TUDOR GANEA

Sur quelques invariants numériques du type d'homotopie

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 9, nº 2 (1967), p. 181-241

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1967__9_2_181_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE *IX*
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

SUR QUELQUES INVARIANTS NUMERIQUES DU TYPE D'HOMOTOPIE[*)]

par Tudor GANEA

INTRODUCTION.

Le but de ce travail est de présenter un ensemble de résultats concernant la catégorie, au sens de L. Lusternik et L. Schnirelmann, et certains autres invariants qui s'y rattachent.

La catégorie d'un espace topologique arbitraire X, désignée par $cat\, X$, est le plus petit des entiers $k \geqq 0$ pour lesquels il existe des ouverts U_i contractibles dans X et tels que $X = U_0 \cup U_1 \cup \ldots \cup U_k$; si de tels entiers n'existent pas, on pose $cat\, X = \infty$. Sous une forme légèrement différente, i.e. en recouvrant X par k (au lieu de $k+1$) sous-ensembles fermés (au lieu d'ouverts), cette notion a été introduite en vue d'applications à la géométrie différentielle et au calcul des variations : Lusternik et Schnirelmann [1)] [26] ont, en effet, prouvé qu'une fonction réelle différentiable définie sur une variété close différentiable X a au moins $(1 + cat\, X)$ points critiques. Ce théorème est, chronologiquement, un des premiers résultats qui relient les propriétés topologiques et les propriétés différentiables des variétés. En même temps, Lusternik et Schnirelmann ont aussi prouvé quelques théorèmes généraux, purement topologiques, concernant la catégorie et, par des méthodes tout à fait particulières, ils ont calculé la catégorie de certaines variétés comme le tore et l'espace projectif à n dimensions. En 1941, R.H. Fox [13] a entrepris une étude systématique de la catégorie, au point de vue purement topologique, en introduisant pour tout $n \geqq 1$ la catégorie n-dimensionnelle $cat_n X$ d'un espace topologique X.

---

1) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin du travail.

*) Thèse de Doctorat d'Etat soutenue à Paris le 12 Juin 1962.

Le travail présent est divisé en trois chapitres.

Dans le premier on se préoccupe d'abord des bornes supérieures et inférieures de la catégorie en général. Il est classique que, tout au moins si X est un polyèdre, on a $cat\, X \leq dim\, X$. Ce résultat a été amélioré par Grossman [20] qui a prouvé que, si X est $(n-1)$-connexe, on a

$$cat\, X \leq dim\, X/n.$$

D'autre part, Eckmann et Hilton [11] ont prouvé que, si X est simplement connexe et n'a que k groupes d'homologie non nuls, alors $cat\, X \leq k$. On prouve ici un lemme concernant les cofibrations qui, appliqué à la filtration de X par ses squelettes, fournit une nouvelle démonstration du résultat de Grossman et qui, appliqué à la filtration de X par ses sous-polyèdres normaux [22 ; 30] fournit une généralisation du résultat de Eckmann-Hilton: si X est $(n-1)$-connexe $(n \geq 2)$ et si l'ensemble des entiers $q > 0$ tels que $H_q(X) \neq 0$ est contenu dans la réunion de k intervalles linéaires fermés, chacun de longueur $n-2$, alors $cat\, X \leq k$; en outre, si le dernier groupe d'homologie de X est libre, le dernier intervalle peut avoir la longueur $n-1$. La borne inférieure classique $\cup$-$long\, X \leq cat\, X$, où $\cup$-$long\, X$ désigne le nombre maximum de classes de cohomologie de dimension > 0 à cup produit non nul, est retrouvée comme corollaire de certains résultats du deuxième chapitre. La suite du premier chapitre est consacrée à l'étude de l'influence du groupe fondamental sur la catégorie. Soient X et Y deux espaces et $f_1 : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ un homomorphisme du groupe fondamental de X dans celui de Y; selon un théorème classique dû à Hurewicz [25], si $dim\, X \leq n$ et si $\pi_i(Y) = 0$ pour $2 \leq i \leq n-1$, il existe une application continue $f : X \to Y$ qui induit l'homomorphisme f_1. Nous prouvons que, dans cet énoncé, on peut remplacer la condition $dim\, X \leq n$ par la condition $cat_1 X \leq n$, où $cat_1 X$ désigne la catégorie 1-dimensionnelle au sens de Fox [13], et que, en un certain sens, on obtient ainsi le meilleur résultat possible. Il est à remarquer que la dimension d'un espace n'est pas un invariant de son type d'homotopie alors que sa catégorie 1-dimensionnelle en est un. Cette version purement homotopique du théorème de Hurewicz a permis à Eilenberg et à l'auteur [12] de déterminer la catégorie d'un espace asphérique en fonction de son groupe fondamental. On expose ces résultats à la fin du premier chapitre et l'on en dérive la conséquence suivante : si X est une variété close de dimension n telle que $\pi_1(X) \neq 0$ pour $2 \leq i \leq n-1$, alors $cat\, X = n$. Ce dernier résultat contient comme cas particulier tous les calculs de catégorie des variétés effectués par Lusternik et Schnirelmann.

G.W. Whitehead a remarqué le premier la relation qui existe entre la catégorie d'un espace X et la classe de nilpotence de certains groupes associés de façon naturelle à X : il a prouvé [42] que la classe de nilpotence du groupe des classes d'homotopie d'applications continues de X dans le H-espace Y est $\leq cat\, X$. Ce résultat a été précisé et amélioré par I. Berstein et l'auteur dans [3]. Dans le second chapitre du présent travail on expose une série de résultats dont la plupart ont été obtenus en collaboration avec I. Berstein [3;4] et Hilton-Peterson [19]. Soit X un espace muni de point-base et soit ΩX son espace de lacets. Ce dernier est muni d'une structure de H-espace qui permet, tout comme en théorie des groupes, de définir pour tout $k \geq 1$ une application commutatorielle $\varphi_k : \Omega X \times \ldots \times \Omega X \to \Omega X$ de poids k; on définit la classe de nilpotence de ΩX et l'on désigne par $nil\, X$ le plus petit des entiers $k \geq 0$ tels que $\varphi_{k+1} \simeq 0$. Dualement, au sens de Eckmann-Hilton [10], la suspension ΣX est munie d'une structure de H'-espace qui permet la définition d'applications co-commutatorielles $\psi_k : \Sigma X \to \Sigma X \vee \ldots \vee \Sigma X$ de tout poids $k \geq 1$; on définit la classe de conilpotence de ΣX et l'on désigne par $conil\, X$ le plus petit des entiers $k \geq 0$ tels que $\psi_{k+1} \simeq 0$. Ce sont là deux nouveaux invariants numériques du type d'homotopie, dont l'introduction se trouve justifiée par les deux relations suivantes :

$$nil\, X = sup\, nil\, \pi(\Sigma Y, X) \quad \text{et} \quad conil\, X = sup\, nil\, \pi(X, \Omega Y),$$

où $\pi(A, B)$ désigne l'ensemble des classes d'homotopie basée d'applications continues $A \to B$ et est muni d'une structure de groupe si A est une suspension ou B un espace de lacets, où $nil\, \pi$ désigne la classe de nilpotence du groupe π et où Y parcourt tous les espaces topologiques.

On étudie certaines propriétés de ces deux invariants et l'on prouve, par exemple, les relations suivantes :

$$\cup\text{-}long\, X \leq conil\, X \leq cat\, X \quad \text{et} \quad W\text{-}long\, X \leq nil\, X \leq cocat\, X,$$

où $W\text{-}long\, X$ désigne le nombre maximum d'éléments des groupes d'homotopie de X à produit de Whitehead non nul et où $cocat\, X$ est la duale de la catégorie de Lusternik-Schnirelmann; remarquons que, dans le cadre de la dualité de Eckmann-Hilton, le produit de Whitehead est le dual du cup-produit. On sait que l'espace des lacets d'un espace possédant une multiplication continue avec élément neutre homotopique est homotopiquement commutatif; réciproquement, Sugawara [39] a démontré récemment que, si $\pi_q(X) = 0$ pour $q < n$ et pour $q > 3n-2$ et si ΩX est homotopiquement commutatif, alors X possède une multiplication continue avec élément neutre homotopique. Un exemple [3, § 3 ; 10] correspondant au cas $n = 2$ montre que le résultat de Sugawara est le meilleur possible. Le dual d'un espace à multiplication continue avec élément neutre homotopique étant un espace de catégorie ≤ 1, on dualise le théorème de Sugawara en prouvant que, si X est $(n-1)$-connexe, $dim\, X \leq 3n-2$ et si ΣX est homotopiquement commutative, alors $cat\, X \leq 1$. Ce dernier résultat est le cas particulier correspondant à $k = 2$ d'un théorème plus général : Si X est $(n-1)$-connexe, si $conil\, X \leq k-1$, et si $dim\, X \leq (k+1)n-2$, alors $cat\, X \leq k-1$.

Le troisième chapitre est consacré à la définition et à l'étude des propriétés de la cocatégorie, la duale au sens de Eckmann-Hilton [10] de la catégorie. Vu que l'on ignore si la notion de recouvrement ouvert admet un dual, le problème de dualiser la catégorie présente certaines difficultés. Il a été abordé simultanément par Hilton [22 ; 23] et par l'auteur [15]. Hilton définit une cocatégorie semi-simpliciale qui apparaît, plus ou moins, comme duale de la définition de la catégorie donnée par G.W. Whitehead [40] ; remarquons que l'on n'a pas encore trouvé la version semi-simpliciale de la catégorie. Notre définition, par contre, concerne directement les espaces topologiques et dérive de la notion de fibration; on pose $cocat\, X = 0$ si et seulement si X est contractible; on pose $cocat\, X \leq k+1$ si et seulement s'il existe une fibration $F \to E \to B$ telle que F domine X et $cocat\, E \leq$ $\leq k$. Cette notion est strictement duale de la notion de catégorie inductive, obtenue en remplaçant le mot fibration par cofibration et en renversant les flèches; d'autre part on prouve que, tout au moins si X a le type d'homotopie d'un CW-complexe connexe, la catégorie inductive est égale à sa catégorie. On a $cocat\, X \leq 1$ si et seulement si X est dominé par $\Omega\Sigma X$. On prouve que $cocat\, Y^X \leq min\,\{cat\, X, cocat\, Y\}$, où Y^X désigne l'espace des applications continues basées $X \to Y$. En tuant les premiers ou derniers groupes d'homotopie d'un espace X, on obtient de nouveaux espaces dont la cocatégorie ne dépasse pas celle de X. Comme il a été déjà dit, on a $W\text{-}long\, X \leq nil\, X \leq cocat\, X$. On peut parfaitement dualiser la borne supérieure de la catégorie donnée au premier chapitre : Si X est $(n-1)$-connexe $(n \geq 2)$ et si l'ensemble des entiers q tels que $\pi_q(X) \neq 0$ est contenu dans la réunion de k intervalles linéaires, fermés, chacun de longueur $n-2$, alors $cocat\, X \leq k$. Il en résulte que, pour tout $k \geq 1$, il existe un espace simplement connexe X tel que $cocat\, X = k$. La cocatégorie d'un espace asphérique est égale à la classe de nilpotence de son groupe fondamental. Finalement, on définit la cocatégorie d'une application et l'on généralise un théorème de Spanier-Whitehead [37] ainsi qu'une partie d'un théorème récent de Stasheff [38] concernant l'application canonique

$$\Sigma\Omega X \to X.$$

L'auteur désire exprimer ses très respectueux remerciements à Messieurs les Professeurs Cartan, Ehresmann et Favard pour avoir bien voulu accepter ce travail comme Thèse de Doctorat.

1. La catégorie de Lusternik-Schnirelmann.

On dit que le sous-ensemble A de l'espace X est contractile dans X s'il existe une homotopie $h : A \times I \to X$ telle que $h(a, 0) = a$ pour tout $a \in A$ et que $h(A \times 1)$ soit un point. L'espace X est localement contractile si chacun de ses points possède un voisinage contractile dans X. L'espace X est contractile, ou contractile en soi, s'il existe une homotopie $h : X \times I \to X$ telle que $h(x, 0) = x$ pour tout $x \in X$ et que

$h(X \times 1)$ soit un point.

1.1. DEFINITION. *La catégorie* $\operatorname{cat} X$ *de l'espace* X *est le plus petit des entiers* $k \geq 0$ *pour lesquels il existe des ouverts* U_i *contractiles dans* X *tels que* $X = U_o \cup U_1 \cup \ldots \cup U_k$*; si de tels entiers n'existent pas, on pose* $\operatorname{cat} X = \infty$.

La catégorie d'un espace contractile est donc égale à 0; la catégorie d'un espace compact localement contractile est toujours finie; un espace de catégorie finie est localement contractile.

L'ordre du recouvrement (U_α) de l'espace X est le plus grand des entiers $n \geq 1$, finis ou non, pour lesquels il existe au moins un point $x \in X$ tel que la relation $x \in U_\alpha$ soit vérifiée pour n valeurs de l'indice α . Le recouvrement (V_β) de X est un raffinement de (U_α) si pour tout β il existe α tel que $V_\beta \subset U_\alpha$; c'est un raffinement barycentrique si pour tout $x \in X$ il existe α tel que la réunion des V_β qui contiennent x soit contenue dans U_α. On écrit $\dim X \leq n$ (dimension au sens de Lebesgue) si tout recouvrement ouvert de X admet un raffinement d'ordre $\leq n+1$.

Le résultat suivant a été mainte fois prouvé sous des hypothèses plus restrictives :

1.2. THEOREME. *Si* X *est paracompact et localement contractile,* $\operatorname{cat} X \leq$ $\leq \dim X$.

DEMONSTRATION. D'après [9], il existe un recouvrement ouvert (V_λ) de X, plus fin qu'un recouvrement de X par des ouverts contractiles dans X, qui est à la fois localement fini et d'ordre $\leq n+1$. Il suffit à présent de lui appliquer le résultat suivant [14, Lemme 2] :

1.3. LEMME. *Soit* $\mathcal{V} = (V_\lambda)_{\lambda \in L}$ *un recouvrement ouvert, localement fini, d'ordre* $\omega\,(\leq \infty)$*, de l'espace normal* X. $\mathcal{V}$ *admet un raffinement barycentrique ouvert* $\mathcal{G}$*, d'ordre* $\leq \omega$*, et* $X = \bigcup_{j=1}^{\omega} X_j$ *avec des* X_j *ouverts à composantes contenues, chacune, dans un* V_λ.

DEMONSTRATION. Soit $(W_\lambda^1)_{\lambda \in L}$ un recouvrement ouvert de X tel que $\overline{W}_\lambda^1 \subset V_\lambda$. Pour tout $\lambda \in L$, définissons par récurrence une suite d'ouverts W_λ^n telle que

$$\overline{W}^n_\lambda \subset W^{n+1}_\lambda \subset \overline{W}^{n+1}_\lambda \subset V_\lambda \qquad (n \geq 1)$$

Soit $\mathfrak{L}$ l'ensemble des parties finies non vides J de L, et désignons par $|J|$ le nombre d'éléments de J. Evidemment, la famille $(W^n_\lambda)_{\lambda \in L}$ est localement finie pour tout $n \geq 1$, donc les ensembles

$$G_j = \bigcap_{\lambda \in J} W_\lambda{}^{|J|} - \bigcup_{\lambda \in L - J} \overline{W}_\lambda{}^{|J|} \qquad (J \in \mathfrak{L})$$

sont ouverts. Pour tout $x \in X$, soit $P(x)$ l'ensemble des entiers $j \geq 1$ tels que $x \in W^j_\lambda$ pour au moins j valeurs de λ; on a $1 \in P(x)$ car (W^1_λ) est un recouvrement de X; en outre, $P(x)$ est fini puisque $\mathfrak{V}$ est ponctuellement fini. Soit $m = max\ P(x)$; on a donc $x \in W^m_\lambda$ pour tous les λ d'un certain $J \in \mathfrak{L}$ avec $|J| = m$; si $\mu \notin J$ et $K = J \cup \{\mu\}$, donc $|K| = m+1$; la relation $x \in \overline{W}^m_\mu$ entraînerait $x \in \cap \{W^{m+1}_\lambda | \lambda \in K\}$, ce qui contredit la définition de m. Il en résulte que $x \in G_J$, ce qui prouve que $\mathfrak{G} = (G_J)_{J \in \mathfrak{L}}$ est un recouvrement de X. Soit $x \in X$ et choisissons $\mu \in L$ tel que $x \in W^1_\mu$. Si $G_J \ni x$, alors $x \notin \cup \{\overline{W}^{|J|}_\lambda \mid \lambda \notin J\}$; donc, puisque $x \in W^1_\mu \subset W^{|J|}_\mu$, on a $\mu \in J$ et $G_J \subset W^{|J|}_\mu \subset V_\mu$: ceci prouve que $\mathfrak{G}$ est en effet un raffinement barycentrique de $\mathfrak{V}$. Remarquons à présent que, si $J \neq K$ mais $|J| = |K| = n$, alors $G_J \cap G_K = \emptyset$; en effet, $x \in G_J \cap G_K$ et $\lambda \in J - K$ entraînent $x \in W^n_\lambda - \overline{W}^n_\lambda$, ce qui est absurde. Si $\omega < \infty$, on a $G_J = \emptyset$ pour $|J| > \omega$; donc, d'après la remarque précédente, la relation $x \in G_J$ n'a lieu que pour tout au plus ω parties J de $\mathfrak{L}$. Finalement, l'ensemble $X_j = \bigcup \{G_J \mid |J| = j\}$ est réunion d'ouverts G_J, disjoints deux à deux, contenus chacun dans un V_λ et $X = \bigcup_{j=1}^{\omega} X_j$.

Nous étudierons à présent quelques propriétés homotopiques de la catégorie. Rappelons que l'espace Y domine l'espace X s'il existe des applications $f: X \to Y$ et $g: Y \to X$ telles que la composition $g \circ f$ soit homotope à l'application identique de X ($g \circ f \simeq 1_X$); si, en outre,

$$f \circ g \simeq 1_Y$$

ont dit que X et Y ont le même type d'homotopie et que f, g sont des équivalences homotopiques. Si V est un ouvert contractile dans Y, $\overset{-1}{f}(V)$ est un ouvert contractile dans X donc :

1.4. PROPOSITION. *Si Y domine X, $\operatorname{cat} X \leq \operatorname{cat} Y$; si X et Y ont le même type d'homotopie, $\operatorname{cat} X = \operatorname{cat} Y$.*

Les bornes supérieures les plus pratiques pour le calcul de la catégorie semblent être données par les énoncés suivants :

1.5. THEOREME. *Soit X un CW-complexe $(p-1)$-connexe $(p \geq 2)$ tel que $H_r(X)$ soit libre et $H_q(X) = 0$ pour $q > r$. Alors $\operatorname{cat} X \leq r/p$.*

1.6. THEOREME. *Soit X un CW-complexe $(p-1)$-connexe $(p \geq 2)$ et soit E l'ensemble des entiers $q > 0$ tels que $H_q(X) \neq 0$. Si E est contenu dans la réunion de k intervalles linéaires fermés, chacun de longueur $p-2$, alors $\operatorname{cat} X \leq k$; si $H_r(X)$ est libre, où $r = \max E$, le dernier intervalle peut avoir la longueur $p-1$.*

Le premier de ces énoncés est essentiellement dû à Grossman [20] . Le second [17] généralise un résultat de Eckmann-Hilton [11] concernant le cas $p = 2$. Aucun de ces énoncés n'est un cas particulier de l'autre; cependant, les deux résultent en appliquant le même lemme à deux filtrations différentes du complexe X. En outre, comme il a été fait dans [17] , on pourrait remplacer le symbole $\operatorname{cat} X$ par $\operatorname{Cat} X$, où $\operatorname{Cat} X \leq k$ signifie que X a le type d'homotopie d'un CW-complexe simplicial qui est réunion de $k+1$ sous-complexes self-contractiles; évidemment, $\operatorname{cat} X \leq \operatorname{Cat} X$. Le théorème 1.5 ainsi amélioré généralise la proposition 1.9 qui suit, et l'amélioration n'est pas purement formelle : $\operatorname{cat} X \leq 1$ si et seulement si X est dominé par une suspension, $\operatorname{Cat} X \leq 1$ si et seulement si X a le type d'homotopie d'une suspension, et Berstein-Hilton [5] ont exhibé un complexe fini X qui n'est homotopiquement équivalent à aucune suspension bien que $\operatorname{cat} X = 1$.

Afin de démontrer les énoncés 1.5 et 1.6, soient K et A deux espaces et $h : K \to A$ une application. On désigne par $K \xrightarrow{\varepsilon} CK \xrightarrow{\sigma} SK$ la suite obtenue en plongeant grâce à l'inclusion ε l'espace K comme base dans le cône CK et en identifiant ensuite grâce à l'application canonique σ cette base à un point afin d'obtenir la suspension SK. Le cône C_h de l'application h résulte du «mapping-cylindre» Z de h en identifiant le sous-ensemble K de Z à un point; on a la suite $A \xrightarrow{\theta} C_h \xrightarrow{\tau} SK$ dans laquelle θ plonge A de façon évidente dans C_h et τ identifie à un point le sous-ensemble A de C_h. Il est géométriquement évident que

1.7. PROPOSITION. $cat\, C_h \leq 1 + cat\, A$.

Pour la catégorie (au sens d'Eilenberg-Mac Lane!) des espaces à points-base, le lemme suivant a été obtenu indépendamment par Hilton [24] et l'auteur [17].

1.8. LEMME. *Soit (X, A) une CW-paire avec l'inclusion $\alpha : A \to X$, et soient P et $\eta : X \to P$ l'espace quotient et l'application canonique obtenus en identifiant à un point le sous-ensemble A de X. Supposons que A soit $(m-1)$-connexe $(m \geq 2)$, que P soit $(n-1)$-connexe $(n \geq 2)$, que $H_{n+m-1}(P)$ soit libre et que $H_q(P) = 0$ si $q \geq n+m$. S'il existe un CW-complexe K et une équivalence homotopique $f : SK \to P$, alors il existe une application $h : K \to A$ et deux équivalences homotopiques g et f_1, avec $f_1 \simeq f$, telles que le diagramme*

$$
(1) \qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] & X \arrow[r, "\eta"] & P \\
A \arrow[u, "1_A"] \arrow[r, "\theta"] & C_h \arrow[u, "g"] \arrow[r, "\tau"] & SK \arrow[u, "f_1"']
\end{tikzcd}
$$

soit commutatif.

DEMONSTRATION. Introduisons le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "i"] & X \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, shift right, "j"'] & P \arrow[d] \\
F \arrow[r, "e"] & Y \arrow[r, "p"] \arrow[u, shift right, "r"'] & P \\
K \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\varepsilon"] & CK \arrow[u, "\psi"] \arrow[r, "\sigma"] & SK \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

où $Y = \{(x, \lambda) \mid \eta(x) = \lambda(0)\} \subset X \times P^I$, $r(x, \lambda) = x$, $j(x) = (x, \lambda_x)$ avec $\lambda_x(t) = \eta(x)$ pour tout $t \in I$, $p = p_o$ avec $p_t(x, \lambda) = \lambda(1-t)$,

$F = p^{-1}(*)$ avec $* = \eta \circ \alpha(A)$, et où e est l'inclusion. On a $r \circ j = 1_X$ et $j \circ v \simeq 1_Y$. En outre, $p_t \circ j = \eta$, $p_1 = \eta \circ r$, et la seconde ligne est une fibration. En remplaçant s'il le faut f par une autre application qui lui soit homotope, et puisque P est connexe par arcs, on peut admettre que $f \circ \sigma \circ \varepsilon(K) = *$. Puisque CK est contractile, l'application $f \circ \sigma$ est homotope à une application constante et la propriété de relèvement des homotopies fournit une application ψ telle que $p \circ \psi = f \circ \sigma$. Soient i et φ les applications induites par j et ψ respectivement.

Dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\pi_{q+1}(X) \arrow[r] \arrow[dd, "j_{q+1}"] & \pi_{q+1}(X,A) \arrow[r] \arrow[dd, "j'_{q+1}"] & \pi_q(A) \arrow[r] \arrow[dd, "i_q"] & \pi_q(X) \arrow[r] \arrow[dd, "j_q"] & \pi_q(X,A) \arrow[dr, "\eta'_q"] \arrow[dd, "j'_q"] & \\
 & & & & & \pi_q(P) \\
\pi_{q+1}(Y) \arrow[r] & \pi_{q+1}(Y,F) \arrow[r] & \pi_q(F) \arrow[r] & \pi_q(Y) \arrow[r] & \pi_q(Y,F) \arrow[ur, "p'_q"'] &
\end{tikzcd}$$

p'_q est un isomorphisme pour tout $q \geq 1$. D'après [6, théorème II], η'_q et donc j'_q est un monomorphisme pour $q < n+m-1$ et un épimorphisme pour $q \leq n+m-1$. Il résulte du « lemme des cinq» que i_q est un monomorphisme pour $q < n+m-2$ et un épimorphisme pour $q \leq n+m-2$. Puisque i, comme j, est une inclusion on obtient

(2) $$\pi_q(F, A) = 0 \quad \text{pour } q \leq n+m-2.$$

D'autre part, $H_q(K) \approx H_{q+1}(SK) \approx H_{q+1}(P)$ donc, d'après nos hypothèses et la formule des coefficients universels,

(3) $$H^q(K; G) = 0 \quad \text{pour tout } G \text{ et } q \geq n+m-1.$$

D'après un cas particulier du théorème de Pontrjagin-Postnikov [7, § 10], que l'on peut d'ailleurs prouver en construisant comme dans [1] (sans coefficients locaux dans (3) car $\pi_1(F) = 0$!) une section dans un certain fibré, il résulte de (2) et (3) qu'il existe des applications

(4) $$h : K \to A \text{ et } \varphi_t : K \to F \text{ telles que } \varphi_0 = \varphi \text{ et } \varphi_1 = i \circ h.$$

Puisque la paire (CK, K) a la propriété d'extension des homotopies, il existe une homotopie $\psi_t : CK \to Y$ telle que $\psi_0 = \psi$ et $\psi_t \circ \varepsilon = e \circ \varphi_t$.

D'après (4) il vient

$$(5) \qquad r \circ \psi_1 \circ \varepsilon = r \circ e \circ i \circ h = r \circ j \circ \alpha \circ h = \alpha \circ h.$$

Définissons à présent une homotopie $d_t : CK \to P$ en posant

$$d_t = p_o \circ \psi_{2t} \qquad \text{si} \qquad 0 \leq 2t \leq 1,$$

$$d_t = p_{2t-1} \circ \psi_1 \qquad \text{si} \qquad 1 \leq 2t \leq 2.$$

Puisque $d_t \circ \varepsilon(K) = *$, par passage au quotient on obtient une homotopie $f_t : SK \to P$ telle que $f_t \circ \sigma = d_t$, d'où

$$(6) \qquad f_1 \circ \sigma = \eta \circ r \circ \psi_1 .$$

Puisque $\sigma(CK) = SK$ et $f_o \circ \sigma = p \circ \psi = f \circ \sigma$ il résulte que $f_o = f$, donc $f_1 \simeq f$. Interprétons C_h comme quotient de l'espace somme $CK \cup A$ obtenu en y identifiant $\varepsilon(k)$ et $h(k)$ pour tout $k \in K$. On peut alors définir une application $g : C_h \to X$ en posant $g \mid A = \alpha$ et $g \mid CK = r \circ \psi_1$; ceci est loisible d'après (5) et, d'après (6), l'application g ainsi définie rend le diagramme (1) commutatif. Evidemment, $\pi_1(X) = 0$ et, d'après [32, p. 319], on a ainsi $\pi_1(C_h) = 0$. D'après le «lemme des cinq», g induit des isomorphismes de groupes d'homologie et puisque C_h a le type d'homotopie d'un CW-complexe (choisir pour h une application cellulaire !), g est en effet une équivalence homotopique, et le lemme est démontré.

Il est facile à prouver, et bien connu si $\dim X \leq 2p-1$, que

1.9. PROPOSITION. *Si X est un CW-complexe $(p-1)$-connexe $(p \geq 2)$ tel que $H_{2p-1}(X)$ soit libre et $H_q(X) = 0$ si $q \geq 2p$, alors X a le type d'homotopie de la suspension d'un CW-complexe.*

Passons enfin à la

DEMONSTRATION DU THEOREME 1.5. On peut admettre que le squelette de dimension $p-1$ de X est réduit à un point. Si $r < p$, le résultat est trivial. Supposons donc $r \geq p$ et soit A le squelette de dimension $r-p$ de X; soit P l'espace quotient obtenu de X en identifiant A à un point. On a $\pi_q(A) = 0$ si $q < p$, $H_{r-p}(A)$ est libre, et $H_q(A) = 0$ si $q > r-p$. On peut donc admettre comme hypothèse de récurrence que $\operatorname{cat} A \leq (r-p)/p$.

En posant $n = max(p, r-p+1)$, on a $\pi_q(P) = 0$ si $q < n$, $H_{n+p-1}(P)$ est libre, et $H_q(P) = 0$ si $q \geq n+p$. Puisque $n+p-1 \leq 2n-1$, d'après la proposition 1. 9, P a le type d'homotopie de la suspension d'un CW-complexe K. D'après le lemme 1. 8 il existe une application $h : K \to A$ telle que X ait le type d'homotopie de C_h donc, d'après la proposition 1.7, on a

$$cat X = cat C_h \leq 1 + cat A \leq 1 + \frac{r-p}{p} = \frac{r}{p}.$$

DEMONSTRATION DU THEOREME 1.6. Si $k = 1$, l'énoncé résulte de la proposition 1. 9, car la suspension d'un CW- complexe est toujours de catégorie ≤ 1. Supposons donc $k \geq 2$ et soient J_i les k intervalles dont la réunion contient l'ensemble $E = \{q > 0 \mid H_q(X) \neq 0\}$. Avec $r = max E$ on peut supposer que $r \in J_k$. Soit $F = E - J_k$ et $s = max F$; on a $s \geq 2$. D'après [30] il existe un CW- complexe simplement connexe A et une application $\alpha : A \to X$ tels que $\alpha_* : H_q(A) \approx H_q(X)$ pour $q \leq s$ et $H_q(A) = 0$ pour $q > s$. Sans changer le type d'homotopie de X, on peut supposer que α est une inclusion; soit alors P l'espace quotient obtenu en identifiant à un point le sous-complexe A de X. On a $\pi_q(A) = 0$ si $q < p$ et

$$\{q > 0 \mid H_q(A) \neq 0\} = F \subset \bigcup_{i=1}^{k-1} J_i;$$

on peut donc admettre comme hypothèse de récurrence que $cat A \leq k-1$. Soit $n = min E \cap J_K$; alors $\pi_q(P) = 0$ pour $q < n$, $H_r(P) \approx H_r(X)$ et $H_q(P) = 0$ si $q > r$. Puisque $r \leq n+p-1 < 2n-1$, il résulte de la proposition 1.9 que P a le type d'homotopie de la suspension d'un CW-complexe K et, d'après le lemme 1.8, il existe une application $h : K \to A$ telle que X ait le type d'homotopie de C_h. D'après la proposition 1.7 on a donc

$$cat X = cat C_h \leq 1 + cat A \leq 1 + (k-1) = k.$$

Rappelons à présent la borne inférieure classique de la catégorie:

1.10. THEOREME. *Si $cat X = k-1$, si R est un anneau commutatif, et si $u_i \in H^*(X; R)$ avec $dim\, u_i > 0$, alors $u_1 \cup \ldots \cup u_k = 0$.*

DEMONSTRATION. Soient $U_1, \ldots, U_k$ des ouverts contractiles dans X et qui recouvrent X. Puisque U_m est contractile dans X, dans la suite

$$H^*(U_m; R) \xleftarrow{i_m^*} H^*(X; R) \xleftarrow{j_m^*} H^*(X, U_m; R)$$

on a $i_m^* = 0$ en dimensions positives, donc $u_m = j_m^*(v_m)$ pour un certain $v_m \in H^*(X, U_m; R)$. On a $v_1 \cup \ldots \cup v_k \in H^*(X, \bigcup U_m; R) = 0$, donc

$$u_1 \cup \ldots \cup u_k = j^*(v_1 \cup \ldots \cup v_k) = 0,$$

où j désigne l'inclusion $X \to (X, \bigcup U_m)$. Une autre démonstration résulte des théorèmes 2.17 et 2. 19 du deuxième chapitre.

On se propose d'étudier à présent quelques relations entre la catégorie et le groupe fondamental d'un espace. Les résultats intermédiaires que nous prouverons peuvent servir, parfois, à résoudre certains problèmes concernant les applications équivariantes d'espaces à opérateurs.

Soit $(\tilde{X}, f)$ un revêtement de l'espace X au sens de [8] : par définition $\tilde{X}$ est donc un espace connexe et localement connexe, f est une application continue de $\tilde{X}$ sur X, et tout point de X possède un voisinage U «revêtu par $(\tilde{X}, f)$», i. e. tel que chacune des composantes connexes de $\overset{-1}{f}(U)$ soit topologiquement appliquée par f sur U; il en résulte facilement que f est un homéomorphisme local, donc que X aussi est connexe et localement connexe. Désignons [14] par $cat(\tilde{X}, f)$ le plus petit des entiers $k \geq 0$ tels que X puisse être recouvert par $k+1$ ouverts à composantes revêtues par $(\tilde{X}, f)$; si de tels entiers n'existent pas, on pose $cat(\tilde{X}, f) = \infty$. D'autre part, désignons par $G(\tilde{X}, f)$ le groupe des homéomorphismes ξ de $\tilde{X}$ sur $\tilde{X}$ tels que $f \circ \xi = f$; on prouve facilement que, si ξ_1 et ξ_2 de $G(\tilde{X}, f)$ coïncident en un point, alors $\xi_1 = \xi_2$; finalement, on dit que le revêtement $(\tilde{X}, f)$ de X est régulier si pour toute paire de points $\tilde{x}_1$ et $\tilde{x}_2$ de $\tilde{X}$ telle que $f(\tilde{x}_1) = f(\tilde{x}_2)$ il existe $\xi \in G(\tilde{X}, f)$ tel que $\xi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$. Soient à présent $(\tilde{X}, f)$ et $(\tilde{Y}, g)$ des revêtements de X et Y, et soit $\varphi: X \to Y$ une application continue. On dit que φ peut être «relevée» s'il existe $\tilde{\varphi}: \tilde{X} \to \tilde{Y}$ telle que $g \circ \tilde{\varphi} = \varphi \circ f$; si $(\tilde{Y}, g)$ est régulier, tout autre relèvement de φ a la forme $\eta \circ \tilde{\varphi}$, où η parcourt $G(\tilde{Y}, g)$, et φ induit une classe d'homomorphismes $G(\tilde{X}, f) \to G(\tilde{Y}, g)$

qui diffèrent l'un de l'autre par des automorphismes intérieurs de $G(\tilde{Y}, g)$: il suffit, en effet, d'associer à tout $\xi \in G(\tilde{X}, f)$ l'élément $\eta \in G(\tilde{Y}, g)$ tel que $\eta \circ \tilde{\varphi} = \tilde{\varphi} \circ \xi$, où $\tilde{\varphi}$ est l'un des relèvements de φ.

1.11. PROPOSITION. *Soient $(\tilde{X}, f)$ et $(\tilde{Y}, g)$ des revêtements réguliers des espaces connexes, localement connexes, X et Y. Si $\varphi : X \to Y$ peut être relevée et induit un monomorphisme de $G(\tilde{X}, f)$ dans $G(\tilde{Y}, g)$, alors $cat(\tilde{X}, f) \leq cat(\tilde{Y}, g)$.*

DEMONSTRATION. Supposons que les composantes connexes de l'ouvert $V \subset Y$ soient revêtues par $(\tilde{Y}, g)$ et soit $\tilde{U}$ une composante connexe de $\overset{-1}{f}(U)$, où U est une composante connexe de $\overset{-1}{\varphi}(V)$. D'après [8, p. 42] on a $f(\tilde{U}) = U$ et f est continue et ouverte. Pour prouver que f est univalente sur $\tilde{U}$, soient $\tilde{x}_1$ et $\tilde{x}_2$ de $\tilde{U}$ tels que $f(\tilde{x}_1) = f(\tilde{x}_2)$; soit aussi $\xi \in G(\tilde{X}, f)$ tel que $\xi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$. On a $g \circ \tilde{\varphi}(\tilde{x}_1) = g \circ \tilde{\varphi}(\tilde{x}_2)$ et $\tilde{\varphi}(\tilde{U})$ est contenu dans une composante connexe $\tilde{W}$ de l'ensemble $g^{-1}(W)$, où W désigne la composante connexe de V qui contient $\varphi(U)$. Sur $\tilde{W}$ l'application g est univalente par hypothèse, donc l'élément de $G(\tilde{Y}, g)$ qui correspond à ξ est l'application identique de $\tilde{Y}$. Puisque φ induit un monomorphisme, il vient $\xi = 1$, donc $\tilde{x}_2 = \tilde{x}_1$.

Nous utiliserons plus loin la version «dimensionnelle» suivante du théorème de Hurewicz [25, p. 219] :

1.12. LEMME. *Soit K un CW-complexe simplicial connexe et Y un espace connexe, localement connexe. Soient $(\tilde{K}, f)$ et $(\tilde{Y}, g)$ des revêtements réguliers de K et Y. Si $\pi_i(\tilde{Y}) = 0$ pour $0 \leq i < \dim K$, tout homomorphisme $\Phi : G(\tilde{K}, f) \to G(\tilde{Y}, g)$ est induit par une application continue $\varphi : K \to Y$.*

DEMONSTRATION. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des paires $(H, \tilde{\varphi})$ telles que :

(i) H est un sous-complexe de K,

(ii) $\tilde{\varphi}$ est une application continue de $\overset{-1}{f}(H)$ dans $\tilde{Y}$,

(iii) la relation $\eta \circ \tilde{\varphi} = \tilde{\varphi} \circ \xi$ a lieu sur $\overset{-1}{f}(H)$ pour tout $\xi \in G(\tilde{K}, f)$ et $\eta = \Phi(\xi)$.

Posons $(H, \tilde{\varphi}) < (L, \tilde{\psi})$ si $H \subset L$ et $\tilde{\psi}$ prolonge $\tilde{\varphi}$. Soit à présent $\{(H_\lambda, \tilde{\varphi}_\lambda)\}$ une partie totalement ordonnée de $\mathfrak{F}$. Alors, $H = \cup H_\lambda$ est un sous-complexe de K et l'application $\tilde{\varphi}$, définie par $\tilde{\varphi} | \overset{-1}{f}(H_\lambda) = \tilde{\varphi}_\lambda$, vérifie la condition (iii) sur $\overset{-1}{f}(H)$. Pour prouver que $\tilde{\varphi}$ est continue sur $\overset{-1}{f}(H)$, remarquons d'abord que $\tilde{\varphi}$ est évidemment continue sur $\overset{-1}{f}(\sigma)$ pour tout simplexe fermé σ de H. Considérons ensuite une partie $\tilde{G} \subset \overset{-1}{f}(H)$ telle que $\tilde{G} \cap \overset{-1}{f}(\sigma)$ soit ouvert dans $\overset{-1}{f}(\sigma)$ pour tout σ de H. Soient $\tilde{a} \in \tilde{G}, \tilde{U}$ un voisinage ouvert de $\tilde{a}$ sur lequel f est univalente, $\tilde{W} = \tilde{U} \cap \tilde{G}$ et $W = f(\tilde{W})$. Alors, $\tilde{W} \cap \overset{-1}{f}(\sigma)$ est ouvert dans $\overset{-1}{f}(\sigma)$ et $W \cap \sigma$ l'est dans tout σ de H; vu la topologie faible de K, il en résulte que W est ouvert dans H. Puisque f est univalente sur $\tilde{U}$, on a $\tilde{W} = \tilde{U} \cap \overset{-1}{f}(W)$ ce qui prouve que $\tilde{W}$ est ouvert dans $\overset{-1}{f}(H)$, et la relation $\tilde{a} \in \tilde{W} \subset \tilde{G}$ montre que $\tilde{G}$ l'est aussi, ce qui prouve la continuité de $\tilde{\varphi}$ sur $\overset{-1}{f}(H)$. Il en résulte que $\mathfrak{F}$ est un ensemble ordonné inductif qui, d'après le lemme de Zorn, admet un élément maximal $(M, \tilde{\mu})$. Si $M \neq K$, il existe un simplexe σ de K tel que $M \cup \sigma \neq M$. Fixons une composante connexe $\tilde{\tau}$ de $\overset{-1}{f}(\sigma)$; alors, $\tilde{\tau} \cap \overset{-1}{f}(M)$ et $\tilde{\tau}$ sont homéomorphes par f à $\sigma \cap M$ et σ. Puisque $\sigma \cap M$ est un sous-complexe de σ et que $\pi_i(\tilde{Y}) = 0$ pour $0 \leq i < \dim \sigma$, la restriction de $\tilde{\mu}$ à $\tilde{\tau} \cap \overset{-1}{f}(M)$ admet un prolongement continu $\tilde{\rho}$ sur $\tilde{\tau}$. Pour toute composante $\tilde{\sigma}$ de $\overset{-1}{f}(\sigma)$ il existe $\xi \in G(\tilde{K}, f)$ unique tel que $\tilde{\sigma} = \xi(\tilde{\tau})$; soit $\eta = \Phi(\xi)$ et posons $\tilde{\gamma}(\tilde{x}) = \eta \circ \tilde{\rho} \circ \xi^{-1}(\tilde{x})$ pour tout $\tilde{x} \in \tilde{\sigma}$. L'application $\tilde{\gamma}$ ainsi définie est continue sur toute composante de $\overset{-1}{f}(\sigma)$, donc sur $\overset{-1}{f}(\sigma)$ dont les composantes sont relativement ouvertes [8, p. 40-61] car σ est localement connexe. Soit $N = M \cup \sigma$,

$$\tilde{\nu}(\tilde{x}) = \tilde{\mu}(\tilde{x}) \text{ si } \tilde{x} \in \overset{-1}{f}(M) \text{ et } \tilde{\nu}(\tilde{x}) = \tilde{\gamma}(\tilde{x}) \text{ si } \tilde{x} \in \overset{-1}{f}(\sigma);$$

alors $(N, \tilde{\nu}) \in \mathfrak{F}$ et $(N, \tilde{\nu}) \gneq (M, \tilde{\mu})$ ce qui contredit la maximalité de $(M, \tilde{\mu})$. Puisque $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ (prendre $(\sigma, \tilde{\gamma}) \in \mathfrak{F}$ avec $\tilde{\rho}$ constante), on a $M = K$ et il ne reste qu'à poser $\varphi = g \circ \tilde{\mu} \circ \overset{-1}{f}$.

A présent, soit X un espace connexe et localement connexe, et soit $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recouvrement de X tel que U_α soit ouvert, non vide, et connexe pour tout $\alpha \in A$. Le nerf N de (U_α) est le complexe simplicial dont A est l'ensemble des sommets et dont les n-simplexes sont constitués par les parties finies $(\alpha_o, \ldots, \alpha_n) \subset A$ telles que $\cap U_{\alpha_i} \neq \emptyset$; nous munirons N de la topologie faible et remarquerons que N est connexe et localement connexe. L'étoile $St\alpha$ d'un sommet α est la réunion des simplexes ouverts qui ont α pour sommet. On appelle canonique toute application $\varphi : X \to N$ telle que $\overset{-1}{\varphi}(St\alpha) \subset U_\alpha$ pour tout $\alpha \in A$; si X est paracompact, il existe des applications canoniques et deux quelconques sont homotopes [9; voir aussi C.H. Dowker, Amer. J. Math. 74 (1952) 555-577]; cependant, dans l'énoncé qui suit on ne suppose pas que X soit paracompact.

1.13. LEMME. *Si $(\tilde{X}, f)$ est un revêtement régulier de X tel que $U_\alpha \cup U_\beta$ soit revêtu par $(\tilde{X}, f)$ dès que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ alors N admet un revêtement régulier $(\tilde{N}, g)$ tel que :*

(i) il existe un isomorphisme $\Phi : G(\tilde{X}, f) \approx G(\tilde{N}, g)$;

(ii) toute application canonique $\varphi : X \to N$ se laisse relever à une application $\tilde{\varphi} : \tilde{X} \to \tilde{N}$ et induit Φ.

DEMONSTRATION. Pour tout $\alpha \in A$, soit $(U_\alpha^\lambda)_{\lambda \in L}$ la famille des composantes connexes de $\overset{-1}{f}(U_\alpha)$ indexée de façon que $U_\alpha^\lambda \cap U_\alpha^\mu = \emptyset$ si $\lambda \neq \mu$. Puisque le nombre cardinal des composantes de $\overset{-1}{f}(U_\alpha)$ est le même pour tout $\alpha \in A$ (c'est le nombre de feuillets de $(\tilde{X}, f)$!), on peut admettre que l'ensemble L d'indices est indépendant de α. Soit $\tilde{N}$ le nerf du recouvrement $(U_\alpha^\lambda)_{(\alpha, \lambda) \in A \times L}$ de $\tilde{X}$; $\tilde{N}$ est un espace connexe et localement connexe. Si $(\alpha_o, \lambda_o), \ldots, (\alpha_n, \lambda_n)$ sont les sommets distincts d'un simplexe de $\tilde{N}$, alors $\cap U_{\alpha_i}^{\lambda_i} \neq \emptyset$, donc $\cap U_{\alpha_i} \neq \emptyset$ et les α_i sont les sommets d'un simplexe de N; en outre, on a $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$ car $\alpha_i = \alpha_j = \alpha$ entraînerait $\lambda_i \neq \lambda_j$, donc $U_\alpha^{\lambda_i} \cap U_\alpha^{\lambda_j} = \emptyset$. Il en résulte que l'application $(\alpha, \lambda) \to \alpha$ des sommets de $\tilde{N}$ dans ceux de N se prolonge linéairement à une application continue simpliciale $g : \tilde{N} \to N$ qui est un homéomorphisme sur chaque simplexe de $\tilde{N}$. Prouvons que, si

$$\sigma = (\alpha_o, \ldots, \alpha_n)$$

est un simplexe de N et si $g(\tilde{y}) \in \sigma$, alors il existe un simplexe $\tilde{\sigma}$ de $\tilde{N}$ tel que $\tilde{y} \in \tilde{\sigma}$ et $g(\tilde{\sigma}) = \sigma$. A cet effet, soit

$\tilde{\tau} = ((\beta_o, \lambda_o), \dots, (\beta_m, \lambda_m))$ le simplexe minimal de $\tilde{N}$ qui contient $\tilde{y}$. Puisque g est simpliciale, le point $g(\tilde{y})$ est contenu à l'intérieur du simplexe $g(\tilde{\tau})$, donc

$$g(\tilde{\tau}) \subset \sigma \text{ et } (\beta_o, \dots, \beta_m) \subset (\alpha_o, \dots, \alpha_n);$$

puisque g est non-dégénérée sur chaque simplexe de $\tilde{N}$, les β_i sont distincts deux à deux; donc $m \leq n$ et l'on peut admettre que $\beta_i = \alpha_i$ pour $0 \leq i \leq m$. Puisque σ est un simplexe de N, il existe

$$x \in \bigcap_{i=0}^{i=n} U_{\alpha_i};$$

puisque $\tilde{\tau}$ est un simplexe de $\tilde{N}$, on a

$$\bigcap_{i=0}^{i=m} U_{\alpha_i}^{\lambda_i} \neq \emptyset .$$

Soit $\tilde{x}_i = U_{\alpha_i}^{\lambda_i} \cap \overset{-1}{f}(x)$ pour $0 \leq i \leq m$. Puisque $x \in U_{\alpha_o} \cap U_{\alpha_i}$, l'ensemble $U_{\alpha_o} \cup U_{\alpha_i}$ est revêtu par $(\tilde{X}, f)$ et, puisque

$$U_{\alpha_o}^{\lambda_o} \cap U_{\alpha_i}^{\lambda_i} \neq \emptyset ,$$

l'ensemble $U_{\alpha_o}^{\lambda_o} \cup U_{\alpha_i}^{\lambda_i}$ est contenu dans une composante connexe de $\overset{-1}{f}(U_{\alpha_o} \cup U_{\alpha_i})$ sur laquelle f est injective : il en résulte que $\tilde{x}_i = \tilde{x}_o$ pour $1 \leq i \leq m$. A présent, choisissons des $\lambda_i \in L$ tels que $\tilde{x}_o \in U_{\alpha_i}^{\lambda_i}$ pour $m+1 \leq i \leq n$. Finalement, $\tilde{\sigma} = ((\alpha_o, \lambda_o), \dots, (\alpha_n, \lambda_n))$ est un simplexe de $\tilde{N}$ qui contient $\tilde{\tau}$, donc $\tilde{y}$, et qui vérifie $g(\tilde{\sigma}) = \sigma$. En prenant $\tilde{y} = (\alpha_o, \lambda)$ avec un $\lambda \in L$ arbitraire, on voit que g est surjective; en outre, vu la topologie faible de N, il résulte facilement que g est une application ouverte. Prouvons à présent que, pour tout $(\alpha, \lambda) \in A \times L$, g applique topologiquement $St(\alpha, \lambda)$ sur $St\,\alpha$. En effet, puisque g est simpliciale, $g(St(\alpha, \lambda)) \subset St\,\alpha$. Si $y \in St\,\alpha$, alors y est situé à l'intérieur d'un simplexe σ de N dont α est l'un des sommets; on a $g(\alpha, \lambda) = \alpha$ et, d'après la remarque précédente, il existe un simplexe $\tilde{\sigma}$ de $\tilde{N}$ tel que $(\alpha, \lambda) \in \tilde{\sigma}$ et $g(\tilde{\sigma}) = \sigma$; puisque g est non-dégénérée sur $\tilde{\sigma}$, ce dernier contient dans son intérieur un point $\tilde{y}$ tel que $g(\tilde{y}) = y$, donc $y \in g(St(\alpha, \lambda))$. Si $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2 \in St(\alpha, \lambda)$ vérifient $g(\tilde{y}_1) = g(\tilde{y}_2) = y$, alors il existe des simplexes

$$\tilde{\sigma} = ((\alpha_o, \lambda_o), \ldots, (\alpha_m, \lambda_m))$$

et

$$\tilde{\tau} = ((\beta_o, \mu_o), \ldots, (\beta_n, \mu_n))$$

de $\tilde{N}$, dont (α, λ) est l'un des sommets, et qui contiennent $\tilde{y}_1$ et $\tilde{y}_2$ respectivement dans leurs intérieurs. On peut admettre que $\alpha_o = \beta_o = \alpha$ et $\lambda_o = \mu_o = \lambda$. Puisque g est simpliciale, y est situé à l'intérieur de $g(\tilde{\sigma})$ et de $g(\tilde{\tau})$, donc $g(\tilde{\sigma}) = g(\tilde{\tau})$ et, puisque g est non-dégénérée sur $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\tau}$, il vient $m = n$ et l'on peut admettre que $\alpha_j = \beta_j$ pour $0 \leq j \leq n$. Puisque $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\tau}$ sont des simplexes de $\tilde{N}$, on a

$$U_\alpha^\lambda \cap U_{\alpha_j}^{\lambda_j} \neq \emptyset \quad \text{et} \quad U_\alpha^\lambda \cap U_{\alpha_j}^{\mu_j} \neq \emptyset \,;$$

il en résulte que $U_\alpha \cup U_{\alpha_j}$ est revêtu par $(\tilde{X}, f)$ ce qui entraîne, visiblement, $\lambda_j = \mu_j$. On a donc $\tilde{\sigma} = \tilde{\tau}$, d'où $\tilde{y}_1 = \tilde{y}_2$. Afin de prouver que g applique topologiquement $St(\alpha, \lambda)$ sur $St\,\alpha$ il suffit à présent de rappeler que g est continue et ouverte et que l'étoile d'un sommet est un ouvert du complexe. En outre, on a

$$\overset{-1}{g}(St\,\alpha) = \bigcup_{\lambda \in L} St(\alpha, \lambda) \quad \text{et} \quad St(\alpha, \lambda) \cap St(\alpha, \mu) = \emptyset$$

si $\lambda \neq \mu$; en effet, la première relation résulte de ce que $g(\tilde{y}) \in \sigma$ entraîne l'existence d'un $\tilde{\sigma} \ni \tilde{y}$ avec $g(\tilde{\sigma}) = \sigma$, et la seconde de ce que $U_\alpha^\lambda \cap U_\alpha^\mu = \emptyset$. Puisque les $St(\alpha, \lambda)$ sont ouverts et connexes, ils sont les composantes connexes de $\overset{-1}{g}(St\,\alpha)$, et $(\tilde{N}, g)$ est en effet un revêtement de N.

Pour exhiber l'isomorphisme Φ, remarquons d'abord que, si $\xi \in G(\tilde{X}, f)$, alors $\xi(U_\alpha^\lambda)$ est une composante connexe de $\overset{-1}{f}(U_\alpha)$ donc il existe un unique $\mu \in L$ tel que $\xi(U_\alpha^\lambda) = U_\alpha^\mu$; on peut donc définir une application

$$\psi : G(\tilde{X}, f) \times A \times L \to L \text{ par } \xi(U_\alpha^\lambda) = U_\alpha^{\psi(\xi, \alpha, \lambda)}.$$

Pour tout $\xi \in G(\tilde{X}, f)$ définissons l'application

$$\Phi_\xi : A \times L \to A \times L \quad \text{par} \quad \Phi_\xi(\alpha, \lambda) = (\alpha, \psi(\xi, \alpha, \lambda)).$$

Si $(\alpha_o, \lambda_o), \ldots, (\alpha_n, \lambda_n)$ sont les sommets d'un simplexe de $\tilde{N}$, alors $\cap \xi(U_{\alpha_i}^{\lambda_i}) \neq \emptyset$, donc $\Phi_\xi(\alpha_o, \lambda_o), \ldots, \Phi_\xi(\alpha_n, \lambda_n)$ sont aussi les sommets d'un simplexe de $\tilde{N}$, et l'application $\Phi_\xi : A \times L \to A \times L$ se prolonge linéairement à une application continue simpliciale de $\tilde{N}$ dans $\tilde{N}$, que nous désignerons toujours par Φ_ξ. Puisque g est simpliciale et $g \circ \Phi_\xi(\alpha, \lambda) = g(\alpha, \lambda)$, on a $g \circ \Phi_\xi = g$ sur $\tilde{N}$. Si ε est l'application identique de $\tilde{X}$, alors Φ_ε est l'application identique de $\tilde{N}$. Si $\xi, \eta \in G(\tilde{X}, f)$ et $(\alpha, \lambda) \in A \times L$, alors

$$U_\alpha^{\psi(\eta \circ \xi, \alpha, \lambda)} = \eta \circ \xi(U_\alpha^\lambda) = \eta(U_\alpha^{\psi(\xi, \alpha, \lambda)}) = U_\alpha^{\psi(\eta, \alpha, \psi(\xi, \alpha, \lambda))},$$

donc $\psi(\eta \circ \xi, \alpha, \lambda) = \psi(\eta, \alpha, \psi(\xi, \alpha, \lambda))$ et

$$\Phi_\eta \circ \Phi_\xi(\alpha, \lambda) = \Phi_\eta(\alpha, \psi(\xi, \alpha, \lambda)) = (\alpha, \psi(\eta, \alpha, \psi(\xi, \alpha, \lambda))) =$$
$$= \Phi_{\eta \circ \xi}(\alpha, \lambda),$$

d'où $\Phi_\eta \circ \Phi_\xi = \Phi_{\eta \circ \xi}$ sur tout l'espace $\tilde{N}$. Il en résulte que tout Φ_ξ est un élément de $G(\tilde{N}, g)$ et que l'application $\Phi : G(\tilde{X}, f) \to G(\tilde{N}, g)$ définie par $\Phi(\xi) = \Phi_\xi$ est un homomorphisme. Soient $\alpha \in A$ et $\lambda, \mu \in L$; puisque $(\tilde{X}, f)$ est régulier il existe $\xi \in G(\tilde{X}, f)$ tel que $\xi(U_\alpha^\lambda) = U_\alpha^\mu$, donc $\Phi_\xi(\alpha, \lambda) = (\alpha, \mu)$, ce qui prouve que $(\tilde{N}, g)$ est régulier et que Φ est surjectif. Si $\Phi_\xi(\alpha, \lambda) = (\alpha, \lambda)$, alors $\psi(\xi, \alpha, \lambda) = \lambda$ donc $\xi(U_\alpha^\lambda) = U_\alpha^\lambda$ et $\xi = \varepsilon$, ce qui prouve que Φ est un isomorphisme.

Soit enfin $\varphi : X \to N$ une application canonique et posons $W_\alpha = \overset{-1}{\varphi}(St\,\alpha)$, donc $W_\alpha \subset U_\alpha$, et $\tilde{W}_\alpha^\lambda = U_\alpha^\lambda \cap \overset{-1}{f}(W_\alpha)$; alors $(W_\alpha^\lambda)_{(\alpha, \lambda) \in A \times L}$ est un recouvrement ouvert de $\tilde{X}$. Si $\tilde{x} \in W_\alpha^\lambda$, alors $\varphi \circ f(\tilde{x}) \in St\,\alpha$ et il existe un unique $\tilde{y} \in St(\alpha, \lambda)$ tel que $g(\tilde{y}) = \varphi \circ f(\tilde{x})$. Si $\tilde{x} \in W_\alpha^\lambda \cap W_\beta^\mu$, alors $U_\alpha^\lambda \cap U_\beta^\mu \neq \emptyset$ dont il existe dans $\tilde{N}$ un 1-simplexe $((\alpha, \lambda), (\beta, \mu))$ et $St(\alpha, \lambda) \cap St(\beta, \mu) \neq \emptyset$; on a aussi $\varphi \circ f(\tilde{x}) \in St\,\alpha \cap St\,\beta$ et, puisque cette dernière intersection est en général vide ou connexe, $St\,\alpha \cup St\,\beta$ est revêtu par $(\tilde{N}, g)$. Il en résulte que

$$St(\alpha, \lambda) \cap \overset{-1}{g} \circ \varphi \circ f(\tilde{x}) = St(\beta, \mu) \cap \overset{-1}{g} \circ \varphi \circ f(\tilde{x})$$

et l'application $\tilde{\varphi} : \tilde{X} \to \tilde{N}$ définie par

$$\tilde{\varphi}(\tilde{x}) = St(\alpha, \lambda) \cap \overset{-1}{g} \circ \varphi \circ f(\tilde{x}) \text{ si } \tilde{x} \in W_\alpha^\lambda$$

est univoque; puisqu'elle est continue sur chaque ouvert $\tilde{W}_\alpha^\lambda$ elle est continue sur $\tilde{X}$. Evidemment, $g \circ \tilde{\varphi} = \varphi \circ f$. Soient $\xi \in G(\tilde{X}, f)$, $\eta \in G(\tilde{N}, g)$ et supposons que $\tilde{\varphi} \circ \xi = \eta \circ \tilde{\varphi}$. Si $\tilde{x} \in W_\alpha^\lambda$ et $\xi(\tilde{x}) \in W_\alpha^\mu$, alors

$$\tilde{\varphi}(\tilde{x}) \in St(\alpha, \lambda), \ \eta \circ \tilde{\varphi}(\tilde{x}) \in St(\alpha, \mu) \text{ et } \Phi_\xi(\alpha, \lambda) = (\alpha, \mu);$$

il en résulte que $\eta(\alpha, \lambda) = (\alpha, \mu)$, d'où $\eta = \Phi_\xi$ ce qui prouve que l'homomorphisme induit par φ grâce au relêvement $\tilde{\varphi}$ coîncide avec Φ.

1.14. REMARQUES. Avec les mêmes notations , on pourrait encore prouver par les mêmes procédés que :

Si $(\tilde{N}, g)$ *est un revêtement régulier de* N, *alors* X *admet un revêtement régulier* $(\tilde{X}, f)$ *tel que :*

(i) $U_\alpha \cup U_\beta$ *est revêtu par* $(\tilde{X}, f)$ *dès que* $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$;

(ii) il existe un isomorphisme $\Phi : G(\tilde{X}, f) \approx G(\tilde{N}, g)$;

(iii) toute application canonique $\varphi: X \to N$ *se laisse relever en une application* $\tilde{\varphi}: \tilde{X} \to \tilde{N}$ *et induit* Φ.

Sous des hypothèses plus restrictives *(N* fini et toute réunion connexe de trois ensembles du recouvrement contenue dans une partie simplement connexe de X) des résultats apparentés à 1.13 et au précédent ont été obtenus dans [33, p. 122] .

On peut maintenant prouver la forme suivante [14] du théorème de Hurewicz [25] :

1.15. THEOREME. *Soient* $(\tilde{X}, f)$ *et* $(\tilde{Y}, p)$ *des revêtements réguliers des espaces connexes, localement connexes,* X *et* Y. *Si* X *est paracompact et si* $\pi_i(\tilde{Y}) = 0$ *pour* $0 \leq i < cat(\tilde{X}, f)$, *tout homomorphisme* $H : G(\tilde{X}, f) \to G(\tilde{Y}, p)$ *est induit par une application continue* $h : X \to Y$..

DEMONSTRATION. Posons $\omega = cat(\tilde{X}, f)$. Soit $\mathfrak{V}$ un recouvrement localement fini de X par $\omega + 1$ ouverts à composantes connexes revêtues par $(\tilde{X}, f)$; si $\omega < \infty$ la finitude locale est évidente, si $\omega = \infty$ on l'obtient par raffinement. D'après le lemme 1.3, $\mathfrak{V}$ admet un raffinement barycentrique ouvert $\mathcal{G}$ d'ordre $\leq \omega + 1$. Soit $\mathfrak{U} = (U_\alpha)$ le recouvrement de X constitué par les composantes connexes des ouverts de $\mathcal{G}$. Puisque X

est localement connexe, les U_α sont ouverts; en outre, l'ordre de $\mathfrak{U}$ est évidemment $\leq \omega + 1$, donc son nerf N est de dimension $\leq \omega$. Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, alors $U_\alpha \cup U_\beta$ est connexe et contenu dans un ouvert de $\mathfrak{V}$, et est donc revêtu par $(\tilde{X}, f)$. Soient $(\tilde{N}, g)$ et $\Phi : G(\tilde{X}, f) \approx G(\tilde{N}, g)$ le revêtement régulier et l'isomorphisme décrits dans le lemme 1.13. Puisque X est paracompact, il existe [voir C.H. Dowker, Amer. J Math. 74 (1952) p. 576] une application canonique $\varphi : X \to N$ et, d'après 1.13, elle peut être relevée de façon à induire Φ. Puisque $\dim N \leq \omega$ et $\pi_i(\tilde{Y}) = 0$ $0 \leq i < \omega$, d'après le lemme 1.12, il existe une application $\psi : N \to Y$ qui peut être relevée de façon à induire l'homomorphisme

$$H \circ \Phi^{-1} : G(\tilde{N}, g) \to G(\tilde{Y}, p).$$

Evidemment, l'application $h = \psi \circ \varphi : X \to Y$ peut être relevée de façon à induire l'homomorphisme $H \circ \Phi^{-1} \circ \Phi = H$.

Selon Fox [13] définissons à présent $cat_1 X$ comme le plus petit des entiers $k \geq 0$ pour lesquels il existe des ouverts $U_0, \ldots, U_k$ dont la réunion recouvre X et tels que toute courbe fermée de tout U_i soit contractible dans X. On prouve facilement que

1.16. PROPOSITION. *Si $(\tilde{X}, f)$ est un revêtement de l'espace connexe et localement connexe par arcs X tel que $\pi_1(\tilde{X}) = 0$, alors $cat(\tilde{X}, f) = cat_1 X$.*

D'autre part, si X est connexe, localement connexe et localement simplement connexe par arcs, on peut identifier $\pi_1(X)$ à $G(\tilde{X}, f)$ pourvu que $\pi_1(\tilde{X}) = 0$, et cette identification est compatible avec les homomorphismes induits. On peut donc reformuler le théorème 1.15 de la façon suivante

1.17. THEOREME. *Soient X et Y des espaces connexes, localement connexes et localement simplement connexes par arcs. Si X est paracompact et si $\pi_i(Y) = 0$ pour $2 \leq i < cat_1 X$, tout homomorphisme $\pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ est induit par une application continue $X \to Y$.*

Remarquons que, avec cette interprétation, on a prouvé au cours de la démonstration du théorème 1.15 la suivante :

1.18. PROPOSITION. *Si X est paracompact, connexe, localement connexe et localement simplement connexe par arcs, alors $cat_1 X \leq k$ si et seulement s'il existe un CW-complexe connexe L de dimension $\leq k$ et une application $X \to L$ qui induit un isomorphisme $\pi_1(X) \to \pi_1(L)$.*

1.19. REMARQUE. Ces résultats permettent de donner une définition «axiomatique» de la catégorie 1-dimensionnelle qui prouve en même temps que le résultat 1.17 est, en un sens, le meilleur possible. Considérons, en effet, toutes les fonctions ω à valeurs entières $\leq \infty$ et définies pour tout espace X telles que :

(a) $\omega(X) = 0$ entraîne $\pi_1(X) = 0$

(b) $\omega(X) = 1$ entraîne que $\pi_1(X)$ est libre,

(c) $\omega(X)$ rend le théorème 1.17 vrai pour tout espace Y.

Evidemment, cat_1 vérifie les conditions (a) et (c); puisque le groupe fondamental d'un graphe est libre, cat_1 vérifie aussi la condition (b). Prouvons que $cat_1 X \leq \omega(X)$ pour tout espace X et toute fonction ω. En effet, si $\omega(X) = 0$, on a $\pi_1(X) = 0$ et $cat_1 X = 0$. Si $\omega(X) = 1$, $\pi_1(X)$ est libre, il existe un graphe L avec $\pi_1(L) \approx \pi_1(X)$, on a $dim\, L = 1$ donc $cat_1 L = 1$; puisque L est asphérique il existe $X \to L$ induisant un isomorphisme de groupes fondamentaux donc, finalement, $cat_1 X \leq 1$. Enfin, supposons que $\omega(X) = n \geq 2$. Le n-squelette Y du CW-complexe asphérique de groupe fondamental $\pi_1(X)$ vérifie $\pi_i(Y) = 0$ pour $2 \leq i < n$; d'après 1.17 avec $\omega(X)$ au lieu de $cat_1 X$, il existe $X \to Y$ induisant $\pi_1(X) \approx \pi_1(Y)$, donc

$$cat_1 X \leq cat_1 Y \leq dim\, Y = n = \omega(X).$$

Nous nous proposons maintenant d'utiliser les résultats précédents pour le calcul de la catégorie d'un CW-complexe asphérique $K(\pi, 1)$ en fonction de son groupe fondamental π. Remarquons d'abord que le revêtement simplement connexe de $K(\pi, 1)$ est contractile d'où, d'après 1.16 :

1.20. PROPOSITION. $cat\, K(\pi, 1) = cat_1 K(\pi, 1)$.

Pour tout groupe π définissons à présent la dimension algébrique et désignons par *alg dim* π le plus petit des entiers $n \geq 0$ tels que

$$H^q(\pi, A) = 0$$

pour tout π- module A et tout $q > n$; si de tels entiers n'existent pas, on pose $alg\ dim \pi = \infty$. Rappelons que la cohomologie de $K(\pi, 1)$ à coefficients locaux s'identifie à la cohomologie du groupe π à coefficients dans la catégorie des π- modules. Le résultat suivant est dû à Eilenberg et à l'auteur [12] :

1.21. THEOREME. *On a* $cat\, K(\pi, 1) = alg\ dim \pi$ *sauf peut- être dans le cas* $cat\, K(\pi, 1) = 2$ *et* $alg\ dim\ \pi = 1$.

DEMONSTRATION. Soit K un CW- complexe connexe, K^n son n- squelette, et supposons $n \geq 2$. Un calcul classique d'obstructions à coefficients locaux montre l'équivalence des affirmations suivantes :

(i) $H^q(K, A) = 0$ pour tout système de coefficients locaux A sur K et tout $q > n$;

(ii) Il existe une application continue $f: K \to K^n$ telle que $j \circ f \simeq 1_K$, où $j: K^n \to K$ désigne l'inclusion.

Supposons $alg\ dim \pi = n \geq 2$. En posant $K = K(\pi, 1)$ et en identifiant $H^q(K, A)$ à $H^q(\pi, A)$, l'implication $(i) \Longrightarrow (ii)$ montre que K est dominé par K^n, donc $cat\, K(\pi, 1) \leq cat\, K^n \leq dim\, K^n = n$.

Supposons $cat\, K(\pi, 1) = n \geq 2$. L'inclusion j induit un isomorphisme $j_1 : \pi_1(K^n) \to \pi_1(K)$. Puisque $cat_1 K \leq cat\, K$ et $\pi_i(K^n) = 0$ pour $2 \leq i < n$, d'après 1. 17 il existe $f: K \to K^n$ induisant l'homomorphisme $j_1^{-1}: \pi_1(K) \to \pi_1(K^n)$. Il en résulte que $j \circ f$ induit l'isomorphisme identique de $\pi_1(K)$, donc, puisque K est asphérique, $j \circ f \simeq 1_K$ et l'implification $(ii) \Longrightarrow (i)$ montre que $alg\ dim \pi \leq n$.

Finalement, si $cat\, K(\pi, 1) = 1$ alors π est libre et, classiquement, $alg\ dim \pi = 1$.

Le cas critique $cat\, K(\pi, 1) = 2$ et $alg\ dim \pi = 1$ est équivalent à l'existence d'un groupe non libre π tel que, dans toute suite exacte

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow E \underset{r}{\overset{p}{\rightleftarrows}} \pi \longrightarrow 1,$$

dans laquelle A est commutatif, il existe un homomorphisme r tel que $p \circ r = id$; on ignore si de tels groupes existent.

Remarquons la conséquence suivante

1.22. COROLLAIRE. *Si X est une variété close de dimension n telle que $\pi_1(X) \neq 0$ et $\pi_i(X) = 0$ pour $2 \leq i < n$, alors $cat_1 X = cat X = n$. En outre si $\pi_1(X)$ a un élément d'ordre fini, alors $\pi_1(X)$ est nécessairement fini.*

DEMONSTRATION. Supposons d'abord que $\pi_1(X)$ soit infini. Alors le revêtement simplement connexe $\tilde{X}$ de X est une variété ouverte de dimension n, donc $H_q(\tilde{X}) = 0$ pour $q \geq n$; puisque $\pi_i(\tilde{X}) = 0$ pour $0 \leq i < n$, d'après le théorème de Hurewicz, on a $\pi_1(X) = 0$ pour tout $i \geq 0$. Il en résulte que X est asphérique, donc

$$n \geq cat X = cat_1 X = alg\,dim\,\pi_1(X) \geq n$$

car $H^n(X, Z_2) \neq 0$. Supposons à présent que $\pi_1(X)$ ait un élément d'ordre fini h, et désignons par Q le groupe cyclique d'ordre h. Rappelons que, Q opérant trivialement sur Z, on a

$$H^{2q+1}(Q, Z) = 0 \text{ et } H^{2q}(Q, Z) \neq 0 \text{ pour tout } q \geq 1;$$

en outre, on sait que si Q est un sous-groupe de π on a

$$alg\,dim\,Q \leq alg\,dim\,\pi ,$$

ce que l'on peut d'ailleurs prouver géométriquement à l'aide des résultats précédents. Le groupe cyclique Q vérifie $alg\,dim\,Q = \infty$; il en résulte que $\pi_1(X)$ est fini, sinon X serait asphérique et l'on aurait

$$cat X = alg\,dim\,\pi_1(X) \geq alg\,dim\,Q = \infty ,$$

ce qui est absurde vu que $dim X = n$. Soit $K = K(Q, 1)$ et K^q le squelette de K. Puisque $\pi_i(X) = 0$ pour $2 \leq i < n$, d'après 1.17, il existe $\varphi: K^n \to X$ induisant le monomorphisme $Q \to \pi_1(X)$, et donc

$$cat_1 K^n \leq cat_1 X \leq cat X \leq n .$$

Le corollaire sera donc entièrement prouvé si l'on montre que $cat_1 K^n \geq n$. L'inclusion $j_{2q}: K^{2q} \to K$ induit un monomorphisme

$$H^{2q}(Q, Z) \to H^{2q}(K^{2q}, Z);$$

si $cat_1 K^{2q} < 2q$, alors 1.17 fournit

$$\psi : K^{2q} \to K^{2q-1}$$

tel que $j_{2q-1} \circ \psi \simeq j_{2q}$, ce qui est absurde car $H^{2q}(K^{2q-1}, Z) = 0$. On a donc

$$cat_1 K^{2q} \geq 2q$$

et aussi

$$cat_1 K^{2q-1} \geq 2q-1$$

car $cat_1 K^{2q} \leq 1 + cat_1 K^{2q-1}$.

D'autres résultats concernant la catégorie des variétés ont été obtenus par I. Berstein [C. R. Sc. Paris, 246 *(1958)*, 362-364].

2. La nilpotence des espaces de lacets et la conilpotence des suspensions.

On considère des espaces topologiques arbitraires munis de points-base, désignés toujours par $*$; toutes les applications et homotopies respectent les points-base.

L'espace ΩX des lacets de X est muni d'une structure de H-espace par la donnée des applications

$$\mu : \Omega X \times \Omega X \to \Omega X \quad \text{et} \quad \nu : \Omega X \to \Omega X$$

définies par

$$\mu(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} \omega_1(2t) & \text{si} \quad 0 \leq 2t \leq 1, \\ \omega_2(2t-1) & \text{si} \quad 1 \leq 2t \leq 2, \end{cases}$$

et

$$\nu(\omega)(t) = \omega(1-t) \quad \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

La suspension ΣX sur X, espace quotient de $I \times X$ obtenu en identifiant à un point la partie $(I \times *) \cup (0 \times X) \cup (1 \times X)$ de $I \times X$, est munie d'une structure de H'-espace, le dual au sens d'Eckmann-Hilton [10] d'un H-espace, par la donnée des applications

$$\sigma : \Sigma X \to \Sigma X \vee \Sigma X \quad \text{et} \quad \tau : \Sigma X \to \Sigma X$$

définies par

$$\sigma(t, x) = \begin{cases} ((2t, x), *) & \text{si} \quad 0 \leq 2t \leq 1, \\ (*, (2t-1, x)) & \text{si} \quad 1 \leq 2t \leq 2, \end{cases}$$

et

$$\tau(t, x) = (1-t, x) \quad \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1,$$

où $A \vee B$ désigne l'espace somme avec points-base identifiés.

L'ensemble $\pi(X, \Omega Y)$ des classes d'homotopie d'applications $X \to \Omega Y$ est munie d'une structure de groupe en posant

$$\{f\}\{g\} = \{X \xrightarrow{\Delta} X \times X \xrightarrow{f \times g} \Omega Y \times \Omega Y \xrightarrow{\mu} \Omega Y\}$$

et

$$\{f\}^{-1} = \{x \xrightarrow{f} \Omega Y \xrightarrow{\nu} \Omega Y\},$$

où $\{f\}$ désigne la classe d'homotopie de l'application f.

De même , l'ensemble $\pi(\Sigma X, Y)$ est muni d'une structure de groupe en posant

$$\{f\}\{g\} = \{\Sigma X \xrightarrow{\sigma} \Sigma X \vee \Sigma X \xrightarrow{f \vee g} Y \vee Y \xrightarrow{\nabla} Y\}$$

et

$$\{f\}^{-1} = \{\Sigma X \xrightarrow{\tau} \Sigma X \xrightarrow{f} Y\},$$

où ∇ est définie par $\nabla(y, *) = \nabla(*, y) = y$.

Il existe un isomorphisme naturel

$$\Phi : \pi(\Sigma X, Y) \approx \pi(X, \Omega Y)$$

défini par

$$\Phi\{f\} = \{g\} \text{ avec } g(x)(t) = f(t, x).$$

En outre, on sait que les deux structures de groupe définies comme plus haut dans l'ensemble $\pi(\Sigma X, \Omega Y)$ coïncident et sont commutatives.

2.1. DEFINITION. *Le commutateur φ_1 de poids 1 de ΩX est l'application identique $1 : \Omega X \to \Omega X$; le commutateur φ_k de poids $k \geq 2$ de ΩX est l'application composée*

$$(\Omega X)^k = (\Omega X)^{k-1} \times \Omega X \xrightarrow{\varphi_{k-1} \times 1} \Omega X \times \Omega X \xrightarrow{\varphi} \Omega X,$$

où φ désigne la composition

$$(\Omega X)^2 \xrightarrow{\Delta} (\Omega X)^2 \times (\Omega X)^2 \xrightarrow{1^2 \times \nu^2} (\Omega X)^2 \times (\Omega X)^2 \xrightarrow{\mu \times \mu} \Omega X \times \Omega X \xrightarrow{\mu} \Omega X.$$

On désigne par $nil X$ la classe de nilpotence de ΩX, i. e. le plus petit des entiers $k \geq 0$ tels que $\varphi_{k+1} \simeq 0$; s'il n'existe aucun entier $k \geq 0$ tel que $\varphi_{k+1} \simeq 0$, on pose $nil X = \infty$.

2.2. DEFINITION. *Le cocommutateur ψ_1 de poids 1 de ΣX est l'application identique $1 : \Sigma X \to \Sigma X$; le cocommutateur ψ_k de poids $k \geq 2$ de ΣX est l'application composée*

$$^k(\Sigma X) = {}^{k-1}(\Sigma X) \vee \Sigma X \xleftarrow{\psi_{k-1} \vee 1} \Sigma X \vee \Sigma X \xleftarrow{\psi} \Sigma X$$

où ψ désigne la composition

$$^2(\Sigma X) \xleftarrow{\nabla} {}^2(\Sigma X) \vee {}^2(\Sigma X) \xleftarrow{{}^2 1 \vee {}^2 \tau} {}^2(\Sigma X) \vee {}^2(\Sigma X) \xleftarrow{\sigma \vee \sigma} \Sigma X \vee \Sigma X \xleftarrow{\sigma} \Sigma X.$$

On désigne par $conil X$ la classe de conilpotence de ΣX, i. e. le plus petit des entiers $k \geq 0$ tels que $\psi_{k+1} \simeq 0$; s'il n'existe aucun entier $k \geq 0$ tel que $\psi_{k+1} \simeq 0$, on pose $conil X = \infty$.

Evidemment, $nil X$ et $conil X$ sont des invariants du type d'homotopie basée de l'espace X.

2.3. PROPOSITION. *Pour tout espace Y on a*

$$nil\, Y = \sup nil\, \pi(\Sigma X, Y),$$

où $nil\, \pi$ désigne la classe de nilpotence du groupe π et X parcourt « tous » les espaces topologiques.

En effet, le groupe $\pi(\Sigma X, Y)$ est isomorphe à $\pi(X, \Omega Y)$ et le commutateur de k éléments quelconques $\{f_i\}$ de $\pi(X, \Omega Y)$ est représenté par la composition

$$X \xrightarrow{\Delta} X^k \xrightarrow{f_1 \times \ldots \times f_k} (\Omega Y)^k \xrightarrow{\varphi_k} \Omega Y.$$

Il s'ensuit que $nil\, \pi(\Sigma X, Y) \leq nil\, Y$. Réciproquement, supposons que

$nil\pi(X, \Omega Y) \leq k-1$ pour tout espace X. Posons $X = (\Omega Y)^k$ et désignons par $p_i : (\Omega Y)^k \to \Omega Y$ la i-ème projection. La composition

$$(\Omega Y)^k \xrightarrow{\Delta} ((\Omega Y)^k)^k \xrightarrow{p_1 \times \dots \times p_k} (\Omega Y)^k$$

coïncide avec l'application identique de $(\Omega Y)^k$. Il en résulte que

$$\varphi_k = \varphi_k \circ (p_1 \times \dots \times p_k) \circ \Delta$$

et cette dernière composition représente le commutateur des k éléments $\{p_i\}$ de $\pi((\Omega Y)^k, \Omega Y)$, qui est trivial par hypothèse. De même :

2.4. PROPOSITION. *Pour tout espace X on a*

$$conil X = sup\, nil\pi(X, \Omega Y),$$

où Y parcourt « tous » les espaces topologiques.

On appellera fibration toute suite $F \xrightarrow{\eta} E \xrightarrow{p} B$ d'espaces et d'applications telle que $F = p^{-1}(*)$, η désigne l'inclusion et p ait la propriété de relèvement des homotopies de tout X dans B qui conservent les points-base. On appellera cofibration toute suite $A \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\eta} P$ d'espaces et d'applications telle que P soit l'espace quotient obtenu à partir de X en identifiant la partie $\alpha(A)$ à un point, que η soit l'application canonique, et que α ait la propriété d'abaissement (extension) des homotopies qui conservent les points-base de A dans tout Y. On peut prouver que, si B est 0-connexe, l'application p est surjective et que, sans hypothèse supplémentaire, α est injective.

2.5. THEOREME. *Si $F \xrightarrow{\eta} E \xrightarrow{p} B$ est une fibration, $nil F \leq 1 + nil E$.*

DEMONSTRATION. Posons $\pi_n(D, R) = \pi(\Sigma_n D, R)$ où Σ_n désigne la suspension n fois itérée. En tant que généralisation de la suite d'homotopie d'une fibration, pour tout espace X on a la suite exacte

$$\dots \xrightarrow{p_*} \pi_2(X, B) \xrightarrow{\partial} \pi_1(X, F) \xrightarrow{\eta_*} \pi_1(X, E) \xrightarrow{p_*} \pi_1(X, B)$$

avec la propriété [22, p. 22] que $\partial \pi_2(X, B)$ est contenu dans le centre de $\pi_1(X, F)$. Il en résulte que $nil\pi_1(X, F) \leq 1 + nil\pi_1(X, E)$ et le théorème découle à présent de la proposition 2.3.

Un raisonnement similaire conduit à la

2.6. PROPOSITION. *Si* $F \xrightarrow{\eta} E \xrightarrow{p} B$ *est une fibration et si* $\eta \simeq 0$, *on a* $nil\, E \leq nil\, B$.

Dualement, en utilisant la suite généralisée de cohomologie[22, p. 25]

$$\ldots \xrightarrow{\alpha^*} \pi_2(A,\, Y) \xrightarrow{\delta} \pi_1(P,\, Y) \xrightarrow{\eta^*} \pi_1(X,\, Y) \xrightarrow{\alpha^*} \pi_1(A,\, Y)$$

d'une cofibration $A \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\eta} P$, on obtient :

2.7. THEOREME. *Si* $A \to X \to P$ *est une cofibration,* $conil\, P \leq 1 + conil X$.

2.8. PROPOSITION. *Si* $A \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\eta} P$ *est une cofibration et si* $\eta \simeq 0$, $conil\, X \leq conil\, A$.

Soient à présent X_i $(1 \leq i \leq r)$ des espaces arbitraires munis de points-base et désignons par $T = T(X_1, \ldots, X_r)$ la partie de $X_1 \times \ldots \times X_r$ constituée par les points dont l'une au moins des coordonnées est égale au point-base rexpectif. Désignons par $X_1 \# \ldots \# X_r$ et par

$$p_r : X_1 \times \ldots \times X_r \to X_1 \# \ldots \# X_r$$

l'espace quotient et l'application canonique obtenus en identifiant T à un point. Si $X_1 = \ldots = X_r = X$, on désignera $X_1 \# \ldots \# X_r$ par $X^{(r)}$ et, parfois, p_r simplement par p.

2.9. LEMME. *Soient* X_i $(1 \leq i \leq r)$ *des complexes finis munis de points-base et soit* X *un espace arbitraire. A toute suite d'applications*

$$f_i : X_i \to \Omega X$$

correspond une application $F_r : X_1 \# \ldots \# X_r \to X$ *telle que le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
X_1 \times \ldots \times X_r \arrow[r, "f_1 \times \ldots \times f_r"] \arrow[d, "p_r"] & \Omega X \times \ldots \times \Omega X \arrow[d, "\varphi_r"] \\
X_1 \# \ldots \# X_r \arrow[r, "F_r"] & \Omega X
\end{tikzcd}$$

soit homotopiquement commutatif. La classe d'homotopie de F_r est uniquement déterminée par les classes des f_i et, en particulier, $F_r \simeq 0$ si $\varphi_r \circ f_1 \times \ldots \times f_r \simeq 0$.

DEMONSTRATION. On a $(f_1 \times f_2)(X_1 \vee X_2) \subset \Omega X \vee \Omega X$ et, d'après [42, 2.4], l'application $\varphi_2 \mid \Omega X \vee \Omega X$ est homotope à l'application constante. La CW-paire $(X_1 \times X_2, X_1 \vee X_2)$ possède la propriété d'extension des homotopies et il en résulte une homotopie $h_t : X_1 \times X_2 \to \Omega X$ telle que

$$h_o = \varphi_2 \circ (f_1 \times f_2) \quad \text{et} \quad h_1(X_1 \vee X_2) = h_t(*) = * .$$

Puisque p_2 est une identification, il existe une application

$$F_2 : X_1 \# X_2 \to \Omega X$$

telle que $F_2 \circ p_2 = h_1$. Le cas général $r \geq 2$ s'obtient par induction en remarquant que la compacité des X_i entraîne l'associativité de l'opération $\#$, i. e. $X_1 \# \ldots \# X_r$ est canoniquement homéomorphe à $((X_1 \# X_2) \# \ldots) \# X_r$. l'unicité de $\{F_r\}$ résulte de ce que, selon [32, Sätze 14, 16],

$$p_r^* : \pi(X_1 \# \ldots \# X_r, \Omega X) \to \pi(X_1 \times \ldots \times X_r, \Omega X)$$

est un monomorphisme.

Pour tout espace X définissons à présent W-long$X$ comme le plus petit des entiers $k \geq 0$ tels que $[\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}] = 0$ pour tout $\alpha_i \in \pi_{q_i}(X)$, $q_i \geq 1$; s'il n'existe aucun tel entier k, on pose W-*long*$X = \infty$. Ici, $[\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}]$ désigne le produit itéré de Whitehead, défini par $[\alpha_1] = \alpha_1$ et $[\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}] = [[\alpha_1, \ldots, \alpha_k], \alpha_{k+1}]$.

2.10. THEOREME. *W-long$X \leq$ nil$X$.*

DEMONSTRATION. Soit S^q la q-sphère. Considérons l'isomorphisme canonique $S : \pi_q(X) \approx \pi_{q-1}(\Omega X)$ et, par abus de langage, désignons par S_{α_i} l'application

$$S^{q_i - 1} \to \Omega X$$

qui représente l'élément $S\alpha_i \in \pi_{q_i - 1}(\Omega X)$. On a $S^m \# S^n = S^{m+n}$ et, d'après le lemme 2.9, il existe une application F qui rend le diagramme

$$\begin{tikzcd} S^{q_1-1}\times\dots\times S^{q_{k+1}-1} \arrow[r, "Sa_1\times\dots\times Sa_{k+1}"] \arrow[d, "p_{k+1}"] & \Omega X\times\dots\times\Omega X \arrow[d, "\varphi_{k+1}"] \\ S^{q_1+\dots+q_{k+1}-k-1} \arrow[r, "F"] & \Omega X \end{tikzcd}$$

homotopiquement commutatif. Par application répétée d'un résultat classique de Samelson [34] , valable aussi pour $q_i \geq 1$ [30 , Proposition 1] , on obtient

$$S[\alpha_1,\dots,\alpha_{k+1}] = \varepsilon\{F\} \qquad (\varepsilon=\pm 1),$$

où $\{F\}$ désigne l'élément de $\pi_{q_1+\dots+q_{k+1}-k-1}(\Omega X)$ déterminé par l'application F. Si $nil X = k$, alors $\varphi_{k+1}\simeq 0$ et, d'après le lemme 2.9, $F\simeq 0$, i.e. $\{F\}=0$ donc, puisque S est un isomorphisme,

$$[\alpha_1,\dots,\alpha_{k+1}]=0.$$

Le théorème 2.10 contient comme cas particulier le résultat suivant dont la démonstration directe est immédiate

2.11. PROPOSITION. $nil\,\pi_1(X)\leq nil X$.

Des bornes supérieures de l'invariant $nil X$ ainsi que certains exemples seront donnés dans le chapitre suivant.

La suite de ce chapitre est consacrée à une étude détaillée de la classe de conilpotence d'une suspension.

Soit $k\geq 1$ un entier et désignons par $f_i : \Sigma X\to {}^k\Sigma X$ l'application qui plonge ΣX comme i- ème terme dans ${}^k\Sigma X$, $1\leq i\leq k$. L'homéomorphisme canonique $\theta : {}^k\Sigma X\to\Sigma({}^kX)$, défini par

$$\theta(*,\dots,(t,x),\dots,*)=(t,(*,\dots,x,\dots,*)),$$

induit un isomorphisme

$$\theta_* : \pi(\Sigma X,{}^k\Sigma X)\approx\pi(\Sigma X,\Sigma({}^kX))$$

et $\theta_*\{f_i\}=\{\Sigma j_i\}$, où $j_i : X\to{}^kX$ plonge X comme i- ème terme dans ${}^kX$. La composition des deux dernières flèches de la suite

$$\Sigma X \xrightarrow{\psi_k} {}^k\Sigma X \xrightarrow{f_1 \vee \cdots \vee f_k} {}^k({}^k\Sigma X) \xrightarrow{\Delta} {}^k\Sigma X$$

est égale à l'application identique de ${}^k\Sigma X$; la composition des trois flèches est donc égale à ψ_k. D'autre part, cette composition représente le commutateur des k éléments $\{f_i\}$ dans le groupe $\pi(\Sigma X, {}^k\Sigma X)$. Finalement, en introduisant l'isomorphisme $\Phi : \pi(\Sigma X, \Sigma({}^k X)) \approx \pi(X, \Omega\Sigma({}^k X))$, on obtient

$$\Phi \circ \theta_* \{\psi_k\} = \Phi \circ \theta_* [\{f_1\}, \ldots, \{f_k\}] = \Phi[\{\Sigma j_1\}, \ldots, \{\Sigma j_k\}] =$$
$$= [\Phi\{\Sigma j_1\}, \ldots, \Phi\{\Sigma j_k\}] .$$

Par ailleurs, en désignant par $e : {}^k X \to \Omega\Sigma({}^k X)$ le plongement canonique défini par $e(y)(t) = (t, y)$, on aperçoit facilement que $\Phi\{\Sigma j_i\} = \{e \circ j_i\}$. Puisque l'application constante représente l'élément neutre des groupes considérés, on a la

2.12. PROPOSITION. *Conil $X \leq k-1$ si et seulement si la composition*

$$X \xrightarrow{\Delta} X^k \xrightarrow{j_1 \times \cdots \times j_k} ({}^k X)^k \xrightarrow{e^k} (\Omega\Sigma({}^k X))^k \xrightarrow{\varphi_k} \Omega\Sigma({}^k X)$$

est homotope à l'application constante.

On a déjà utilisé plus haut (lemme 2.9) la remarque [42, 2.4] que $\varphi_2 \mid \Omega X \vee \Omega X \simeq 0$. Si le point-base de ΩX est non-dégénéré (au sens de [32, Hilfsatz 14]), ce qui est toujours le cas si X est un CW-complexe, on peut prouver plus [3, 6.9] :

2.13. PROPOSITION. *Si le point-base de ΩX est non-dégénéré, pour tout $k \geq 1$ il existe une homotopie $h_t : (\Omega X)^k \to \Omega X$ telle que*

$$h_0 = \varphi_k \quad \text{et} \quad h_1(T) = h_t(*) = * ,$$

où T désigne le sous-ensemble de $(\Omega X)^k$ constitué des points dont l'une au moins des coordonnées est égale au point-base.

Remarquons encore qu'il est facile à prouver que, si le point-base de X est non-dégénéré, il en est de même des points-base de ${}^k X$, $\Sigma({}^k X)$, et $\Omega\Sigma({}^k X)$. Si, dans l'espace $(\Omega\Sigma({}^k X))^k$ on identifie le sous-ensemble T à un point on obtient l'espace quotient $(\Omega\Sigma({}^k X))^{(k)}$ et l'application canonique p_k, et en utilisant la proposition 2.13, on obtient une application γ_k qui rend le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(\Omega\Sigma({}^kX))^k \arrow[r, "\varphi_k"] \arrow[d, "p_k"'] & \Omega\Sigma({}^kX) \\
(\Omega\Sigma({}^kX))^{(k)} \arrow[ur, "\gamma_k"'] &
\end{tikzcd}$$

homotopiquement commutatif.

2.14. THEOREME. *Si X est un CW-complexe connexe, on a $conil X \leq cat X$.*

DEMONSTRATION. G.W. Whitehead [40] a remarqué que, si X est un CW-complexe connexe, on a $cat X \leq k-1$ si et seulement s'il existe une application $f: X \to T$ telle que $j \circ f \simeq \Delta$ où $j: T \to X^k$ est l'inclusion. Evidemment, si une telle application existe, la composition

$$X \xrightarrow{\Delta} X^k \xrightarrow{p_k} X^{(k)}$$

est homotope à l'application constante. A présent, l'énoncé résulte immédiatement de la commutativité homotopique du diagramme

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\Delta"] & X^k \arrow[r, "j_1\times\cdots\times j_k"] \arrow[d, "p_k"] & ({}^kX)^k \arrow[r, "e^k"] \arrow[d, "p_k"] & (\Omega\Sigma({}^kX))^k \arrow[r, "\varphi_k"] \arrow[d, "p_k"] & \Omega\Sigma({}^kX) \\
& X^{(k)} \arrow[r, "j_1\#\cdots\# j_k"] & ({}^kX)^{(k)} \arrow[r, "e^{(k)}"] & (\Omega\Sigma({}^kX))^{(k)} \arrow[ur, "\gamma_k"'] &
\end{tikzcd}$$

et de la proposition 2.12.

2.15. REMARQUE. Soit Y le complexe obtenu en enlevant une 3-cellule ouverte d'un espace de Poincaré, i.e. d'une variété close non simplement connexe qui est une 3-sphère homologique. Puisque Y n'est pas contractile, il résulte de [18, th. 1.1] que $cat X \geq n$ si $X = Y^n$. D'autre part, ΣX est simplement connexe et acyclique, donc contractile, donc $conil X = 0$.

2.16. LEMME. *Si X est un CW-complexe connexe, $\operatorname{conil} X \leq k-1$ si et seulement si la composition $X \xrightarrow{\Delta} X^k \xrightarrow{p_k} X^{(k)} \xrightarrow{e} \Omega\Sigma(X^{(k)})$ est homotope à l'application constante.*

DEMONSTRATION. Remarquons d'abord que toute application $f: A \to \Omega B$ peut s'étendre à une application $g: \Omega\Sigma A \to \Omega B$. En effet, en désignant par $p: \Sigma\Omega B \to B$ l'application définie par $p(t, \omega) = \omega(t)$, on prend pour g la composition

$$\Omega\Sigma A \xrightarrow{\Omega\Sigma f} \Omega\Sigma\Omega B \xrightarrow{\Omega p} \Omega B$$

et l'on vérifie aisément que $g \circ e = f$, où $e: A \to \Omega\Sigma A$ désigne le plongement canonique. Introduisons à présent le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\Delta"] & X^k \arrow[rr, "\varphi_k \circ e^k \circ (j_1 \times \ldots \times j_k)"] \arrow[d, "p_k"'] & & \Omega\Sigma({}^k X) \arrow[d, shift left, "r"] \\
& X^{(k)} \arrow[rr, "e"] \arrow[urr] & & \Omega\Sigma(X^{(k)}) \arrow[u, shift left, "d"]
\end{tikzcd}$$

dans lequel d est obtenue grâce à la remarque précédente. D'après le théorème de Hilton-Milnor [21; 28; 2], il existe une application r telle que $r \circ d \simeq 1$. Il en résulte que la composition horizontale est homotope à l'application constante si et seulement si $e \circ p_k \circ \Delta \simeq 0$, et l'énoncé résulte de la proposition 2. 12.

2.17. THEOREME. *Soit X un CW-complexe connexe et R un anneau commutatif. Si $u_i \in H^*(X; R)$, $\dim u_i > 0$, et $\operatorname{conil} X \leq k-1$, alors $u_1 \cup \ldots \cup u_k = 0$.*

DEMONSTRATION. Il suffit de remarquer que tout élément k-décomposable par le cup-produit se trouve dans $(p_k \circ \Delta)^* H^*(X^{(k)}; R)$ et que $e^*: H^*(\Omega\Sigma(X^{(k)}); R) \to H^*(X^{(k)}; R)$ est un épimorphisme (pour le voir, passer à la suspension de e !). Donc, si $e \circ p_k \circ \Delta \simeq 0$, on a

$$(e \circ p_k \circ \Delta)^* = 0 \quad \text{et} \quad u_1 \cup \ldots \cup u_k = 0.$$

Remarquons encore que le lemme 2. 16 est équivalent au

2.18. THEOREME. *Si X est un CW-complexe connexe, $conil\, X \leq k-1$ si et seulement si la composition*

$$\Sigma X \xrightarrow{\Sigma \Delta} \Sigma(X^k) \xrightarrow{\Sigma p_k} \Sigma(X^{(k)})$$

est homotope à l'application constante.

Dans [5], Berstein et Hilton ont défini $w\,cat\, X$ (la catégorie faible de X) comme le plus petit des entiers $k \geq 0$ tels que la composition

$$X \xrightarrow{\Delta} X^{k+1} \xrightarrow{p_{k+1}} X^{(k+1)}$$

soit homotope à l'application constante. En utilisant la définition de la catégorie due à G. W. Whitehead [40] et le théorème 2.18 on obtient la

2.19. PROPOSITION. *Si X est un CW-complexe connexe, on a*

$$conil\, X \leq w\, cat\, X \leq cat\, X.$$

Nous nous proposons à présent d'étudier les cas où ces inégalités deviennent nécessairement des égalités.

2.20. THEOREME. *Soit X un CW-complexe $(n-1)$-connexe $(n \geq 1)$ et supposons $conil\, X \leq k-1$ $(k \geq 1)$. Si $dim\, X \leq 2kn-2$, alors $w\,cat\, X \leq k-1$; si $dim\, X \leq (k+1)n-2$, alors $cat\, X \leq k-1$.*

DEMONSTRATION. Rappelons que l'application

$$\Sigma : \pi(X, Y) \to \pi(\Sigma X, \Sigma Y)$$

est biunivoque si Y est $(q-1)$-connexe et $dim\, X \leq 2q-2$. Puisque X est $(n-1)$-connexe, $X^{(k)}$ est $(kn-1)$-connexe; posons $Y = X^{(k)}$ et $q = kn$. Puisque $conil\, X \leq k-1$, d'après le théorème 2.18 l'application $\Sigma(p_k \circ \Delta) : \Sigma X \to \Sigma(X^{(k)})$ est homotope à l'application constante et d'après la remarque précédente, il en est de même de l'application $p_k \circ \Delta$, i.e. $w\,cat\, X \leq k-1$. Supposons à présent que $dim\, X \leq (k+1)n-2$. Si $n = 1$ le résultat est trivial car il est classique que $dim\, X \leq k-1$ entraîne $cat\, X \leq k-1$. On peut donc admettre que $n \geq 2$. Grâce à une équivalence homotopique e l'espace X^k se plonge dans un espace W, fibré par une application p sur $X^{(k)}$, et le diagramme

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "j"] \arrow[d, "d"'] & X^k \arrow[r, "p_k"] \arrow[d, "e"] & X^{(k)} \arrow[d, "1"] \\ F \arrow[r, "i"] & W \arrow[r, "p"] & X^{(k)} \end{tikzcd}$$

dans lequel F est la fibre de p, i l'application d'inclusion et d est induite par e, est commutatif. Si $k = 1$, alors ΣX est contractible et, puisque $n \geq 2$, X l'est aussi. On peut donc admettre $k \geq 2$ et l'on a $kn - 2 \geq n-1$; la suite d'homotopie de la fibration $F \to W \to X^{(k)}$ montre alors que F est $(n-1)$- connexe. Puisque $X^{(k)}$ est $(kn-1)$- connexe, le théorème de Serre [35] entraîne que $p_* : H_q(W, F) \to H_q(X^{(k)}, *)$ est un monomorphisme, pour $q < n + kn = (k+1)n$ et un épimorphisme pour $q \leq (k+1)n$. D'autre part, on sait que $(p_k)_* : H_q(X^k, T) \to H_q(X^{(k)}, *)$ est un isomorphisme pour tout $q \geq 0$. Dès lors, le lemme des cinq appliqué au diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H_{q+1}(X^k) \arrow[r] \arrow[d] & H_{q+1}(X^k, T) \arrow[r] \arrow[d] & H_q(T) \arrow[r] \arrow[d, "d_*"] & H_q(X^k) \arrow[r] \arrow[d] & H_q(X^k, T) \arrow[d] \arrow[dr] & \\ H_{q+1}(W) \arrow[r] & H_{q+1}(W, F) \arrow[r] & H_q(F) \arrow[r] & H_q(W) \arrow[r] & H_q(W, F) \arrow[r] & H_q(X^{(k)}, *) \end{tikzcd}$$

montre que d_* est un isomorphisme pour $q < (k+1)n-1$. Puisque T est aussi simplement connexe, il résulte du théorème de Whitehead que d_q : $\pi_q(T) \to \pi_q(F)$ est un monomorphisme pour $q < (k+1)n-2$ et un épimorphisme pour $q < (k+1)n-1$, donc $\pi_q(F, T) = 0$ pour $q \leq (k+1)n-2$. D'après la première partie, déjà prouvée, du théorème on a $w\,cat\,X \leq k-1$, donc $p_k \circ \Delta \simeq 0$. Il en résulte $p \circ e \circ \Delta \simeq 0$ et il existe donc une application $f : X \to F$ telle que $i \circ f \simeq e \circ \Delta$. Puisque $dim\,X \leq (k+1)n-2$ et $\pi_q(F, T) = 0$ pour $q \leq (k+1)n-2$, il existe $g : X \to T$ telle que $d \circ g \simeq f$. Dès lors,

$$e \circ j \circ g \simeq i \circ d \circ g \simeq i \circ f \simeq e \circ \Delta$$

et puisque e est une équivalence homotopique, $j \circ g \simeq \Delta$ i.e., d'après la définition de la catégorie due à G. W. Whitehead [40], $cat X \leq k-1$.

Nous dirons que ΣX est homotopiquement commutative si $\varepsilon \circ \sigma \simeq \sigma$ où $\sigma : \Sigma X \to \Sigma X \vee \Sigma X$ désigne la comultiplication et

$$\varepsilon : \Sigma X \times \Sigma X \to \Sigma X \times \Sigma X$$

l'application définie par

$$\varepsilon(y, *) = (*, y), \quad \varepsilon(*, y) = (y, *).$$

2.21. LEMME. *ΣX est homotopiquement commutative si et seulement si $conil X \leq 1$.*

DEMONSTRATION. On vérifie aisément que $\varepsilon \circ \sigma \circ \tau = (\tau \vee \tau) \circ \sigma$. En outre, selon la définition de la structure de groupe de $\pi(\Sigma X, \Sigma X \vee \Sigma X)$, on a

$$\{\psi_2\} = \{(\tau \vee \tau) \circ \sigma\}\{(1 \vee 1) \circ \sigma\} = \{\varepsilon \circ \sigma \circ \tau\}\{(1 \vee 1) \circ \sigma\} =$$
$$= \{\varepsilon \circ \sigma\}^{-1} . \{\sigma\}.$$

Il en résulte que $\psi_2 \simeq 0$ si et seulement si $\{\varepsilon \circ \sigma\} = \{\sigma\}$.

En posant $k = 2$ dans le théorème 2.20 et en utilisant le lemme 2.21, on obtient le

2.22. COROLLAIRE. *Soit X un CW-complexe $(n-1)$-connexe $(n \geq 1)$ de dimension $\leq 3n-2$. Si la suspension ΣX est homotopiquement commutative, alors $cat X \leq 1$.*

Ce dernier résultat peut être interprété comme le dual, au sens de Eckmann et Hilton, d'un théorème récent de M. Sugawara [39] : *Si X est un CW-complexe $(n-1)$-connexe, si $\pi_q(X) = 0$ pour $q > 3n-2$ et si ΩX est homotopiquement commutatif, alors X possède une multiplication continue dont le point-base est l'élément neutre.*

En effet, X possède une telle multiplication si et seulement si il existe une application μ qui rende le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \vee X \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & X \times X \arrow[dl, "\mu"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

homotopiquement commutatif. D'autre part, selon la définition de la catégorie donnée par G.W. Whitehead [40] , on a $cat X \leq 1$ si et seulement s'il existe une application σ qui rende le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X \times X & & X \quad X \arrow[ll, "j"'] \\
& X \arrow[ul, "\Delta"] \arrow[ur, "\sigma"'] &
\end{tikzcd}$$

homotopiquement commutatif.

3. La cocatégorie.

La principale difficulté qui se présente lorsqu'on essaye de définir une notion qui soit la duale, au sens d'Eckmann-Hilton [10], de la catégorie de Lusternik-Schnirelmann est due à ce que l'on ignore si la notion de recouvrement ouvert admet un dual. Dès lors afin de trouver le dual de la catégorie, on est conduit à introduire un nouvel invariant, la catégorie inductive, qui est essentiellement équivalent à la catégorie classique et dont la définition, tout en évitant l'emploi de la notion de recouvrement, se laisse parfaitement dualiser.

Sauf mention contraire, tous les espaces considérés seront munis de points-base et toutes les applications continues ainsi que toutes les homotopies respecteront les points-base. On dit que P domine Y s'il existe des applications $f : Y \to P$ et $g : P \to Y$ telles que $g \circ f \simeq 1_Y$ (l'application identique de Y). Rappelons qu'on appelle cofibration toute suite $A \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\eta} P$ d'espaces et d'applications où P est l'espace quotient obtenu de X en identifiant $\alpha(A)$ à un point, η est l'application canonique, et α a la propriété d'extension des homotopies, i. e. pour tout espace E, toute homotopie $h_t : A \to E$ et toute application $k : X \to E$ telle que $k \circ \alpha = h_o$ il existe une homotopie $k_t : X \to E$ telle que $k_o = k$ et $k_t \circ \alpha = h_t$. On peut prouver que α est injective; d'ailleurs, dans ce qui suit, on pourrait toujours remplacer A par $\alpha(A)$ et α par l'inclusion de $\alpha(A)$ dans X.

La catégorie inductive $ind\,cat\,Y$ d'un espace topologique Y est l'entier non-négatif donné par la suivante

3.1. DEFINITION. *$\mathrm{ind\,cat}\, Y = 0$ si et seulement si Y est contractile; $\mathrm{ind\,cat}\, Y \leq n+1$ si et seulement s'il existe une cofibration $A \to X \to P$ telle que P domine Y et $\mathrm{ind\,cat}\, X \leq n$. On pose $\mathrm{ind\,cat}\, Y = n$ s'il est vrai que $\mathrm{ind\,cat}\, Y \leq n$ mais faux que $\mathrm{ind\,cat}\, Y \leq n-1$. Si pour tout $n \geq 0$ il est faux que $\mathrm{ind\,cat}\, Y \leq n$, on pose $\mathrm{ind\,cat}\, Y = \infty$.*

On propose de comparer la catégorie inductive à la catégorie classique.

3.2. LEMME. *Si Y est un CW-complexe simplicial connexe, alors*

$$\mathrm{ind\,cat}\, Y \leq \mathrm{cat}\, Y.$$

En outre, si $1 \leq \mathrm{cat}\, Y < \infty$, il existe une CW-paire simpliciale (X, A) telle que X soit connexe, $\mathrm{cat}\, X \leq \mathrm{cat}\, Y - 1$, et l'espace quotient X/A obtenu de X en identifiant A à un point domine Y.

DEMONSTRATION. Si $\mathrm{cat}\, Y = 0$, alors Y est « librement » (i.e. avec point-base mobile) contractile; il résulte de [32, *(A)* et *(E)*, p. 333] que Y est aussi contractile *rel.* * (i.e. avec point-base fixe), donc, $\mathrm{ind\,cat}\, Y = 0$. Supposons à présent que le lemme ait été démontré pour tout CW-complexe simplicial de catégorie $\leq n$ et supposons $\mathrm{cat}\, Y = n+1$. Dans une sous-division assez fine de Y, il existe alors des sous-complexes Y_i librement contractiles dans Y et tels que

$$Y = Y_o \cup \ldots \cup Y_n \cup Y_{n+1}.$$

Puisque Y est connexe, on peut évidemment supposer que le point-base de Y est contenu dans chacun des Y_i. Soit R le CW-complexe simplicial connexe obtenu en attachant à Y un cône (non-réduit) ΓY_i sur chacun des Y_i; on a donc

$$R = \Gamma Y_o \cup \ldots \cup \Gamma Y_n \cup \Gamma Y_{n+1} \text{ et } \Gamma Y_i \cap \Gamma Y_j = Y_i \cap Y_j.$$

Puisque les Y_i sont librement contractiles dans Y, l'inclusion $Y_i \to Y$ peut évidemment être prolongée à ΓY_i; il en résulte que Y est rétracte de R. Donc, muni du même point-base * que son sous-complexe Y,

R domine Y. Puisque ΓY_{n+1} est librement contractile en soi, il résulte de [43, théorème 12] que R et le CW-complexe $P = R/\Gamma Y_{n+1}$ ont le même type d'homotopie libre; les deux étant connexes, il résulte de [32, (A) et (E), p. 333] qu'ils ont aussi le même type d'homotopie «basée». Soit à présent

$$X = \Gamma Y_o \cup \ldots \cup \Gamma Y_n \quad \text{et} \quad A = X \cap \Gamma Y_{n+1}.$$

On a $* \in A \subset X$ et l'on prend $*$ comme point-base dans A et X. Evidemment, X est un sous-complexe de R et l'inclusion $X \to R$ induit un homéomorphisme de X/A sur P. Par transitivité, il résulte que X/A domine Y.

Puisque la CW-paire simpliciale (X, A) a la propriété d'extension des homotopies libres, donc aussi de celles basées, la suite

$$A \to X \to X/A$$

est une cofibration et, selon 3.1, on a $ind\,cat\,Y \leq 1 + ind\,cat\,X$.

Puisque chaque cône ΓY_i est connexe et $* \in Y_i$ pour tout i, le CW-complexe simplicial X est connexe. En outre, puisque chaque cône ΓY_i est librement contractile en soi, on voit facilement que $cat\,X \leq n$ et, d'après l'hypothèse de récurrence, on a $ind\,cat\,X \leq n$, donc

$$ind\,cat\,Y \leq 1 + n = cat\,Y,$$

ce qui prouve le lemme.

Dans l'énoncé suivant $W\text{-}cat\,Y$ désigne la catégorie au sens de G.W. Whitehead [40] de l'espace Y; elle est égale au plus petit des entiers $n \geq 0$ pour lesquels il existe des sous-ensembles arbitraires $B_i \subseteq Y$ et des homotopies $h_i : Y \times I \to Y$, $0 \leq i \leq n$, tels que $Y = B_o \cup \ldots \cup B_n$, $h_i(y, 0) = y$ et $h_i(B_i \times 1) = h_i(*, t) = *$.

3.3. LEMME. *Pour tout espace Y on a $W\text{-}cat\,Y \leq ind\,cat\,Y$.*

DEMONSTRATION. Si $ind\,cat\,Y = 0$, alors Y est contractile et

$$W\text{-}cat\,Y = 0.$$

Supposons le lemme démontré pour tout espace de catégorie inductive $\leq n$. Supposons que $ind\,cat\,Y = n+1$ et soit $A \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\eta} P$ une cofibration telle que P domine Y et $ind\,cat\, X = n$. D'après [32, Satz 2, p. 306] P a le type d'homotopie de l'espace $Q = X \cup CA$ obtenu en attachant à X un cône (réduit) sur le sous-ensemble $A \subset X$. Il en résulte que Q domine Y et $W\text{-}cat\, Y \leq W\text{-}cat\, Q$. D'autre part, d'après l'hypothèse de récurrence on a $W\text{-}cat\, X \leq n$ et il existe des sous-ensembles $A_i \subset X$ et des homotopies $h_i : X \times I \to X$, $0 \leq i \leq n$, tels que

$$X = A_o \cup \ldots \cup A_n, \quad h_i(x, 0) = x \text{ et } h_i(A_i \times 1) = h_i(*, t) = * .$$

D'après [32, Hilfssatz 6, p. 308], la paire (Q, X) a la propriété d'extension des homotopies et il en résulte l'existence de $n+1$ homotopies $H_i : Q \times I \to Q$ telles que $H_i(q, 0) = q$ et $H_i(A_i \times 1) = H_i(*, t) = *$. Finalement, puisque la paire (X, A) a aussi la propriété d'extension des homotopies, d'après [32, Hilfssatz 4, p. 306] il existe une homotopie $H_{n+1} : Q \times I \to Q$ telle que $H_{n+1}(q, 0) = q$, et $H_{n+1}(CA \times 1) = H_{n+1}(*, t) = *$. L'existence et les propriétés des $n+2$ homotopies $H_o, \ldots, H_{n+1}$ prouve donc, en effet, que $W\text{-}cat\, Q \leq n+1$ et le lemme est prouvé.

A présent, soit $f : Y \to X$ une application continue arbitraire. On définit $cat\, f$ comme le plus petit des entiers $n \geq 0$ pour lesquels il existe des ouverts V_i tels que $Y = V_o \cup \ldots \cup V_n$ et $f \mid V_i \simeq 0$. Introduisons aussi la catégorie inductive d'une application par la

3.4. DEFINITION. *Ind cat f est le plus petit des entiers $n \geq 0$ pour lesquels il existe un espace Z et des applications $\varphi : Z \to X$ et $\psi : Y \to Z$ tels que $ind\,cat\, Z = n$ et $f = \varphi \circ \psi$; si de tels entiers n'existent pas, on pose $ind\,cat\, f = \infty$.*

3.5. THEOREME. *Si Y a le type d'homotopie d'un CW-complexe connexe, alors $cat\, Y = ind\,cat\, Y$. Si X et Y ont tous deux les types d'homotopie de CW-complexes connexes, alors $cat\, f = ind\,cat\, f$ pour toute application $f : Y \to X$.*

DEMONSTRATION. Si L est un CW-complexe connexe, on a $W\text{-}cat\, L = cat\, L$. De même, tout CW-complexe connexe a le type d'homotopie d'un CW- complexe connexe simplicial. Puisque la catégorie inductive d'un espace est un invariant de son type d'homotopie, la première partie du théorème résulte des remarques précédentes et des lemmes 3.2 et 3.3.

Supposons à présent que $indcat\, f = n$ et soit K un CW- complexe connexe qui domine X grâce à deux applications $\alpha : X \to K$ et $\beta : K \to X$ telle que $\beta \circ \alpha \simeq 1_X$. Selon la définition 3.4 il existe un espace Z et deux applications $\varphi : Z \to X$ et $\psi : Y \to Z$ tels que $indcat\, Z = n$ et $f = \varphi \circ \psi$. Il résulte du lemme 3.3 que $W\text{-}cat\, Z \leq n$ et on voit facilement que cela entraîne l'existence de sous-ensembles $B_i \subset Y$ et d'homotopies $h_i : Y \times I \to Z$, $0 \leq i \leq n$, tels que $Y = B_o \cup \ldots \cup B_n$ et

$$h_i(y, 0) = \psi(y),\ h_i(B_i \times 1) = h_i(*, t) = * .$$

Introduisons les homotopies $k_i = \alpha \circ \varphi \circ h_i : Y \times I \to K$ et soit N un voisinage de $*$ dans K contractile dans K. Alors, l'ensemble

$$V_i = \{ y \in Y \mid h_i(y, 1) \in N \}$$

est ouvert dans Y, il contient B_i, et $\alpha \circ f \mid V_i$ est librement homotope à une application constante. Il en résulte que $cat\, \alpha \circ f \leq n$. Il est clair que $cat\, \beta \circ \alpha \circ f \leq cat\, \alpha \circ f$ et, puisque $\beta \circ \alpha \circ f \simeq f$, alors que la catégorie d'une application ne dépend que de sa classe d'homotopie, on a finalement $cat\, f \leq n$.

Réciproquement, supposons que $cat\, f \leq n$ et soit K un CW- complexe connexe simplicial qui domine Y grâce à deux applications $\alpha : Y \to K$ et $\beta : K \to Y$ telles que $\beta \circ \alpha \simeq 1_Y$. On a $cat\, f \circ \beta \leq cat\, f$ et, dans une sous- division assez fine de K, on trouve facilement des sous-complexes K_i, $0 \leq i \leq n$, tels que $K = K_o \cup \ldots \cup K_n$ et $f \circ \beta \mid K_i \simeq 0$ (librement). Soit R le CW- complexe simplicial connexe obtenu en attachant à K un cône (non-réduit) ΓK_i sur chaque K_i; on a donc

$$R = \Gamma K_o \cup \ldots \cup \Gamma K_n \text{ et } \Gamma K_i \cap \Gamma K_j = K_i \cap K_j .$$

Choisissons le point $* \in K$ comme point-base de R et soit $\theta : K \to R$ l'inclusion. Evidemment, $f \circ \beta \mid K_i$ se prolonge à ΓK_i; ceci fournit une application $g : R \to X$ telle que $g \circ \theta = f \circ \beta$. D'autre part, on voit facilement que $cat\, R \leq n$ et, d'après le lemme 3.2, on obtient $ind\, cat\, R \leq n$. Il en résulte facilement que $ind\, cat\, g \circ \theta \circ \alpha \leq n$. En outre, on a

$$g \circ \theta \circ \alpha = f \circ \beta \circ \alpha \quad \text{et} \quad f \circ \beta \circ \alpha \simeq f\,;$$

on peut facilement prouver (et l'on prouvera de façon détaillée le dual) que la catégorie inductive dépend uniquement de la classe d'homotopie d'une application et ceci termine la démonstration du théorème.

3.6. REMARQUE. Il est facile de prouver par récurrence que $ind\, cat\, Y = \infty$ si Y est non-connexe. De même, toute catégorie « basée », raisonnablement définie, comme par exemple la W-catégorie, est infinie pour des espaces non-connexes. De cette façon la première partie du théorème 3.5 vaut aussi pour des espaces non connexes.

Dans le cadre de la dualité d'Eckmann-Hilton le dual d'une cofibration est une fibration, c'est-à-dire une suite $F \xrightarrow{\eta} E \xrightarrow{p} B$ d'espaces et d'applications, où $F = p^{-1}(*)$, η est l'inclusion, et p a la propriété de relèvement des homotopies, i.e. pour tout espace X, toute homotopie $h_t : X \to B$ et toute application $k : X \to E$ telle que $p \circ k = h_0$, il existe une homotopie $k_t : X \to E$ avec $k_0 = k$ et $p \circ k_t = h_t$. Il est évident que la définition 3.1 se laisse parfaitement dualiser et, vu le théorème 3.5, on peut affirmer que le dual de la catégorie de Lusternik-Schnirelmann est la cocatégorie donnée par la suivante

3.7. DEFINITION. *$cocat\, X = 0$ si et seulement si l'espace X est contractile; $cocat\, X \leq n+1$ si et seulement s'il existe une fibration $F \to E \to B$ telle que F domine X et $cocat\, E \leq n$. On pose $cocat\, X = n$ s'il est vrai que $cocat\, X \leq n$, mais faux que $cocat\, X \leq n-1$. Si pour tout $n \geq 0$ il est faux que $cocat\, X \leq n$, on pose $cocat\, X = \infty$.*

Evidemment

3.8. PROPOSITION. *Si Y domine X, $cocat\, X \leq cocat\, Y$; si X et Y ont le même type d'homotopie (basée!), $cocat\, X = cocat\, Y$.*

Interprétons à présent la propriété $cocat\, X \leq 1$.

3.9. THEOREME. *$cocat X \leq 1$ si et seulement si X est dominé par $\Omega\Sigma X$.*

DEMONSTRATION. Considérons la fibration $\Omega\Sigma X \to \mathcal{E}\Sigma X \to \Sigma X$, où $\mathcal{E}\Sigma X$ désigne l'espace des chemins dans la suspension ΣX qui commencent au point-base. Puisque $\mathcal{E}\Sigma X$ est contractile on a $cocat\, \mathcal{E}\Sigma X = 0$, donc $cocat X \leq 1$ si X est dominé par $\Omega\Sigma X$. Réciproquement, supposons que $cocat X \leq 1$ et soit $F \to E \to B$ une fibration telle que F domine X et $cocat E = 0$. Alors E est contractile et F a le type d'homotopie de ΩB. Il existe donc des applications $\varphi : X \to \Omega B$ et $\psi : \Omega B \to X$ telles que $\psi \circ \varphi \simeq 1_X$. Soit $e : X \to \Omega\Sigma X$ le plongement défini par $e(x)(t) = (t, x)$ et soit $p : \Sigma\Omega B \to B$ la projection définie par $p(t, \omega) = \omega(t)$. La composition

$$X \xrightarrow{e} \Omega\Sigma X \xrightarrow{\Omega\Sigma\varphi} \Omega\Sigma\Omega B \xrightarrow{\Omega p} \Omega B \xrightarrow{\psi} X$$

est égale à $\psi \circ \varphi$ ce qui prouve que, en effet, $\Omega\Sigma X$ domine X.

On a déjà remarqué que les diagrammes

$$\begin{tikzcd} X \vee X \arrow[dr, "j"'] & & X \arrow[ll, "\sigma"'] \arrow[dl, "\Delta"] \\ & X \times X & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \times X \arrow[rr, "\mu"] & & X \\ & X \vee X \arrow[ul, "j"] \arrow[ur, "\Delta"'] & \end{tikzcd}$$

sont duaux; le premier exprime le fait que $W\text{-}cat X \leq 1$ ce qui, tout au moins, si X est un CW-complexe connexe, est équivalent à $cat X \leq 1$; le second exprime le fait que X possède une multiplication continue dont le point-base est élément neutre homotopique.

3.10. PROPOSITION. *Si $cocat X \leq 1$, alors X possède une multiplication continue dont le point-base est élément neutre homotopique; réciproquement, si X est un CW-complexe dénombrable et possède une multiplication continue dont le point-base est élément neutre homotopique, alors $cocat X \leq 1$.*

DEMONSTRATION. Soit μ la multiplication dans $\Omega\Sigma X$. Si $cocat X \leq 1$, alors il existe des applications $\varphi : X \to \Omega\Sigma X$ et $\psi : \Omega\Sigma X \to X$ telles que $\psi \circ \varphi \simeq 1_x$ et la multiplication dans X est donnée par la composition

$$X \times X \xrightarrow{\varphi \times \varphi} \Omega\Sigma X \times \Omega\Sigma X \xrightarrow{\mu} \Omega\Sigma X \xrightarrow{\psi} X.$$

La réciproque résulte de ce que, dans les conditions de l'énoncé, X est rétracte du produit réduit infini de James qui, on sait, est homotopiquement équivalent à $\Omega\Sigma X$.

Soit à présent X_α une famille quelconque d'espaces topologiques et soit ΠX_α son produit cartésien. On prouve facilement que

3.11. PROPOSITION. *$cocat \Pi X_\alpha = sup\, cocat X_\alpha$.*

Désignons par Y^X l'espace des applications continues de X dans Y qui respectent les points-base, muni de la topologie de la convergence compacte. Si $* \in A \subset X$ et $* \in B \subset Y$, on désigne par $(Y, B)^{(X, A)}$ le sous-espace des applications $(X, A) \to (Y, B)$. On prend l'application constante comme point-base dans tout espace de fonctions.

3.12. THEOREME. *Soit Y un espace arbitraire. Si K est un CW-complexe connexe, on a $cocat\, Y^K \leq cat\, K$; si K est un espace séparé localement compact, on a $cocat\, Y^K \leq cocat\, Y$.*

DEMONSTRATION. L'espace Y étant fixé, le type d'homotopie de Y^K ne dépend que du type d'homotopie de l'espace K; pour prouver la première partie de l'énoncé on peut donc supposer que K est un CW-complexe connexe simplicial.

Si $cat\, K = 0$, alors K est librement contractile donc, d'après [32, *(A)* et *(E)*, p. 333], K est aussi contractile *rel.* $*$ ce qui, évidemment, entraîne que $cocat\, Y^K = 0$. Supposons à présent que $cat\, K = n+1$. D'après le lemme 3.2 il existe une CW-paire simpliciale (X, A) telle que X/A domine K, X est connexe, et $cat\, X \leq n$.

La suite

$$(Y, *)^{(X, A)} \xrightarrow{\eta} Y^X \xrightarrow{p} Y^A,$$

où η est l'inclusion et $p(f) = f \mid A$, est une fibration. En effet, soit E un espace arbitraire et soit $h : E \times I \to Y^A$ et $k : E \to Y^X$ des applications telles que

$$h(*, t) = *, \ k(*) = *, \text{ et } (p \circ k)(e) = h(e, 0)$$

pour tout $e \in E$. Prenons $(*, 0)$ comme point-base dans $X \times 0$, $A \times I$, et $X \times I$. Puisque A est un CW-complexe et I est séparé compact, d'après [31, lemme 3 et théorème 4] l'application $h' : E \to Y^{A \times I}$ définie par $h'(e)(a, t) = h(e, t)(a)$ est continue. En outre, pour tout $e \in E$, on peut définir une application continue $\Phi(e) : A \times I \cup X \times 0 \to Y$ en posant

$$\Phi(e)(a, t) = h'(e)(a, t) \text{ et } \Phi(e)(x, 0) = k(e)(x).$$

Il en résulte une application $\Phi : E \to Y^{A \times I \cup X \times 0}$ dont on constate la continuité de la façon suivante : si

$$\Phi(e) \in (C, V) = \{ f \mid f(C) \subset V \}$$

avec C compact dans $A \times I \cup X \times 0$ et V ouvert dans Y, alors

$$h'(e) \in (C_1, V) \text{ et } k(e) \in (C_2, V)$$

où

$$C_1 = C \cap (A \times I) \text{ et } C_2 \times 0 = C \cap (X \times 0);$$

puisque h' et k sont continues, il existe des voisinages N_1 et N_2 de e dans E tels que $h'(N_1) \subset (C_1, V)$ et $k(N_2) \subset (C_2, V)$; il s'ensuit que $N = N_1 \cap N_2$ est un voisinage de e dans E tel que $\Phi(N) \subset (C, V)$. Ensuite, pour toute CW-paire (X, A) il existe une rétraction

$$r : X \times I \to A \times I \cup X \times 0$$

et l'application $r^* : Y^{A \times I \cup X \times 0} \to Y^{X \times I}$ définie par $r^*(f) = f \circ r$ est continue. L'application $H : E \times I \to Y^X$ définie par

$$H(e, t)(x) = (r^* \circ \Phi)(e)(x, t)$$

est continue et satisfait

$$H(*, t) = *, \ H(e, 0) = k(e), \ p \circ H = h.$$

Puisque, évidemment, $(Y, *)^{(X,A)} = \overset{-1}{p}(*)$, la suite introduite plus haut est en effet une fibration. Puisque X est un CW-complexe connexe simplicial de catégorie $\leq n$, on peut admettre comme hypothèse de récurrence que $cocat\, Y^X \leq n$. De même puisque K est dominé par X/A, Y^K est dominé par $Y^{X/A}$ et la relation $cocat\, Y^K \leq n+1$ sera établie pourvu que l'on exhibe un homéomorphisme de $Y^{X/A}$ sur $(Y, *)^{(X,A)}$. A cet effet, soit $\varphi: (X, A) \to (X/A, *)$ l'application canonique. L'application $\varphi^*: Y^{X/A} \to (Y, *)^{(X,A)}$ est continue et bijective. Soit $\psi = (\varphi^*)^{-1}$. On peut considérer X/A comme un CW-complexe [43, p. 237], ce qui entraîne que tout compact $C \subset X/A$ est contenu dans un sous-complexe fini qui est image par φ d'un sous-complexe fini de X : il existe donc un compact $D \subset X$ tel que $\varphi(D) = C$. Soit V un ouvert quelconque de Y. Si $g \in (Y, *)^{(X,A)}$ et $f = \psi(g) \in (C, V)$, alors

$$g \in (D, V) \text{ et } \psi((D, V) \cap (Y, *)^{(X,A)}) \subset (C, V)$$

de sorte que ψ est continue et φ^* est un homéomorphisme.

La seconde partie du théorème se démontre par récurrence sur l'entier $cocat\, Y$ en utilisant le fait que, si $F \to E \to B$ est une fibration, il en est de même de la suite $F^X \to E^X \to B^X$.

Soit à présent $K(X)$ le polytope singulier de l'espace X et soit $k: K(X) \to X$ l'application canonique qui induit une bijection $\pi_o(K(X)) \approx \pi_o(X)$ et des isomorphismes $\pi_q(K(X), a) \approx \pi_q(X, k(a))$ pour tout $a \in K(X)$ et tout $q \geq 1$; π_o désigne comme d'habitude l'ensemble des composantes connexes par arcs. On peut prendre pour $K(X)$ la réalisation géométrique $|S(X)|$ du complexe singulier de X [27], ou bien le polytope singulier de X défini dans [44, chap. V]. Il existe dans $K(X)$ une unique 0-cellule e^o telle que $k(e^o) = *$ et l'on prendra e^o comme point-base de $K(X)$.

3. 13. PROPOSITION. $cocat\, K(X) \leq cocat\, X$.

DEMONSTRATION. Si $cocat\, X = 0$, alors X est contractile; il en est de même de $K(X)$ et $cocat\, K(X) = 0$. Supposons à présent que 3. 13 soit vraie pour tout espace de cocatégorie $\leq n$ et supposons $cocat\, X = n+1$.

Il existe une fibration, représentée par la première ligne du diagramme

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\eta"] & E \arrow[rr, "p"] & & B \\
& & K(E) \arrow[ul, "k"'] \arrow[r, "K(p)"] & K(B) \arrow[u, "k"'] \\
R \arrow[uu, "\varphi"] \arrow[r, "\varepsilon"] & Z \arrow[uu, "\Phi"] \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[rr, "d"] & & C \arrow[u, "\rho"']
\end{tikzcd}$$

telle que F domine X et $cocat\, E = n$. Alors $K(F)$ domine $K(X)$ et, selon l'hypothèse de récurrence, $cocat\, K(E) \leq n$.

D'après [44, chap. V], il existe une application cellulaire $K(p)$ qui rend commutatif le trapèze supérieur. D'après [43, §8], son « mapping » - cylindre réduit C est un CW- complexe dans lequel $K(E)$ et $K(B)$ se trouvent plongés de façon évidente. La rétraction ρ de C sur $K(B)$ est une équivalence homotopique de sorte que $k \circ \rho$ induit des isomorphismes de groupes d'homotopie en toutes dimensions ≥ 0. Soit Z l'espace des chemins λ dans C qui commencent dans le sous- complexe $K(E)$ de C, et soit R le sous- espace constitué par les $\lambda \in Z$ qui finissent au point- base de C. Soit ε l'inclusion et définissons d par $d(\lambda) = \lambda(1)$. Classiquement, la ligne inférieure du diagramme est une fibration. Définissons σ par $\sigma(\lambda) = \lambda(0)$ et définissons une homotopie $h_t : Z \to K(B)$ par $h_t(\lambda) = \rho(\lambda(t))$. Alors, σ est une équivalence homotopique et $h_0 = K(p) \circ \sigma$, $h_1 = \rho \circ d$. Puisque la ligne supérieure du diagramme est une fibration, la propriété de relèvement des homotopies fournit une application Φ homotope à $k \circ \sigma$ et telle que $p \circ \Phi = (k \circ \rho) \circ d$. A son tour, l'application Φ induit une application φ telle que $\eta \circ \varphi = \Phi \circ \varepsilon$. Nous allons prouver que φ induit des isomorphismes

$$\varphi_q : \pi_q(R, r) \approx \pi_q(F, \varphi(r))$$

pour tout $r \in R$ et tout $q \geq 0$; la considération de points arbitraires $r \in R$ est imposée par le fait que R et F ne sont pas nécessairement connexes. Introduisons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\pi_{q+1}(E, \varphi(r)) \arrow[r, "p_{q+1}"] & \pi_{q+1}(B, *) \arrow[r, "\partial"] & \pi_q(F, \varphi(r)) \arrow[r, "\eta_q"] & \pi_q(E, \varphi(r)) \arrow[r, "p_q"] & \pi_q(B, *) \\
\pi_{q+1}(Z, \varepsilon(r)) \arrow[r, "d_{q+1}"] \arrow[u, "\Phi_{q+1}"] & \pi_{q+1}(C, *) \arrow[r, "\partial"] \arrow[u, "(k \circ \rho)_{q+1}"] & \pi_q(R, r) \arrow[r, "\varepsilon_q"] \arrow[u, "\varphi_q"] & \pi_q(Z, \varepsilon(r)) \arrow[r, "d_q"] \arrow[u, "\Phi_q"] & \pi_q(C, *) \arrow[u, "(k \circ \rho)_q"]
\end{tikzcd}$$

En premier lieu, puisque $\Phi \simeq k \circ \sigma$ tandis que σ est une équivalence homotopique et k induit des isomorphismes de groupes d'homotopie en toutes dimensions ≥ 0, Φ_q est un isomorphisme pour tout $q \geq 0$. D'autre part, $(k \circ \rho)_q$ est aussi un isomorphisme pour tout $q \geq 0$. Puisque les lignes du diagramme proviennent de fibrations, elles sont exactes et le « lemme des cinq» entraîne que φ_q est un isomorphisme pour tout $q \geq 1$. Il reste à prouver que φ_o est une bijection. Pour $q = 0$ les lignes sont exactes en ce sens que les π_o ont des « éléments neutres» , désignés par 0 et représentés par les composantes des points- base, et pour lesquels on a la propriété image = noyau. Afin de prouver que φ_o est surjective, soit β un élément arbitraire de $\pi_o(F)$. Puisque Φ_o est une bijection, il existe $\alpha \in \pi_o(Z)$ avec $\Phi_o(\alpha) = \eta_o(\beta)$. Par commutativité et exactitude, il résulte $(k \circ \rho)_o \circ d_o(\alpha) = 0$ et, puisque $(k \circ \rho)_o$ est une bijection, $d_o(\alpha) = 0$. Il existe donc $\alpha_1 \in \pi_o(R)$ avec $\varepsilon_o(\alpha_1) = \alpha$. En choisissant $r \in \alpha_1$, on obtient $\eta_o(\beta) = 0$ et il existe $\beta_1 \in \pi_1(B, *)$ avec $\partial(\beta_1) = \beta$. Puisque $(k \circ \rho)_1$ est un isomorphisme, il existe $\alpha_2 \in \pi_1(C, *)$ avec $(k \circ \rho)_1(\alpha_2) = \beta_1$ et par commutativité on a $\varphi_o \circ \partial(\alpha_2) = \beta$. Afin de prouver que φ_o est injective, soient α_o et α_1 deux éléments de $\pi_o(R)$ tels que $\varphi_o(\alpha_o) = \varphi_o(\alpha_1)$. Choisissons $r \in \alpha_o$. On a $\Phi_o \circ \varepsilon_o(\alpha_1) = \Phi_o \circ \varepsilon_o(\alpha_o)$ donc, puisque Φ_o est bijective, $\varepsilon_o(\alpha_1) = \varepsilon_o(\alpha_o)$. Puisque $\varepsilon_o(\alpha_o) = 0$, il existe un élément $\alpha_2 \in \pi_1(C, *)$ avec $\partial(\alpha_2) = \alpha_1$. Il en résulte que $\partial \circ (k \circ \rho)_1(\alpha_2) = \varphi_o(\alpha_1) = 0$ et il existe $\beta \in \pi_1(E, \varphi(r))$ avec $p_1(\beta) = (k \circ \rho)_1(\alpha_2)$. Puisque Φ_1 est un isomorphisme, il existe $\alpha_3 \in \pi_1(Z, \varepsilon(r))$ avec $\Phi_1(\alpha_3) = \beta$. On obtient $(k \circ \rho)_1 \circ d_1(\alpha_3) = p_1(\beta)$ et, puisque $(k \circ \rho)_1$ est un isomorphisme, $d_1(\alpha_3) = \alpha_2$ donc $\alpha_1 = \partial \circ d_1(\alpha_3) = 0$, i. e. $\alpha_1 = \alpha_o$. Il ne nous reste qu'à remarquer à présent que, d'après [29] ,

R a le type d'homotopie d'un CW- complexe donc, puisque φ_q est un isomorphisme pour tout $q \geq 0$, R a le type d'homotopie de $K(F)$. Puisque ce dernier domine $K(X)$, il en est de même de R. En outre, puisque σ est une équivalence homotopique, on a $cocat Z = cocat K(E)$; la dernière est $\leq n$ et l'on obtient finalement $cocat K(X) \leq n+1$, ce qui prouve la proposition 3. 13.

Etudions à présent la façon dont se comporte la cocatégorie lorsque l'on tue des groupes d'homotopie d'un espace. On sait que, pour tout espace 0- connexe X et tout $n \geq 1$, il existe un espace (X, n) et une application $p: (X, n) \to X$ avec $\pi_q(X, n) = 0$ si $q < n$ et $p_q: \pi_q(X, n) \approx \pi_q(X)$ si $q \geq n$. Egalement, il existe un espace (n, X) et une application $j: X \to (n, X)$ avec $\pi_q(n, X) = 0$ si $q \geq n$ et $j_q: \pi_q(X) \approx \pi_q(n, X)$ si $q < n$. Lorsque X a le type d'homotopie d'un CW- complexe, il est loisible d'admettre que (X, n) et (n, X) ont aussi les types d'homotopie de CW- complexes; leurs types d'homotopie sont alors uniquement déterminés par celui de X et l'entier n

3. 14. THEOREME. *Soit X un CW- complexe connexe. Alors, pour tout $n \geq 1$ on a $cocat(X, n) \leq cocat X$ et $cocat(n, X) \leq cocat X$.*

DEMONSTRATION. Si $cocat X = 0$, alors X est contractile et il en est de même de (X, n) et (n, X). Supposons le théorème vrai pour tout CW- complexe connexe de cocatégorie $\leq m$ et supposons $cocat X = m+1$. Soit $Q \xrightarrow{\eta} Y \xrightarrow{\beta} B$ une fibration telle que Q domine X et $cocat Y = m$. Soit $R \xrightarrow{\varphi} Z \xrightarrow{\psi} K(B)_0$ la fibration obtenue en remplaçant l'application

$$K(\beta)_0 : K(Y)_0 \to K(B)_0$$

par une projection d'espace fibré qui lui soit homotopiquement équivalente; ici K désigne le « foncteur polytope singulier» et l'indice 0 désigne la restriction à la composante connexe du point- base. On voit facilement qu'il existe une application $r: R \to Q$ qui, d'après le lemme des cinq, induit des isomorphismes

$$(1) \qquad r_q : \pi_q(R) \approx \pi_q(Q) \text{ pour tout } q \geq 1.$$

Soit C un revêtement connexe de $K(B)_o$ tel que $\pi_1(C)$ soit isomorphiquement appliqué sur le sous-groupe $\psi_1\pi_1(Z)$ de $\pi_1(K(B)_o)$ par la projection $f: C \to K(B)_o$. Puisque Z a le type d'homotopie d'un CW-complexe connexe, le principe de monodromie fournit une application $g: Z \to C$ telle que $f\circ g = \psi$. Soit $T \xrightarrow{\varepsilon} W \xrightarrow{\gamma} C$ la fibration obtenue en remplaçant g par une projection d'espace fibré qui lui soit homotopiquement équivalente. Il existe une application $t: T \to R$ qui, vu que f_1 est injective, induit des isomorphismes

$$(2) \qquad t_q: \pi_q(T) \approx \pi_q(R) \text{ pour tout } q \geq 1.$$

Pour la même raison et puisque $f_1\pi_1(C) = \psi_1\pi_1(Z)$, l'homomorphisme $\gamma_1: \pi_1(W) \to \pi_1(C)$ est surjectif. Il en résulte que dans $\pi_n(C)$ le sous-groupe

$$(3) \qquad \gamma_n\pi_n(W) \text{ est stable par les opérateurs de } \pi_1(C).$$

Introduisons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "h"] & (W, n) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "p"] & D \arrow[d, "d"] \\
T \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "k"] & W \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "j"] & C \arrow[d, "e"] \\
V \arrow[r, "\tau"] & (n, W) \arrow[r, "\mu"] & E
\end{tikzcd}$$

L'espace E et l'inclusion e résultent en attachant des cellules à C de sorte que

$$e_q: \pi_q(C) \approx \pi_q(E) \text{ si } q < n, \quad \pi_q(E) = 0 \text{ si } q > n,$$

et que la suite

$$\pi_n(W) \xrightarrow{\gamma_n} \pi_n(C) \xrightarrow{e_n} \pi_n(E) \longrightarrow 0$$

soit exacte; d'après [41, th. 2.10.1] cela est possible en vertu de (3). L'espace D et l'application d sont déterminés de sorte que $\pi_q(D) = 0$ si $q < n$, $d_n: \pi_n(D) \approx \gamma_n\pi_n(W)$, $d_q: \pi_q(D) \approx \pi_q(C)$ si $q > n$. Puisque W a le type d'homotopie d'un CW-complexe connexe il en est de même, selon nos conventions, de (W, n) et (n, W) et l'on peut trouver des applications λ et μ qui rendent la partie droite du diagramme homotopiquement commutative. Sans changer les types d'homotopie de (W, n) et (n, W) on peut supposer que λ et μ sont des fibrations avec U et V comme fibres et σ, τ comme inclusions. Ensuite, grâce à la propriété de relèvement des homotopies on peut modifier les applications p et j dans leurs classes d'homotopie de façon que la partie droite du diagramme devienne strictement commutative. Cela fait, p et j induisent des applications h et k, qui rendent la partie gauche du diagramme commutative. En passant aux groupes d'homotopies et en utilisant le lemme des cinq on obtient

(4) $\pi_q(U) = 0$ si $q < n$, $\qquad h_q : \pi_q(U) \approx \pi_q(T)$ si $q \geq n$,

(5) $\pi_q(V) = 0$ si $q \geq n$, $\qquad k_q : \pi_q(T) \approx \pi_q(V)$ si $q < n$.

Puisque X est un CW- complexe connexe qui est dominé par Q, X est aussi dominé par $K(Q)_o$. Puisque γ_1 est surjective et W est 0- connexe, T est 0- connexe et, d'après (1) et (2), $K(Q)_o$ a le type d'homotopie de $K(T)$. Il résulte de (4) que $(K(T), n)$ a le type d'homotopie de $K(U)$, tandis que (5) entraîne que $(n, K(T))$ a le type d'homotopie de $K(V)$. Puisque (X, n) et (n, X) ont les types d'homotopie de CW- complexes, il résulte aisément que (X, n) et (n, X) sont dominés par $K(U)$ et $K(V)$ respectivement. Puisque W, comme Z, a le type d'homotopie de $K(Y)_o$ et puisque la composante du point- base dans un CW- complexe est un rétracte du complexe, d'après 3. 13 on a

$$cocat\, W = cocat\, K(Y)_o \leq cocat\, K(Y) \leq cocat\, Y = m.$$

Puisque W a le type d'homotopie d'un CW- complexe connexe, l'hypothèse de récurrence entraîne que

$$cocat(W, n) \leq m \quad \text{et} \quad cocat(n, W) \leq m.$$

A nouveau d'après 3. 13, il vient

$$cocat\, K(U) \leq cocat\, U \leq m+1, \qquad cocat\, K(V) \leq cocat\, V \leq m+1$$

ce qui, évidemment, entraîne le résultat désiré.

En prenant $n = 2$ on obtient le

3. 15. COROLLAIRE. *Le revêtement simplement connexe* $\tilde{X}$ *d'un CW-complexe connexe* X *satisfait* $cocat\,\tilde{X} \leq cocat\,X$.

Nous nous proposons maintenant de donner des bornes inférieures et supérieures pour la cocatégorie en fonction des invariants homotopiques classiques d'un espace. Remarquons d'abord que, si Y domine X, on a $nil\,X \leq nil\,Y$, résultat d'ailleurs contenu dans la proposition 2. 6. Grâce à cette remarque et aux théorèmes 2. 5 et 2. 10 on obtient facilement les deux énoncés suivants :

3. 16. THEOREME. $nil\,X \leq cocat\,X$.

3. 17. COROLLAIRE. W- $long\,X \leq cocat\,X$.

3. 18. REMARQUE. Nous allons construire ici un espace X tel que $nil\,X < cocat\,X$, afin de prouver que l'inégalité stricte peut se présenter dans le théorème 3. 16. L'espace X résulte [3, 3. 10] en attachant des cellules à l'espace projectif complexe M de dimension complexe 2 de façon à tuer ses groupes d'homotopie en dimensions ≥ 6. En désignant par S^5 la 5- sphère, on a $\pi_q(M) \approx \pi_q(S^5)$ si $q \geq 3$. Puisque le groupe $\pi_q(S^5)$ est fini si $q \geq 6$, il résulte de [36] que X a la cohomologie rationnelle de M; d'après le théorème de Hopf il résulte que X ne peut avoir une multiplication continue avec élément neutre homotopique et donc, d'après 3. 10, $cocat\,X \geq 2$. Afin de prouver que $nil\,X \leq 1$, remarquons qu'il existe une fibration $F \xrightarrow{\eta} X \xrightarrow{p} B$ telle que F ait le type $(Z, 5)$ et B le type $(Z, 2)$; ici, Z désigne le groupe des entiers et un espace a le type (Z, q) si ses groupes d'homotopie sont nuls sauf en dimension q où l'on a Z. Introduisons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\Omega F \arrow[r, "\Omega\eta"] & \Omega X \arrow[r, "\Omega p"] & \Omega B \\
\Omega X \# \Omega X \arrow[u, "\xi"] \arrow[ur, "\gamma"] & \Omega X \times \Omega X \arrow[l, "j"'] \arrow[u, "\varphi_X"'] \arrow[r, "\Omega p \times \Omega p"] & \Omega B \times \Omega B \arrow[u, "\varphi_B"']
\end{tikzcd}$$

où φ désigne l'application commutateur et j l'application canonique. L'application γ est fournie par la remarque qui suit la proposition 2. 13 et le triangle inférieur est commutatif. Puisque Ωp est un homomorphisme de H- espaces, le carré à droite est commutatif et, puisque B est un H-espace, l'application φ_B est homotope à l'application constante. Il en résulte que l'application $\Omega p \circ \gamma \circ j$ est aussi homotope à l'application constante et, d'après [32, Satz 14] , l'application $\Omega p \circ \gamma$ est déjà elle-même homotope à l'application constante. La propriété de relèvement des homotopies fournit à présent une application ξ qui rend le triangle supérieur homotopiquement commutatif. On a $\pi_1(\Omega X) \approx Z$ et $\pi_q(\Omega X) = 0$ pour $q = 2, 3$, de sorte que $H_q(\Omega X;\ Z) = 0$ pour $q = 2, 3$; d'après le théorème de Künneth il résulte $H_q(\Omega X \# \Omega X;\ Z) = 0$ pour $q = 3, 4$ et, d'après la formule des coefficients universels, $H^4(\Omega X \# \Omega X;\ Z) = 0$. Puisque ΩF a le type $(Z, 4)$ et, d'après [29, théorèmes 3 et 2] , $\Omega X \# \Omega X$ a le type d'homotopie d'un CW- complexe, l'application ξ est homotope à l'application constante. Il en résulte que φ_X est aussi homotope à l'application constante, donc $nil X \leq 1$.

Un autre exemple a été donné par Stasheff [38] qui a prouvé que l'espace des lacets de l'espace projectif complexe de dimension complexe 3 est homotopiquement commutatif. Cependant le premier exemple présente l'avantage de prouver que le théorème de Sugawara [39] mentionné à la fin du chapitre précédent est le meilleur possible.

Cependant la cocatégorie est en effet égale à la classe de nilpotence de l'espace des lacets d'un espace asphérique, ainsi que le montre l'énoncé suivant :

3. 19. THEOREME. *Si X est un CW- complexe connexe asphérique avec groupe fondamental π, on a $nil\pi = nil X = cocat X$.*

DEMONSTRATION. On a $nil \pi \leq nil X \leq cocat X$. Prouvons que $cocat X \leq nil \pi$ par récurrence suivant un procédé dû à Hilton [23, théorème 5. 3] . Soit $\pi_{(1)} = \pi$ et $\pi_{(i+1)} = [\pi_{(i)}, \pi]$ pour $i \geq 1$, où $[A, B]$ désigne le sous- groupe de π engendré par les commutateurs $aba^{-1}b^{-1}$. Supposons $nil\,\pi = n$; alors $\pi_{(n)} \neq 1$ tandis que $[\pi_{(n)}, \pi] = \pi_{(n+1)} = 1$ donc $\pi_{(n)}$ est contenu dans le centre de π. Soit B un CW- complexe connexe tel que $\pi_2(B) \approx \pi_{(n)}$ et $\pi_q(B) = 0$ si $q \neq 2$. Soit E un CW-complexe asphérique tel que

$$\pi_1(E) \approx \pi/\pi_{(n)};$$

puisque $nil\,\pi/\pi_{(n)} \leq n-1$, on peut supposer comme hypothèse de récurrence que $cocat\,E \leq n-1$. Hilton prouve l'existence d'une fibration $F \to E \to B$ telle que

$$\pi_1(F) \approx \pi \text{ et } \pi_q(F) = 0 \text{ pour } q \neq 1.$$

Alors, $cocat\,F \leq 1 + cocat\,E = n$ et X a le type d'homotopie du polytope singulier de F, donc $cocat\,X \leq n$ d'après la proposition 3. 13.

3. 20. COROLLAIRE. *Pour tout entier $n \geq 1$ il existe un CW- complexe asphérique X tel que $cocat\,X = n$.*

La borne supérieure la plus pratique pour la cocatégorie est donnée par l'énoncé suivant qui est le dual du théorème correspondant démontré pour la catégorie dans le premier chapitre.

3. 21. THEOREME. *Soit X un CW- complexe $(p-1)$- connexe, $p \geq 2$, Si l'ensemble des entiers q tels que $\pi_q(X) \neq 0$ est contenu dans la réunion de k intervalles linéaires fermés, chacun de longueur $p-2$, alors*

$$cocat\,X \leq k.$$

DEMONSTRATION. Remarquons d'abord que si X est un espace $(n-1)$-connexe $(n \geq 2)$ tel que $\pi_q(X) = 0$ pour $q \geq 2n-1$, il existe un espace 1- connexe W et une équivalence homotopique singulière $X \to \Omega W$. En effet, soit W l'espace obtenu en attachant à la suspension ΣX des cellules de façon à tuer les groupes d'homotopie de cette dernière en dimensions $\geq 2n$. Désignons par $\sigma : \Sigma X \to W$ l'inclusion et considérons la suite $X \xrightarrow{e} \Omega\Sigma X \xrightarrow{\Omega\sigma} \Omega W$, où e désigne le plongement canonique. Evidemment, $\Omega\sigma$ induit des isomorphismes de groupes d'homotopie en dimensions $\leq 2n-2$; d'après le théorème de Freudenthal [30, p. 05] il en est de même de l'application e; finalement, pour $q \geq 2n-1$ on a

$$\pi_q(X) = \pi_q(\Omega W) = 0.$$

Démontrons à présent le théorème par récurrence sur k. Pour $k = 1$, X est $(p-1)$- connexe et $\pi_q(X) = 0$ si $q \geq 2p-1$, donc X a le type d'homotopie singulier d'un espace de lacets et, puisque X est un CW- complexe, en utilisant la proposition 3. 13 on obtient $cocat X \leq 1$. Supposons à présent que l'ensemble des q avec $\pi_q(X) \neq 0$ soit contenu dans $k+1$ intervalles fermés J_i chacun de longueur $p-2$. On peut supposer les J_i disjoints et numérotés « de gauche à droite » . En attachant des cellules à X de façon à tuer ses groupes d'homotopie en dimensions non contenues dans $\bigcup_{i=1}^{k} J_i$, on obtient un espace B et une inclusion $X \to B$ qui, transformée en fibration, donne une suite $F \xrightarrow{\eta} X \xrightarrow{\beta} B$ telle que

$$\beta_q : \pi_q(X) \approx \pi_q(B) \text{ si } q \in \bigcup_{i=1}^{k} J_i,$$

$$\eta_q \cdot \pi_q(F) \approx \pi_q(X) \text{ si } q \in J_{k+1} \text{ et } \pi_q(F) = 0 \text{ si } q \notin J_{k+1}.$$

Soit $n = min\, J_{k+1}$; alors F est $(n-1)$- connexe et, puisque la longueur de J_{k+1} est égale à $p-2$ avec $p \leq n$, on a $\pi_q(F) = 0$ si $q \geq 2n-1$. En premier lieu il en résulte que F a le type d'homotopie singulier d'un espace de lacets ΩW avec $\pi_1(W) = 0$. D'autre part, B est aussi $(p-1)$-connexe et l'on peut donc supposer comme hypothèse de récurrence que $cocat\, B \leq k$. Le théorème 3. 21 résulte à présent du lemme suivant :

Soit $F \xrightarrow{\eta} X \xrightarrow{\beta} B$ *une fibration, où* X *et* B *ont le type d'homotopie de CW- complexes. Supposons que* B *soit* $(p-1)$*- connexe et que* $\pi_q(F) \neq 0$ *seulement si* $n \leq q \leq n+p-2$, *où* $p \geq 2$ *et* $n \geq 1$. *Supposons en outre qu'il existe une équivalence homotopique singulière* $F \to \Omega W$, *où* W *est un espace simplement connexe. Alors* β *est homotopiquement équivalente à une inclusion de fibre.*

Ce lemme généralise un résultat bien connu dû à Serre d'après lequel une fibration avec base simplement connexe et fibre de type (π, n) est toujours induite. Vu que le lemme dual concernant des cofibrations a été démontré de façon détaillée dans le premier chapitre, nous omettons la démonstration et renvoyons à [16, lemme 2. 1] .

Comme conséquence des théorèmes 2. 10, 3. 16, 3. 21 on a le

3. 22. COROLLAIRE. *Pour tout entier* $n \geq 1$ *il existe un CW- complexe simplement connexe* X *tel que* $nil\, X = cocat\, X = n$.

DEMONSTRATION. Soit X le CW- complexe obtenu en attachant des cellules à $S^2 \vee S^2$ de façon à tuer ses groupes d'homotopie en dimensions $\geq n+2$. D'après le théorème 3. 21, on a $cocat\, X \leq n$. D'autre part, d'après [21] X a un produit de Whitehead n-tuple non nul, donc $n \leq W\text{-}long\, X \leq cocat\, X$. Cet exemple est dû à Hilton [23] .

Définissons à présent la cocatégorie d'une application et étudions quelques unes de ses propriétés.

3. 23. DEFINITION. *La cocatégorie* $cocat\, f$ *d'une application* $f: X \to Y$ *est le plus petit des entiers* $k \geq 0$ *pour lesquels il existe un espace* Z *et des applications* $\varphi: X \to Z$ *et* $\psi: Z \to Y$ *tels que* $cocat\, Z = k$ *et* $f = \psi \circ \varphi$; *si de tels entiers n'existent pas, on pose* $cocat\, f = \infty$.

Evidemment, $cocat\, f \leq min\, \{cocat\, X,\ cocat\, Y\}$, $cocat\, g \circ f \leq min\, \{cocat\, f,\ cocat\, g\}$, et $cocat\, X = cocat\, 1_x$ où 1_x désigne l'application identique de X.

3. 24. PROPOSITION. *Pour toute homotopie* $h_t: X \to Y$, *on a*

$$cocat\, h_o = cocat\, h_1.$$

DEMONSTRATION. Supposons $cocat\, h_o = k$ et soit Z, $\varphi: X \to Z$ et $\psi: Z \to Y$ tels que $cocat\, Z = k$ et $\psi \circ \varphi = h_o$. Remplaçons ψ par une projection d'espace fibré $p: W \to Y$ qui lui soit homotopiquement équivalente. On peut factoriser h_o par W et la propriété de relèvement des homotopies montre que l'on peut aussi factoriser h_1. D'autre part, puisque W est homotopiquement équivalent à Z, on a $cocat\, W = k$, donc $cocat\, h_1 \leq k$. On prouverait de même que $cocat\, h_1 = k$ entraîne $cocat\, h_o \leq k$.

Le résultat suivant peut être considéré comme la généralisation d'un théorème de Spanier et Whitehead [37] qui ont prouvé que, si la fibre est contractile dans l'espace total, elle possède une multiplication continue.

3. 25. THEOREME. *Si* $Q \xrightarrow{\eta} Y \xrightarrow{\beta} B$ *est une fibration, on a*

$$cocat\ Q \leq 1 + cocat\,\eta$$

DEMONSTRATION. Supposons $cocat\,\eta = k$ et soit Z, $\varphi: Q \to Z$ et $\psi: Z \to Y$ tels que $cocat\,Z = k$ et $\psi \circ \varphi = \eta$. Il existe une projection d'espace fibré $p: W \to Y$ et une équivalence homotopique $j: Z \to W$ telles que $p \circ j = \psi$. La suite

$$F = \overset{-1}{p}\ \overset{-1}{\beta}\,(*) \xrightarrow{\varepsilon} W \xrightarrow{\beta \circ p} B$$

dans laquelle ε est l'inclusion, est une fibration. Puisque j est une équivalence homotopique, on a $cocat\,W = k$. D'autre part,

$$\beta \circ p \circ j \circ \varphi(\dot{Q}) = \beta \circ \psi \circ \varphi(Q) = \beta \circ \eta\,(Q) = *$$

de sorte que $j \circ \varphi(Q) \subset F$; il existe donc une application $\Phi: Q \to F$ telle que $\varepsilon \circ \Phi = j \circ \varphi$. En outre,

$$\beta \circ p \circ \varepsilon(F) = *,$$

de sorte que $p \circ \varepsilon(F) \subset \eta(Q)$; il existe donc une application $\Psi: F \to Q$ telle que $\eta \circ \Psi = p \circ \varepsilon$. On a $\eta \circ \Psi \circ \Phi = p \circ j \circ \varphi = \eta$ et, puisque η est injective, $\Psi \circ \Phi = 1_Q$. Il en résulte que F domine Q, donc

$$cocat\,Q \leq 1 + k.$$

Nous terminerons par prouver un résultat apparenté à un résultat récent de Stasheff [38] et plus précis que le théorème 3. 16.

3. 26. THEOREME. $nil\,X \leq cocat\,p$ *où* $p: \Sigma\Omega X \to X$ *est définie par* $p(t, \omega) = \omega(t)$.

DEMONSTRATION. Supposons $cocat\,p = k$ et soit Z, $\varphi: \Sigma\Omega X \to Z$ et $\psi: Z \to X$ tels que $cocat\,Z = k$ et $\psi \circ \varphi = p$. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\Omega\Sigma\Omega X \times \dots \times \Omega\Sigma\Omega X \arrow[r, "\Omega\varphi \times \dots \times \Omega\varphi"] \arrow[d, "e \times \dots \times e"] & \Omega Z \times \dots \times \Omega Z \arrow[r, "\Omega\psi \times \dots \times \Omega\psi"] \arrow[d, "\varphi_{k+1}"] & \Omega X \times \dots \times \Omega X \arrow[d, "\varphi_{k+1}"] \\
\Omega X \times \dots \times \Omega X & \Omega Z \arrow[r, "\Omega\psi"] & \Omega X
\end{tikzcd}$$

dans lequel φ_{k+1} désigne le commutateur de poids $k+1$ de l'espace de lacets respectif et e est le plongement canonique de ΩX dans $\Omega\Sigma\Omega X$. On a $\Omega p \circ e = 1_{\Omega X}$, donc

$$\varphi_{k+1} \circ (\Omega\psi \times \ldots \times \Omega\psi) \circ (\Omega\varphi \times \ldots \times \Omega\varphi) \circ (e \times \ldots \times e) = \varphi_{k+1}.$$

D'autre part, puisque $\Omega\psi$ est un homomorphisme de H- espace, le diagramme est commutatif. D'après le théorème 3. 16, on a $nil Z \leq k$, donc l'application φ_{k+1} correspondant à ΩZ est homotope à l'application constante et il en est à présent de même pour l'application φ_{k+1} correspondant à ΩX, i. e. $nil X \leq k$.

Bibliographie.

[1] BARCUS, W., Note on cross- sections over CW - complexes, Quart. J. Math. 5 (1954), 150 - 160.

[2] BARRATT, M. G., Spaces of finite characteristic, Quart. J. Math. 11 (1960), 124 - 136.

[3] BERSTEIN, I. and GANEA, T., Homotopical nilpotency, Illinois J. Math. 5 (1961), 99 - 130.

[4] BERSTEIN, I. and GANEA, T., On the homotopy- commutativity of suspensions, Illinois J. Math. 6 (1962), 336 - 340.

[5] BERSTEIN, I. and HILTON, P. J., Category and generalized Hopf invariants, Illinois J. Math. 4 (1960), 437 - 451.

[6] BLAKFRS, A. L. and MASSEY, W. S., The homotopy groups of a triad, II, Annals of Math. 55 (1952), 192 - 201.

[7] BOLTYANSKI, On the homotopical theory of continuous maps and vector fields, Trudy Inst. Steklov 1955 (en russe).

[8] CHEVALLEY, C., Theory of Lie groups, I, Princeton (1946).

[9] DOWKER, C. H., Mapping theorems for non- compact spaces, Amer. J. Math. 69 (1947), 200 - 242.

[10] ECKMANN, B. et HILTON, P. J., Groupes d'homotopie et dualité, C. R. Acad. Sc. Paris 246 (1958), 2444 - 47, 2555 - 58, 2991 - 93.

[11] ECKMANN, B. and HILTON, P. J., On the homology and homotopy decomposition of continuous maps, Proc. Nat. Acad Sci. USA 45 (1959), 372 - 375.

[12] EILENBERG, S. and GANEA, T., On the Lusternik-Schnirelmann category of abstract groups, Annals of Math. 65 (1957), 517-518.

[13] FOX, R. H., On the Lusternik-Schnirelmann category, Annals of Math. 42 (1941), 333-370.

[14] GANEA, T., Catégorie 1-dimensionne'le et homomorphismes de groupes fondamentaux, C. R. Acad. Sci. Paris 242 (1956), 1407-1410.

[15] GANEA, T., Lusternik-Schnirelmann category and cocategory, Proc. London Math. Soc. 10 (1960), 623-639.

[16] GANEA, T., Fibrations and cocategory, Commentarii Math. Helvetici 35 (1961), 15-24.

[17] GANEA, T., Upper bounds for the Lusternik-Schnirelmann category, Doklady Akad. Nauk SSSR 136 (1961), 1273-76 (en russe).

[18] GANEA, T. and HILTON, P. J., On the decomposition of spaces in Cartesian products and unions, Proc. Camb. Phil. Soc. 55 (1959), 248-256.

[19] GANEA, T., HILTON, P. J. and PETERSON, F. P., On the homotopy-commutativity of loop-spaces and suspensions, Topology 1 (1962), 133-141.

[20] GROSSMAN, D. P., An estimation of the category of Lusternik-Schnirelmann, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N. S.) 54 (1946), 109-112.

[21] HILTON, P. J., On the homotopy groups of the union of spheres, J. London Math. Soc. 30 (1955), 154-173.

[22] HILTON, P. J., Homotopy theory and duality, Lecture notes, Cornell University, 1959.

[23] HILTON, P. J., On a generalization of nilpotency to semi-simplicial complexes, Proc. London Math. Soc. 10 (1960), 604-622.

[24] HILTON, P. J., On excision and principal fibrations, Commentari Math. Helv. 35 (1961), 77-84.

[25] HUREWICZ, W., Beiträge zur Topologie der Deformationen, IV, Proc. Akad. Amsterdam 39 (1936), 215-224.

[26] LUSTERNIK, L. et SCHNIRELMANN, L., Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels, Hermann, Paris (1934).

[27] MILNOR, J., The geometric realization of a semi-simplicial complex, Annals of Math. 65 (1957), 357-362.

[28] MILNOR, J., The construction FK, Mimeographed Notes, Princeton University.

[29] MILNOR, J., On spaces having the homotopy type of a CW-complex, Trans. Amer. Math. Soc. 90 (1959), 272-280.

[30] MOORE, J. C., Le théorème de Freudenthal, la suite exactede James et l'invariant de Hopf généralisé, Séminaire H. Cartan, E. N. S. (1955).

[31] MORITA, K., Note on mapping spaces, Proc. Japan Acad. 32 (1956), 671-675.

[32] PUPPE, D., Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen, I, Math. Z. 69 (1958), 299-344.

[33] REEB, G. et WU WEN TSUN, Sur les espaces fibrés et les variétés feuilletées, Hermann, Paris (1952).

[34] SAMELSON, H., A connection between the Whitehead and the Pontryagin product, Amer. J. Math. 75 (1953), 744-752.

[35] SERRE, J. P., Homologie singulière des espaces fibrés, Annals of Math. 54 (1951), 425-505.

[36] SERRE, J. P., Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens, Annals of Math. 58 (1953), 258-294.

[37] SPANIER, E. H. and WHITEHEAD, J. H. C., On fibre spaces in which the fibre is contractible, Commentarii Math. Helv. 29 (1955), 1-8.

[38] STASHEFF, J., On homotopy-abelian H-spaces, Proc. Camb. Phil. Soc. 57 (1961), 734-745.

[39] SUGAWARA, M., On the homotopy-commutativity of groups and loop-spaces, Mem. Coll. Sc. Kyoto 33 (1960), 257-269.

[40] WHITEHEAD, G. W., The homology suspension, Colloque de Topologie Algébrique Louvain 1956, 89-95.

[41] WHITEHEAD, G. W., Homotopy Theory, Lecture Notes, Massachusetts Institute of Technology (1953).

[42] WHITEHEAD, G. W., On mapping into group-like spaces, Commentarii Math. Helv. 28 (1954), 320-328.

[43] WHITEHEAD, J. H. C., Combinatorial homotopy, I, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), 213-245.

[44] WHITEHEAD, J. H. C., A certain exact sequence, Annals of Math. 52 (1950), 51-110.