A. KUMPERA

Sur l'intégration d'une classe remarquable de systèmes différentiels automorphes par la méthode de Sophus Lie

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 9, n° 3 (1967), p. 255-280

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1967__9_3_255_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE IX, 3
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

SUR L'INTEGRATION D'UNE CLASSE REMARQUABLE DE SYSTEMES DIFFERENTIELS AUTOMORPHES PAR LA METHODE DE SOPHUS LIE

par A. KUMPERA

INTRODUCTION

Toute l'oeuvre de Sophus Lie est dominée par le problème fondamental de l'intégration des équations différentielles. Très tôt, Lie s'est aperçu que la plupart des équations pour lesquelles ont été développées des méthodes d'intégration jouissaient en commun d'une propriété fondamentale , celle d'être invariantes par les opérations d'un groupe (ou groupe local) de transformations, l'intégration de ces équations étant étroitement liée à la structure du groupe. A ce propos, Lie introduit la notion de groupe continu fini et, plus tard, celle de groupe continu infini. Non seulement il unifie et généralise les diverses méthodes d'intégration mais développe ensuite (après quinze ans de recherches) une théorie générale d'intégration des équations différentielles qui admettent un pseudo- groupe

Cette note est un développement du chapitre III de « Verwertung des Gruppenbegriffes für Differentialgleichungen » (voir Gesammelte Abhandlungen, Band VI) et a pour but d'étudier l'intégration d'une classe particulière d'équations invariantes par des pseudo- groupes, en utilisant les idées de Lie. Nous avons pourtant modifié un peu la méthode de Lie, ce qui nous a permis d'éliminer les invariants différentiels superflus. Pour cette classe d'équations, nous pouvons réaliser nettement plusieurs opérations intervenant dans une théorie générale qui, malheureusement, n'est pas encore mise au point, surtout par suite de la connaissance in-suffisante de la structure des pseudo-groupes de Lie. Cette classe surgit par la considération du problème d'équivalence des transformations infinitésimales d'un pseudo-groupe. Nous obtenons comme corollaire la résolution de ce problème pour la classe des pseudo-groupes considérés par nous. Cependant, l'intérêt principal de cette note est la méthode d'intégration en soi, indépendamment de la classe d'équations considérées.

Bien que cet exemple montre avec clarté les idées sous-jacentes à une théorie générale, il peut, en vertu de sa simplicité, cacher plusieurs difficultés sérieuses qui se présentent dans une telle théorie. Notre étude restant toujours bien concrète, nous n'avons pas posé de définitions générales bien que nous employions une terminologie (système automorphe, résolvant, etc. . .) qui pourrait en faire l'objet. De même, nous utilisons certaines notions, relatives aux pseudo-groupes de Lie, dont la définition générale serait hors de propos dans ce texte. Ces notions apparaissent en général dans l'énoncé des corollaires et traduisent exactement des propriétés figurant dans les propositions précédentes. La connaissance de ces notions générales est inutile à la compréhension du texte.

Quant à la bibliographie, le lecteur trouve toutes ces idées, plus ou moins explicites (avec beaucoup d'exemples et de théories particulières), parsemées dans les oeuvres complètes de S. Lie, les mémoires des livres IV (n° II, III, IX) et VI (n° III, XX) étant les plus nets et généraux. Dans le livre VII se trouve un aperçu historique très intéressant sur la théorie des équations différentielles (mémoire XIII) ainsi que des extraits de Comptes-rendus (mémoire XX). Enfin, on retrouve les mêmes idées dans le mémoire de E. Vessiot « Sur l'intégration des systèmes différentiels qui admettent des groupes continus de transformations » (Acta Math. 1904) qui réunit et généralise les idées de Lie. Pourtant, beaucoup des idées géométriques de Lie sont là, masquées par un appareillage analytique.

CHAPITRE I

GEOMETRIE D'UNE FORME VOLUME

1. Le pseudo-groupe unimodulaire.

Soit V une variété différentiable (*) de dimension n. Indiquons par GL le groupe linéaire de $\mathbf{R}^n$ et par SL le sous-groupe unimodulaire (linéaire spécial). Donnons-nous sur V une SL-structure P. Une telle structure détermine de façon canonique une forme de volume Ω sur V. Pour tout point $x \in V$, Ω_x est la forme duale du n-vecteur $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$, où $(v_1, \ldots, v_n)$ est un repère distingué au point x. Réciproquement, si on se donne une forme de volume Ω, elle détermine une SL-structure dont les repères distingués $(v_1, \ldots, v_n)$ sont ceux pour lesquels $\Omega(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) = 1$. Il est clair que la donnée de P est équivalente à la donnée de Ω. V étant munie d'une SL-structure, elle se trouve orientée.

Soit Γ le pseudo-groupe des automorphismes locaux et $\mathfrak{L}$ la pseudoalgèbre des germes d'automorphismes infinitésimaux de P :

$$\varphi \in \Gamma \Longleftrightarrow \varphi^* \Omega = \Omega \quad \text{et} \quad X \in \mathfrak{L} \Longleftrightarrow \theta(X)\Omega = 0.$$

$\mathfrak{L}$ est la pseudo-algèbre associée à Γ. Les sections locales de $\mathfrak{L}$ s'identifient avec les automorphismes infinitésimaux ξ de P, c'est-à-dire les champs ξ qui engendrent des noyaux de groupes locaux à un paramètre dont les transformations appartiennent à Γ. Ces champs sont caractérisés par la propriété $\theta(\xi)\Omega = 0$. Pour plus de simplicité nous les appellerons des *champs unimodulaires*. Remarquons maintenant que

$$\theta(\xi)\Omega = di(\xi)\Omega = (div_\Omega\, \xi)\Omega.$$

ξ est unimodulaire si, et seulement si, $div_\Omega\, \xi = 0$. Pour tout ouvert U de V l'application $\xi \overset{\#}{\to} i(\xi)\Omega$ est un isomorphisme du $\mathfrak{F}(U)$-module des champs de vecteurs de U sur le $\mathfrak{F}(U)$-module des $(n-1)$-formes de U. Pour que ξ soit unimodulaire, il faut et il suffit que $i(\xi)\Omega$ soit une forme fermée.

(*) Toutes les variétés sont supposées paracompactes connexes.

2. Quelques propriétés des champs unimodulaires.

Nous allons énoncer quelques propriétés élémentaires des champs unimodulaires et de la forme Ω.

PROPOSITION 2. 1. *Pour tout point* $x \in V$ *il existe un système de coordonnées locales* $(U; x^1, \ldots, x^n)$, $x \in U$, *tel que* $\Omega = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$

Un tel système de coordonnées locales sera appelé *distingué* ou *admissible.*

COROLLAIRE 1. *Les champs* $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ *sont unimodulaires. Tout vecteur* $v \in T_x V$ *est induit par un champ unimodulaire.*

COROLLAIRE 2. *Toute SL - structure est intégrable. Deux formes de volume sont toujours localement équivalentes.*

Soit σ une $(n-1)$- forme définie dans un ouvert U de V et indiquons par ξ le champ de vecteurs correspondant qui est caractérisé par l'équation $i(\xi)\Omega = \sigma$. Soit f une fonction définie dans U. On a

$$df \wedge \sigma = df \wedge i(\xi)\Omega = (i(\xi)df) \wedge \Omega = (\xi f)\Omega,$$

c'est- à- dire, ξ peut aussi être défini par la formule $(\xi f)\Omega = df \wedge \sigma$. Puisque les singularités de ξ et $\#\xi$ sont les mêmes, les champs unimodulaires ξ sans singularités correspondent aux $(n-1)$- formes fermées sans singularités. σ étant une telle forme nous pouvons l'écrire localement $\sigma = du^2 \wedge \ldots \wedge du^n$, où les $\{u^\lambda\}_{2 \leq \lambda \leq n}$ sont des fonctions en tout point indépendantes. La relation $(\xi f)\Omega = df \wedge du^2 \wedge \ldots \wedge du^n$ montre que

a) les fonctions $\{u^\lambda\}$ constituent un système fondamental d'intégrales premières de ξ. Toute intégrale première u de ξ est caractérisée par la formule $du \wedge \sigma = 0$.

b)

$$\xi f = \frac{D(f, u^2, \ldots, u^n)}{D(x^1, x^2, \ldots, x^n)},$$

où $(U; x^1, \ldots, x^n)$ est un système de coordonnées admissible donc

$\xi = \Sigma\, \xi^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, où $\xi^i = (-1)^{i+1} \dfrac{D(u^2, \ldots, u^n)}{D(x^1, \ldots, \hat{x}^i, \ldots, x^n)}$.

c) Soit u^1 une fonction telle que $\xi u^1 = 1$ et considérons l'application $\varphi\colon U \to \mathbf{R}^n : x \to (u^1(x), \ldots, u^n(x))$. En restreignant au besoin U (pour que φ soit injective) φ devient une carte locale de V. Pour cette carte on a

$$\varphi^* de = du^1 \wedge \ldots \wedge du^n = du^1 \wedge \sigma = (\xi u^1)\Omega = \Omega \ ,$$

où de est la forme de volume canonique de $\mathbf{R}^n$. Comme $\xi u^1 = 1$ et $\xi u^\lambda = 0$, $\lambda > 1$, on voit que $\varphi_* \xi = e_1$, où e_1 est le champ constant associé au vecteur de base e_1. On a ainsi trouvé un difféomorphisme local

$$\varphi\colon U \to \varphi(U)$$

qui rend équivalent de avec Ω et qui transforme ξ en e_1 (ce dernier champ étant unimodulaire pour de). Réciproquement, si $\varphi\colon U \to \mathbf{R}^n$ est une carte locale qui vérifie $\varphi^* de = \Omega$ (i. e. admissible) et $\varphi_* \xi = e_1$ alors $\xi = \#^{-1} d\varphi^2 \wedge \ldots \wedge d\varphi^n$, ξ est unimodulaire pour Ω et sans singularités. Ceci rejoint le point de vue de Sophus Lie. Il en résulte aussi la

PROPOSITION 2. 2. *Soit (V, Ω) une variété munie d'une forme de volume et ξ un champ local unimodulaire tel que $\xi_x \neq 0$. Il existe un système distingué de coordonnées locales $(U; x^1, \ldots, x^n)$ au voisinage de x tel que $\xi = \dfrac{\partial}{\partial x^1}$ dans U.*

Indiquons par Φ le feuilletage de dimension 1 associé à ξ (supposé sans singularités). Les équations locales de Φ s'écrivent $u^\lambda = c^\lambda$, $2 \leq \lambda \leq n$, où les c^λ sont les paramètres des feuilles. Réciproquement si Φ est un feuilletage de dimension 1 défini dans un ouvert U, Φ est localement le feuilletage associé à un champ unimodulaire sans singularités. En effet, si $u^\lambda = c^\lambda$ sont des équations locales de Φ on pose $\xi = \#^{-1}(du^2 \wedge \ldots \wedge du^n)$. Nous indiquerons dans la suite par ζ_u le champ unimodulaire associé à un système quelconque de fonctions $(u^2, \ldots, u^n)$.

Soit maintenant ξ un champ unimodulaire défini dans U et partout non singulier.

PROPOSITION 2. 3. *Si f est une intégrale première de ξ définie dans U, $f\xi$ est unimodulaire Réciproquement, tout champ unimodulaire ζ défini dans U et parallèle à ξ est de la forme $\zeta = f\xi$ où f est une intégrale première de ξ. L'application $f \to f\xi$ est ainsi une correspondance biunivoque entre les intégrales premières de ξ et les champs unimodulaires parallèles à ξ.*

PROPOSITION 2. 4. *Soient (V, Ω) et (W, ω) deux variétés munies de formes de volume. Soit $\varphi: V \to W$ un difféomorphisme. Posons $\varphi^*\omega = F\Omega$ et $f = F \circ \varphi^{-1}$. Soit ξ un champ de vecteurs de V et $\zeta = \varphi_*(\xi)$. Alors*

$$\theta(\xi)\Omega = \varphi^* [\theta(f^{-1}\zeta)\omega] .$$

En particulier ξ est Ω- unimodulaire si, et seulement si, $f^{-1}\zeta$ est ω- unimodulaire.

COROLLAIRE 1. *Si Ω et ω sont deux formes de volume de V et $\Omega = F\omega$, alors $\theta(\xi)\Omega = \theta(F\xi)\omega$. ξ est Ω- unimodulaire si, et seulement si, $F\xi$ est ω- unimodulaire.*

COROLLAIRE 2. *Les données étant celles de la proposition, soit σ une $(n-1)$- forme définie dans U et $\tau = \varphi^{-1*}\sigma$ définie dans $\varphi(U)$. Posons $\xi = \#^{-1}\sigma$, $\zeta = \#^{-1}\tau$ Alors $\zeta = f^{-1}\varphi_*\xi$ En particulier si $u = (u^\lambda)_{2 \leq \lambda \leq n}$ est défini dans U et $v = u \circ \varphi^{-1}$, alors $\zeta_v = f^{-1}\varphi_* \zeta_u$.*

3. Equations de définition de Γ et de $\mathfrak{L}$.

Soit (V, Ω) une variété munie d'une forme de volume. Nous indiquons par $\Pi^1 V$ le groupoïde des jets inversibles du premier ordre de V et par J^1TV le fibré vectoriel des jets du premier ordre de sections locales de TV (c'est- à- dire les jets de champs de vecteurs locaux). Nous indiquons par $\mathfrak{A}(V)$ le faisceau des germes de champs de vecteurs de V. $J^1\mathfrak{A}(V) = J^1TV$. Soit $J^1\Gamma$ le sous- groupoïde des jets d'éléments de Γ

et $J^1\mathfrak{L}$ le sous-fibré vectoriel de $J^1\mathfrak{A}(V)$ des jets d'éléments de $\mathfrak{L}$. Nous voulons donner une caractérisation de $J^1\Gamma$ et $J^1\mathfrak{L}$.

PROPOSITION 3. 1. $J^1\Gamma = \{ X \in \Pi^1 V \mid X^*\Omega = \Omega \}$.

DEMONSTRATION. Il est clair que $J^1\Gamma \subset \{ X \mid X^*\Omega = \Omega \}$. Prenons deux champs de co-repères distingués de V :

$$(U;\ \omega^1, \ldots, \omega^n) \quad \text{et} \quad (\overline{U};\ \overline{\omega}^1, \ldots, \overline{\omega}^n).$$

L'application $\mu : (\alpha \times \beta)^{-1}(U \times \overline{U}) \to U \times \overline{U} \times R^{n^2}$ donnée par

$$\mu(X) = (\alpha(X),\ \beta(X),\ \gamma^i_j(X)), \quad \text{où } X^*\overline{\omega}^i = \gamma^i_j(X)\omega^j,$$

définit une carte locale pour la structure différentiable de $\Pi^1 V$. De plus,

$$X^*\Omega = \Omega \Longleftrightarrow \gamma^i_j(X) \in SL.$$

Soit maintenant $X \in \Pi^1 V$ tel que $X^*\Omega = \Omega$. Prenons les champs de co-repères associés à deux systèmes distingués de coordonnées locales $(U;\ x^1, \ldots, x^n)$ et $(\overline{U};\ y^1, \ldots, y^n)$ le premier défini au voisinage de $\alpha(X)$ et le deuxième défini au voisinage de $\beta(X)$. Soit $f : U \to \overline{U}$ le difféomorphisme local de V dont l'expression en coordonnées $(x^i,\ y^i)$ est donnée par $y^i = \gamma^i_j(X)x^j + c^i$ (les c^i étant choisis de telle sorte que $f(\alpha(X)) = \beta(X)$), où

$$X^*dy^i = \gamma^i_j(X)dx^j.$$

Mais alors $f \in \Gamma$ et $j^1_{\alpha(X)}f = X$, ce qui montre que $X \in J^1\Gamma$.

COROLLAIRE. *$J^1\Gamma$ est un sous-groupoïde de Lie transitif de $\Pi^1 V$ dont la variété différentiable sous-jacente est une sous-variété fermée régulièrement plongée de $\Pi^1 V$ qui est localement isomorphe à $U \times \overline{U} \times SL$, où U et $\overline{U}$ sont des ouverts de V munis de co-repères distingués. Le groupe d'isotropie de $J^1\Gamma$ est isomorphe à SL.*

Par un argument analogue, en se plaçant dans un système distingué de coordonnées locales, nous démontrons aussi la proposition suivante :

PROPOSITION 3. 2.

$$J^1\mathfrak{L} = \{ X \in J^1TV \mid \theta(X)\Omega = 0 \}.$$

COROLLAIRE 1. *$J^1\mathfrak{L}$ est un sous-fibré vectoriel différentiable de J^1TV qui, localement, est isomorphe à $U \times \mathbf{R}^n \times \underline{SL}$.*

COROLLAIRE 2. *Γ est un pseudo-groupe de Lie transitif et régulier du premier ordre. Sa pseudo-algèbre $\mathfrak{L}$ est une pseudo-algèbre de Lie transitive du premier ordre.*

4. Expressions locales.

Soient $(U;\ \omega^1, \dots, \omega^n)$, $(\bar{U}, \bar{\omega}^1, \dots, \bar{\omega}^n)$ deux champs de co-repères distingués et $f : U \to V$ une application. En chaque point $x \in U$, f détermine une matrice $\gamma^i_j(x)$ donnée par $f^*_x \bar{\omega}^i = \gamma^i_j(x)\omega^j$. On a

$$f \in \Gamma \Longleftrightarrow \gamma^i_j(x) \in SL \quad \forall\, x \in U.$$

Soit maintenant ξ un champ de vecteurs défini dans U et écrivons $\xi = \Sigma\, \xi^i \omega_i$, où $\{\omega_i\}$ est le champ de repères dual de $\{\omega^i\}$. Dans l'ouvert U muni d'un repère distingué, on a :

$$\theta(\xi)\Omega = \theta(\xi)\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n = \sum_i \omega^1 \wedge \dots \wedge \theta(\xi)\omega^i \wedge \dots \wedge \omega^n;$$

$$\theta(\xi)\omega^i = i(\xi)d\omega^i + di(\xi)\omega^i = \sum_{j,k} c^i_{jk}\xi^j\omega^k + \Sigma\, \partial_k \xi^i \omega^k,$$

où

$$d\omega^i = \frac{1}{2}\sum_{j,k} c^i_{jk}\,\omega^j \wedge \omega^k,\quad c^i_{jk} + c^i_{kj} = 0 \ \text{ et } \ d\xi^i = \sum_k \partial_k \xi^i \omega^k;$$

$$\theta(\xi)\Omega = \sum_i \Big(\sum_j c^i_{ji}\xi^j + \partial_i \xi^i\Big)\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n);$$

$$div_\Omega(\xi) = \sum_i \Big(\sum_j c^i_{ji}\,\xi^j + \partial_i\,\xi^i\Big).$$

En particulier lorsque les formes ω^i sont fermées (ce qui est le cas notamment lorsqu'on prend un système distingué de coordonnées locales), nous trouvons l'expression classique. Pour que ξ soit unimodulaire, il faut et il suffit que

$$\sum_i \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} = 0 .$$

5. Certains sous- pseudo- groupes de Γ.

Soit (V, Ω) une variété munie d'une forme de volume. Soit ξ un champ de vecteurs unimodulaire. Pour simplifier supposons que ξ est défini dans V tout entier et qu'il est partout non singulier. Indiquons encore par Γ le pseudo- groupe des automorphismes locaux de Ω. Nous indiquons par Δ le sous- pseudo- groupe de Γ, ensemble des $\varphi \in \Gamma$ tels que $\varphi_*(\xi) = \xi$. Montrons qu'il s'agit d'un pseudo- groupe de Lie transitif régulier du premier ordre.

PROPOSITION 5. 1.

$$J^1\Delta = \{ X \in \Pi^1 V \mid X_* \xi_{\alpha(X)} = \xi_{\beta(X)},\ X^*\Omega = \Omega \} .$$

DEMONSTRATION. Il est clair que $J^1\Delta$ est contenu dans l'ensemble des jets figurant du côté droit. Soient x_0 et y_0 deux points de V et prenons deux systèmes distingués de coordonnées locales $(\mathfrak{U}; x^1, \ldots, x^n)$ et $(\mathfrak{V}; y^1, \ldots, y^n)$ définis au voisinage de x_0 et y_0 respectivement. Nous pouvons supposer en plus que $\xi \mid \mathfrak{U} = \frac{\partial}{\partial x^1}$ et $\xi \mid \mathfrak{V} = \frac{\partial}{\partial y^1}$. Prenons les coordonnées des jets relatives aux cartes $(\mathfrak{U}; x)$ et $(\mathfrak{V}; y)$. Un jet X se représente par le triplet $X = (x, y, p^i_j)$. $X_*\xi_x = \xi_y$ si, et seulement si, $p^i_1 = \delta^i_1$. Mais alors $X^*\Omega = \Omega$ impose seulement une restriction sur le mineur $(p^i_j)_{i,\, j > 1}$. D'autre part soit φ un difféomorphisme local tel que $\alpha\varphi \subset \mathfrak{U}$, $\beta\varphi \subset \mathfrak{V}$ et écrivons sa représentation en coordonnées locales. Pour que $\varphi_*(\xi) = \xi$ il faut et il suffit que localement

$$y^1 = x^1 + \varphi^1(x^2, \ldots, x^n) \quad \text{et} \quad y^i = \varphi^i(x^2, \ldots, x^n),\ i > 1,$$

les φ^k étant des fonctions arbitraires. La condition $\varphi^*\Omega = \Omega$ s'impose alors sur les φ^i, $i > 1$. En prenant des transformations affines convenablement choisies (par rapport aux systèmes de coordonnées (x) et (y)) on voit aussitôt que tout jet X qui préserve ξ et Ω est un élément de $J^1\Delta$.

Indiquons par $\mathfrak{L}(\Delta)$ la pseudo- algèbre de Δ. Soit η un champ de vecteurs et $(\varphi_t)_t$ le groupe local à un paramètre qu'il engendre. Pour que η soit une section locale de $\mathfrak{L}(\Delta)$ il faut et il suffit que $\varphi_t \in \Delta$ pour tout t. Mais ceci veut dire que $\varphi_{*}(\xi) = \xi$ donc la condition se traduit par $\theta(\eta)\xi = 0$.

PROPOSITION 5. 2. $\mathfrak{L}(\Delta) = \{ X \in \mathfrak{A}(V) \mid \theta(X)\Omega = 0,\ \theta(X)\xi = 0 \}$.

En se ramenant à une carte distinguée, nous montrons de même la proposition suivante :

PROPOSITION 5. 3. $J^1\mathfrak{L}(\Delta) = \{ X \in J^1TV \mid \theta(X)\Omega = 0,\ \theta(X)\xi = 0 \}$.

COROLLAIRE. *Δ est un pseudo- groupe de Lie transitif régulier du premier ordre. $\mathfrak{L}(\Delta)$ est une pseudo- algèbre de Lie transitive du premier ordre.*

Il convient de remarquer que, dans une carte distinguée $(U; x)$ où $\xi = \frac{\partial}{\partial x^1}$, les sections locales de $\mathfrak{L}(\Delta)$ sont tous les champs unimodulaires $\eta = \Sigma\, \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, où les η^i sont localement des fonctions des seules variables $(x^2, \ldots, x^n)$.

Introduisons maintenant le pseudo- groupe Δ_o, sous- pseudo-groupe de Δ formé par les $\varphi \in \Delta$ qui laissent invariantes les feuilles du feuilletage Φ défini par le champ ξ.

PROPOSITION 5. 4.

$\mathfrak{L}(\Delta_o) = \{ X \in \mathfrak{A}(V) \mid \theta(X)\Omega = 0,\ \theta(X)\xi = 0,\ X$ est tangent à $\Phi \}$.

Afin d'éviter des complications techniques dépourvues d'intérêt pour les questions que nous voulons traiter, nous allons adopter les simplifications suivantes :

Supposons(*) que $V/_{\Phi}$ admet une structure différentiable compatible avec (V, Φ), c'est- à- dire que $V \xrightarrow{q} V/_{\Phi}$, où q est l'application quotient, est une fibration (la structure de $V/_{\Phi}$ étant alors unique). Posons $V/_{\Phi} = W$ et $\sigma = i(\xi)\Omega$. σ est une $(n-1)$- forme de V partout non nulle et vérifiant les propriétés suivantes :

a) $i(\eta)\sigma = 0$ pour tout champ de vecteurs η tangent à Φ, car $\eta \wedge \xi = 0$. σ est donc semi- basique.

(*) Une telle structure quotient existe toujours localement. Lorsqu'elle n'existe pas globalement, il suffit de restreindre toutes les considérations à un ouvert où la propriété est valable.

b) Soit $(\varphi_t)_t$ le groupe local à un paramètre engendré par ξ. Comme ξ est évidemment une section de $\mathfrak{L}(\Delta_o)$, chaque $\varphi_t \in \Delta_o$. Mais alors $\varphi_t^* \sigma = \sigma$ et $q \circ \varphi_t = q$ pour tout t. Comme $(\varphi_t)_t$ opère transitivement sur les feuilles de Φ (en fait chaque feuille est une ligne de courant de ξ), il en résulte que σ est basique c'est- à- dire est projetable dans W.

PROPOSITION 5. 5. *Il existe une forme de volume unique* ω *sur* W *telle que* $\sigma = q^* \omega$.

Nous allons maintenant chercher les équations de définition de Δ_o. Notons d'abord que la suite de morphismes fibrés

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & T(V, \Phi) & \xrightarrow{i} & TV & \xrightarrow{q_*} & TW & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \\
 & & V & \longrightarrow & V & \xrightarrow{q} & W & &
\end{array}$$

est exacte, d'où $TV/_{T(V, \Phi)} \xrightarrow{q_*} TW$ est un isomorphisme sur chaque fibré. Etant donnés deux points $x, y \in V$ l'ensemble des $X \in J^1_{x,\,y} V$ projetables dans $J^1 W$ par $J^1 q$ est le sous- espace défini par

$$X_* T_x(V, \Phi) \subset T_y(V, \Phi).$$

Soit $\tilde{X} \in J^1 W$ l'élément induit par passage au quotient d'un X projetable. L'application $X \to \tilde{X}$ est linéaire surjective. En particulier si $X \in J^1 V$ et $q\alpha(X) = q\beta(X)$, pour que X soit le 1- jet d'une application locale qui laisse invariantes les feuilles de Φ, il faut et il suffit que X soit projetable et que $\tilde{X} = Id \in J^1_{z,\,z} W$. Soit maintenant $X \in J^1 V$ et écrivons les conditions suivantes :

I- $X_* \xi = \xi$.

II- $X^* \Omega = \Omega$.

III- $X^* \sigma = \sigma$.

PROPOSITION 5. 6. *Deux quelconques des conditions ci- dessus entraînent la troisième.*

DEMONSTRATION.

I, II $\Longrightarrow$ III (évident),

I, III $\Longrightarrow$ II :

$$(i(\xi)X^*\Omega)(v_2, \ldots, v_n) = X^*\Omega(\xi, v_2, \ldots, v_n) =$$
$$= \Omega(\xi, X_* v_2, \ldots, X_* v_n) = i(\xi)\Omega(X_* v_2, \ldots, X_* v_n) =$$
$$= X^*(i(\xi)\Omega)(v_2, \ldots, v_n),$$

d'où

$$i(\xi)X^*\Omega = X^*(i(\xi)\Omega) = i(\xi)\Omega$$

et par conséquent $X^*\Omega = \Omega$.

II, III $\Longrightarrow$ I :

Soit $v \in T_{\alpha(X)}V$ tel que $X_* v = \xi_{\beta(X)}$; v existe car II entraîne que X_* est inversible. $i(\xi_{\alpha(X)})\Omega = X^* i(\xi)\Omega = i(v)\Omega$, donc $\xi_{\alpha(X)} = v$.

Reprenons Δ_o. On a

$$\Delta_o = \{ \varphi \mid \varphi^*\Omega = \Omega, \quad \varphi_* \xi = \xi, \quad q \circ \varphi = q \} .$$

Comme $\sigma = q^*\omega$ la condition $q \circ \varphi = q$ entraîne $\varphi^*\sigma = \sigma$. La proposition 5. 6 montre alors que

$$\Delta_o = \{ \varphi \mid \varphi_* \xi = \xi, \quad q \circ \varphi = q \}$$

ces deux dernières conditions étant visiblement indépendantes. Il en résulte que

$$J^1\Delta_o = \{ X \in \Pi^1 V \mid X_* \xi = \xi, \quad \tilde{X} = Id \},$$

où $\tilde{X} = Id$ signifie en particulier $q\alpha(X) = q\beta(X)$. En effet $X_*\xi = \xi$ entraîne que X est projetable et nous avons déjà remarqué que les 1- jets des φ vérifiant $q \circ \varphi = q$ sont les X projetables avec $\tilde{X} = Id$. En outre les deux conditions sont indépendantes.

Par rapport à deux cartes distinguées $(\mathfrak{U}; x)$ et $(\mathfrak{V}; y)$ vérifiant

a) $\xi \mid \mathfrak{U} = \dfrac{\partial}{\partial x^1}$, $\xi \mid \mathfrak{V} = \dfrac{\partial}{\partial y^1}$.

b) Les plaques $\{ x^i = c^i \}_{i > 1}$ et $\{ y^i = c^i \}_{i > 1}$ appartiennent à une même feuille de Φ,

les éléments de Δ_o s'écrivent

$$y^1 = x^1 + \varphi(x^2, \ldots, x^n), \quad y^i = x^i, \quad i > 1,$$

où φ est une fonction arbitraire.

Cherchons maintenant les équations de définition de $\mathfrak{L}(\Delta_o)$. Il faut d'abord trouver une caractérisation des éléments $X \in J^1TV$ qui sont les jets de champs locaux tangents à Φ. Evidemment l'ensemble de ces jets est un sous- fibré vectoriel de J^1TV. Soit τ la section nulle de TW. Pour que η soit un champ local tangent à Φ il faut et il suffit que $q_* \circ \eta = \tau \circ q$. Une deuxième différentiation fournit $q_{**} \circ \eta_* = \tau_* \circ q_*$. Par conséquent une condition nécessaire pour que $X \in J^1TV$ soit le jet d'un champ local tangent à Φ est que le diagramme suivant soit commutatif $(x = \alpha(X))$

$$\begin{array}{ccc} T^2_x V & \xrightarrow{q_{**}} & T^2 W \\ \uparrow X & & \uparrow \tau_* \\ T_x V & \xrightarrow{q_*} & TW \end{array}$$

et on voit facilement en prenant des coordonnées que cette condition est aussi suffisante.

En utilisant la formule

$$i([\xi, \eta])\Omega = i(\xi)\theta(\eta)\Omega - \theta(\eta)i(\xi)\Omega$$

on démontre la propriété suivante (qui d'ailleurs est une conséquence de 5. 6).

PROPOSITION 5. 7. *Soit $X \in J^1TV$. Deux quelconques des conditions suivantes entraînent la troisième.*

I- $\theta(X)\xi = 0$.

II- $\theta(X)\Omega = 0$.

III- $\theta(X)\sigma = 0$.

Si η est tangent à Φ on a, en vertu de $\sigma = q^*\omega$, $\theta(\eta)\sigma = = q^*[\theta(0)\omega] = 0$ donc la proposition 5. 4 se réduit, moyennant 5. 7, à la proposition suivante (qui d'ailleurs est conséquence de la caractérisation de Δ_o).

PROPOSITION 5. 8.

$$\mathcal{L}(\Delta_o) = \{X \in \mathfrak{A}(V) \mid \theta(X)\xi = 0, \quad X \text{ tangent à } \Phi\}.$$

Les considérations précédentes entraînent alors la

PROPOSITION 5. 9.

$$J^1\mathcal{L}(\Delta_o) = \{X \in J^1TV \mid \theta(X)\xi = 0, \ q_{**} \circ X = \tau_* \circ q_*\}.$$

En effet $\theta(X)\xi = 0$ entraîne que X est projetable et la deuxième condition est nécessaire et suffisante pour que la projection soit le jet nul. Les deux conditions sont indépendantes. Par rapport à une carte distinguée $(\mathfrak{U}; x)$ avec $\xi \mid \mathfrak{U} = \frac{\partial}{\partial x^1}$, les sections locales de $\mathcal{L}(\Delta_o)$ s'écrivent

$$\eta = f(x^2, \ldots, x^n)\frac{\partial}{\partial x^1}$$

où f est une fonction arbitraire.

COROLLAIRE. *Δ_o est un pseudo- groupe de Lie régulier du premier ordre. $\mathcal{L}(\Delta_o)$ est une pseudo- algèbre de Lie régulière du premier ordre (Δ_o et $\mathcal{L}(\Delta_o)$ ne sont pas transitifs).*

PROPOSITION 5. 10. *Δ_o est un sous-pseudo-groupe normal de Δ.*

DEMONSTRATION. Tout élément $\varphi \in \Delta$ préserve ξ, donc préserve Φ, et par suite transforme un champ tangent à Φ en un champ tangent à Φ. En particulier φ transforme toute section de $\mathcal{L}(\Delta_o)$ en une section de $\mathcal{L}(\Delta_o)$. Il en résulte de même que $\theta(X)Y \in \mathcal{L}(\Delta_o)$ pour $X \in \mathcal{L}(\Delta)$ et $Y \in \mathcal{L}(\Delta_o)$ avec $\alpha(X) = \alpha(Y)$, car $\varphi_{t*}(Y)$ est tangent à Φ pour tout t.

6. Le pseudo- groupe quotient Δ_1.

Remarquons initialement que les trajectoires de Δ_o et $\mathcal{L}(\Delta_o)$ sont les feuilles de Φ. Le feuilletage Φ étant invariant par Δ, ce pseudo-groupe induit par passage au quotient une famille de difféomorphismes locaux de W, soit $\tilde{\Delta}_1$. Par recollement des éléments de $\tilde{\Delta}_1$, nous obtenons un pseudo- groupe de transformations locales de W qui sera indiqué par Δ_1 ou Δ/Δ_o. Δ_1 est l'ensemble des difféomorphismes locaux de W qui coïncident localement avec des éléments de $\tilde{\Delta}_1$. De même, puisque $\mathfrak{L}(\Delta_o)$ est normal dans $\mathfrak{L}(\Delta)$ (ou encore puisque $[\xi, \mathfrak{L}(\Delta)] = 0$), tous les éléments de $\mathfrak{L}(\Delta)$ sont des germes q- projetables et induisent un faisceau de germes de champs de vecteurs de W que nous indiquons par $\mathfrak{L}(\Delta)/\mathfrak{L}(\Delta_o)$. Nous voulons montrer que Δ_1 est un pseudo- groupe de Lie régulier transitif du premier ordre, que $\mathfrak{L}(\Delta)/\mathfrak{L}(\Delta_o)$ est une pseudo-algèbre de Lie transitive du premier ordre et que $\mathfrak{L}(\Delta_1) = \mathfrak{L}(\Delta)/\mathfrak{L}(\Delta_o)$.

PROPOSITION 6. 1. *Δ_1 est le pseudo- groupe des difféomorphismes locaux de W qui préservent ω. $\mathfrak{L}(\Delta)/\mathfrak{L}(\Delta_o)$ est le faisceau des germes de champs de vecteurs locaux de W qui préservent ω. En particulier $\mathfrak{L}(\Delta)/\mathfrak{L}(\Delta_o) = \mathfrak{L}(\Delta_1)$.*

En appliquant le corollaire 2 de la proposition 3. 2 au couple (W, ω), on trouve les corollaires suivants :

COROLLAIRE 1. *Δ_1 est un pseudo- groupe de Lie transitif régulier du premier ordre et $\mathfrak{L}(\Delta)/\mathfrak{L}(\Delta_o)$ est une pseudo- algèbre de Lie transitive du premier ordre.*

COROLLAIRE 2. *Δ_1 est un pseudo- groupe simple.*

Pour démontrer la proposition, introduisons le lemme suivant qui nous sera aussi utile plus tard.

LEMME. *Soit $(U; y^2, \ldots, y^n)$ un système de coordonnées locales ω- admissible défini au voisinage de $y \in W$. Soit $x \in V$ avec $y = q(x)$. Il existe un système de coordonnées locales Ω- admissible $(U; x^1, \ldots, x^n)$ défini au voisinage de x tel que*

$$\xi \mid \mathfrak{U} = \frac{\partial}{\partial x^1} \quad et \quad x^i = q^* y^i, \ 2 \leq i \leq n.$$

DEMONSTRATION. Posons $x^i = q^* y^i$, $2 \leq i \leq n$. On a, dans U, $\omega = dy^2 \wedge \ldots \wedge dy^n$ et par conséquent

$$\sigma = q^* \omega = dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Soit x^1 une fonction définie au voisinage de x telle que $\xi x^1 = 1$. On a

$$\Omega = (\xi x^1)\Omega = dx^1 \wedge \sigma = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n .$$

Si $\mathfrak{U}$ est un voisinage ouvert de x suffisamment petit, alors $(\mathfrak{U}; x^1, \ldots, x^n)$ est un système de coordonnées locales de V. La dernière relation montre qu'il est Ω- admissible. De plus $\xi | \mathfrak{U} = \frac{\partial}{\partial x^1}$, car $\xi x^i = 0$, $i > 1$.

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Si $\varphi \in \Delta$, φ est localement projetable dans W et nous pouvons supposer que φ est en fait projetable. Mais alors $q \circ \varphi = \psi \circ q$, où ψ est la projection de φ. Or

$$q^* \psi^* \omega = \varphi^* q^* \omega = \varphi^* \sigma = \sigma$$

et par conséquent $\psi^* \omega = \omega$. Soit maintenant ψ un difféomorphisme local qui préserve ω, $y_1 \in \alpha(\psi)$ et $y_2 = \psi(y_1)$. Prenons les cartes ω-admissibles $(U; y^2, \ldots, y^n)$ au voisinage de y_1 et $(\overline{U}; z^2, \ldots, z^n)$ au voisinage de y_2. ψ se lit dans ces cartes suivant $z^i = \psi^i(y^j)$. Prenons deux points $x_1, x_2 \in V$ qui se projettent sur y_1, y_2 respectivement et soient $(U; x^1, \ldots, x^n)$ et $(\overline{U}; w^1, \ldots, w^n)$ des cartes de V comme celles du lemme. En prenant la transformation locale φ de V qui se lit

$$w^1 = x^1 + \varphi^1(x^2, \ldots, x^n), \quad w^i = \psi^i(x^2, \ldots, x^n), i > 1,$$

on voit que $\varphi \in \Delta$ et sa projection coïncide avec ψ dans un voisinage de y_1. Comme y_1 est générique, $\psi \in \Delta_1$. On a ainsi démontré que

$$\Delta_1 = \{ \varphi | \varphi^* \omega = \omega \} .$$

De façon analogue on démontre que $\mathfrak{L}(\Delta)/\mathfrak{L}(\Delta_0) = \{ X \mid \theta(X)\omega = 0 \}$.

CHAPITRE II

PROBLEME D'EQUIVALENCE DE CHAMPS UNIMODULAIRES
METHODE D'INTEGRATION DE LIE

7. Les systèmes automorphes A et A.

Soit (V, Ω) une variété munie d'une forme volume et ζ, ξ deux champs unimodulaires. Nous supposerons que ζ et ξ sont partout non singuliers et que le feuilletage Φ associé à ξ est simple (cf. les hypothèses à la page 10). Nous nous proposons dans ce chapitre d'étudier, par la méthode de Lie, le système différentiel dont les solutions sont les difféomorphismes locaux φ de V tels que $\varphi_*(\zeta) = \xi$ et $\varphi^* \Omega = \Omega$. Posons

$$A = \{ X \in \Pi^1 V \mid X_* \zeta_{\alpha(X)} = \xi_{\beta(X)},\ X^* \Omega = \Omega \} .$$

En se ramenant à des cartes distinguées par rapport auxquelles ζ et ξ sont des translations infinitésimales, on voit facilement que A est une sous- variété fermée régulièrement plongée de $\Pi^1 V$ et que les projections α, β et $\alpha \times \beta$ restreintes à A sont des surjections régulières. On voit aussi que A est intégrable (i. e. tout $X \in A$ est le jet d'une solution). L'ensemble des solutions de A est l'ensemble des éléments de Γ qui rendent localement équivalents ζ et ξ.

LEMME 1. *Deux quelconques des conditions suivantes entraînent la troisième, où $X \in J^1 V$:*

I- $X_* \zeta = \xi$.

II- $X^* \Omega = \Omega$.

III- $X^* \sigma = i(\zeta)\Omega$.

DEMONSTRATION. Voir celle de 5. 6.

Considérons maintenant la variété $\Pi^1(V, W)$ des jets surjectifs de V dans W. Le diagramme suivant est commutatif les morphismes étant des surjections régulières :

$$\begin{tikzcd} & \Pi^1 V \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\tilde{q}"] & V \arrow[d, "q"] \\ V & \Pi^1(V, W) \arrow[l, "\alpha"] \arrow[r, "\beta"] & W \end{tikzcd}$$

où $\tilde{q}(X) = (j_x^1 q) . X$, $x = \beta(X)$. Posons $\tilde{A} = \tilde{q}(A)$.

LEMME 2. *Soit* $Y \in \Pi^1(V, W)$ *tel que* $Y^* \omega = i(\zeta)\Omega$. *Alors* $Y_*(\zeta) = 0$.

DEMONSTRATION. Soit $v = Y_*(\zeta)$. $Y^* \omega = i(\zeta)\Omega$ implique $Y^*(i(v)\omega) = i(\zeta) Y^* \omega = 0$. Y^* étant injectif, on trouve $i(v)\omega = 0$ et par conséquent $v = 0$.

PROPOSITION 7. 1. $\tilde{A} = \{ Y \in \Pi^1(V, W) \mid Y^* \omega = i(\zeta)\Omega \}$.

DEMONSTRATION. Si $Y \in \tilde{A}$, il est évident (lemme 1) que $Y^* \omega = i(\zeta)\Omega$. Prenons maintenant un $Y \in \Pi^1(V, W)$ tel que $Y^* \omega = i(\zeta)\Omega$. Soit $y \in V$ tel que $q(y) = \beta(Y)$ et posons $x = \alpha(Y)$. Remarquons que $T_{\beta(Y)} W \simeq T_y V / [\xi_y]$ et que Y_* se factorise en une application linéaire définie sur $T_x V / [\zeta_x]$ (lemme 2). Par conséquent nous pouvons trouver une application linéaire $X_* \in L(T_x V, T_y V)$ telle que $X_*(\zeta_x) = \xi_y$ et $q_* \circ X_* = Y_*$. Mais alors

$$X^* \sigma = X^* q^* \omega = Y^* \omega = i(\zeta)\Omega$$

et par conséquent (lemme 1) $X^* \Omega = \Omega$. Ceci montre que

$$X \in A \quad \text{et} \quad Y = \tilde{q}(X) \in \tilde{A} .$$

Il résulte de la proposition 7. 1 que $\tilde{A}$ est une sous- variété fermée régulièrement plongée de $\Pi^1(V, W)$ et que les projections α, β et $\alpha \times \beta$ restreintes à $\tilde{A}$ sont des surjections régulières. Puisque A est intégrable, il en est de même de $\tilde{A}$ et toute solution de 4 induit une solution de $\tilde{A}$. Les solutions de $\tilde{A}$ sont les submersions locales qui rendent équivalents ω et $i(\zeta)\Omega$.

Pour tout $Y \in \tilde{A}$, posons $A_Y = \{ X \in A \mid \tilde{q}(X) = Y \}$.

PROPOSITION 7. 2. *Soit $X \in A_Y$, X arbitraire. Alors*

$$A_Y = (J^1_y \Delta_o) . X, \quad \text{où } y = \beta(X).$$

DEMONSTRATION. $\tilde{q}(J^1_y \Delta_o . X) = \{Y\}$, car, si $Z \in J^1_y \Delta_o$, alors $\alpha(Z) \sim \beta(Z) \bmod \Phi$ et $Z = Id$ (cf. page 12), donc

$$j^1_z q . Z . X = j^1_y q . X = Y \quad \text{où } z = \beta(Z).$$

Comme $J^1_y \Delta_o . X \subset A$, on trouve que $J^1_y \Delta_o . X \subset A_Y$. Soit maintenant $\overline{X} \in A_Y$, et posons $Z = \overline{X} . X^{-1}$. Alors $Z_*(\xi) = \xi$, car $X_*(\zeta) = \xi$ et $\overline{X}_*(\zeta) = \xi$. Comme $\tilde{q}(X) = \tilde{q}(\overline{X}) = Y$, on a $\alpha(Z) \sim \beta(Z) \bmod \Phi$ et $j^1_x q . Z = j^1_y q$, où $x = \beta(Z)$, c'est- à- dire $\tilde{Z} = Id$. Mais alors $Z \in J^1 \Delta_o$.

PROPOSITION 7. 3. *Soit $X \in A$ arbitraire, $x = \alpha(X)$ et $y = \beta(X)$. Alors $\alpha^{-1}(x) \cap A = (J^1_y \Delta) . X$.*

DEMONSTRATION. Evident.

PROPOSITION 7. 4. *Soit $Y \in \tilde{A}$ arbitraire, $x = \alpha(Y)$, $y = \beta(Y)$. Alors $\alpha^{-1}(x) \cap \tilde{A} = (J^1_y \Delta_1) . Y$.*

DEMONSTRATION. Si $Z \in J^1_y \Delta_1$ alors

$$(Z . Y)^* \omega = Y^*(Z^* \omega) = Y^* \omega = i(\zeta)\Omega,$$

donc $(Z.Y) \in \alpha^{-1}(x) \cap \tilde{A}$. Réciproquement, soit $\overline{Y} \in \alpha^{-1}(x) \cap \tilde{A}$. Nous avons les relations $Y_*(\zeta) = \overline{Y}_*(\zeta) = 0$. Ces relations sont équivalentes à l'existence d'un $Z \in J^1 W$ tel que $\overline{Y} = Z . Y$. $\overline{Y}$ étant surjectif, il en est de même de Z donc $Z \in \Pi^1 W$. On a

$$Y^* \omega = i(\zeta)\Omega = \overline{Y}^* \omega = Y^*(Z^* \omega).$$

Comme Y^* est injectif, $Z^* \omega = \omega$ et par conséquent $Z \in J^1_y \Delta_1$.

PROPOSITION 7. 5. *Soient f, g deux solutions de $\tilde{A}$ définies dans un ouvert U. Soit $x \in U$, $y = f(x)$ et $z = g(x)$. Il existe un voisinage ouvert $\mathfrak{U}$ de x dans U et un $\gamma \in \Delta_1$ défini dans un voisinage de y tels que $g = \gamma \circ f$ dans $\mathfrak{U}$.*

DEMONSTRATION. Puisque $f_*(\zeta) = 0$ en tout point, on voit que f est constant sur les lignes de courant de ζ. De même g est constant sur ces lignes de courant. f_* étant surjectif, il existe un voisinage ouvert $\mathfrak{U}$ de x tel que $f(\mathfrak{U})$ soit un ouvert de W et $\mathfrak{U} \xrightarrow{f} f(\mathfrak{U})$ soit une fibration à fibres connexes. Il en résulte que chaque fibre représente une ligne de courant de $\zeta \mid \mathfrak{U}$, et par conséquent g est constant sur chaque fibre. Nous pouvons définir une application unique $\gamma : f(\mathfrak{U}) \to W$ telle que $g = \gamma \circ f$. Il suffit d'écrire $\gamma(a) = g(f^{-1}(a))$. On vérifie facilement que γ est un difféomorphisme local. Comme $j^1_a \gamma \in J^1 \Delta_1$ pour tout $a \in \alpha(\gamma)$ (cf. 7. 4), on trouve $\gamma \in \Delta_1$.

Indiquons par $\Delta^{(1)}$, $\Delta_o^{(1)}$ et $\Delta_1^{(1)}$ les prolongements de Δ et Δ_o à $\Pi^1(V)$ et de Δ_1 à $\Pi^1(V, W)$. On vérifie aussitôt que ce sont des pseudo- groupes de Lie réguliers du premier ordre dont les pseudo- algèbres sont respectivement les prolongements des pseudo- algèbres associées aux pseudo- groupes de départ, c'est- à- dire que

$$\mathfrak{L}(\Delta^{(1)}) = \mathfrak{L}(\Delta)^{(1)}, \ \mathfrak{L}(\Delta_o^{(1)}) = \mathfrak{L}(\Delta_o)^{(1)} \text{ et } \mathfrak{L}(\Delta_1^{(1)}) = \mathfrak{L}(\Delta_1)^{(1)}.$$

Indiquons par $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_o$ et $\mathfrak{D}_1$ les distributions complètement intégrables induites par $\mathfrak{L}(\Delta)^{(1)}$, $\mathfrak{L}(\Delta_o)^{(1)}$ (sur $\Pi^1(V)$) et par $\mathfrak{L}(\Delta_1)^{(1)}$ (sur $\Pi^1(V, W)$). Puisque les pseudo- groupes en question sont réguliers, il résulte que les feuilles intégrales de ces distributions sont égales aux trajectoires des pseudo- groupes prolongés. L'équation A est invariante par les pseudo- groupes $\Delta^{(1)}$ et $\Delta_o^{(1)}$, et l'équation $\tilde{A}$ est invariante par $\Delta_1^{(1)}$. Nous disons que A admet les pseudo- groupes Δ et Δ_o et $\tilde{A}$ admet le pseudo- groupe Δ_1. Remarquons au passage que Δ est le plus grand pseudo- groupe admis par l'équation A, et Δ_1 est le plus grand pseudo- groupe admis par $\tilde{A}$. De plus, les fibres de A par rapport à la projection α coïncident avec des trajectoires de $\Delta^{(1)}$ (cf. 7. 3). Nous disons que A est un système automorphe du pseudo- groupe Δ. De même $\tilde{A}$ est un système automorphe du pseudo- groupe Δ_1 (cf. 7. 4). Ce dernier système peut être appelé le résolvant associé à A par rapport à Δ_o. Nous verrons plus tard la raison d'être de cette terminologie.

Soit $f \in \Delta$ et $g \in \Delta^{(1)}$. Localement f induit un élément de Δ_1. De même localement tout $g \in \Delta^{(1)}$ coïncide avec le prolongement d'un

$f \in \Delta$. Supposons donc que f se projette sur $\varphi \in \Delta_1$ et que $g = p^1 f$. Nous voulons montrer que g se projette sur $p^1\varphi$ à l'aide de $\tilde{q}$. Nous avons $q \circ f = \varphi \circ q$, donc aussi

$$j^1_{f(x)} q \cdot j^1_x f = j^1_{q(x)} \varphi \cdot j^1_x q$$

et par suite $\tilde{q} \circ p^1 f = p^1 \varphi \circ \tilde{q}$. Ceci montre que $\Delta^{(1)}$ est un prolongement de $\Delta^{(1)}_1$. De même $\mathfrak{L}(\Delta^{(1)})$ est un prolongement de $\mathfrak{L}(\Delta^{(1)}_1)$. Les transformations finies des pseudo-groupes Δ, $\Delta^{(1)}$, Δ_1 et $\Delta^{(1)}_1$ ainsi que leurs transformations infinitésimales commutent (localement) avec les morphismes du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\Pi^1(V) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\tilde{q}"] & V \arrow[d, "q"] \\
\Pi^1(V, W) \arrow[r, "\beta"] & W
\end{tikzcd}$$

Remarquons finalement que $\Delta^{(1)}_o$ est l'ensemble des éléments de $\Delta^{(1)}$ qui se projettent par $\tilde{q}$ sur l'identité et $\mathfrak{L}(\Delta^1_o)$ est l'ensemble des éléments de $\mathfrak{L}(\Delta^{(1)})$ qui se projettent sur le germe nul. $\Delta^{(1)}_o$ et $\mathfrak{L}(\Delta^1_o)$ sont des noyaux.

8. Le système automorphe associé à A.

Dans le paragraphe précédent nous avons construit le système résolvant $\tilde{A}$, où opère le pseudo-groupe quotient $\Delta_1 = \Delta/\Delta_o$. Le passage de A à $\tilde{A}$ a pour but d'éliminer l'action de Δ_o sur A. Il faut maintenant construire une équation différentielle qui récupère l'action de Δ_o sous une forme plus commode. Cette équation ne sera pas un objet unique associé à l'équation A mais sera un objet associé à chaque solution de $\tilde{A}$. Prenons donc une solution $f : U \to W$ de $\tilde{A}$. f détermine une α-section $j^1 f : x \in U \to j^1_x f \in \tilde{A}$. Posons $A_f = A \cap \tilde{q}^{-1}(im\, j^1 f)$. D'après la proposition 7.2, A_f est une réunion de feuilles de $\mathfrak{D}_o$. Il est facile de munir A_f d'une structure différentiable (unique) qui rende la projection $A_f \xrightarrow{\tilde{q}} im\, j^1 f$ une surjection régulière et qui induise sur chaque feuille de $\mathfrak{D}_o$ sa structure différentiable (car le feuilletage associé à $\mathfrak{D}_o$ est simple). En fait A_f sera régulièrement plongée. Ceci étant, les projections α et β sont des submersions, $\alpha(A_f) = U$ et $\beta(A_f) = q^{-1}(f(U))$. A_f admet le pseudogroupe Δ_o, et de plus A_f est automorphe par rapport à Δ_o (cf. 8.3). Appelons A_f le système automorphe associé au couple (A, f).

PROPOSITION 8.1. *Toute solution φ de A_f est une solution de A et $q \circ \varphi = f \mid \alpha(\varphi)$.*

PROPOSITION 8.2. *A_f est intégrable.*

PROPOSITION 8.3. *Soient φ, ψ deux solutions de A_f telles que*

$$\alpha(\varphi) \cap \alpha(\psi) = U \neq \emptyset.$$

Pour tout $x \in U$, il existe un élément $\gamma \in \Delta_o$ tel que $\psi = \gamma \circ \varphi$ au voisinage de x.

COROLLAIRE. *Toute solution f de $\tilde{A}$ se relève localement en une solution φ de A. Si $x \in \alpha(f)$, alors $j^1_x \varphi$ peut être choisi arbitrairement dans $A \cap \tilde{q}^{-1}(j^1_x f)$. Soit μ un germe de solution de A. Tout germe de solution ν de A tel que $q \circ \nu = q \circ \mu$ (i. e. ν et μ induisent le même germe de solution de $\tilde{A}$) s'écrit $\nu = \gamma \circ \mu$, où γ est un germe d'élément de Δ_o.*

La proposition 8.1 est évidente. 8.2 sera démontrée dans le paragraphe 10. Démontrons à présent 8.3.

Les éléments de A étant des jets inversibles, nous pouvons supposer que $\varphi : U \to U'$ et $\psi : U \to U''$ sont des difféomorphismes locaux. Prenons $\gamma = \psi \circ \varphi^{-1} : U' \to U''$. Pour tout $y \in U'$, $j^1_y \gamma \in J^1 \Delta_o$ (cf. 8.2) et par conséquent $\gamma \in \Delta_o$.

Les trois propositions précédentes montrent que l'intégration de A se ramène à l'intégration de l'équation résolvante $\tilde{A}$ suivie de l'intégration des équations automorphes A_f associées aux solutions de $\tilde{A}$.

L'équation $\tilde{A}$ n'est plus susceptible de réduction au sens où nous l'avons fait pour A, car Δ_1 est un pseudo-groupe simple. D'autre part nous pourrions procèder à une nouvelle réduction pour l'équation A_f, en choisissant un sous-pseudo-groupe normal de Δ_o (car Δ_o n'est pas simple). Pourtant l'équation A_f est suffisamment simple pour pouvoir l'intégrer sans réductions supplémentaires. De plus de telles réductions seraient presque triviales et sans intérêt dans le contexte présent.

Nous pouvons voir à présent en quoi consiste la méthode de Lie. Nous partons d'une équation où opère un pseudo-groupe et, à l'aide d'un sous-pseudo-groupe normal, nous réduisons le problème d'intégration initial à un problème équivalent constitué par deux équations, une admettant le sous-pseudo-groupe et l'autre le pseudo-groupe quotient. Notre exemple indique les traits d'une méthode générale qui consisterait à effectuer des réductions successives de sorte à trouver des équations les plus simples possible ou, de façon précise, des équations qui admettent des pseudo-groupes simples. Remarquons que le caractère automorphe est préservé par les réductions. L'avantage des équations automorphes tient à la propriété suivante (démontrée pour les systèmes A, $\tilde{A}$ et A_f) : si μ et ν sont des germes de solutions avec $\alpha(\mu) = \alpha(\nu)$, alors $\nu = \gamma \circ \mu$, où γ est le germe d'un élément du pseudo-groupe. Pour trouver tous les germes de solutions d'un système automorphe issus d'un point x, il suffit d'en trouver un.

La méthode devrait s'appliquer aussi à des équations non automorphes. Dans ce cas une première réduction, à l'aide du pseudo-groupe tout entier, fournirait un système résolvant où n'opère plus de pseudo-groupe et un système automorphe associé qui admettrait le pseudo-groupe initial. On trouve ainsi un système automorphe auquel nous appliquons les réductions successives. On s'aperçoit facilement des problèmes que pose une telle théorie générale. A côté du problème de passage au quotient, il se présente le problème plus compliqué d'existence de suites finies de Jordan-Hölder.

Les deux derniers paragraphes étudient l'intégration des équations $\tilde{A}$ et A_f. Nous retrouvons des méthodes d'intégration classiques.

9. Intégration de l'équation $\tilde{A}$.

Les solutions de $\tilde{A}$ sont toutes les submersions locales u de V dans W telles que $u^*\omega = i(\zeta)\Omega$. Comme $\zeta = \#^{-1} i(\zeta)\Omega$, les solutions de $\tilde{A}$ sont aussi toutes les submersions locales u telles que $\#^{-1}u^*\omega = \zeta$. Nous avons déjà remarqué que toute solution de $\tilde{A}$ est constante sur les lignes de courant de ζ. Prenons une carte ω- admissible $(\mathfrak{U}; y^2, \ldots, y^n)$ et fixons l'attention sur les solutions u dont l'image est contenue dans $\mathfrak{U}$. Posons $u^\lambda = y^\lambda \circ u$. Alors la famille (u^λ) est un système complet d' intégrales premières de ζ. Ceci montre que les solutions de $\tilde{A}$ dont l'image est dans $\mathfrak{U}$ représentent une classe particulière de systèmes complets d'intégrales premières de ζ, à savoir les systèmes $u = (u^\lambda)$ tels que $i(\zeta)\Omega = du^2 \wedge \ldots \wedge du^n$ ou, de façon équivalente (cf. §2), tels que $\zeta_u = \zeta$. Pour trouver toutes les solutions de $\tilde{A}$, il suffit d'en trouver une au voisinage de chaque point de V. Or soit $a \in V$ et prenons $n-2$ intégrales premières arbitraires et indépendantes $\{u^3, \ldots, u^n\}$ définies au voisinage de a. Il faut déterminer u^2 au voisinage de a de sorte que $i(\zeta)\Omega = du^2 \wedge du^3 \wedge \ldots \wedge du^n$. Il est évident que u^2 sera déterminé à une fonction de $\{u^3, \ldots, u^n\}$ près. Complètons u^λ, $\lambda \geq 3$ en un système de coordonnées (pas nécessairement admissible) $\{x, y, u^3, \ldots, u^n\}$ au voisinage de x. Alors

$$\Omega = f dx \wedge dy \wedge du^3 \wedge \ldots \wedge du^n .$$

Comme $i(\zeta)du^\lambda = 0$, $\lambda \geq 3$, on a

$$i(\zeta)\Omega = f(i(\zeta)dx \wedge dy) \wedge du^3 \wedge \ldots \wedge du^n .$$

Sur chaque plan $P(c^\lambda) = \{p \mid u^\lambda(p) = c^\lambda,\ \lambda \geq 3\}$, où les c^λ sont des constantes, posons

$$\Lambda(c^\lambda) = f(x, y, c^\lambda)\, i(\zeta)dx \wedge dy,$$

Comme $i(\zeta)\Omega$ est fermée, on voit facilement que $\Lambda(c^\lambda)$ est aussi fermée dans chaque $P(c^\lambda)$.En intégrant dans chaque plan cette forme fermée à partir d'une section transverse différentiable donnée, nous obtenons une fonction u^2 définie au voisinage de x telle que

$$du^2 \equiv f i(\zeta)dx \wedge dy \ mod\{du^3, \ldots, du^n\} ,$$

c'est-à-dire $i(\zeta)\Omega = du^2 \wedge du^3 \wedge \ldots \wedge du^n$. Evidemment u^2 est une intégrale première et répond au problème. Pour trouver u^2 nous pourrions aussi procèder de façon équivalente en partant de la condition $\zeta = \zeta_u$ et en appliquant le corollaire 2 de la proposition 2.4.

L'équation $\tilde{A}$ nous fournit une méthode réduite pour intégrer l'équation $\zeta f = 0$ avec ζ unimodulaire. Il faut déterminer $n-2$ intégrales premières indépendantes et la dernière se calcule à partir de celles-ci par une quadrature. La théorie développée dans ce chapitre nous montre que c'est la meilleure réduction possible, car l'équation $\tilde{A}$ n'est plus susceptible de réduction puisque Δ_1 est simple. C'est là un autre aspect intéressant de la méthode de Lie qui non seulement fournit une méthode d'intégration mais en fait la meilleure méthode possible. Par exemple si, au lieu du pseudo-groupe unimodulaire Γ, nous avions pris le pseudo-groupe conforme $\{ \varphi | \varphi^* \Omega = c\Omega \}$, où c est une fonction localement constante (arbitraire), dans ce cas $\tilde{A} = \{ X \in \Pi^1(V, W) \mid X_*(\zeta_{\alpha(X)}) = 0 \}$ et $\tilde{A}$ est automorphe pour le pseudo-groupe de tous les difféomorphismes locaux de W qui est un pseudo-groupe simple. Les solutions de $\tilde{A}$ sont toutes les submersions locales u telles que $u^*(\zeta) = 0$ et par conséquent représentent tous les systèmes complets d'intégrales premières de ζ. Aucune réduction n'est possible dans l'intégration de $\zeta f = 0$, ζ conforme.

La méthode classique du multiplicateur de Jacobi pour une équation $\xi f = 0$, ξ quelconque, consiste simplement à chercher un multiplicateur de ξ, c'est-à-dire une fonction μ telle que $\mu\xi$ soit unimodulaire. Un tel multiplicateur étant connu, l'intégration de $\xi f = 0$ se réduit à $(\mu\xi) f = 0$ et on retrouve le système $\tilde{A}$.

10. Intégration de l'équation A_f.

Prenons une solution f de $\tilde{A}$ définie dans un ouvert U et cherchons à écrire les équations qui définissent A_f:

$$A_f = \{ X \in \Pi^1 V \mid X^* \Omega = \Omega,\ X_* \zeta_{\alpha(X)} = \xi_{\beta(X)},\ \tilde{q}(X) = j^1_{\alpha(X)} f \} .$$

Or $\tilde{q}(X) \in \tilde{A}$ donc

$$i(\zeta)\Omega = \tilde{q}(X)^* \omega = X^* q^* \omega = X^* \sigma .$$

En vertu du lemme 1 de la proposition 7.1 la définition de A_f se réduit à l'une quelconque des deux formes suivantes :

$(*)\qquad A_f = \{ X \in \Pi^1 V \mid \tilde{q}(X) = j^1_{\alpha(X)} f , X^*\Omega = \Omega \}$,

$(**)\qquad A_f = \{ X \in \Pi^1 V \mid \tilde{q}(X) = j^1_{\alpha(X)} f , X_* \zeta_{\alpha(X)} = \xi_{\beta(X)} \}$.

Soit maintenant $(\mathfrak{U}; y^2, \ldots, y^n)$ un système de coordonnées ω-admissible. Posons $z^\lambda = q^* y^\lambda$, $\lambda \geq 2$. A l'aide de la relation $(\xi f).\Omega = = df \wedge \sigma$, on voit que $(\mathfrak{V}; z^1, z^2, \ldots, z^n)$ est un système de coordonnées Ω- admissibles si et seulement si $\xi z^1 = 1$, c'est-à-dire $\xi = \dfrac{\partial}{\partial z^1}$.

Supposons maintenant $f(U) \subset \mathfrak{U}$ et prenons un système Ω- admissible $(\mathfrak{V}; z)$ comme ci-dessus. Soit φ une application locale avec $\alpha(\varphi) \subset U$ et $\beta(\varphi) \subset \mathfrak{V}$. Posons $\varphi^\lambda = z^\lambda \circ \varphi$. Pour que φ soit une solution de A_f il faut et il suffit d'après $(*)$ que

a) $q \circ \varphi = f \mid \alpha(\varphi)$, i e. $\varphi^\lambda = f^\lambda$, $\lambda \geq 2$;

b) $d\varphi^1 \wedge df^2 \wedge \ldots \wedge df^n = \Omega$.

Mais

$$d\varphi^1 \wedge df^2 \wedge \ldots \wedge df^n = d\varphi^1 \wedge i(\zeta)\Omega = (\zeta \varphi^1)\Omega$$

et par conséquent b) est équivalent à $\zeta \varphi^1 = 1$. φ^1 (et par conséquent φ) s'obtient par une quadrature. Puisque $\zeta f^\lambda = 0$, on trouve pour les solutions φ de A_f des conditions équivalentes

a') $q \circ \varphi = f \mid \alpha(\varphi)$,

b') $\varphi_*(\zeta) = \dfrac{\partial}{\partial z^1}$,

qui ne sont autres que $(**)$. Nous retrouvons ici la présentation de Lie.