$.

COROLLAIRE 3.5.5. (THEOREME DE REDUCTION). *Sous les hypothèses du théorème 3.5.4 et si* $\overline{Q}$ *est le foncteur co-immersion associé à* $\mathfrak{J}$, *alors:*

(a) Il existe un épimorphisme fonctoriel $\overline{\partial}^o$ *du foncteur* $\overline{H}^o\overline{Q} = \overline{\Gamma}\,\overline{Q}$ *sur le foncteur* $\overline{H}^1$ *vérifiant la suite exacte :*

$$0 \to \overline{\Gamma} \xrightarrow{\overline{\Gamma}\,\overline{j}} \overline{\Gamma}\,\overline{D} \xrightarrow{\overline{\Gamma}\,\overline{s}} \overline{\Gamma}\,\overline{Q} \xrightarrow{\overline{\partial}^o} \overline{H}^1 \to 0 .$$

(b) Pour $n \geq 1$, *il existe un* isomorphisme fonctoriel $\overline{\partial}^n$ *du foncteur* $\overline{H}^n\overline{Q}$ *sur le foncteur* $\overline{H}^{n+1}$.

Cela résulte du corollaire 1.3.4.

3.6. Les situations.

Une pré-situation S sur un objet $\mathfrak{E}$ de $\overline{\mathfrak{E}}$ est caractérisée par un foncteur de $\mathfrak{E}$ dans $\mathfrak{V}^o$ tel que, pour tout objet X de $\mathfrak{E}$, la domination S_X soit définie sur $\mathfrak{E}_o(X)$ et que, pour toute flèche $f : X \to Y$ dans $\mathfrak{E}$, la flèche $S_f : S_Y \to S_X$ dans $\mathfrak{V}$ soit au-dessus de f^*.

La domination S_X est donc caractérisée par un *foncteur contravariant* d'un *ensemble ordonné filtrant à droite* I_X dans $\mathfrak{D}[\,\mathfrak{E}_o(X)\,]$. Une *couverture de* X dans la pré-situation S est un domaine sur $\mathfrak{E}_o(X)$ de la forme $S_X(i)$, avec $i \in I_X$. Par abus de langage, S_X pourra être appelé «*le filtre des couvertures de* X».

Pour toute flèche $f : X \to Y$, la domination $(f^*)^{\bullet}S_X$ sur $\mathfrak{E}_o(Y)$, notée $f(S_X)$, est appelée *l'image directe* de S_X par f. Comme la flèche f^* est *disloquante* et que $(f^*)_{\bullet}$ est adjoint à gauche à $(f^*)^{\bullet}$, il en résulte que $(f^*)_{\bullet}S_Y$ constitue une domination sur $\mathfrak{E}_o(X)$, notée $f^{-1}(S_Y)$ et appelée *l'image réciproque* de S_Y par f.

La flèche $S_f : S_Y \to S_X$ dans $\mathfrak{V}$ au-dessus de f^* peut donc être caractérisée soit par une flèche $s'_f : S_Y \to f(S_X)$, soit par une flèche $s_f : f^{-1}(S_Y) \to S_X$, ces deux éléments étant associés par l'adjonction.

Lorsque S est *une pré-situation simple*, S_f est déterminée par une flèche $\varphi_f : I_X \to I_Y$ telle que s'_f soit caractérisée par $\varphi_f^* S_Y = f(S_X)$ et telle, par suite, que s_f soit caractérisée par une flèche $\beta_f : \varphi_f^* f^{-1}(S_Y) \to S_X$.

Pour tout indice $i \in I_X$, les indices $j \in I_Y$ vérifiant $\varphi_f(i) \leq j$ sont dits *subordonnés* à i par f. Il existe alors une flèche canonique $\beta_f(i,j)$ de $f^{-1}[S_Y(j)]$ dans $S_X(i)$.

Une couverture $S_X(i)$ de X étant fixée et définie par $\rho_i : \mathcal{E}_i \to \mathcal{E}_o(X)$, pour tout objet A de $\mathcal{E}_i$, l'objet $\rho_i(A)$ de $\mathcal{E}_o(X)$ détermine une flèche de $\mathcal{E}$ notée $f_A : X \to Y_A$.

Un *multi-indice subordonné* à $i \in I_X$ est une famille $k = \{ j_A \}$ indexée par les objets A de $\mathcal{E}_i$, d'indices j_A subordonnés à i par les f_A.

Un tel multi-indice k détermine la famille $\{ \Delta_{j_A} \}_{j_A \in k}$ des domaines $\Delta_{j_A} = f_A^{-1}[S_{Y_A}(j_A)]$ sur $\mathcal{E}_o(X)$, *associée à* k et qui est accompagnée de la famille des flèches $\beta_{j_A} = \beta_{f_A}(i, j_A)$ des Δ_{j_A} dans $S_X(i)$. Si Δ_{j_A} est défini par $\rho_{j_A} : \mathcal{E}_{j_A} \to \mathcal{E}_o(X)$, il en résulte des diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_i \arrow[dr, "\rho_i"'] & & \mathcal{E}_{j_A} \arrow[ll, "\beta_{j_A}"'] \arrow[dl, "\rho_{j_A}"] \\
& \mathcal{E}_o(X) &
\end{tikzcd}$$

Dans la somme directe des catégories $\mathcal{E}_{j_A}$, le foncteur de projection canonique sur $\mathcal{E}_i$ défini par les β_{j_A} détermine une relation d'équivalence dans l'ensemble des objets et dans l'ensemble des flèches. Par passage au quotient, il en résulte une catégorie $\mathcal{E}_k$ ainsi que des foncteurs ρ_k, β_k et β'_{j_A}, caractérisés de façon évidente et rendant commutatifs les diagrammes :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_i \arrow[ddr, "\rho_j"'] & & \mathcal{E}_{j_A} \arrow[ll, "\beta_{j_A}"'] \arrow[dl, "\beta'_{j_A}"'] \arrow[ddl, "\rho_{j_A}"] \\
& \mathcal{E}_k \arrow[ul, "\beta_k"] \arrow[d, "\rho_k"] & \\
& \mathcal{E}_o(X) &
\end{tikzcd}$$

DEFINITION 3.6.1. Avec les notations précédentes, pour tout multi-indice k *subordonné* à $i \in I_X$, l'objet de $\underline{\mathcal{E}}$ au-dessus de $\mathcal{E}_o(X)$ défini par le foncteur $\rho_k : \mathcal{E}_k \to \mathcal{E}_o(X)$ est appelé la *borne supérieure* de la famille de domaines $\{\Delta_{j_A}\}_{j_A \in k}$ associée à k et elle est notée :

$$\Delta_k = \bigcup_{j_A \in k} \Delta_{j_A} .$$

Cette définition se justifie par le fait que, si les foncteurs β_{j_A} sont «injectifs», la catégorie $\mathcal{E}_k$ est simplement la borne supérieure au sens habituel des sous-catégories $\mathcal{E}_{j_A}$ de $\mathcal{E}_i$.

DEFINITION 3.6.2. Une *situation* est une *pré-situation simple* S sur un objet $\mathcal{E}$ de $\bar{\mathcal{E}}$ qui vérifie l'axiome suivant :

(S) «Pour tout objet X de $\mathcal{E}$, pour tout indice $i \in I_X$ et pour tout multi-indice k subordonné à i, il existe un indice $i' \in I_X$ vérifiant $i \leq i'$ et tel que

$$S_X(i') = \Delta_k » .$$

DEFINITION 3.6.3. La *catégorie des situations* est la sous-catégorie pleine $\mathcal{S}$ de la catégorie $\bar{\mathcal{S}}'$ des pré-situations simples dont les objets sont les situations.

Il est immédiat que toute pré-situation grossière est une situation.

PROPOSITION 3.6.4. *La catégorie* $\mathcal{S}$ *des situations est une* extension fibrée *de la catégorie fondamentale* $\bar{\mathcal{E}}$ *qui est équivalente à la sous-catégorie* $\mathcal{S}_g$ *des situations grossières.*

Cela résulte de la proposition 3.4.2 et de la caractérisation de $\mathcal{S}$.

DEFINITION 3.6.5. Pour toute catégorie $\mathcal{C}$, la catégorie $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ des *pré-faisceaux au-dessus des situations* et *à valeurs dans* $\mathcal{C}$ est la catégorie *cofibrée* au-dessus de $\mathcal{S}^o$ caractérisée par :

$$\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C}) = \mathcal{P}(\mathcal{C}) \times_{\mathcal{E}^o} \mathcal{S}^o .$$

La catégorie $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ est donc évidemment la restriction de $\bar{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ au-dessus de la sous-catégorie $\mathcal{S}$ de $\bar{\mathcal{S}}$.

Le corollaire 3.4.5 donne alors par restriction :

COROLLAIRE 3.6.6. *Si* $\mathcal{C}$ *est une catégorie* avec limites inductives filtrantes, *tout foncteur* F *de* $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ *dans* $\mathcal{C}$ *admet une* extension canonique $\check{F}$ *de* $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ *dans* $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$.

DEFINITION 3.6.7. Si $\mathcal{C}$ est une *catégorie sectionnante* et *avec limites inductives filtrantes, le foncteur section* $\check{\Gamma}$ de $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ dans $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ est l'extension canonique du foncteur Γ de $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{C}$.

Enfin, la proposition 3.4.7 entraîne par restriction :

PROPOSITION 3.6.8. *Sous les hypothèses précédentes, il existe un morphisme fonctoriel canonique* $\check{\omega}$ *du foncteur identique* $\check{I}$ *de* $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ *dans le foncteur section* $\check{\Gamma}$.

3.7. Une cohomologie abélienne des situations.

Pour toute catégorie $\mathcal{C}$ avec produits infinis, la restriction de $\overline{D}$ détermine un *foncteur disloquant* $\check{D}$ de $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ dans $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ qui caractérise une immersion adaptée $\check{\mathcal{J}} = (\check{D}, \check{j})$ dans $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$. De même, lorsque $\mathcal{C}$ est abélienne, $\overline{Q}$ et $\overline{s}$ déterminent un *foncteur co-immersion* $\check{Q}$ de $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ dans $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ et un *épimorphisme fonctoriel* $\check{s}$ de $\check{D}$ sur $\check{Q}$.

La proposition 3.5.2 et les lemmes 3.5.1 et 3.5.3 donnent par restriction des résultats formellement analogues qui caractérisent en particulier le *foncteur cochaîne* $\check{C}^*$ et le *foncteur cochaîne normalisée* $\check{C}'^*$.

Le théorème 3.5.4 et le corollaire 3.5.5 donnent alors :

THEOREME 3.7.1. *Lorsque* $\mathcal{C}$ *est une catégorie abélienne vérifiant les axiomes* $AB4^*$ *et* $AB5$, *le* foncteur cochaîne $\check{C}^*$ *et le* foncteur cochaîne normalisée $\check{C}'^*$ *déterminent deux* foncteurs semi-cohomologiques $\check{H}^*$ *et* $\check{H}'^*$ *de* $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ *dans* $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$, *nuls en degrés négatifs, vérifiant* $\check{H}^0 = \check{H}'^0 = \check{\Gamma}$, universels *et* isomorphes *à* l'extension canonique *du* foncteur semi-cohomologique universel H^* *de* $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ *dans* $\mathcal{C}$.

Les composantes $\check{H}^n \simeq \check{H}'^n$ *sont les* «semi-satellites» *du foncteur section* $\check{\Gamma}$.

COROLLAIRE 3.7.2. (THEOREME DE REDUCTION). *Sous les hypothèses du théorème 3.7.1 et si* $\check{Q}$ *est le foncteur co-immersion associé à* $\check{\mathcal{J}}$, *alors :*

(a) Il existe un épimorphisme fonctoriel $\check{\partial}^o$ *du foncteur* $\check{H}^o\check{Q} = \check{\Gamma}\check{Q}$ *sur le foncteur* $\check{H}^1$ *vérifiant la suite exacte :*

$$0 \to \check{\Gamma} \xrightarrow{\check{\Gamma}\check{j}} \check{\Gamma}\check{D} \xrightarrow{\check{\Gamma}\check{s}} \check{\Gamma}\check{Q} \xrightarrow{\check{\partial}^o} \check{H}^1 \to 0.$$

(b) Pour $n \geq 1$, *il existe un* isomorphe fonctoriel $\check{\partial}^n$ *du foncteur* $\check{H}^n\check{Q}$ *sur le foncteur* $\check{H}^{n+1}$.

3.8. Exemples et applications.

La notion de pré-situation s'est présentée naturellement pour donner le cadre général de validité de la proposition 3.4.7, du théorème 3.5.4 et du corollaire 3.5.5, mais il faut reconnaître que la plupart des exemples utilisés de pré-situations sont en fait des situations.

3.8.1. LES DOMINATIONS INTERNES.

Les dominations les plus simples sur un objet $\mathcal{E}$ de $\underline{\mathcal{E}}$ sont celles définies par un ensemble filtrant décroissant de *co-cribles* de $\mathcal{E}$. Elles seront dites *internes*.

Par exemple, un co-crible $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$ étant *cofinal* dans $\mathcal{E}$ si, pour tout objet X de $\mathcal{E}$, il existe au moins une flèche $f : X \to Y$ dont le but Y est un objet de $\mathcal{E}'$, il est facile de vérifier que les co-cribles cofinaux dans $\mathcal{E}$ constituent un ensemble filtrant qui définit la *domination de cofinalité* sur $\mathcal{E}$.

Une situation S sur $\mathcal{E}$ sera dite *interne* si pour tout objet X de $\mathcal{E}$, la domination S_X est interne.

3.8.2. LES SITUATIONS DE COFINALITE.

Le lecteur pourra vérifier que, pour tout objet $\mathcal{E}$ de $\underline{\mathcal{E}}$, il existe une *situation de cofinalité S sur* $\mathcal{E}$ caractérisée par le fait que, pour tout objet X de $\mathcal{E}$, la donimation S_X est la domination de cofinalité sur $\mathcal{E}_o(X)$.

Par exemple, si $\mathcal{E}$ représente un ensemble ordonné, le filtre S_X des couvertures de X est constitué par les parties saturées à droite et cofinales dans $[\, X, \to [$ qui représente $\mathcal{E}_o(X)$.

3.8.3. LES SITUATIONS NATURELLES.

Soit $\mathcal{E}$ un objet de $\underline{\mathcal{E}}$. Pour un objet X de $\mathcal{E}$, un co-crible $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}_o(X)$ définit de façon évidente un «cône de morphismes» de «sommet» X et dont la «base» est la restriction du foncteur ε_X à $\mathcal{E}'$. Un tel co-crible $\mathcal{E}'$ sera dit *priviligié* en X si X et ce cône caractérisent une *limite projective dans* $\mathcal{E}$ *de la restriction de* ε_X à $\mathcal{E}'$. Un co-crible $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}_o(X)$ sera dit *fortement privilégié* en X, si, pour toute flèche $f : X \to Y$, le co-crible $f(\mathcal{E}')$ est privilégié en Y.

Le lecteur pourra vérifier que, pour tout objet $\mathcal{E}$ de $\underline{\mathcal{E}}$, il existe une *situation naturelle* S *sur* $\mathcal{E}$ caractérisée par le fait que, pour tout objet X de $\mathcal{E}$, la domination S_X est définie par les co-cribles *fortement privilégiés en* X.

Par exemple, si $\mathcal{E}$ est associé au dual d'un treillis local ([2] , [14]), dans la situation naturelle associée, les couvertures d'un objet X sont constituées par les *recouvrements hériditaires* à droite de X. Il en est de même dans le cas du *treillis local des «ouverts» d'une paratopologie dans un treillis local* ([2] , [14]) et dans celui du treillis des ouverts d'un espace topologique qui donne *la situation naturelle associée à l'espace topologique.*

3.8.4. LES SITES.

Il est facile de vérifier qu'un *site* [8] (au sens de Giraud), défini par une «*topologie*» ([1] , [8] au sens de Giraud ou de Grothendieck) sur une petite catégorie $\mathcal{E}$, détermine une situation S sur la duale $\mathcal{E}^o$ de $\mathcal{E}$ caractérisée par le fait que, pour tout objet X de $\mathcal{E}^o$, la domination interne S_X correspond au filtre des raffinements de l'objet X de $\mathcal{E}$.

Il en résulte alors facilement la propriété suivante :

(P) : «Pour tout univers $\underline{\mathfrak{U}}$, il existe un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des $\underline{\mathfrak{U}}$-sites (avec pour morphismes les comorphismes de $\underline{\mathfrak{U}}$-sites) dans la catégorie $\mathcal{S}$ des situations».

Cette propriété donne donc une vaste classe d'exemples. En particulier, la situation naturelle associée à un espace topologique correspond au site qui lui est associé.

3.8.5. UN EXEMPLE CURIEUX : SITUATIONS SUR UN MONOÏDE A UNITE.

Soit $\mathcal{E}$ la petite catégorie associée à un monoïde à unité Λ. Le lecteur pourra vérifier qu'une situation interne $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{E}$ est caractérisée par un certain filtre $\mathcal{G}$ d'idéaux à gauche de Λ et qu'en désignant par $\mathcal{F}$ l'ensemble des idéaux à gauche I de l'anneau $B = \mathbf{Z}(\Lambda)$ qui contiennent un élément de la forme $\mathbf{Z}(J)$, avec $J \in \mathcal{G}$, alors cet ensemble $\mathcal{F}$ d'idéaux à gauche est *topologisant* et *idempotent* [7] .

3.8.6. COHOMOLOGIE DES SITUATIONS.

Pour toute catégorie abélienne $\mathcal{C}$ vérifiant les axiomes $AB4^*$ et $AB5$, le théorème 3.7.1 assure l'existence *d'un foncteur semi-cohomologique universel* $\check{H}^*$ dont toute restriction $\check{H}^*_S$ caractérise la *cohomologie de la situation* S. D'après la propriété (P), il en résulte par exemple la *cohomologie à la Čech des sites,* qui englobe en particulier celle des *espaces topologiques* et des *paratopologies.* Pour un ensemble ordonné, la *situation de cofinalité* S donne un foncteur cohomologique universel $\check{H}^*_S$ qui semble adapté à l'étude de son « *extrémité droite* ».

Enfin, avec les notations de l'exemple 3.8.5, la catégorie $\check{\mathcal{P}}(S, \mathcal{C})$ est la catégorie $Mod_B^{\mathcal{C}}$ des objets de $\mathcal{C}$ sur lesquels opère à gauche l'anneau B, et le lecteur pourra vérifier que le foncteur

$$\check{\Gamma}_S : Mod_B^{\mathcal{C}} \to Mod_B^{\mathcal{C}},$$

dont les satellites sont les foncteurs $\check{H}^n_S$, constitue une généralisation du foncteur classique [3] (p. 157 - 165)

$$M \rightsquigarrow M_{(\mathcal{F})}$$

utilisé pour l'étude de la *localisation* ([3] , [7]) dans Mod_B déterminée par l'ensemble $\mathcal{F}$ d'idéaux à gauche *topologisant* et *idempotent,* lorsque $\mathcal{C}$ est la catégorie des groupes abéliens.

4. SUR LES NOTIONS DE FAISCEAU ET DE LOCALISATION

La définition classique des faisceaux sur un espace topologique fait intervenir des conditions de caractère *local.* D'autre part, l'exemple 3.8.6 montre que, pour une situation S caractérisée dans l'exemple 3.8.5, le foncteur $\check{\Gamma}_S$ constitue une généralisation d'un foncteur classique utilisé dans l'étude de la *localisation* dans une catégorie de modules. Cette parenté dans la terminologie suggère l'étude des rapports entre la notion de *faisceau* et la notion de *localisation.* Dans ce but, il convient d'étendre la notion de localisation à une *catégorie quelconque*, ce qui permet alors d'étudier ces rapports à l'aide de la notion générale «*d'objet invariant*».

4.1. Localisation dans une catégorie quelconque.

Ce paragraphe a pour but d'étendre à une catégorie quelconque la notion de localisation définie et étudiée dans les catégories abéliennes par P. Gabriel dans [7] et d'où seront extraîtes les références citées entre parenthèses.

Dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$, toute sous-catégorie épaisse $\mathcal{C}$ détermine une *catégorie quotient* $\mathcal{B} = \mathcal{A}/_{\mathcal{C}}$ et un foncteur canonique T de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$. Lorsque $\mathcal{C}$ est une *sous-catégorie localisante,* c'est-à-dire lorsque T admet un adjoint à droite S, elle détermine un *foncteur localisation $L = ST$ exact à gauche* de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$, accompagné d'un morphisme fonctoriel $\Psi : I_{\mathcal{A}} \to L$ et les objets $\mathcal{C}$-fermés sont ceux pour lesquels $\Psi(A)$ est un isomorphisme.

LEMME 4.1.1. *Avec les données précédentes, les morphismes fonctoriels ΨL et $L\Psi$ de L dans L^2 sont des isomorphismes fonctoriels.*

Pour tout objet A de $\mathcal{A}$, l'objet LA image par S de l'objet TA de $\mathcal{B}$ est $\mathcal{C}$-fermé (lemme 2, p. 371). Comme LA est $\mathcal{C}$-fermé, il en résulte bien que ΨLA est un isomorphisme de LA sur $STLA = L^2A$ (corollaire p. 371). D'autre part, puisque $\Phi : TS \to I_{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme fonctoriel (proposition 3, p. 371), il en résulte un isomorphisme fonctoriel ΦT et, comme $(\Phi T) \circ (T\Psi)$ est le morphisme identique de T, il en résulte que $T\Psi$ et par suite $L\Psi = ST\Psi$ sont des isomorphismes fonctoriels, ce qui achève la démonstration.

Si $\tilde{\mathcal{A}}$ désigne la sous-catégorie pleine déterminée par les objets $\mathcal{C}$-fermés de $\mathcal{A}$ et si $\tilde{T}$ est le foncteur canonique de $\tilde{\mathcal{A}}$ dans $\mathcal{A}$, il existe alors un foncteur $\tilde{L}$ de $\mathfrak{A}$ dans $\tilde{\mathfrak{A}}$ caractérisé par $L = \tilde{T}\tilde{L}$.

LEMME 4.1.2. *Avec les données et les notations précédentes, alors :*

$$\mathcal{C} = Ker\, T = Ker\, L = Ker\, \tilde{L}'.$$

La démonstration est laissée aux soins du lecteur.

Le lemme 4.1.1 suggère alors la définition générale suivante :

DEFINITION 4.1.3. Dans une catégorie quelconque $\mathfrak{A}$, un système (L, Ψ) constitué par un foncteur L de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}$ et un morphisme fonctoriel $\Psi : I_{\mathfrak{A}} \to L$, est *localisant* si ΨL et $L\Psi$ sont des isomorphismes fonctoriels de L sur L^2.

Deux systèmes (L, Ψ) et (L', Ψ') sont *équivalents* s'il existe un isomorphisme fonctoriel de L sur L' qui transforme Ψ en Ψ'.

Une *localisation* $\mathfrak{L}$ dans une catégorie $\mathfrak{A}$ est définie par une classe d'équivalence de systèmes localisants, c'est-à-dire par la donnée d'un système localisant (L, Ψ) «défini à une équivalence près».

DEFINITION 4.1.4. Dans une catégorie quelconque $\mathfrak{A}$, une *sous-catégorie locale* est une sous-catégorie pleine $\tilde{\mathfrak{A}}$ pour laquelle le foncteur d'injection $\tilde{T}$ de $\tilde{\mathfrak{A}}$ dans $\mathfrak{A}$ admet un *adjoint à gauche* $\tilde{L}$.

THEOREME 4.1.5. *Pour toute catégorie $\mathfrak{A}$, il existe une correspondance bijective entre la classe des* localisations $\mathfrak{L}$ *dans $\mathfrak{A}$ et la classe* des sous-catégories locales $\tilde{\mathfrak{A}}$ *de $\mathfrak{A}$. Elle est caractérisée par les conditions suivantes : si $\mathfrak{L}$ et $\tilde{\mathfrak{A}}$ sont associées, alors $\tilde{\mathfrak{A}}$ est déterminée par les objets A de $\mathfrak{A}$* invariants *par (L, Ψ), c'est-à-dire pour lesquels $\Psi(A) : A \to LA$ est un isomorphisme et inversement, $\mathfrak{L}$ est déterminée par le système localisant (L, Ψ) dans lequel $L = \tilde{T}\tilde{L}$ et Ψ est associé à l'adjonction de $\tilde{T}$ et de $\tilde{L}$.*

En utilisant les notations habituelles et les propriétés classiques des foncteurs adjoints, pour toute sous-catégorie locale $\tilde{\mathfrak{A}}$ de $\mathfrak{A}$, il est facile de vérifier que $\Phi : \tilde{L}\tilde{T} \to L_{\mathfrak{B}}$ est un isomorphisme fonctoriel, puisque $\tilde{T}$ est pleinement fidèle. Comme $(\Phi\tilde{T}) \circ (\Psi\tilde{T})$ et $(\Phi\tilde{L}) \circ (\tilde{L}\Psi)$ sont des morphismes identiques (propositions 7 et 8, p. 339 et 340) il en résulte que $\Psi\tilde{T}$ et $\tilde{L}\Psi$, et par suite ΨL et $L\Psi$, sont des isomorphismes fonctoriels, ce qui prouve bien que (L,Ψ) constitue un système localisant. Comme il est possible de vérifier que $\tilde{\mathfrak{A}}$ est caractérisée par les objets A de $\mathfrak{A}$ invariants par (L,Ψ), il en résulte donc «une application injective» de la classe des sous-catégories locales $\tilde{\mathfrak{A}}$ de $\mathfrak{A}$ dans la classe des localisations $\mathfrak{L}$ dans $\mathfrak{A}$. Il suffit alors de prouver qu'elle est «surjective». Dans ce but, étant donnée une localisation $\mathfrak{L}$ définie par un système localisant (L,Ψ), soit $\tilde{\mathfrak{A}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{A}$ caractérisée par les objets invariants par (L,Ψ). Puisque ΨL est un isomorphisme fonctoriel, il en résulte l'existence d'un foncteur unique $\tilde{L}$ de $\mathfrak{A}$ dans $\tilde{\mathfrak{A}}$ caractérisé par $L = \tilde{T}\tilde{L}$. Tout revient à montrer que $\tilde{L}$ est adjoint à gauche à $\tilde{T}$. Il suffit de montrer que le morphisme fonctoriel

$$Hom_{\mathfrak{A}}(L\,\cdot\,,\tilde{T}\,\cdot\,)\to Hom_{\mathfrak{A}}(\,\cdot\,,\tilde{T}\,\cdot\,)$$

induit par $\Psi : I_{\mathfrak{A}} \to L$ est un isomorphisme fonctoriel, c'est-à-dire que, pour tout objet A de $\mathfrak{A}$ et tout objet B de $\tilde{\mathfrak{A}}$, l'application

$$\chi : Hom_{\mathfrak{A}}(LA,\tilde{T}B)\to Hom_{\mathfrak{A}}(A,\tilde{T}B),$$

caractérisée par

$$\chi(\alpha') = \alpha' \circ \Psi(A),$$

est bijective. Or en tenant compte de conditions de commutativité évidentes et du fait que ΨL et $L\Psi$, et par suite $\Psi\tilde{T}$, sont inversibles, le lecteur pourra vérifier que χ admet pour inverse l'application χ^{-1} caractérisée par

$$\chi^{-1}(\alpha) = (\Psi\tilde{T}B)^{-1}\circ L(\alpha)\circ(L\Psi A)^{-1}\circ\Psi LA,$$

ce qui achève la démonstration

DEFINITION 4.1.6. Pour une localisation $\mathfrak{L}$ définie dans une catégorie $\mathfrak{A}$ par un système localisant (L,Ψ), avec les notations précédentes, L est le *foncteur localisation*, $\tilde{T}$ est le *foncteur section*, $\tilde{L}$ est le *foncteur localisant* et $\tilde{\mathfrak{A}}$ est la *catégorie locale* des objets invariants par (L,Ψ), qui caractérise également la localisation $\mathfrak{L}$.

En outre, $\mathfrak{L}$ est dite *exacte* si L est *exact à gauche* (ou encore si $\tilde{L}$ est *exact*).

Il convient de remarquer qu'une localisation n'est pas nécessairement exacte, comme le montre l'exemple de la localisation définie dans la catégorie $\mathfrak{A}$ des espaces topologiques complètement réguliers par la sous-catégorie locale $\tilde{\mathfrak{A}}$ des espaces compacts. En effet $\beta(\mathbf{N} \times \mathbf{N})$ n'est pas homéomorphe à $\beta(\mathbf{N}) \times \beta(\mathbf{N})$.

PROPOSITION 4.1.7. *Pour toute localisation $\mathfrak{L}$ dans une catégorie $\mathfrak{A}$, alors*

(a) Le foncteur section $\tilde{T}$ commute aux limites projectives (il est donc exact à gauche);

(b) Le foncteur localisant $\tilde{L}$ commute aux limites inductives (il est donc exact à droite);

(c) La commutativité du foncteur localisant $\tilde{L}$ par rapport aux limites projectives d'un certain type est équivalente à la commutativité du foncteur localisation L par rapport aux limites projectives du même type. En particulier, pour que $\tilde{L}$ soit exact, il faut et il suffit que L soit exact à gauche.

La démonstration est laissée aux soins du lecteur.

LEMME 4.1.8. *Pour toute localisation* exacte $\mathfrak{L}$ *dans une catégorie abélienne $\mathfrak{A}$, la sous-catégorie locale $\tilde{\mathfrak{A}}$ associée est abélienne et les foncteurs L, $\tilde{L}$ et $\tilde{T}$ sont additifs.*

La caractérisation de $\tilde{\mathfrak{A}}$ permet de montrer facilement qu'elle vérifie les axiomes CAd_1 et CAd_2. Comme les ensembles $Hom_{\tilde{\mathfrak{A}}}(B, B')$ peuvent naturellement être munis d'une structure de groupe abélien de telle façon que les lois de composition soient des applications bilinéaires, il en résulte que $\tilde{\mathfrak{A}}$ est une sous-catégorie additive (proposition 2, p. 334). Les foncteurs L, $\tilde{L}$ et $\tilde{T}$ qui sont exacts à gauche sont donc additifs.

Pour toute flèche $\beta : B \to B'$ dans $\tilde{\mathfrak{A}}$, la flèche $\alpha = \tilde{T}\beta : \tilde{T}B \to \tilde{T}B'$ admet dans $\mathfrak{A}$ un noyau et un conoyau dont les transformés par le foncteur additif exact $\tilde{L}$ constituent un noyau et un conoyau de la flèche $\tilde{L}\tilde{T}\beta$ équivalente à β. Il en résulte que $\tilde{\mathfrak{A}}$ vérifie CAb_1. De même, il est facile de montrer que $\tilde{\mathfrak{A}}$ vérifie CAb_2, ce qui prouve que $\tilde{\mathfrak{A}}$ est abélienne.

PROPOSITION 4.1.9. *Pour toute catégorie abélienne $\mathfrak{A}$, il existe une cor-*

respondance bijective entre la classe des localisations exactes $\mathfrak{L}$ *dans* $\mathfrak{A}$ *et la classe des* sous-catégories localisantes $\mathcal{C}$ *(qui caractérisent une localisation au sens de P. Gabriel). Elle est caractérisée par les conditions suivantes : si* $\mathfrak{L}$ *et* $\mathcal{C}$ *sont associées, alors* $\mathcal{C} = Ker\,L = Ker\,\tilde{L}$ *et, inversement,* $\mathfrak{L}$ *est caractérisée soit par le système localisant* (L, Ψ) *dans lequel* L *est le foncteur localisation (au sens de Gabriel) associé à* $\mathcal{C}$*, soit par la sous-catégorie locale* $\tilde{\mathfrak{A}}$ *des objets* $\mathcal{C}$*-fermés qui est équivalente à la catégorie quotient* $\mathfrak{A}/\mathcal{C}$.

D'après le lemme 4.1.1, toute sous-catégorie localisante $\mathcal{C}$ détermine une localisation exacte $\mathfrak{L}$ caractérisée soit par le système localisant (L, Ψ) soit par la sous-catégorie locale $\tilde{\mathfrak{A}}$ des objets $\mathcal{C}$-fermés (corollaire p. 371). L'application ainsi déterminée est donc bien« injective» d'après le lemme 4.1.2.

D'autre part, étant donnée une localisation exacte $\mathfrak{L}$, d'après le lemme 4.1.8 la sous-catégorie locale $\tilde{\mathfrak{A}}$ associée est abélienne, le foncteur additif exact $\tilde{L}$ admet le foncteur additif $\tilde{T}$ pour adjoint à droite et enfin $\Phi : \tilde{L}\,\tilde{T} \to I_{\tilde{\mathfrak{A}}}$ est un isomorphisme fonctoriel. Il en résulte (proposition 5, p. 374) que la catégorie $\mathcal{C} = Ker\,L = Ker\,\tilde{L}$ est une sous-catégorie localisante de $\mathfrak{A}$ et que $\tilde{L}$ induit une équivalence entre $\mathfrak{A}/\mathcal{C}$ et $\tilde{\mathfrak{A}}$, ce qui entraîne bien que (L, Ψ) est associé à l'adjonction entre le composé du foncteur d'équivalence de $\mathfrak{A}/\mathcal{C}$ dans $\tilde{\mathfrak{A}}$ avec $\tilde{T}$ et le foncteur canonique T de $\mathfrak{A}$ sur $\mathfrak{A}/\mathcal{C}$. L'application envisagée est donc « surjective» .

4.2. Définitions des faisceaux

DEFINITION 4.2.1. (N). Lorsque $\mathcal{C}$ est une catégorie sectionnante et avec limites inductives filtrantes, les *faisceaux* sur les situations sont les objets de $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ *invariants par le système* $(\check{\Gamma}, \check{\omega})$.

Ils caractérisent la *catégorie* $\tilde{\mathcal{P}}_n(\mathcal{C})$ *des faisceaux* au sens de cette nouvelle définition (N).

NOTATIONS. Pour tout objet P de $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ au-dessus de S, en posant $P_i = \Gamma_{S_X(i)}(\varepsilon_X)_* P$ pour $i \in I_X$, tout couple d'indices $i \leq i'$ détermine un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
P_i \arrow[rr, "\omega(P)(i,i')"] \arrow[drr, "\check{\omega}(P)(i)" near end] & & P_{i'} \arrow[d, "\check{\omega}(P)(i')"] \\
P(X) \arrow[u, "\omega(P)(X,i)"] \arrow[urr, "\omega(P)(X,i')" near start] \arrow[rr, "\check{\omega}(P)(X)"'] & & (\check{\Gamma} P)(X)
\end{tikzcd}$$

DEFINITION 4.2.3. Lorsque $\mathcal{C}$ est une catégorie sectionnante, un préfaisceau P au-dessus d'une situation S sur $\mathfrak{S}$ est un *semi-faisceau* si, pour tout objet X de $\mathfrak{S}$ et pour tout indice $i \in I_X$, le morphisme canonique $\omega(P)(X,i) : P(X) \to P_i$ est un monomorphisme.

LEMME 4.2.4. *Si $\mathcal{C}$ est sectionnante et si P est un semi-faisceau au-dessus d'une situation S sur $\mathfrak{S}$, alors, pour tout objet X de $\mathfrak{S}$ et tout couple d'indices $i \leq i'$ de I_X, le morphisme $\omega(P)(i,i') : P_i \to P_{i'}$ est un monomorphisme.*

La démonstration assez longue est laissée aux soins du lecteur.

PROPOSITION 4.2.5. *Lorsque $\mathcal{C}$ est une catégorie sectionnante et avec limites inductives filtrantes dans laquelle toute limite inductive filtrante de monomorphismes est un monomorphisme, pour qu'un préfaisceau P au-dessus d'une situation S sur $\mathfrak{S}$ soit un faisceau, il faut et il suffit que, pour tout objet X de $\mathfrak{S}$ et pour tout indice $i \in I_X$, le morphisme canonique $\omega(P)(X,i) : P(X) \to P_i$ soit un isomorphisme.*

Si P est un faisceau, la relation

$$\check{\omega}(P)(X) = \check{\omega}(P)(i) \circ \omega(P)(X,i),$$

dans laquelle $\check{\omega}(P)(X)$ est un isomorphisme, entraîne que $\omega(P)(X,i)$ est un monomorphisme. Ainsi tout faisceau est un semi-faisceau. D'après le lemme 4.2.4, pour $i \leq i'$ les $\omega(P)(i,i')$ sont les monomorphismes, ce qui entraîne d'après les hypothèses que la limite inductive $\check{\omega}(P)(i)$ est un monomorphisme. Comme l'isomorphisme $\check{\omega}(P)(X)$ est le composé des monomorphismes $\omega(P)(X,i)$ et $\check{\omega}(P)(i)$, il en résulte bien que $\omega(P)(X,i)$ est un isomorphisme, d'inverse $[\check{\omega}(P)(X)]^{-1} \circ \check{\omega}(P)(i)$.

Réciproquement, si les $\omega(P)(X,i)$ sont des isomorphismes, la limite inductive $\check{\omega}(P)(X)$ est un isomorphisme, ce qui prouve que P est un faisceau.

REMARQUE 4.2.6. Avec les notations habituelles, si $S_X(i)$ est définie par $\rho_i : \mathcal{E}_i \to \mathcal{E}_o(X)$ la condition «$\omega(P)(X,i)$ est un isomorphisme» est équivalente à la condition «l'objet $P(X)$ et les morphismes $P(f_A)$: $P(X) \to P(Y_A) = P[\varepsilon_X \rho_i(A)]$, définis pour tout objet A de $\mathcal{E}_i$, caractérisent une *limite projective* du préfaisceau $(\varepsilon_X \rho_i)_* P$ sur $\mathcal{E}_i$».

Comme cette condition conserve un sens dans une catégorie quelconque, la proposition 4.2.5 suggère une autre définition possible des faisceaux sur les situations, valable pour une catégorie quelconque et qui est à rapprocher des définitions classiques pour les espaces topologiques et les sites.

DEFINITION 4.2.7. (A). Un préfaisceau P au-dessus d'une situation S sur $\mathcal{E}$ et à valeurs dans une catégorie $\mathcal{C}$ quelconque est un *faisceau* si, pour tout objet X de $\mathcal{E}$ et pour tout indice $i \in I_X$ tel que $S_X(i)$ soit définie par $\rho_i : \mathcal{E}_i \to \mathcal{E}_o(X)$, l'objet $P(X)$ et les morphismes

$$P(f_A) : P(X) \to P(Y_A) = P[\varepsilon_X \rho_i(A)],$$

définis pour tout objet A de $\mathcal{E}_i$, caractérisent une *limite projective* du préfaisceau $(\varepsilon_X \rho_i)_* P$ sur $\mathcal{E}_i$.

Ils caractérisent la *catégorie* $\tilde{\mathcal{P}}_a(\mathcal{C})$ *des faisceaux* au sens de l'ancienne définition (A).

DEFINITION 4.2.8. Une catégorie $\mathcal{C}$ sera dite *complètement sectionnante* si elle est sectionnante et avec limites inductives filtrantes exactes.

Par exemple, une catégorie abélienne est complètement sectionnante si elle vérifie les axiomes $AB\,3^*$ et $AB\,5$.

Compte tenu de la remarque 4.2.6, la proposition 4.2.5 entraîne en particulier :

COROLLAIRE 4.2.9. *Pour toute catégorie $\mathcal{C}$ complètement sectionnante, les définitions (N) et (A) des faisceaux sur les situations sont équivalentes.*

La catégorie des faisceaux sur les situations est alors

$$\tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{C}) = \tilde{\mathcal{F}}_n(\mathcal{C}) = \tilde{\mathcal{F}}_a(\mathcal{C}).$$

4.3. Catégories parfaitement sectionnantes.

DEFINITION 4.3.1. Une catégorie $\mathcal{C}$ sera dite *parfaitement sectionnante* si elle est *complètement sectionnante* et si elle vérifie la condition suivante :

Axiome (D) : «Toute famille $(M^j)_{j\in J}$ de systèmes inductifs $M^j = (M^j_i, \alpha^j_{i,i'})$ sur des ensembles ordonnés filtrants I_j et à valeurs dans la catégorie $\mathcal{C}$ vérifie la relation :

$$\prod_{j\in J}(\varinjlim_{i\in I_j} M^j_i) = \varinjlim_{(i_j)\in\prod_{j\in J} I_j} (\prod_{j\in J} M^j_{i_j})».$$

PROPOSITION 4.3.2. *Pour qu'une catégorie abélienne $\mathcal{C}$ soit parfaitement sectionnante, il faut et il suffit qu'elle vérifie les axiomes $AB3^*$ et $AB6$.*

Comme les catégories abéliennes $\mathcal{C}$ parfaitement sectionnantes sont celles qui vérifient les axiomes $AB3^*$, $AB5$ et (D), tout revient à montrer que $AB5$ et (D) impliquent $AB6$ et que, réciproquement, $AB6$ implique (D).

Avec les données de $AB6$ et en caractérisant les données de (D) par les suites exactes

$$0 \to B^i_j \to A \to M^i_j \to 0,$$

le lecteur pourra vérifier à l'aide de $AB5$ que les deux membres de l'égalité $AB6$ sont des noyaux d'une même flèche de A dans l'objet défini par l'égalité de (D), ce qui démontre la partie directe.

Réciproquement, avec les données de (D), en posant

$$K = \prod_{j\in J} I_j \quad \text{et} \quad M(k) = \prod_{j\in J} M^j_{i_j}.$$

si $k = (i_j) \in K$, les flèches $\alpha^j_i : M^j_i \to M^j = \varinjlim_{i'\geq i} M^j_{i'}$, définissent une flèche

$$\alpha(k) = \prod_{j\in J} \alpha^j_{i_j} : M(k) \to M = \prod_{j\in J} M^j,$$

de composantes $\alpha_j(k) : M(k) \to M^j$. Tout revient à montrer que

$$\alpha : M' = \varinjlim_{k \in K} M(k) \to M,$$

limite inductive des $\alpha(k)$, est un isomorphisme.

Pour $k \in K$ fixé et pour $i' \geq i_j$, soit $B^j_{i'} = Ker\,[M(k) \to M^j_{i'}]$. Il en résulte :

$$\sum_{i' \geq i_j} B^j_{i'} = Ker\,[M(k) \to \varinjlim_{i' \geq i_j} M^j_{i'} = M^j] = Ker\, \alpha_j(k),$$

d'où

$$\bigcap_{j \in J} (\sum_{i' \geq i_j} B^j_{i'}) = Ker\,[\prod_{j \in J} \alpha_j(k)] = Ker\, \alpha(k).$$

L'axiome $AB\,6$ entraîne alors

$$Ker\ \alpha(k) = \sum_{k' \geq k} (\bigcap_{j \in J} B^j_{i'_j}) = \varinjlim_{k' \geq k} (\bigcap_{j \in J} B^j_{i'_j}),$$

avec

$$\bigcap_{j \in J} B^j_{i'_j} = Ker\,[M(k) \to \prod_{j \in J} M^j_{i'_j} = M(k')],$$

d'où

$$Ker\, \alpha(k) = \varinjlim_{k' \geq k} Ker\,[M(k) \to M(k')] = Ker\,[M(k) \to \varinjlim_{k' \geq k} M(k') = M'],$$

ce qui donne alors :

$$Ker\ \alpha = \varinjlim_{k \in K} Ker\ \alpha(k) = Ker\,[M' \xrightarrow{id} M'] = 0.$$

D'autre part, en posant $B^j_i = Im\ \alpha^j_i \times \prod_{j' \neq j} M^{j'}$, les relations

$$Im\ \alpha(k) = \bigcap_{j \in J} B^j_{i_j}, \qquad \sum_{i \in I_j} B^j_i = (\sum_{i \in I_j} Im\, \alpha^j_i) \times \prod_{j' \neq j} M^j = M$$

montrent que l'axiome $AB\,6$ entraîne :

$$Im\, \alpha = \sum_{k \in K} Im\, \alpha(k) = M.$$

Les relations $Ker\, \alpha = 0$ et $Im\, \alpha = M$ montrent bien que α est un isomorphisme.

4.4. Propriétés du système $(\check{\Gamma}, \check{\omega})$.

PROPOSITION 4.4.1. *Lorsque $\mathcal{C}$ est parfaitement sectionnante, pour tout objet P de $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ le préfaisceau $\check{P} = \check{\Gamma} P$ est un semi-faisceau.*

Avec les notations habituelles, il suffit de montrer que les $\omega(\check{P})(X,i)$ sont des monomorphismes. Puisque le composé de $\omega(\check{P})(X,i)$ avec le morphisme canonique de $\check{P}_i$ dans $\check{C}^{o}_{\mathfrak{S}_i}(\varepsilon_X \rho_i)_* \check{P} = \prod_A \check{P}(Y_A)$ est le produit des flèches $\check{P}(f_A) : \check{P}(X) \to \check{P}(Y_A)$, tout revient à montrer que

$$\check{p} = \prod_A \check{P}(f_A) : \check{P}(X) \to \prod_A \check{P}(Y_A)$$

est un monomorphisme.

Soit K l'ensemble ordonné des multi-indices $k = \{ j_A \}$ subordonnés à $i \in I$ fixé. En posant $I'_X = \{ i', i' \in I_X, i \leq i' \}$, pour tout $i' \in I'_X$ soit $K_{i'}$ le sous-ensemble cofinal dans K des multi-indices subordonnés à i' et soit $K_{i'}[A]$ la «section» de $K_{i'}$ relative à I_{Y_A}. Il existe des systèmes inductifs définis de façon évidente sur I'_X et $K_i[A] = K[A]$ et qui donnent, pour tout $i' \in I'_X$ et pour tout $j \in K_{i'}[A]$, les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
P_{i'} \arrow[r, "p^A(i',j)"] \arrow[d, "p_{i'}"'] \arrow[dr, "p^A(i')"] & M^A_j = \Gamma_{S_{Y_A}(j)}(\varepsilon_{Y_A})_* P \arrow[d, "m^A_j"] \\
\check{P}(X) \arrow[r, "\check{p}^A = \check{P}(f_A)"] & M^A = \check{P}(Y_A)
\end{tikzcd} \tag{1}$$

de telle sorte que $M^A = \varinjlim_{j \in K_{i'}[A]} M^A_j$, avec naturellement $\check{p}^A = \varinjlim_{i' \in I'_X} p^A(i')$. Il en résulte des systèmes inductifs sur I'_X et K qui fournissent les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
P_{i'} \arrow[r, "q(i',k) = \prod_A p^A(i',j_A)"] \arrow[d, "p_{i'}"'] \arrow[dr, "p(i') = \prod_A p^A(i')"] & M(k) = \prod_A M^A_{j_A} \arrow[d, "m(k)"] \\
\check{P}(X) \arrow[r, "\check{p} = \prod_A \check{p}^A"] & M = \prod_A M^A = \prod_A \check{P}(Y_A)
\end{tikzcd} \tag{2}$$

lorsque $k \in K_{i'}$, de telle sorte que $\check{p} = \varinjlim_{i' \in I_X} p(i')$. L'axiome (D) entraîne alors :

$$M = \varinjlim_{k \in K} M(k) = \varinjlim_{k \in K_{i'}} M(k), \text{ avec } p(i') = \varinjlim_{k \in K_{i'}} q(i',k).$$

L'axiome (S) de la définition des situations détermine une application $k \to i'[k]$ de K dans I'_X dont l'image I''_X est cofinale dans I'_X. Il en résulte donc les relations

$$\check{P}(X) = \varinjlim_{k \in K} P_{i'[k]} \quad \text{et} \quad \check{p} = \varinjlim_{k \in K} p(i'[k])$$

qui entraînent alors :

$$\check{p} = \varinjlim_{k \in K} [\varinjlim_{k' \in K_{i'[k]}} q(i'[k],k')] = \varinjlim_{k \in K} q(i'[k],k).$$

En laissant au lecteur le soin de vérifier, à l'aide de la définition de Δ_k qui caractérise $i'[k]$, que $q(i'[k],k)$ est un monomorphisme, cette dernière relation entraîne bien que $\check{p}$ est un monomorphisme.

PROPOSITION 4.4.2. *Lorsque $\mathcal{C}$ est parfaitement sectionnante, pour tout objet P de $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ qui est un semi-faisceau, le préfaisceau $\check{P} = \check{\Gamma} P$ est un faisceau.*

Avec les notations habituelles, il suffit de montrer que les $\omega(\check{P})(X,i)$ sont des isomorphismes. En posant $P' = (\varepsilon_X \rho_i)_* P$, d'après le corollaire 2.1.8 l'objet $\check{P}_i$ est défini par un noyau de la double flèche

$$M = C^o P' \underset{v = \delta^o_1(P')}{\overset{u = \delta^o_o(P')}{\rightrightarrows}} C^1 P' = M^1.$$

Pour prouver que $\omega(\check{P})(X,i)$ est un isomorphisme, il suffit de montrer l'exactitude du diagramme

$$(3) \qquad P(X) \xrightarrow{\check{p}} M \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} M^1.$$

Puisque tout $k \in K$ détermine le double diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\check{P}(X) \arrow[r, "\check{p}"] & M \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & M^1 \\
P_{i'[k]} \arrow[u, "p_{i'[k]}"] \arrow[rr, "q(i'[k],k)"] & & M(k) \arrow[ul, "m(k)"] \arrow[u, shift left, "u(k)"] \arrow[u, shift right, "v(k)"']
\end{tikzcd}$$

avec

$$u(k) = u \circ m(k) \quad \text{et} \quad v(k) = v \circ m(k),$$

les relations

$$\check{P}(X) = \varinjlim_{k \in K} P_{i'[k]} \quad \text{et} \quad M = \varinjlim_{k \in K} M(k)$$

montrent que le diagramme *(3)* est la limite inductive suivant $k \in K$ des diagrammes

$$(4) \qquad P_{i'[k]} \xrightarrow{q(i'[k],k)} M(k) \overset{u(k)}{\underset{v(k)}{\rightrightarrows}} M^1 .$$

D'après l'exactitude des limites inductives filtrantes, il suffit de montrer l'exactitude des diagrammes *(4)*. Comme la relation $u \circ \check{p} = v \circ \check{p}$ entraîne

$$u(k) \circ q(i'[k], k) = v(k) \circ q(i'[k], k)$$

et que, d'après ce qui précède, $q(i'[k], k)$ est un monomorphisme, tout revient à montrer que, pour tout objet B de $\mathcal{C}$, toute flèche α de B dans $M(k)$ vérifiant $u(k) \circ \alpha = v(k) \circ \alpha$ admet au moins une factorisation $\alpha = q(i'[k], k) \circ \alpha'$ par une flèche α' de B dans $P_{i'[k]}$.

Le lecteur pourra vérifier cette propriété en utilisant le lemme 4.2.4 et l'une de ses conséquences immédiates qui entraîne que, pour un semi-faisceau P, les $\check{\omega}(P)(i)$ sont des monomorphismes, ce qui achèvera la démonstration.

PROPOSITION 4.4.3. *Lorsque $\mathcal{C}$ est parfaitement sectionnante, les morphismes fonctoriels $\check{\omega}\check{\Gamma}$ et $\check{\Gamma}\check{\omega}$ de $\check{\Gamma}$ dans $\check{\Gamma}^2$ sont des monomorphismes fonctoriels égaux.*

Tout d'abord, d'après la proposition 4.4.1, pour tout préfaisceau P le préfaisceau $\check{P} = \check{\Gamma} P$ est un semi-faisceau, ce qui entraîne que le morphisme

$$\check{\omega}\check{\Gamma}(P) = \check{\omega}(\check{P}) : \check{P} = \check{\Gamma} P \to \check{\Gamma}\check{P} = \check{\Gamma}^2 P$$

est un monomorphisme. Il en résulte que $\check{\omega}\check{\Gamma}$ est bien un monomorphisme fonctoriel et tout revient à démontrer la relation $\check{\omega}\check{\Gamma} = \check{\Gamma}\check{\omega}$, c'est-à-dire que, pour tout préfaisceau P au-dessus d'une situation S sur $\mathfrak{E}$, tout objet X de $\mathfrak{E}$ entraîne

$$\check{\omega}(\check{P})(X) = \check{\Gamma}[\check{\omega}(P)](X).$$

Avec les notations habituelles, tout $i \in I_X$ détermine le diagramme commutatif

$$(5) \qquad \begin{tikzcd} P_i \arrow[rrr, "\nu_i = \Gamma_{\mathfrak{E}_i}[(\varepsilon_X \rho_i)_*(\check{\omega}(P))]"] \arrow[d, "\lambda = \prod_A \lambda_A"'] & & & \check{P}_i \arrow[d, "\check{\lambda} = \prod_A \check{\lambda}_A"] \\ \prod_A P(Y_A) \arrow[rrr, "\prod_A \check{\omega}(P)(Y_A)"] & & & \prod_A \check{P}(Y_A) = M \end{tikzcd}$$

de telle sorte que $\check{\Gamma}[\check{\omega}(P)](X) = \varinjlim_{i \in I_X} \nu_i$.

Si $k = \{j_A\} \in K$, il est immédiat que $p^A(i, j_A)$ admet la factorisation $p^A(i, j_A) = \omega(P)(Y_A, j_A) \circ \lambda_A$, ce qui entraîne les diagrammes commutatifs

$$(6) \qquad \begin{tikzcd} P_i \arrow[d, "\lambda"'] \arrow[drrr, "q(i,k)"] & & & \\ \prod_A P(Y_A) \arrow[rrr, "\mu(k) = \prod_A \omega(P)(Y_A, j_A)"'] & & & \prod_A M^A_{j_A} = M(k) \end{tikzcd}$$

Puisque

$$M = \varinjlim_{k \in K} M(k) \quad \text{et} \quad p(i) = \varinjlim_{k \in K} q(i,k) = [\varinjlim_{k \in K} \mu(k)] \circ \lambda,$$

la relation

$$\varinjlim_{k \in K} \mu(k) = \prod_A [\varinjlim_{j_A \in K[A]} \omega(P)(Y_A, j_A)],$$

qui résulte de l'axiome (D), et la relation

$$\varinjlim_{j_A \in K[A]} \omega(P)(Y_A, j_A) = \check{\omega}(P)(Y_A)$$

entraînent

$$p(i) = [\prod_A \check{\omega}(P)(Y_A)] \circ \lambda.$$

Cette relation et les diagrammes (2) et (5) entraînent le diagramme commutatif

$$(7) \qquad \begin{tikzcd} P \arrow[r, "\nu_i"] \arrow[d, "p_i"'] \arrow[dr, "p(i)"] & \check{P}_i \arrow[d, "\check{\lambda}"] \\ \check{P}(X) \arrow[r, "\check{p}"] & M \end{tikzcd}$$

Comme le diagramme

$$(8) \qquad \begin{tikzcd} & \check{P}_i \arrow[d, "\check{\lambda}"] \\ \check{P}(X) \arrow[ur, "\check{\omega}(P)(X,i)"] \arrow[r, "\check{p}"] & M \end{tikzcd}$$

est commutatif, le diagramme (7) entraîne la relation

$$\check{\lambda} \circ \check{\omega}(P)(X,i) \circ p_i = \check{\lambda} \circ \nu_i,$$

dans laquelle $\check{\lambda}$ est un monomorphisme, ce qui entraîne

$$\nu_i = \omega(\check{P})(X,i) \circ p_i.$$

Par passage à la limite inductive suivant $i \in I_X$, il en résulte :

$$\check{\Gamma}[\check{\omega}(P)](X) = \check{\omega}(\check{P})(X) \circ (\varinjlim_{i \in I_X} p_i).$$

Comme $\varinjlim_{i \in I_X} p_i = \varinjlim_{i \in I_X} [\check{\omega}(P)(i)]$ est naturellement le morphisme identique de $\check{P}(X)$, il en résulte bien la relation

$$\check{\Gamma}[\check{\omega}(P)](X) = \check{\omega}(\check{P})(X),$$

ce qui achève la démonstration.

5. PROPRIETES DES FAISCEAUX SUR LES SITUATIONS

L'étude des propriétés de fibration et de cofibration de la catégorie $\tilde{\mathcal{P}}_a(\mathcal{C})$ des faisceaux au-dessus de $\mathcal{S}^o$ permet de montrer que la bifibration de $\tilde{\mathcal{P}}_a(\mathcal{C})$ au-dessus de $\mathcal{S}^o$ est liée à l'existence dans $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ d'une *localisation* $\mathcal{L}$ caractérisée par la *sous-catégorie locale* $\tilde{\mathcal{P}}_a(\mathcal{C})$ des faisceaux. Cette propriété montre l'intérêt de la notion de *localisation* dans l'étude des *faisceaux* sur les situations, ce qui permet d'examiner «le problème du théorème du faisceau associé», de donner une généralisation d'un résultat obtenu pour les sites dans le cas où $\mathcal{C} = \underline{Ens}$ ou $\mathcal{C} = \underline{Ab}$ et de répondre ainsi aux conjonctures émises par J.W. Gray dans son commentaire dans «Mathematical Reviews» de l'article «On category of sheaves» de A. Heller et K.A. Rowe.

5.1. Propriétés relatives à la fibration.

Pour toute catégorie $\mathcal{C}$, soit $\check{\tilde{\Gamma}}$ le foncteur d'injection de $\tilde{\mathcal{P}}_a(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{C})$.

LEMME 5.1.1. *Pour toute catégorie sectionnante $\mathcal{C}$, la catégorie $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ est bifibrée sur $\mathcal{S}^o$.*

Cela résulte du théorème 2.1.7 et de la définition de $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ à l'aide de $\mathcal{P}(\mathcal{C})$.

PROPOSITION 5.1.2. *Si $\mathcal{C}$ est une catégorie sectionnante, pour tout morphisme de situation $\lambda : S' \to S$, le foncteur image réciproque*

$\check{\lambda}^*: \check{\mathcal{P}}(S', \mathcal{C}) \to \check{\mathcal{P}}(S, \mathcal{C})$ *transforme un faisceau sur* S' *en un faisceau sur* S [*au sens de la définition* (*A*)] .

En particulier, il existe un foncteur unique :

$$\tilde{\lambda}^* : \tilde{\mathcal{P}}_a(S', \mathcal{C}) \to \tilde{\mathcal{P}}_a(S, \mathcal{C})$$

caractérisé par la condition $\tilde{\Gamma}_S \tilde{\lambda}^* = \lambda^* \tilde{\Gamma}_{S'}$.

En effet, si le morphisme de situation $\lambda : S' \to S$ est défini par le foncteur $\rho : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$, le lecteur pourra vérifier que la caractérisation de ρ^*, donnée dans la démonstration du lemme 2.1.6, entraîne que $\lambda^* P' = \rho^* P'$ est un faisceau sur S, si P' est un faisceau sur S'.

THEOREME 5.1.3. *Pour toute catégorie* $\mathcal{C}$, *il y a équivalence des conditions suivantes :*

(*a*) *La catégorie* $\mathcal{C}$ *est sectionnante.*

(*b*) *La catégorie* $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ *est bifibrée sur* $\mathcal{S}^o$.

(*c*) *La catégorie* $\tilde{\mathcal{P}}_a(\mathcal{C})$ *est fibrée sur* $\mathcal{S}^o$.

La condition (*b*) entraîne que tout morphisme de situation $\lambda : S' \to S$ détermine un foncteur image réciproque λ^* adjoint à droite au foncteur image directe λ_*.

Pour tout objet $\mathcal{E}$ de $\underline{\mathcal{E}}$, en prenant pour S' et S les situations grossières sur $\mathcal{E}$ et sur un point, et pour λ l'unique flèche de S' dans S, il en résulte que λ^* caractérise un foncteur limite projective $\Gamma_{\mathcal{E}}$ sur $\mathcal{P}(\mathcal{E}, \mathcal{C})$, ce qui montre que (*b*) implique (*a*).

Le lemme 5.1.1 entraîne alors l'équivalence de (*a*) et de (*b*).

Lorsque ces conditions équivalentes sont satisfaites, en utilisant $\tilde{\lambda}^*$ défini par la proposition 5.1.2, il en résulte que l'ensemble des flèches dans $\tilde{\mathcal{P}}_a(\mathcal{C})$ d'un faisceau F sur S dans un faisceau F' sur S', au-dessus de $\lambda : S' \to S$, est en bijection avec les ensembles isomorphes:

$$Hom_{\check{\mathcal{P}}(S,\mathcal{C})}(\tilde{\Gamma}_S F, \lambda^* \tilde{\Gamma}_{S'} F') \simeq Hom_{\check{\mathcal{P}}(S,\mathcal{C})}(\tilde{\Gamma}_S F, \tilde{\Gamma}_S \tilde{\lambda}^* F')$$
$$\simeq Hom_{\tilde{\mathcal{P}}_a(S,\mathcal{C})}(F, \tilde{\lambda}^* F').$$

Les relations immédiates du type $(\widetilde{\lambda' \lambda})^* = \tilde{\lambda}'^* \tilde{\lambda}^*$ entraînent alors que la flèche canonique dans $\tilde{\mathcal{P}}_a(\mathcal{C})$ de $\tilde{\lambda}^* F'$ dans F' est cartésienne au-dessus de λ^o, ce qui prouve que $\tilde{\mathcal{P}}_a(\mathcal{C})$ est fibrée sur $\mathcal{S}^o$.

Réciproquement, pour tout morphisme de situation $\lambda: S' \to S$, la condition *(c)* détermine un foncteur image réciproque

$$\tilde{\lambda}^* : \tilde{\mathcal{P}}_a(S', \mathcal{C}) \to \tilde{\mathcal{P}}_a(S, \mathcal{C}).$$

Pour tout objet $\mathcal{E}$ de $\underline{\mathcal{E}}$, en particularisant le morphisme $\lambda' : S' \to S$ comme ci-dessus, il est immédiat que

$$\tilde{\lambda}^* : \tilde{\mathcal{P}}_a(S', \mathcal{C}) \simeq \mathcal{P}(\mathcal{E}, \mathcal{C}) \to \tilde{\mathcal{P}}_a(S, \mathcal{C}) \simeq \mathcal{C}$$

caractérise un foncteur limite projective $\Gamma_{\mathcal{E}}$ sur $\mathcal{P}(\mathcal{E}, \mathcal{C})$, ce qui entraîne que *(c)* implique *(a)*

5.2. Propriétés relatives à la cofibration.

DEFINITION 5.2.1. Une localisation $\mathcal{L}$ dans $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ est *compatible avec la cofibration* si elle peut être déterminée par un foncteur localisation L qui respecte les fibres de $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$.

THEOREME 5.2.2. *Pour toute catégorie $\mathcal{C}$, il y a équivalence des conditions suivantes :*

(a) La catégorie $\tilde{\mathcal{P}}_a(\mathcal{C})$ est cofibrée sur $\mathcal{S}^o$.

(b) La catégorie $\tilde{\mathcal{P}}_a(\mathcal{C})$ est la sous-catégorie locale d'une localisation $\mathcal{L}$ dans $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ compatible avec la cofibration.

La condition *(a)* entraîne que tout morphisme de situation $\lambda: S' \to S$ détermine un foncteur image directe $\tilde{\lambda}_* : \tilde{\mathcal{P}}_a(S, \mathcal{C}) \to \tilde{\mathcal{P}}_a(S', \mathcal{C})$.

Pour toute situation S, soit S_o la situation grossière associée et soit $\mu(S)$ la flèche canonique de S dans S_o. Puisque $\mu(S)_*$ et $\tilde{\Gamma}_{S_o}$ sont des isomorphismes, le lecteur pourra vérifier que $\tilde{\Gamma}_S$ admet pour adjoint à gauche le foncteur

$$\tilde{L}_S = \widetilde{\mu(S)}_* \circ \tilde{\Gamma}_{S_o}^{-1} \circ \mu(S)_*^{-1}$$

et que les relations $\mu(S)\lambda = \lambda_o \mu(S')$ entraînent l'existence d'isomorphismes fonctoriels canoniques

$$\tilde{\lambda}_* \tilde{L}_S \xrightarrow{\sim} \tilde{L}_{S'} \tilde{\lambda}_*$$

qui assurent que les $\tilde{L}_{\check{S}}$ sont les restrictions aux fibres $\check{\mathcal{P}}(S, \mathcal{C})$ d'un foncteur $\tilde{L}$ de $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ dans $\tilde{\mathcal{P}}_a(\mathcal{C})$ adjoint à gauche au foncteur $\tilde{\Gamma}$. Ainsi *(a)* implique *(b)*.

Réciproquement, *(b)* entraîne que la localisation $\mathfrak{L}$ est définie par un système localisant (L, Ψ) tel que L respecte les fibres de $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$. Le foncteur localisant $\tilde{L}$ respecte donc également les fibres et tout morphisme de situation $\lambda : S' \to S$ détermine des foncteurs

$$\tilde{\lambda} = \tilde{L}_{S'}.\lambda_* \quad \text{et} \quad \tilde{\lambda}_* = \tilde{L}_{S'}.\lambda_* \tilde{\Gamma}_S$$

En utilisant la cofibration de $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ sur $\mathcal{S}^o$, il est possible de montrer l'existence d'un isomorphisme fonctoriel

$$Hom_{\tilde{\mathcal{P}}_a(S', \mathcal{C})}(\tilde{\lambda}., .) \tilde{\to} Hom_{\tilde{\mathcal{P}}_a(S', \mathcal{C})}(\tilde{L}_{S'}.\lambda_* L_S., .),$$

qui provient donc de l'isomorphisme fonctoriel :

$$\tilde{\lambda}[\Psi_S] : \tilde{\lambda} \to \tilde{L}_{S'}.\lambda_* L_S = \tilde{\lambda} L_S .$$

Puisque, pour tout objet P de $\check{\mathcal{P}}(S, \mathcal{C})$, l'objet $\lambda_* P$ est le but d'une flèche $\alpha_P(\lambda)$ de source P et cocartésienne dans $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ au-dessus de λ^o, en particulier, pour tout objet F de $\tilde{\mathcal{P}}_a(S, \mathcal{C})$ en posant $P = \tilde{\Gamma}_S F$, le composé $\beta_F(\lambda) = \Psi_{S'}(\lambda_* P) \circ \alpha_P(\lambda)$ est l'image par $\tilde{\Gamma}$ d'une flèche unique $\tilde{\alpha}_F(\lambda) : F \to \tilde{\lambda}_* F$ au-dessus de λ^o. Grâce au fait que $\tilde{\lambda}[\Psi_S]$ est un isomorphisme fonctoriel, le lecteur pourra vérifier que $\tilde{\alpha}_F(\lambda)$ est cocartésienne dans $\tilde{\mathcal{P}}_a(\mathcal{C})$ au-dessus de λ^o, ce qui achèvera la démonstration.

COROLLAIRE 5.2.3. *Sous les conditions équivalentes du théorème 5.2.2, tout morphisme de situation $\lambda : S' \to S$ détermine un isomorphisme fonctoriel canonique*

$$\tilde{\lambda}_* \tilde{L}_S \tilde{\to} \tilde{L}_{S'}.\lambda_* .$$

COROLLAIRE 5.2.4. *Sous les conditions équivalentes du théorème 5.2.2, il y a équivalence des conditions suivantes :*

(a) Pour tout morphisme de situation λ, le foncteur image directe $\tilde{\lambda}_*$ est exact à gauche.

(b) Pour toute situation S, le foncteur localisant $\bar{L}_S$ est exact à gauche.

Cela résulte de l'isomorphisme de $\bar{L}_S$ et de $\widetilde{\mu(S)}_*$, ainsi que de la relation $\tilde{\lambda}_* = \bar{L}_S . \lambda_* \bar{\Gamma}_S$ dans laquelle $\bar{\Gamma}_S$ et λ_* commutent aux limites projectives.

5.3. Propriétés relatives à la bifibration.

LEMME 5.3.1. *Lorsque $\mathcal{C}$ est sectionnante, si $\bar{\mathcal{P}}_a(\mathcal{C})$ est la sous-catégorie locale d'une localisation $\mathcal{L}$ dans $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$, alors $\mathcal{L}$ est compatible avec la cofibration.*

La démonstration qui utilise le théorème 5.1.3 est laissée aux soins du lecteur.

LEMME 5.3.2. *Lorsque $\mathcal{C}$ est sectionnante, si $\bar{\mathcal{P}}_a(S, \mathcal{C})$ est la sous-catégorie locale d'une localisation $\mathcal{L}_S$ dans $\check{\mathcal{P}}(S, \mathcal{C})$ pour toute situation S, alors $\bar{\mathcal{P}}_a(\mathcal{C})$ est la sous-catégorie locale d'une localisation $\mathcal{L}$ dans $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ compatible avec la cofibration.*

La démonstration qui utilise le théorème 5.1.3 et la proposition 5.1.2 est laissée aux soins du lecteur.

COROLLAIRE 5.3.3. *Lorsque $\mathcal{C}$ est sectionnante, il y a équivalence des conditions suivantes :*

(a) Il existe une localisation $\mathcal{L}$ dans $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ de sous-catégorie locale $\bar{\mathcal{P}}_a(\mathcal{C})$.

(b) Il existe une localisation $\mathcal{L}$ dans $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ compatible avec la cofibration et de sous-catégorie locale $\bar{\mathcal{P}}_a(\mathcal{C})$.

(c) Pour toute situation S, il existe une localisation $\mathcal{L}_S$ dans $\check{\mathcal{P}}(S, \mathcal{C})$ de sous-catégorie locale $\bar{\mathcal{P}}_a(S, \mathcal{C})$.

Cela résulte des lemmes 5.3.1 et 5.3.2.

Les théorèmes 5.1.3 et 5.2.2 ainsi que le corollaire 5.3.3 entraînent alors :

THEOREME 5.3.4. *Pour toute catégorie $\mathcal{C}$, il y a équivalence des conditions suivantes :*

(a) La catégorie $\tilde{\mathcal{P}}_a(\mathcal{C})$ *est bifibrée sur* $\mathcal{S}^o$.

(b) La catégorie $\mathcal{C}$ *est sectionnante et il existe dans* $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ *une localisation de sous-catégorie locale* $\tilde{\mathcal{P}}_a(\mathcal{C})$.

(c) La catégorie $\mathcal{C}$ *est sectionnante et, pour toute situation* S, *il existe dans* $\check{\mathcal{P}}(S, \mathcal{C})$ *une localisation* $\mathcal{L}_S$ *de sous-catégorie locale* $\tilde{\mathcal{P}}_a(S, \mathcal{C})$.

DEFINITION 5.3.5. Lorsque $\tilde{\mathcal{P}}_a(\mathcal{C})$ est cofibrée sur $\mathcal{S}^o$, elle sera dite *exactement cofibrée* si, pour tout morphisme de situation $\lambda : S' \to S$, le foncteur image directe $\tilde{\lambda}_* : \tilde{\mathcal{P}}_a(S, \mathcal{C}) \to \tilde{\mathcal{P}}_a(S', \mathcal{C})$ est *exact.*

COROLLAIRE 5.3.6. *Sous les conditions équivalentes du théorème 5.3.4, il y a équivalence des conditions supplémentaires suivantes :*

(a) La catégorie $\tilde{\mathcal{P}}_a(\mathcal{C})$ *est exactement cofibrée sur* $\mathcal{S}^o$.

(b) Pour toute situation S, *la localisation* $\mathcal{L}_S$ *est exacte.*

Cela résulte du corollaire 5.2.4 et du fait que les $\tilde{\lambda}_*$ sont adjoints à gauche aux $\tilde{\lambda}^*$.

REMARQUE 5.3.7. Les conditions équivalentes du corollaire 5.3.6 signifient que, pour tout morphisme de situation, la flèche λ^o dans $\mathcal{S}^o$ est *plate* [5] pour la catégorie $\tilde{\mathcal{P}}_a(\mathcal{C})$ bifibrée sur $\mathcal{S}^o$.

LEMME 5.3.8. *Sous les conditions équivalentes du théorème 5.3.4, la catégorie* $\mathcal{C}$ *est avec limites inductives filtrantes. De plus, sous les conditions équivalentes du corollaire 5.3.6, les foncteurs limites inductives filtrantes sont exacts.*

Pour tout ensemble ordonné filtrant I, en utilisant la *situation de cofinalité* S sur I, le lecteur pourra vérifier la relation $\tilde{\mathcal{P}}_a(S, \mathcal{C}) \simeq \mathcal{C}$, qui entraîne que le foncteur localisant $\tilde{L}_S$ représente le foncteur $\varinjlim_I$, ce qui achèvera la démonstration.

COROLLAIRE 5.3.9. *Sous les conditions équivalentes du théorème 5.3.4 et du corollaire 5.3.6, la catégorie* $\mathcal{C}$ *est complètement sectionnante.*

5.4. Sur « le problème du faisceau associé ».

THEOREME 5.4.1. *Lorsque la catégorie $\mathcal{C}$ est parfaitement sectionnante, il existe dans $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ une localisation $\mathcal{L}$ de sous-catégorie locale $\tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ et caractérisée par un système localisant (L, Ψ) défini par :*

$$L = \check{\Gamma}\check{\Gamma} = \check{\Gamma}^2 \quad \text{et} \quad \Psi = (\check{\Gamma}\check{\omega}) \circ \check{\omega} = (\check{\omega}\check{\Gamma}) \circ \check{\omega}.$$

De plus, pour toute situation S, la localisation $\mathcal{L}_S$ dans $\check{\mathcal{P}}(S, \mathcal{C})$ de sous-catégorie locale $\tilde{\mathcal{P}}(S, \mathcal{C})$ est exacte.

Les propositions 4.4.1 et 4.4.2 entrainent que ΨL est un isomorphisme fonctoriel et, comme la proposition 4.4.3 entraîne $L\Psi = \Psi L$, le système (L, Ψ) est localisant. Si P est un faisceau, $\check{\omega}(P)$ et $\check{\Gamma}\check{\omega}(P)$ étant des isomorphismes, il en résulte que $\Psi(P)$ est un isomorphisme et, réciproquement, si $\Psi(P)$ est un isomorphisme, P est un faisceau puisque LP est toujours un faisceau. La sous-catégorie locale de $\mathcal{L}$ est donc bien $\tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$.

Pour toute situation S, la localisation $\mathcal{L}_S$ est exacte puisqu'elle est caractérisée par le système localisant (L_S, Ψ_S) dans lequel $L_S = \check{\Gamma}_S^2$ et que $\check{\Gamma}_S$ est exact à gauche d'après sa construction.

COROLLAIRE 5.4.2. *Lorsque $\mathcal{C}$ est une catégorie abélienne parfaitement sectionnante, (axiomes $AB3^*$ et $AB6$) pour toute situation S, la catégorie $\tilde{\mathcal{P}}(S, \mathcal{C})$ des faisceaux sur S est abélienne et les foncteurs $\check{\Gamma}_S$, L_S, $\tilde{L}_S$ et $\tilde{\Gamma}_S$ sont additifs.*

Les catégories $Ker\check{\Gamma}_S$, $Ker L_S$ et $Ker\tilde{L}_S$ coïncident avec une même sous-catégorie localisante $\mathcal{N}_S$ de $\check{\mathcal{P}}(S, \mathcal{C})$ [au sens de Gabriel].

La catégorie $\tilde{\mathcal{P}}(S, \mathcal{C})$ des faisceaux sur S, qui est la sous-catégorie locale de la localisation exacte $\mathcal{L}_S$ dans $\check{\mathcal{P}}(S, \mathcal{C})$, est aussi la sous-catégorie des objets $\mathcal{N}_S$-fermés et elle est équivalente à la catégorie quotient (au sens de Gabriel) de $\check{\mathcal{P}}(S, \mathcal{C})$ par la sous-catégorie localisante $\mathcal{N}_S$.

Cela résulte du lemme 4.1.8, de la proposition 4.1.9 et de la proposition 4.4.1 qui exprime que $\check{\omega}\check{\Gamma}$ est un monomorphisme fonctoriel, ce qui entraîne la relation $Ker\check{\Gamma}_S = Ker L_S$.

Les corollaires 4. 2.9 , 5. 3.6 et 5. 3.9 entraînent alors :

THEOREME 5.4.3. *Pour toute catégorie $\mathcal{C}$, il y a équivalence des conditions suivantes :*

(a) La catégorie $\tilde{\mathcal{P}}_a(\mathcal{C})$ est fibrée et exactement cofibrée sur $\mathcal{S}^o$.

(b) La catégorie $\mathcal{C}$ est sectionnante et il existe dans $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ une localisation $\mathcal{L}$ de sous-catégorie locale $\tilde{\mathcal{P}}_a(\mathcal{C})$, telle que la restriction L_S du foncteur localisation L au-dessus de toute situation S soit exact à gauche.

(c) La catégorie $\mathcal{C}$ est sectionnante et pour toute situation S, il existe dans $\check{\mathcal{P}}(S, \mathcal{C})$ une localisation exacte $\mathcal{L}_S$ de sous-catégorie locale $\tilde{\mathcal{P}}_a(S, \mathcal{C})$.

En outre, ces conditions équivalentes entraînent que la catégorie $\mathcal{C}$ est complètement sectionnante et que $\tilde{\mathcal{P}}_a(\mathcal{C}) = \tilde{\mathcal{P}}_n(\mathcal{C}) = \tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$.

En manière de réciproque, les corollaires 4.2.9 et 5.3.6 et les théorèmes 5. 3.4 et 5. 4.1 entraînent alors :

THEOREME 5.4.4 (THEOREME DU FAISCEAU EXACTEMENT ASSOCIE). *Pour toute catégorie $\mathcal{C}$ parfaitement sectionnante, alors :*

(a) La catégorie $\tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ des faisceaux est fibrée et exactement cofibrée sur $\mathcal{S}^o$.

(b) Pour toute situation S, il existe dans $\check{\mathcal{P}}(S, \mathcal{C})$ une localisation exacte $\mathcal{L}_S$ de sous-catégorie locale $\tilde{\mathcal{P}}(S, \mathcal{C})$.

(c) Il existe dans $\check{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ une localisation $\mathcal{L}$ de sous-catégorie locale $\tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ et qui est caractérisée par le système localisant (L, Ψ) défini par

$$L = \check{\Gamma}^2 \quad et \quad \Psi = (\check{\Gamma}\check{\omega}) \circ \check{\omega} = (\check{\omega}\check{\Gamma}) \circ \check{\omega}.$$

Le foncteur localisant $\tilde{L} : \check{\mathcal{P}}(\mathcal{C}) \to \tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{C})$ est le « foncteur faisceau associé ».

REMARQUE 5.4.5. Le problème du faisceau associé consiste en la caractérisation des catégories $\mathcal{C}$ pour lesquelles il existe, pour toute situation S, une localisation $\mathcal{L}_S$ dans $\check{\mathcal{P}}(S, \mathcal{C})$ de sous-catégorie locale $\tilde{\mathcal{P}}_a(S, \mathcal{C})$. Ce problème ne semble guère abordable en dehors du cas des catégories sectionnantes. En se limitant à ces catégories, le théorème 5. 3. 4 donne une caractérisation par la condition de bifibration de $\tilde{\mathcal{P}}_a(\mathcal{C})$ sur $\mathcal{S}^o$. Avec la même restriction et en imposant aux localisations $\mathcal{L}_S$ d'être exactes, les théorèmes 5. 4. 3 et 5. 4. 4 donnent respectivement des conditions nécessaires et des conditions suffisantes dont la différence de richesse réside en l'axiome *(D)*. Il n'a malheureusement pas été possible de montrer sa nécessité.

6. EXEMPLES ET APPLICATIONS

6.1. Faisceau associé et localisation.

Les liens entre le problème du faisceau associé et la théorie classique de la localisation [7] [3] (p. 157, 165) peuvent être illustrés par les exemples suivants :

Avec les notations de l'exemple 3.8.5 et de la fin du paragraphe 3.8. 6, toute catégorie abélienne $\mathcal{C}$ vérifiant les axiomes $AB4^*$ et $AB6$ détermine un *foncteur localisation* $L_S = \check{\Gamma}^2_S : Mod^{\mathcal{C}}_B \to Mod^{\mathcal{C}}_B$ qui généralise le foncteur classique $M \rightsquigarrow M_{\mathcal{F}}$ utilisé dans l'étude de la localisation classique [7] [3] dans Mod_B définie par l'ensemble *topologisant* et *inaempotent* $\mathcal{F}$ d'idéaux à gauche de B, ce foncteur classique étant fourni par L_S lorsque $\mathcal{C} = \underline{Ab}$.

En particulier, si Λ est le monoïde multiplicatif d'un anneau unitaire A et si $\mathcal{G}$ est associé à une partie multiplicative Σ vérifiant la condition :

> $(*)$ « Pour tout $s \in \Sigma$ et tout $a \in \Lambda$, il existe $t \in \Sigma$ et $b \in \Lambda$, tels que $ta = bs$ »

duale de la condition $(\star)$ de [7] et qui détermine un ensemble $\mathcal{F}'$ d'idéaux à gauche de A topologisant et idempotent, alors la restriction de L_S à la sous-catégorie $Mod^{\mathcal{C}}_A$ de $Mod^{\mathcal{C}}_B$ caractérise une localisation exacte dans $Mod^{\mathcal{C}}_A$ qui généralise la localisation dans Mod_A définie par le système $\mathcal{F}'$, celle-ci étant obtenue lorsque $\mathcal{C} = \underline{Ab}$.

6.2. Application aux sites.

Le théorème 5.4. 4 et la propriété *(P)* entraînent que pour toute catégorie parfaitement sectionnante $\mathcal{C}$ et pour tout site $(\mathcal{E}, \mathcal{T})$, dans la catégorie des pré-faisceaux sur ce site et à valeurs dans $\mathcal{C}$ il existe un foncteur faisceau associé. Cette propriété généralise un résultat connu dans le cas où $\mathcal{C}$ est la catégorie des ensembles ou la catégorie des groupes abéliens [1] .

6.3. Sur les conjectures de J.W. Gray.

Pour toute situation S, le foncteur $\check{\Gamma}_S$ constitue l'analogue du foncteur construit dans une catégorie de préfaisceaux sur un espace topologique et à valeurs dans une catégorie $\mathcal{K}$, envisagé dans [13] par A. Heller et K. A. Rowe. Ces auteurs montraient que le foncteur faisceau associé T^* peut être construit par une *itération transfinie* de T.

Dans son commentaire dans « Mathematical Reviews » de cet article, J. W. Gray écrivait : « ... if $\mathcal{K}$ is the category of abelian groups, then it is known that iterating the construction T twice is sufficent and it is suspected that, in fact, once is enough » et il ajoutait : « It is quite possible that this is also true for an arbitrary category $\mathcal{K}$ as above » .

Cette seconde conjecture est effectivement exacte pour une catégorie $\mathcal{K}$ parfaitement sectionnante et cela, non seulement pour un espace topologique, mais même pour une situation quelconque, puisque, d'après le théorème 5.4.4, le système localisant (L, Ψ) est caractérisé par $L = \check{\Gamma}^2$.

Quant à la première conjecture qui pose en fait la question : « Le système $(\check{\Gamma}, \check{\omega})$ est-il toujours localisant ? » , il est possible de vérifier que la réponse est négative. Néanmoins, elle conduit à l'étude suivante des situations S pour lesquelles le système $(\check{\Gamma}_S, \check{\omega}_S)$ est localisant.

6.4. Situation $\mathcal{C}$- locale.

DEFINITION 6. 4. 1. Etant donnée une catégorie parfaitement sectionnante $\mathcal{C}$, une situation S sera dite $\mathcal{C}$- *locale* si le système $(\check{\Gamma}_S, \check{\omega}_S)$

est localisant.

Une situation S sera dite *locale* si elle est $\mathcal{C}$- locale pour toute catégorie de modules $\mathcal{C}$.

Un espace topologique sera dit *$\mathcal{C}$-local* [resp. *local*] si la situation associée est $\mathcal{C}$- locale [resp. locale].

PROPOSITION 6.4.2. *Si $\mathcal{C}$ est une catégorie abélienne vérifiant les axiomes AB4* et AB6, pour qu'une situation S soit $\mathcal{C}$-* locale, *il faut et il suffit que le foncteur $\check{H}^1_S$ s'annule sur la sous-catégorie localisante $\mathfrak{N}_S = Ker\, \check{\Gamma}_S = Ker\, L_S = Ker\, \tilde{L}_S$.*

Comme il est facile de vérifier que $Ker\, \check{\omega}_S$ et $Cocker\, \check{\omega}_S$ sont toujours à valeurs dans $\mathfrak{N}_S$, les deux suites exactes de cohomologie associées aux deux suites exactes courtes liées à la factorisation de $\check{\omega}_S$ donnent dans $\check{\mathcal{P}}(S, \mathcal{C})$ la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \check{\Gamma}_S \xrightarrow{\check{\Gamma}_S \check{\omega}_S} \check{\Gamma}^2_S \longrightarrow \check{H}^1_S\, Ker\, \check{\omega}_S .$$

Si $\check{H}^1_S$ s'annule sur $\mathfrak{N}_S$, il en résulte $\check{\Gamma}_S = \check{\Gamma}^2_S$, ce qui entraîne que $(\check{\Gamma}_S, \check{\omega}_S)$ est localisant et, réciproquement, puisque $\tilde{L}_S \check{s}_S(P)$ est un isomorphisme pour tout objet P de $\mathfrak{N}_S$, si $(\check{\Gamma}_S, \check{\omega}_S)$ est localisant, il en résulte que $\check{\Gamma}_S \check{s}_S(P)$ est un isomorphisme, ce qui entraîne bien

$$\check{H}^1_S P = Cocker\, \check{\Gamma}_S \check{s}(P) = 0 .$$

REMARQUE 6.4.3. La proposition 6.4.2 donne une condition pour que $\check{\Gamma}_S$ soit isomorphe à $\tilde{\Gamma}_S \tilde{L}_S$, c'est-à-dire pour que $\check{\Gamma}_S$ se factorise par la catégorie quotient $\tilde{\mathcal{P}}(S, \mathcal{C}) \simeq \check{\mathcal{P}}(S, \mathcal{C})/\mathfrak{N}_S$. Elle est donc à rapprocher du corollaire 2 p. 368 de [7] et elle admet les généralisations suivantes:

LEMME 6.4.4. *Si $\mathcal{C}$ est une catégorie abélienne vérifiant les axiomes AB4* et AB6, pour toute situation S et pour tout entier positif n, il y a équivalence des conditions suivantes :*

(a) $\check{H}^{p+1}_S$ s'annule sur $\mathfrak{N}_S$ pour $0 \leq p \leq n$.

(b) La situation S est $\mathcal{C}$- locale et $\check{H}^p_S \check{\Gamma}_S \check{D}_S = 0$ pour $1 \leq p \leq n$.

(c) $\check{H}^p_S \simeq \check{H}^p_S \check{\Gamma}_S$ *pour* $0 \leq p \leq n$ [*ces isomorphismes fonctoriels sont les* $\check{H}^p_S \check{\omega}_S$] .

Le lecteur pourra vérifier que les $\check{H}^p_S$ sont à valeurs dans $\mathfrak{N}_S$ pour $p \geq 1$ et qu'il existe un foncteur $\check{N}_S$ à valeurs dans $\mathfrak{N}_S$ donnant une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \check{N}_S \longrightarrow \check{D}_S \longrightarrow \check{\Gamma}_S \check{D}_S \longrightarrow 0 .$$

La démonstration, qui repose essentiellement sur ces propriétés, est laissée aux soins du lecteur.

PROPOSITION 6.4.5. *Si* $\mathcal{C}$ *est une catégorie abélienne vérifiant les axiomes* $AB4^*$ *et* $AB6$ *pour toute situation* S, *il y a équivalence des conditions suivantes :*

(a) $\check{H}^*_S$ *s'annule sur* $\mathfrak{N}_S$.

(b) La situation S *est* $\mathcal{C}$*- locale et le foncteur* $\check{\Gamma}_S \check{D}_S$ *est à valeurs dans la sous- catégorie des objets* $\check{\Gamma}_S$*- acycliques.*

(c) $\check{H}^*_S \simeq \check{H}^*_S \check{\Gamma}_S$ [*par l'isomorphisme fonctoriel* $\check{H}^*_S \tilde{\check{\omega}}_S$] .

(d) Il existe un foncteur cohomologique universel $\tilde{H}^*_S$ *de* $\tilde{\mathcal{P}}(S, \mathcal{C})$ *dans* $\check{\mathcal{P}}(S, \mathcal{C})$ *nul en degrés négatifs, tel que* $\tilde{H}^0_S \simeq \tilde{\Gamma}_S$ *et vérifiant les relations :*

$$(d')\ \tilde{H}^*_S \simeq \check{H}^*_S \tilde{\Gamma}_S \qquad et \qquad (d'')\ \tilde{H}^*_S \tilde{L}_S \simeq \check{H}^*_S .$$

L'équivalence des conditions *(a)*, *(b)* et *(c)* résulte du lemme 6.4.4. Lorsque ces conditions sont vérifiées, la relation $\tilde{H}^*_S = \check{H}^*_S \tilde{\Gamma}_S$ caractérise un foncteur cohomologique d'après la condition *(c)* et la caractérisation des conoyaux dans $\tilde{\mathcal{P}}(S, \mathcal{C})$. De plus, il est universel puisque la condition *(c)* entraîne qu'il est effaçable en degrés strictement positifs par le monomorphisme fonctoriel $\tilde{L}_S \check{j}_S \tilde{\Gamma}_S$. Enfin, la relation *(d')* entraîne $\tilde{H}^*_S \tilde{L}_S \simeq \check{H}^*_S \check{\Gamma}^2_S$, ce qui entraîne la relation *(d'')* d'après la condition *(c)*.

Réciproquement, la relation *(d'')* montre que *(d)* implique *(a)*.

6.5. Application aux espaces topologiques.

LEMME 6.5.1. *Si* $\mathcal{C}$ *est une catégorie complètement sectionnante, pour* *tout préfaisceau sur une situation S sur $\mathfrak{E}$, si $P' = \check{\Gamma}_S \check{D}_S P$, alors, pour toute flèche $f : X \to Y$ dans $\mathfrak{E}$, le morphisme canonique*

$$P'(f) : P'(X) \to P'(Y)$$

est un épimorphisme.

La démonstration, qui repose sur la définition de $\check{D}$, est laissée aux soins du lecteur.

PROPOSITION 6.5.2. *Si S est la situation naturelle associée à un espace topologique T, il y a équivalence des conditions suivantes :*

(a) L'espace topologique T est local.

(b) $\check{H}^1_S$ s'annule sur $\mathcal{N}_S$ pour toute catégorie de modules $\mathcal{C}$.

(c) $\check{H}^*_S$ s'annule sur $\mathcal{N}_S$ pour toute catégorie de modules $\mathcal{C}$.

(d) $\check{H}^*_S \simeq \check{H}^*_S \check{\Gamma}_S$ [par l'isomorphisme fonctoriel $\check{H}^*_S \check{\omega}_S$].

(e) Il existe un foncteur cohomologique universel $\tilde{H}^*_S$ de $\tilde{\mathcal{P}}(S, \mathcal{C})$ dans $\check{\mathcal{P}}(S, \mathcal{C})$, nul en degrés négatifs, tel que $\tilde{H}^0_S \simeq \tilde{\Gamma}_S$ et vérifiant les relations

$$(e')\ \tilde{H}^*_S \simeq \check{H}^*_S \tilde{\Gamma}_S \qquad et \qquad (e'')\ \tilde{H}^*_S \tilde{L}_S \simeq \check{H}^*_S .$$

Pour toute catégorie de modules $\mathcal{C}$, si S est locale, le lemme 6.5.1 montre que le foncteur $\tilde{L}_S \check{D}_S$ est à valeurs dans la sous-catégorie des faisceaux *flasques* [9] et le théorème 5.2.3 de [9] entraîne immédiatement que le foncteur $\check{\Gamma}_S \check{D}_S$ est à valeurs dans la sous-catégorie des objets $\check{\Gamma}_S$-acycliques. Ainsi, pour toute catégorie de modules $\mathcal{C}$, les conditions équivalentes de la proposition 6.4.2 entraînent la condition *(b)* de la proposition 6.4.5, ce qui achève la démonstration.

REMARQUE 6.5.3. Il aurait été possible de donner une autre démonstration de cette proposition en remarquant que, lorsque S est locale, $\check{C}'^*_S \tilde{\Gamma}_S$ est l'image par $\tilde{\Gamma}_S$ d'une *résolution flasque* de $\tilde{I}_S$ et que $\tilde{H}^*_S$ peut être calculé en appliquant $\tilde{\Gamma}_S$ à une résolution flasque de $\tilde{I}_S$ [9].

EXEMPLE 6.5.4. La proposition 6.4.2 et un fragment du théorème 5.10.2 de [9] montrent qu'un espace topologique dont tout ouvert est *paracompact* est *local.*

En particulier, tout espace métrique est *local.*

REMARQUE 6.5.5. L'inexactitude de la première conjecture de J.W. Gray résulte de l'existence d'espaces topologiques non locaux, ce qui est une conséquence de la proposition 6.5.2 et de l'exemple 2, page 177 de [12].

REMARQUE 6.5.6. La relation *(e')* exprime que « *la bonne cohomologie* » pour les faisceaux sur l'espace topologique *T* peut être calculée par « *la méthode de Čech* ».

Il en est donc ainsi pour tout *espace topologique local.*