CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

CHARLES EHRESMANN

Sur l'existence de structures libres et de foncteurs adjoints (suite)

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 9, nº 2 (1967), p. 127-180

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1967__9_2_127_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE *IX*

Gratefully to the Department of Mathematics,
University of Kansas,
in the "Heart of mid-America", so stimulating
a place (regardless some tornadoes) for writing
this paper (Spring 1966).

SUR L'EXISTENCE DE STRUCTURES LIBRES ET DE FONCTEURS ADJOINTS

par Charles EHRESMANN

SUITE

TABLE DES MATIERES

CONVENTIONS. La terminologie est celle du livre «Catégories et structures», Dunod, désigné par C.S.. En particulier : si $C^\bullet$ est une catégorie, α et β sont ses applications source et but, $C^\bullet_0$ la classe de ses unités, $C^\bullet_\gamma$ le groupoïde de ses inversibles, C^* sa duale. $\mathfrak{M}$ désigne une catégorie pleine d'applications, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ et $\mathfrak{F}$ les catégories des homomorphismes entre classes multiplicatives, des néofoncteurs et des foncteurs associées, $p_{\mathfrak{N}}$, $p_{\mathfrak{N}'}$ et $p_{\mathfrak{F}}$ leurs foncteurs projection vers $\mathfrak{M}$. Pour une catégorie pleine d'applications $\hat{\mathfrak{M}}$ telle que $\mathfrak{M} \subset \hat{\mathfrak{M}}$, nous notons $\hat{\mathfrak{N}}, \hat{\mathfrak{N}}', \hat{\mathfrak{F}}, \hat{p}_{\mathfrak{N}}, \hat{p}_{\mathfrak{N}'}$ et $\hat{p}_{\mathfrak{F}}$ les catégories et foncteurs correspondants. «Univers» signifie classe de classes (ici «classe» et «ensemble» sont synonymes) $\mathfrak{M}_0$ vérifiant les conditions d'un univers au sens de Grothendieck, à l'exclusion de l'axiome : Si $x \in M$ et $M \in \mathfrak{M}_0$, alors $x \in \mathfrak{M}_0$.

et à $\mathfrak{J}$-limites inductives, car $\mathfrak{I} \cup \mathfrak{J} \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$. Soient Lim et $\underset{\to}{Lim}$ les foncteurs $\mathfrak{I}$-limite projective et $\mathfrak{J}$-limite inductive canoniques sur $\mathfrak{M}$. Soit

$$\tilde{\Phi} \in \tilde{\mathfrak{A}}(H^{\cdot}).\hat{\mathfrak{F}}.(\mathfrak{I} \cup \mathfrak{J}).$$

Pour tout $e \in (H_+)^{\cdot}_o$, désignons par $\tilde{\Phi}_e$ le foncteur (théorème 6) de $\alpha(\tilde{\Phi})$ vers $\mathfrak{M}$ tel que

$\tilde{\Phi}_e(k) = \tau_k(e)$ pour tout $k \in \alpha(\tilde{\Phi})$, où $\tilde{\Phi}(k)(e) = \tau_k(e)^{\boxminus} \in (\boxminus\mathfrak{M})_o$.

Soient $l(\tilde{\Phi}_e)$ la limite projective de $\tilde{\Phi}_e$ formée des couples

$$(z, \tilde{\Phi}), \quad \text{où} \quad z \in Lim\, \tilde{\Phi}_e,$$

et soit $l'(\tilde{\Phi}_e)$ la limite inductive de $\tilde{\Phi}_e$ dont les éléments sont les couples

$$(\tilde{\Phi}, z'), \quad \text{où} \quad z' \in \underset{\to}{Lim}\, \tilde{\Phi}_e.$$

Il existe une limite projective $\widetilde{Lim^{\nu}}\tilde{\Phi}$ (resp. limite inductive $\widetilde{\underset{\to}{Lim}^{\mu}}\tilde{\Phi}$), qui est le foncteur de H^*_+ vers $\mathfrak{M}$ tel que

$$\widetilde{Lim^{\nu}}\tilde{\Phi}(e) = l(\tilde{\Phi}_e) \quad (\text{resp. } \widetilde{\underset{\to}{Lim}^{\mu}}\tilde{\Phi}(e) = l'(\tilde{\Phi}_e))$$

pour tout $e \in (H_+)^{\cdot}_o$; la transformation naturelle correspondante qui n'appartient pas à $\eta_H.(H)$, est notée $\tilde{\nu}(\tilde{\Phi})$ (resp. $\tilde{\mu}(\tilde{\Phi})$). Ainsi nous définissons sur $\tilde{\mathfrak{A}}(H^{\cdot})$ une application $\mathfrak{I}$-limite projection $\tilde{\nu} : \tilde{\Phi} \to \tilde{\nu}(\tilde{\Phi})$ et une application $\mathfrak{J}$-limite inductive $\tilde{\mu} : \tilde{\mu} \to \tilde{\mu}(\tilde{\Phi})$. Donc

$$\tilde{S} = (\tilde{\mathfrak{A}}(H^{\cdot}), \tilde{\nu}, \tilde{\mu}) \in \hat{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}.$$

Si $d_1(\tilde{\Phi}) = d_2(\tilde{\Phi}_1)$, où $d_m = \widetilde{Lim^{\nu}}$ ou $\widetilde{\underset{\to}{Lim}^{\mu}}$, et si $\tilde{\Phi}_0(e)$ est un atome pour tout $e \in H^{\cdot}_o$, alors $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_1$ car $d_m(\tilde{\Phi})$ contient au moins un couple $(z, \tilde{\Phi})$ ou $(\tilde{\Phi}, z)$. La classe $\eta_H.(H) \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$ admet une $(\mathfrak{I}, \mathfrak{J})$-complétion $\bar{S}$ dans $\tilde{S}$. (Remarquons que la saturante de $P^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}(\bar{S})$ dans $\tilde{\mathfrak{A}}(H^{\cdot})$ est la complétion régulière gauche de $H^{\cdot}$ au sens de [12]). Etant donné que $Q^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}$ est $\digamma$-engendrant pour $\mathfrak{M}$ d'après le théorème 17, on a $Q^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}(\bar{S}) \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$. Par suite, il existe

$$\hat{u} = ((\tilde{\mathfrak{A}}'(H^{\cdot}), \tilde{\nu}', \tilde{\mu}'), \underline{u}, \bar{S}) \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}_o . \hat{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}_{\gamma}$$

et l'on peut supposer, en identifiant $H^{\cdot}$ à une sous-catégorie de $\tilde{\mathfrak{A}}'(H^{\cdot})$,

$$(\tilde{\mathfrak{A}}'(H^\cdot), \underline{u}\,\underline{\eta}_{H^\cdot}, H^\cdot) = (\tilde{\mathfrak{A}}'(H^\cdot), \iota, H^\cdot).$$

Les relations

$$(\tilde{\mathfrak{A}}'(H^\cdot), \tilde{\nu}', \tilde{\mu}') \in \mathfrak{F}_0^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}} \quad \text{et} \quad (\tilde{\mathfrak{A}}'(H^\cdot), \iota, H^\cdot) \in \mathfrak{F}$$

assurent l'existence d'un et d'un seul

$$\hat{F} = ((\tilde{\mathfrak{A}}'(H^\cdot), \tilde{\nu}', \tilde{\mu}'), \underline{F}, (C^\cdot, \nu, \mu)) \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}$$

tel que

$$F.J = (\tilde{\mathfrak{A}}'(H^\cdot), \iota, H^\cdot), \quad \text{où} \quad F = p^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}(\hat{F}).$$

Il s'ensuit que J est injectif, de sorte que $J(H)^\cdot$ est une sous-catégorie $M^\cdot$ de $C^\cdot$ et que $F' = (H^\cdot, \underline{F}\iota, M^\cdot)$ est un isomorphisme.

-Dans la fin de cette démonstration, les symboles d et d' peuvent être lus indifféremment Lim ou $\overrightarrow{Lim}$, à condition de supposer que $I^\cdot$ et $I_m^\cdot$ appartiennent à $\mathfrak{I}$ dans le premier cas, à $\mathfrak{J}$ dans le deuxième cas. L'indice m prend les valeurs 1 et 2. Si $\Phi \in C^\cdot.\mathfrak{F}.I^\cdot$, on a

$$F(d(\Phi)) = d(F.\Phi) = \underline{u}(d(\tilde{\mathfrak{A}}(H^\cdot), \underline{u}^{-1}\underline{F\Phi}, I^\cdot)) \notin \underline{u}(\eta_H.(H)) = H,$$

d'où $d(\Phi) \notin M$. Par construction d'une $p^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}$- structure libre, $(C^\cdot, \nu, \mu)$ est la $(\mathfrak{I}, \mathfrak{J})$-complétion de M dans $(C^\cdot, \nu, \mu)$, car c'est la $(\mathfrak{I}, \mathfrak{J})$-complétion de $M = J(H)$ dans un produit d'éléments de $\mathfrak{F}_0^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}$ (théorème 1). En vertu de la fin de la démonstration du théorème 12 dont nous reprenons les notations, on a $C = \bigcup_{\lambda < \tilde{\lambda}'} \tilde{M}_\lambda$. -

Supposons

$$\Phi_m \in C^\cdot.\mathfrak{F}.I_m^\cdot, \quad \Phi_1 \neq \Phi_2 \quad \text{et} \quad d(\Phi_1) = E = d(\Phi_2).$$

Soit λ le plus petit ordinal tel que $\Phi_1(I_1) \cup \Phi_2(I_2) \subset \tilde{M}_\lambda$ (la démonstration du théorème 12 prouve qu'il existe un tel $\lambda < \hat{\lambda}'$). Nous pouvons supposer que l'on a $\Phi_2(I_2) \not\subset \tilde{M}_\xi$ pour tout $\xi < \lambda$. Soit $\hat{C}^\cdot$ la catégorie obtenue par élargissement de $C^\cdot$ telle que $\hat{C}_0^\cdot = C_0^\cdot \cup \{E'\}$ et que $E' \notin C$ soit isomorphe à E dans $\hat{C}^\cdot$ (cette catégorie est construite au cours de la démonstration du théorème 6). Le foncteur $(\hat{C}^\cdot, \iota, C^\cdot)$ est à $\mathfrak{I}$-limites projectives et à $\mathfrak{J}$-limites inductives; E' étant isomorphe à E dans $\hat{C}^\cdot$, on peut trouver des applications $\mathfrak{I}$-limite projective $\overline{\nu}$ et $\mathfrak{J}$-limite inductive $\overline{\mu}$ sur $\hat{C}^{\cdot}$ telles que

$$\overline{p_i^\nu}(\hat{\Phi}) = p_i^\nu(\Phi) \text{ et } \overline{s_i^\mu}(\hat{\Phi}) = s_i^\mu(\Phi)$$

$$\text{si } \hat{\Phi}(I) \subset C \text{ et } \Phi = (C^{\cdot}, \underline{\hat{\Phi}}, I^{\cdot}) * \Phi_2,$$

$$d'(\hat{C}^{\cdot}, \underline{\Phi}_2, I_2^{\cdot}) = E'.$$

Des relations

$$(\hat{C}^{\cdot}, \overline{\nu}, \overline{\mu}) \in \mathcal{F}_0^{\mathcal{I}\mathcal{J}} \quad \text{et} \quad (\hat{C}^{\cdot}, \iota, C^{\cdot}).J \in \mathcal{F},$$

il résulte l'existence d'un et d'un seul

$$\hat{G} = ((\hat{C}^{\cdot}, \overline{\nu}, \overline{\mu}), G, (C^{\cdot}, \nu, \mu)) \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$$

tel que $G.J = (\hat{C}^{\cdot}, \iota, C^{\cdot}).J$, où $\underline{G} = p^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(\hat{G})$. En utilisant la construction de $\tilde{M}_{\xi+1}$ comme sous-catégorie de $C^{\cdot}$ engendrée par $\sigma^{\nu\mu}(\tilde{M}_\xi)$, un raisonnement analogue à celui fait dans la démonstration du théorème 6 prouve, par récurrence transfinie, que la restriction de $\underline{G}$ à $\tilde{M}_\lambda$ est l'identité et que l'on a

$$E = G(d(\Phi_1)) = G(d(\Phi_2)) = E',$$

ce qui est impossible. Donc $\Phi_1 = \Phi_2$ et le foncteur somme de Lim^ν et de $\overrightarrow{Lim}^\mu$ est injectif.

- Toutes les hypothèses du théo. 12 étant vérifiées relativement à M et à $(C^{\cdot}, \nu, \mu)$, ce théorème affirme que $M^{\cdot}$ est une sous-catégorie pleine de $C^{\cdot}$. Ceci achève la démonstration. ∎

C. COMPLETION LIBRE.

Soit $\underset{\sim}{\mathcal{F}}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$ la sous-catégorie de $\underset{\sim}{\mathcal{F}}$ (voir n° 2) formée des classes $F \bmod r$, où F est un foncteur à $\mathcal{I}$-limites projectives et à $\mathcal{J}$-limites inductives.

THEOREME 14. *Si $(C^{\cdot}, \nu, \mu)$ est une $p^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$-structure libre engendrée par $H^{\cdot} \in \mathcal{F}_0$, alors $C^{\cdot}$ est une $(\underset{\sim}{\mathcal{F}}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}, \underset{\sim}{\mathcal{F}})$-projection de $H^{\cdot}$.*

DEMONSTRATION. Le raisonnement est analogue à celui utilisé pour prouver le théorème 8. Il utilise les résultats suivants :

1°) $(C^{\cdot}, \nu, \mu)$ est la $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-complétion d'une sous-catégorie $M^{\cdot}$

isomorphe à $H^\cdot$ (théorème 13) et $C = \bigcup_{\lambda < \hat{\lambda}'} \tilde{M}_\lambda$, où $\tilde{M}_{\lambda+1}$ est la sous-catégorie de $C^\cdot$ engendrée par $\sigma^{\nu\mu}(\tilde{M}_\lambda)$ (fin de la démonstration du théorème 12).

2°) Pour tout $\lambda < \hat{\lambda}'$, toute unité E de $\tilde{M}_{\lambda+1} - \tilde{M}_\lambda$ est associée à un et un seul $\Phi \in C^\cdot . \mathcal{F} . I^\cdot$ tel que $\Phi(I) \subset \tilde{M}_\lambda$ et que $E = Lim^\nu \Phi$ ou $E = \underrightarrow{Lim}^\mu \Phi$. ■

DEFINITION. *Une* $(\tilde{\mathcal{F}}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}, \tilde{\mathcal{F}})$*-projection de* $H^\cdot \in \mathcal{F}_0$ *est appelée* $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$*-* complétion libre de $H^\cdot$. *Une* $(\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}, \mathcal{F}'^{\mathcal{I}\mathcal{J}})$*-projection de* $(H^\cdot, \nu, \mu) \in \mathcal{F}_0^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$ *est appelée une* $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$- complétion de $(H^\cdot, \nu, \mu)$.

D'après les théorèmes 6 et 14, si $H^\cdot \in \mathcal{F}_0$ est une $\mathfrak{U}$-catégorie, elle admet une $(\mathcal{I}, \varnothing)$-complétion libre qui est aussi une $\mathfrak{U}$-catégorie, $\mathfrak{U}$ étant un univers contenant $p\mathcal{F}(\mathcal{I})$.

THEOREME 15. *Tout* $(H^\cdot, \nu, \mu) \in \mathcal{F}_0'^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$ *admet une* $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$*-complétion* $(\tilde{H}^\cdot, \tilde{\nu}, \tilde{\mu})$ *ayant les propriétés suivantes :*

1°) $H^\cdot$ *est une sous-catégorie de* $\tilde{H}^\cdot$*;*

2°) $(\tilde{H}^\cdot, \tilde{\nu}, \tilde{\mu})$ *est une* $q^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$*-structure quasi-quotient d'une* $p^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$*-structure libre engendrée par* $H^\cdot$.

DEMONSTRATION. Soit $\hat{j}' \in \mathcal{F}'^{\mathcal{I}\mathcal{J}}.(H^\cdot, \nu, \mu)$ un $(\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}, \mathcal{F}'^{\mathcal{I}\mathcal{J}})$-projecteur; il en existe d'après le corollaire du théorème 12. On sait [12] qu'il existe une sous-catégorie $\mathcal{A}_1(H^\cdot)$ de la catégorie $\tilde{\mathcal{A}}(H^\cdot)$ (notation de la démonstration du théorème 13) telle que le foncteur $(\mathcal{A}_1(H^\cdot), \underline{\eta}_{H^\cdot}, H^\cdot)$ soit à $\mathcal{I}$-limites projectives et à $\mathcal{J}$-limites inductives. ($\mathcal{A}_1(H^\cdot)$ est la «trans-complétion gauche de $H^\cdot$» au sens de [12]). Choisissons une application $\mathcal{I}$-limite projective $\bar{\nu}$ et une application $\mathcal{J}$-limite inductive $\bar{\mu}$ sur $\mathcal{A}_1(H^\cdot)$ telles que

$$\bar{p}_i^\nu(\hat{\Phi}) = \eta_H.(p_i^\nu(\Phi)) \quad \text{(resp. que } \bar{s}_i^\mu(\hat{\Phi}) = \eta_H.(s_i^\mu(\Phi)))$$

si $\hat{\Phi}(I) \subset \eta_H.(H)$ et si $\Phi = (H^\cdot, \underline{\eta}_H^{-1}.\hat{\Phi}, I^\cdot)$, où $I^\cdot = \alpha(\hat{\Phi})$. Soit

$$(\mathcal{A}'_1(H^\cdot), \bar{\nu}', \bar{\mu}')$$

la $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-complétion de $\eta_H.(H)$ dans $(\mathcal{A}_1(H^\cdot), \bar{\nu}, \bar{\mu}) \in \hat{\mathcal{F}}_0^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$. D'après le théorème 12, on a $P\mathcal{F}(\mathfrak{A}'_1(H^\cdot)) \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$, de sorte qu'il existe

$$\hat{u} \in \mathcal{F}_o^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}} . \hat{\mathcal{F}}_\gamma^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}} . (\mathfrak{A}'_1(H^\cdot), \overline{\nu}', \overline{\mu}') .$$

Puisque

$$\hat{F} = \hat{u} . ((\mathfrak{A}'_1(H^\cdot), \overline{\nu}', \overline{\mu}'), \underline{\eta}_{H^\cdot}, (H^\cdot, \nu, \mu)) \in \mathcal{F}'^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}},$$

il existe un et un seul $\hat{F}' \in \mathcal{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}$ tel que $\hat{F} = \hat{F}' . \hat{J}'$. Etant donné que $q^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}(\hat{F})$ est une injection, il en sera de même pour $J' = q^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}(\hat{J}')$. Donc $J'(H)^\cdot$ est une catégorie isomorphe à $H^\cdot$, et on peut trouver un $(\mathcal{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}, \mathcal{F}'^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}})$-projecteur vérifiant la condition 1.

- Soit $((C^\cdot, \nu, \mu), J)$ un $(\mathcal{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}, p^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}})$-projecteur tel que $\alpha(J) = H^\cdot$. D'après le théorème 13, on peut supposer que $J = (C^\cdot, \iota, H^\cdot)$. Si $\nu(\Phi)$ (resp. $\mu(\Phi)$) est défini, posons

$$a_\nu(\Phi) = \lim^\nu(\boxminus C^\cdot, \underline{\nu(\Phi)}, \alpha(\Phi))$$

$$(\text{resp. } a_\mu(\Phi) = \underset{\to}{\lim}^\mu(\boxminus C^\cdot, \underline{\mu(\Phi)}, \alpha(\Phi))).$$

Soit A la classe formée de tous les éléments $a_\nu(\Phi)$ et $a_\mu(\Phi)$ ainsi construits. Désignons par ρ la relation d'équivalence sur C engendrée par la relation (C, V', C), où V' est la classe des couples $(h, \alpha(h))$ tels que $h \in A$. Puisque $Q^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}$ est un foncteur $\vdash$-engendrant pour $\mathfrak{M}$ et à $\tilde{\mathfrak{M}}_o$-limites projectives, il existe une $q^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}$-structure quasi-quotient $(\tilde{H}^\cdot, \tilde{\nu}, \tilde{\mu})$ de $(C^\cdot, \nu, \mu)$ par ρ, en vertu du théorème 2. Une démonstration analogue à celle du théorème 10 prouve que $(\tilde{H}^\cdot, \tilde{\nu}, \tilde{\mu})$ est une $(\mathcal{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}, \mathcal{F}'^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}})$-projection de $(H^\cdot, \nu, \mu)$. ∎

REMARQUES. 1°) Tout élément de $\mathcal{F}_o^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}$ est identique à son $(\mathfrak{I}, \mathfrak{J})$-complétion. Si $H^\cdot \in \mathcal{F}_o$ et si $(\hat{H}^\cdot, \hat{\nu}, \hat{\mu})$ est une $(\mathfrak{I}, \mathfrak{J})$-complétion de $(H^\cdot, \emptyset, \emptyset)$, les $(\mathfrak{I}, \mathfrak{J})$-complétions libres de $H^\cdot$ sont les catégories équivalentes à $\hat{H}^\cdot$.

2°) Le théorème 14 signifie que la $(\mathfrak{I}, \mathfrak{J})$-complétion libre de $H^\cdot$ résout le problème universel du plongement, à une équivalence près, de $H^\cdot$ dans une catégorie à $\mathfrak{I}$-limites projectives et à $\mathfrak{J}$-limites inductives. Le théorème 15 peut encore s'exprimer en disant que la $(\mathfrak{I}, \mathfrak{J})$-complétion de $(H^\cdot, \nu, \mu)$ est solution du problème universel du plongement de $H^\cdot$ dans une catégorie munie d'une application $\mathfrak{I}$-limite projective $\hat{\nu}$

et d'une application $\mathcal{J}$-limite inductive $\hat{\mu}$, de sorte que le plongement soit compatible avec $(\nu, \hat{\nu})$ et avec $(\mu, \hat{\mu})$.

3°) Soit $H^\bullet \in \mathcal{F}_0$ et $(C^\bullet, \nu, \mu)$ une $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-complétion libre de $H^\bullet$. Si $\mathcal{I} = \mathcal{J}$ est la classe formée des catégories finies, une $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-complétion libre $\hat{H}^\bullet$ de $H^\bullet$ a été construite explicitement dans [18]. La construction de [18] peut se déduire du deuxième procédé indiqué dans le théorème 12 pour construire la $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-complétion de $H^\bullet$ dans $(C^\bullet, \nu, \mu)$, par une « abstraction » analogue à celle qui a conduit du théorème 5 aux théorèmes 7 et 9. $\hat{H}^\bullet$ est un élément minimal de la classe ordonnée par inclusion des parties K de C telles que $H \subset K$ et que $K^\bullet$ soit une $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-complétion libre de $H^\bullet$.

4°) Appliqué à partir de l'univers $\hat{\mathfrak{M}}_0$ (en supposant qu'il existe un univers contenant $\hat{\mathfrak{M}}_0$ et admettant $\hat{\mathfrak{M}}_0$ pour élément), le théorème 15 prouve que tout élément de $\hat{\mathcal{F}}_0^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$ admet une $(\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_0)$-complétion appartenant à $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$. Le théorème 6 montre que, si $\mathfrak{U}$ est un univers compris entre $\mathfrak{M}_0$ et $\hat{\mathfrak{M}}_0$ et si $H^\bullet \in \hat{\mathcal{F}}_0$ est une $\mathfrak{U}$-catégorie, elle admet une $(\mathfrak{M}_0, \emptyset)$-complétion libre qui est une $\mathfrak{U}$-catégorie. On peut traduire comme suit les résultats précédents en termes de « petites » catégories et « grandes » catégories :

Appelons « ensemble » un élément de $\mathfrak{M}_0$ et « classe » un élément de $\hat{\mathfrak{M}}_0$. Si $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ sont des ensembles de petites catégories, toute petite (resp. toute grande) catégorie peut être universellement plongée à une équivalence près dans une petite (resp. une grande) catégorie $\hat{H}^\bullet$ à $\mathcal{I}$-limites projectives et à $\mathcal{J}$-limites inductives (à savoir son $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-complétion libre); si $H^\bullet$ est une $\mathfrak{M}_0$-catégorie (i.e. au sens de [12], différent de celui de [5], si $H^\bullet$ est « localement petite »), il en est de même pour $\hat{H}^\bullet$ lorsque l'un des ensembles $\mathcal{I}$ ou $\mathcal{J}$ est vide. De plus $H^\bullet$ peut aussi être universellement plongée dans une petite (resp. une grande) catégorie à $\mathcal{I}$-limites projectives et à $\mathcal{J}$-limites inductives, en conservant certaines limites choisies dans $H^\bullet$.

4. Adjonction de limites à une catégorie structurée.

Soit $P = (\hat{\mathfrak{M}}, \underline{P}, \hat{\mathcal{H}})$ un foncteur d'homomorphismes saturé à produits fibrés finis et soit $p = (\mathfrak{M}, P\iota, \hat{\mathcal{H}})$ la restriction de P à la sous-catégorie $\hat{\mathcal{H}} = \overset{-1}{P}(\mathfrak{M})$ de $\mathcal{H}$; nous supposons $\bar{\mathcal{H}} \in \hat{\mathfrak{M}}_o$. La saturante de $\mathcal{H}$ dans $\bar{\mathcal{H}}$ est notée $\tilde{\mathcal{H}}$. Soit Λ l'ordinal associé à l'univers $\mathfrak{M}_o$ (i.e. $\Lambda = \sup_{M \in \mathfrak{M}_o} \bar{M}$) et soit $\zeta < \Lambda$ un ordinal de seconde espèce. Si $S \in \hat{\mathcal{H}}_o$ et si $M \subset P(S)$ engendre une P-sous-structure s de S, nous poserons $s = S \mid M$.

DEFINITION. *On dit que P est ζ-$\frown$-*engendrant pour $\mathfrak{M}$ *si P est $\frown$-engendrant pour $\mathfrak{M}$ et si la condition (D_ζ) suivante est vérifiée :*

(D_ζ) Soient $S \in \hat{\mathcal{H}}_o$ et $(s_\xi)_{\xi<\zeta}$ une suite transfinie de type ζ de P-sous-structures de S telle que $P(s_\xi) \subset P(s_{\xi'}) \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$ si $\xi < \xi'$. Il existe une P-sous-structure $\hat{s}$ de S pour laquelle $P(\hat{s}) = \bigcup_{\xi<\zeta} P(s_\xi)$.

EXEMPLE. Un foncteur dénombrablement $\frown$-engendrant pour $\mathfrak{M}$ [1] est ω-$\frown$-engendrant. Un foncteur $\frown$-étalant est ζ-$\frown$-engendrant pour $\mathfrak{M}$ pour tout ordinal de seconde espèce $\zeta < \Lambda$; il en est de même pour les foncteurs $P_{\mathfrak{N}'}$ et $P_{\mathcal{F}}$.

Soit $\mathcal{F}(p)$ la catégorie des foncteurs p-structurés [1] dont les éléments sont représentés par des triplets $\bar{F} = (\hat{C}^\cdot, f, C^\cdot)$ tels que

1°) $f \in \mathcal{H}$, $(C^\cdot, \alpha(f))$ et $(\hat{C}^\cdot, \beta(f))$ sont des catégories p-structurées;

2°) $F = (\hat{C}^\cdot, \underline{p(f)}, C^\cdot) \in \mathcal{F}$.

Soit $\hat{p}'$ le foncteur canonique de $\mathcal{F}(p)$ vers $\mathcal{F}$ qui associe F à $\bar{F}$.

Nous reprenons les notations des § 1 et 3. Soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{J}$ deux parties de $\mathcal{F}_o$ telles que $\mathcal{G} \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$ et $\mathcal{J} \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$. Soient $\mathcal{F}'^{\mathcal{G}\mathcal{J}}(p)$ la catégorie produit fibré de $(p'^{\mathcal{G}\mathcal{J}}, \hat{p}')$ ayant pour éléments les triplets

$$\hat{F} = ((\hat{C}^\cdot, \hat{\nu}, \hat{\mu}), f, (C^\cdot, \nu, \mu))$$

vérifiant les conditions

1°) $\bar{F} = (\hat{C}^\cdot, f, C^\cdot) \in \mathcal{F}(p)$;

2°) $((\hat{C}^\cdot, \hat{\nu}, \hat{\mu}), \underline{p(f)}, (C^\cdot, \nu, \mu)) \in \mathcal{F}'^{\mathcal{G}\mathcal{J}}$.

La classe des unités de $\mathcal{F}'^{\mathcal{G}\mathcal{J}}(p)$ est identifiée à la classe des éléments $(C^\cdot, s, \nu, \mu)$, où

$$(C^{\bullet}, s) \in \mathcal{F}(p)_0 \quad \text{et} \quad (C^{\bullet}, \nu, \mu) \in \mathcal{F}^{\bullet \mathcal{I}\mathcal{J}}.$$

Soit $\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}^{\bullet\mathcal{I}\mathcal{J}}(p)$ ayant pour unités les $(C^{\bullet}, s, \nu, \mu)$ dans lesquels $(C^{\bullet}, \nu, \mu) \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$; c'est une catégorie produit fibré de $(p^{\mathcal{I}\mathcal{J}}, \hat{p}^{\bullet})$. La surjection $\hat{F} \to \hat{p}^{\bullet}(\overline{F})$ définit un foncteur $p'^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p)$ de $\mathcal{F}^{\bullet\mathcal{I}\mathcal{J}}(p)$ vers $\mathcal{F}$, dont la restriction à $\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p)$ est notée $p^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p)$. Soit $q^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p) = p_{\mathcal{F}} . p^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p)$ le foncteur projection de $\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p)$ vers $\mathcal{M}$. Nous définissons de même à partir de l'univers $\hat{\mathcal{M}}_0$ les catégories $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(P)$ et $\hat{\mathcal{F}}^{\bullet\mathcal{I}\mathcal{J}}(P)$, les foncteurs $Q^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(P)'$ et $P^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(P)$.

Soit $\lambda_{\mathcal{I}\mathcal{J}}$ l'ordinal borne supérieure des ordinaux $\overline{I}$ tels que

$$I \in p_{\mathcal{F}}(\mathcal{I} \cup \mathcal{J}).$$

A. THEOREME DE COMPLETION STRUCTUREE.

THEOREME 16. *S'il existe un ordinal initial régulier ζ tel que $\lambda_{\mathcal{I}\mathcal{J}} < \zeta < \Lambda$ et tel que P soit ζ-$\leftharpoondown$-engendrant pour $\mathcal{M}$, alors $Q^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(P)$ est $\leftharpoondown$-engendrant pour $(\mathcal{M}, X, \mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p))$, X étant la classe des $Q^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(P)$-monomorphismes de la forme*

$$\hat{F} = (u_2, f, u_1), \quad \text{avec} \quad f \in P_i^{\leftharpoondown}.$$

DEMONSTRATION. Supposons $u = (C^{\bullet}, s, \nu, \mu) \in \hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(P)_0$. Pour toute sous-catégorie $B^{\bullet}$ de $C^{\bullet}$, $B \in \tilde{\mathcal{M}}_0$, désignons par $\hat{\sigma}^{\nu\mu}(B)$ la classe construite comme suit : Soit $\sigma^{\nu\mu}(B)$ la classe associée à B relativement à $(C^{\bullet}, \nu, \mu) \in \hat{\mathcal{F}}_0^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$ dans la démonstration du théorème 12; nous savons que $\sigma^{\nu\mu}(B) \in \tilde{\mathcal{M}}_0$. Comme P est $\leftharpoondown$-engendrant pour $\mathcal{M}$, il existe une P-sous-structure $s_B \in \tilde{\mathcal{H}}_0$ de s engendrée par $\sigma^{\nu\mu}(B)$. Posons

$$\hat{\sigma}^{\nu\mu}(B) = p(s_B) \in \tilde{\mathcal{M}}_0.$$

- Supposons $M \subset C$ et $M \in \tilde{\mathcal{M}}_0$. Pour tout ordinal $\lambda < \zeta$, nous définissons par récurrence transfinie une sous-catégorie $M^{\bullet}_{\lambda}$ de $C^{\bullet}$ et une P-sous-structure s_{λ} de s de la manière suivante :

1°) $M^{\bullet}_1$ est la sous-catégorie de $C^{\bullet}$ engendrée par $p(s_1)$, où

$$s_1 = s \mid M \in \tilde{\mathcal{H}}_0.$$

2°) Supposons trouvées deux suites transfinies $(M^{\bullet}_{\xi})_{\xi < \lambda}$ et $(s_{\xi})_{\xi < \lambda}$ de sous-catégories de $C^{\bullet}$ et de P-sous-structures de s telles que

$$P(s_\xi) \subset M_\xi \in \tilde{\mathfrak{M}}_0 \text{ et } M_{\xi'} \subset P(s_\xi) \text{ si } \xi' < \xi.$$

Soit $N_\lambda = \hat{\sigma}^{\nu\mu}(\bigcup_{\xi<\lambda} M_\xi)$. Comme $\tilde{\mathfrak{M}}_0$ est un univers et que $\lambda < \Lambda = \sup_{K \in \tilde{\mathfrak{M}}_0} \overline{K}$, on a

$$\bigcup_{\xi<\lambda} M_\xi \in \tilde{\mathfrak{M}}_0, \qquad \text{d'où} \quad N_\lambda \in \tilde{\mathfrak{M}}_0.$$

Désignons par $M^\bullet_\lambda$ la sous-catégorie de $C^\bullet$ engendrée par $P(s_\lambda)$, où s_λ est la P-sous-structure

$$s_\lambda = s \mid N_\lambda \in \tilde{\mathcal{H}}_0 \quad \text{de} \quad s.$$

- Soit $\hat{M}^\bullet$ la sous-catégorie de $C^\bullet$ réunion des sous-catégories $M^\bullet_\lambda$, pour $\lambda < \zeta$. Alors $\hat{M} \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$, car $\zeta < \Lambda$. Par définition d'un foncteur ζ-$\vdash$-engendrant, la suite transfinie $(s_\lambda)_{\lambda<\zeta}$ de P-sous-structures de s détermine une P-sous-structure $\hat{s}$ de s telle que

$$P(\hat{s}) = \bigcup_{\lambda<\zeta} P(s_\lambda).$$

Des relations $M_\lambda \subset P(s_{\lambda+1}) \subset M_{\lambda+1}$ pour tout $\lambda < \zeta$, il vient $\hat{M} \subset P(\hat{s}) < \hat{M}$, c'est-à-dire $\hat{M} = P(\hat{s})$. Un raisonnement analogue à celui fait dans la démonstration du théorème 12 prouve que $\hat{M}$ est stable pour ν et pour μ, i.e. que $\hat{M} = \hat{\sigma}^{\nu\mu}(\hat{M})$, car par hypothèse ζ est un ordinal initial ré gulier et $\overline{I} < \zeta$ pour tout $I^\bullet \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}$. Donc $\hat{M}^\bullet$ définit une $Q^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$-sous-structure $(\hat{M}^\bullet, \hat{\nu}, \hat{\mu})$ de $(C^\bullet, \nu, \mu)$.- Par ailleurs, $(\hat{M}^\bullet, \hat{s})$ est une sous-catégorie P-structurée de $(C^\bullet, s)$ (th. 13-II [14]), i.e. une $P\mathcal{G}.\hat{P}'$-sous-structure de $(C^\bullet, s)$. La catégorie $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(P)$ s'identifiant à la catégorie produit fibré $P\mathcal{G} . \hat{P}' \vee Q^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$, on en déduit (th. 9, chap. IV, C.S.) que $(\hat{M}^\bullet, \hat{s}, \hat{\nu}, \hat{\mu})$ est une $Q^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(P)$-sous-structure de $(C^\bullet, s, \nu, \mu)$. C'est évidemment la $(Q^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(P), X, \mathcal{K})$-sous-structure de $(C^\bullet, s, \nu, \mu)$ engendrée par M, en désignant par $\mathcal{K}$ la saturante de $\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p)$ dans $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(P)$. Ceci montre que $Q^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(P)$ est un foncteur $\vdash$-engendrant pour $(\mathfrak{M}, X, \mathcal{K})$, et par suite pour $(\mathfrak{M}, X, \mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p))$, car $Q^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(P)$ est un foncteur d'homomorphismes saturé. ■

COROLLAIRE 1. *Si P est à $\hat{\mathfrak{M}}_0$-produits et ζ-$\vdash$-engendrant pour $\mathfrak{M}$,* *où ζ est un ordinal régulier tel que $\lambda_{\mathcal{I}\mathcal{J}} < \zeta < \Lambda$, les foncteurs $p^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p)$ et $(\mathcal{F}'^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p), \iota, \mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p))$ admettent des adjoints.*

DEMONSTRATION. Puisque P est à $\hat{\mathfrak{M}}_0$-produits et à produits fibrés finis, il est à $\hat{\mathfrak{M}}_0$- limites projectives. Sa restriction p à $\overset{-1}{\underline{P}}(\mathfrak{M})$ est un foncteur à $\mathfrak{M}_0$- limites projectives, car P est un foncteur d'homomorphismes saturé. Il s'ensuit (th. 1- 3 [1]) que $\hat{p}'$ est aussi un foncteur à $\mathfrak{M}_0$- limites projectives. Par ailleurs, d'après la proposi. 23, $p^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$ est un foncteur à $\mathfrak{M}_0$- limites projectives. Comme $\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p)$ est une catégorie produit fibré de $(\hat{p}', p^{\mathcal{I}\mathcal{J}})$, c'est une catégorie à $\mathfrak{M}_0$- limites projectives, et les foncteurs $p^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p)$ et $(\mathcal{F}'^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p), \iota, \mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p))$ sont des foncteurs à $\mathfrak{M}_0$-limites projectives. Les conditions du critère 1 d'existence d'un foncteur adjoint sont donc vérifiées relativement à ces deux derniers foncteurs, de sorte qu'ils admettent des adjoints. ∎

COROLLAIRE 2. *Si P est à $\hat{\mathfrak{M}}_0$- produits et ζ- $\vdash$- engendrant pour $\mathfrak{M}$, où $\zeta < \Lambda$, alors $\hat{p}'$ admet un adjoint.*

En effet, supposons $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ vides; alors $\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p)$ s'identifie à $\mathcal{F}(p)$ et $p^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p)$ à $\hat{p}'$. Or, dans la démonstration du théorème 16, le fait que ζ soit un ordinal régulier n'a été utilisé que pour montrer que $\hat{M}^{\cdot}$ est stable pour ν et pour μ, ce qui sera vrai ici pour toute sous-catégorie de $C^{\cdot}$. Donc le corollaire 2 résulte du corollaire 1. ∎

COROLLAIRE 3. *Soit $\hat{p}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$ le foncteur de $\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p)$ vers $\mathcal{F}(p)$ associant $(\hat{C}^{\cdot}, f, C^{\cdot})$ à $((\hat{C}^{\cdot}, \hat{\nu}, \hat{\mu}), f, (C^{\cdot}, \nu, \mu))$. Si P est à $\mathfrak{M}_0$- produits et ζ- $\vdash$- engendrant pour $\mathfrak{M}$, où ζ est un ordinal régulier et où $\lambda_{\mathcal{I}\mathcal{J}} < \zeta < \Lambda$, tout $(H^{\cdot}, s) \in \mathcal{F}(p)_0$ engendre une $\hat{p}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$- structure libre $(\hat{H}^{\cdot}, \hat{s}, \hat{\nu}, \hat{\mu})$ telle que $H^{\cdot}_0 \subset \hat{H}^{\cdot}_0$.*

DEMONSTRATION. $\hat{p}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$ est un foncteur à $\mathfrak{M}_0$-limites projectives; $P\mathcal{G}.\hat{P}'.\hat{p}^{\mathcal{I}\mathcal{J}} = Q^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(P)$ est $\vdash$- engendrant pour $(\mathfrak{M}, X, \mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p))$ (théorème 16). Donc le critère 1 affirme que $\hat{p}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$ admet un adjoint. Soit $(\hat{u}, \overline{J})$ un $(\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p), \hat{p}^{\mathcal{I}\mathcal{J}})$- projecteur tel que $\alpha(\overline{J}) = (H^{\cdot}, s)$, et soit $\hat{u} = (\hat{H}^{\cdot}, \hat{s}, \hat{\nu}, \hat{\mu})$. Désignons par $S^{\perp}$ le groupoïde des couples $(H^{\cdot}_0 \times H^{\cdot}_0)^{\perp}$ associé à $H^{\cdot}_0$. On sait (th. 2- II [14]) que $(S^{\perp}, s_0 \times s_0)$ est une catégorie p- structurée, où s_o est la p-sous-structure de s définie par $H_o^{\bullet}$. De plus, par définition d'une catégorie p-structurée, il existe

$$f \in (s_o \times s_o).\mathcal{H}.s \quad \text{tel que} \quad p(f) = [\beta, \alpha] .$$

Ceci signifie

$$\overline{F} = (S^{\perp}, f, H^{\bullet}) \in \mathfrak{F}(p).$$

Comme $S^{\perp}$ est un groupoïde connexe, il est à $\mathcal{I}$-limites projectives et à $\mathcal{J}$-limites inductives et, en choisissant deux applications $\mathcal{I}$-limite projective ν' et $\mathcal{J}$-limite inductive μ' sur $S^{\perp}$, on a

$$u = (S^{\perp}, s_o \times s_o, \nu', \mu') \in \mathfrak{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p)_o .$$

Par définition d'un $(\mathfrak{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p), \hat{p}^{\mathcal{I}\mathcal{J}})$-projecteur, il existe un et un seul

$$\tilde{F}' = ((S^{\perp}, \nu', \mu'), f', (\hat{H}^{\bullet}, \hat{\nu}, \hat{\mu})) \in \mathfrak{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p)$$

tel que $\hat{p}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(\tilde{F}').\overline{J} = \overline{F}$, d'où $p(f').\tilde{p}(\overline{J}) = p(f)$, où $\tilde{p} = p\mathcal{F}.\hat{p}'$. La restriction de $p(f) = [\beta, \alpha]$ à $H_o^{\bullet}$ étant l'identité, la restriction de $\tilde{p}(\overline{J})$ à $H_o^{\bullet}$ sera aussi injective. Par suite $H_o^{\bullet}$ peut être identifié à

$$\tilde{p}(\overline{J})(H_o^{\bullet}) \subset \hat{H}_o^{\bullet} . \blacksquare$$

DEFINITION. *Une $(\mathfrak{M}, X, \mathfrak{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p))$-sous-structure de $\hat{u} \in \hat{\mathfrak{F}}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(P)$ engendrée par M est appelée $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-*complétion de M dans $\hat{u}$. *Une $(\mathfrak{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p), \mathfrak{F}'^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p))$-projection de $u \in \mathfrak{F}'^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p)$ est appelée $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-*complétion structurée de u.

Nous désignons par v le foncteur canonique de $\mathfrak{F}'^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p)$ vers $\mathfrak{F}'^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$ associant $(e', \underline{p(f)}, e)$ à $(e', f, e) \in \mathfrak{F}'^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p)$.

THEOREME 17. *Supposons que P soit à $\hat{\mathfrak{M}}_o$-produits et ζ-ρ-engendrant pour $\mathfrak{M}$, où ζ est un ordinal régulier tel que $\lambda_{\mathcal{I}\mathcal{J}} < \zeta < \Lambda$, et que p admette une section maximale z (4 [1]). Tout $H^{\bullet} \in \mathfrak{F}_o$ engendre une $p^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p)$-structure libre $\hat{u}$ telle que $v(\hat{u})$ soit une $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-complétion libre de $H^{\bullet}$. Si u' est une $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-complétion structurée de u, alors $v(u')$ est une $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-complétion de $v(u)$.*

DEMONSTRATION. Soit $K^{\bullet} \in \mathfrak{F}_o$ et $s = z(K)$. Alors

$$a = z(K, \alpha, K) \in s.\mathcal{H}.s, \qquad b = z(K, \beta, K) \in s.\mathcal{H}.s.$$

D'après la proposition 1-4 [1], $z(K \times K) = z(s) \times z(s)$, et $s_* s =$

$= z(K^\bullet * K^\bullet)$ est une p-sous-structure de $z(s) \times z(s)$ en vertu du lemme 3 (appendice). Si $K^\bullet = (K, \kappa)$, on a

$$z(K, \kappa, K^\bullet * K^\bullet) \in s.\mathcal{H}.s * s.$$

Comme p est un foncteur d'homomorphismes saturé et résolvant, il s'ensuit que $(K^\bullet, z(K))$ est une catégorie p-structurée. - Supposons $H^\bullet \in \mathcal{F}_o$ et soit $((C^\bullet, \nu, \mu), J)$ un $(\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{I}}, p^{\mathcal{I}\mathcal{I}})$-projecteur tel que $J \in \mathcal{F}.H^\bullet$ (il en existe d'après le théorème 13). En vertu du corollaire 1 du théorème 16, il existe un $(\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{I}}(p), p^{\mathcal{I}\mathcal{I}}(p))$-projecteur $(\hat{u}, J')$, où

$$\hat{u} = (\hat{H}^\bullet, \hat{s}, \hat{\nu}, \hat{\mu}) \quad \text{et} \quad J' \in \mathcal{F}.H^\bullet.$$

Les relations

$$(C^\bullet, z(C), \nu, \mu) \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{I}}(p) \quad \text{et} \quad J \in C^\bullet.\mathcal{F}.H^\bullet$$

assurent l'existence d'un et d'un seul

$$\tilde{F} = ((C^\bullet, \nu, \mu), f, (\hat{H}^\bullet, \hat{\nu}, \hat{\mu})) \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{I}}(p).\hat{u}$$

tel que $F.J' = J$, où $F = p^{\mathcal{I}\mathcal{I}}(p)(\tilde{F})$. Puisque

$$(\hat{H}^\bullet, \hat{\nu}, \hat{\mu}) \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{I}} \quad \text{et} \quad J' \in \hat{H}^\bullet.\mathcal{H}.H^\bullet,$$

il existe un et un seul

$$\hat{F}' \in (\hat{H}^\bullet, \hat{\nu}, \hat{\mu}).\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{I}}.(C^\bullet, \nu, \mu)$$

tel que $F'.J = J'$, où $F' = p^{\mathcal{I}\mathcal{I}}(\hat{F}')$. Soit $\hat{F} = v(\tilde{F})$; on a

$$\hat{F}.\hat{F}' \in (C^\bullet, \nu, \mu).\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{I}}.(C^\bullet, \nu, \mu)$$

et

$$p^{\mathcal{I}\mathcal{I}}(\hat{F}.\hat{F}').J = F.F'.J = F.J' = J.$$

Il en résulte $\hat{F}.\hat{F}' = (C^\bullet, \nu, \mu)$, car $((C^\bullet, \nu, \mu), J)$ est un $(\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{I}}, p^{\mathcal{I}\mathcal{I}})$-projecteur. Par ailleurs, on a $g = z(p_{\mathcal{F}}(F')) \in z(\hat{H}).\mathcal{H}.z(C)$, d'où

$$\tilde{G} = ((\hat{H}^\bullet, \hat{\nu}, \hat{\mu}), g, (C^\bullet, \nu, \mu)) \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{I}}(p).\beta(\tilde{F}),$$

$$p^{\mathcal{I}\mathcal{I}}(p)(\tilde{G}) = F' \quad \text{et} \quad p^{\mathcal{I}\mathcal{I}}(p)(\tilde{G}.\tilde{F}) = F'.F.$$

Par définition d'une section maximale, il existe un $g_{\hat{s}} \in z(\hat{H}).\mathcal{H}.\hat{s}$ tel que $p(g_{\hat{s}}) = \hat{H}$, ce qui entraîne

$$\tilde{G}' = ((\hat{H}^\bullet, \hat{\nu}, \hat{\mu}), g_{\hat{s}}, (\hat{H}^\bullet, \hat{\nu}, \hat{\mu})) \in \beta(\tilde{G}).\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{I}}(p).\hat{u}$$

et $p^{\mathcal{GG}}(p)(\tilde{G}') = \hat{H}^{\bullet}$. On obtient

$$p^{\mathcal{GG}}(p)(\tilde{G}.\tilde{F}).J' = F'.F.J' = F'.J = J' = p^{\mathcal{GG}}(p)(\tilde{G}').J',$$

et par suite $\tilde{G}.\tilde{F} = \tilde{G}'$, car $(\hat{u}, J')$ est un $(\mathcal{F}^{\mathcal{GG}}(p), p^{\mathcal{GG}}(p))$-projecteur. Ainsi

$$\hat{F}'.\hat{F} = \nu(\tilde{G}.\tilde{F}) = \nu(\tilde{G}') = (\hat{H}^{\bullet}, \hat{\nu}, \hat{\mu}).$$

Ceci prouve que $\hat{F}$ est l'inverse de $\hat{F}'$ dans $\mathcal{F}^{\mathcal{GG}}$, i.e. que $(\hat{H}^{\bullet}, \hat{\nu}, \hat{\mu})$ est aussi une $p^{\mathcal{GG}}$-structure libre engendrée par $H^{\bullet}$.

-Supposons $u = (H^{\bullet}, s, \nu, \mu) \in \mathcal{F}'^{\mathcal{GG}}(p)_o$. D'après le théorème 15, il existe un $(\mathcal{F}^{\mathcal{GG}}, \mathcal{F}'^{\mathcal{GG}})$-projecteur $\hat{J} \in \mathcal{F}'^{\mathcal{GG}}.\nu(u)$; soit

$$(K^{\bullet}, \nu', \mu') = \beta(\hat{J}).$$

En vertu du corollaire 1 du théorème 16, il existe un $(\mathcal{F}^{\mathcal{GG}}(p), \mathcal{F}'^{\mathcal{GG}}(p))$-projecteur $\tilde{J}'' \in \mathcal{F}'^{\mathcal{GG}}(p).u$; posons $\beta(\tilde{J}'') = (\tilde{H}^{\bullet}, \tilde{s}, \tilde{\nu}, \tilde{\mu})$ et $\hat{J}'' = \nu(\tilde{J}'')$. Puisque $\hat{J}'' \in \mathcal{F}^{\mathcal{GG}}_o.\mathcal{F}'^{\mathcal{GG}}.\nu(u)$, il existe un et un seul $\hat{M} \in \mathcal{F}^{\mathcal{GG}}$ tel que $\hat{M}.\hat{J} = \hat{J}''$. D'autre part, z étant une section maximale de p, il existe un $h_s \in z(s).\mathcal{H}.s$ tel que $p(h_s) = H$; on a

$$k = z(q^{\mathcal{GG}}(\hat{J})).h_s \in \mathcal{H}.s \quad \text{et} \quad p(k) = q^{\mathcal{GG}}(\hat{J}).$$

On en déduit

$$\tilde{N} = ((K^{\bullet}, \nu', \mu'), k, (H^{\bullet}, \nu, \mu)) \in \mathcal{F}^{\mathcal{GG}}(p)_o.\mathcal{F}'^{\mathcal{GG}}(p)$$

et, $\tilde{J}''$ étant un $(\mathcal{F}^{\mathcal{GG}}(p), \mathcal{F}'^{\mathcal{GG}}(p))$-projecteur, il existe un et un seul $\tilde{N}'$ tel que

$$\tilde{N}'.\tilde{J}'' = \tilde{N}, \quad \text{d'où} \quad \hat{N}'.\hat{J}'' = \hat{J} \quad \text{si} \quad \hat{N}' = \nu(\tilde{N}').$$

Les égalités

$$\hat{N}'.\hat{M}.\hat{J} = \hat{N}'.\hat{J}'' = \hat{J}$$

entraînent $\hat{N}'.\hat{M} = \beta(\hat{J})$. Il existe aussi un $h_{\tilde{s}} \in z(\tilde{H}).\mathcal{H}.\tilde{s}$ tel que $p(h_{\tilde{s}}) = \tilde{H}$, de sorte que l'on trouve

$$\tilde{M}'' = ((\tilde{H}^{\bullet}, \tilde{\nu}, \tilde{\mu}), h_{\tilde{s}}, (\tilde{H}^{\bullet}, \tilde{\nu}, \tilde{\mu})) \in \mathcal{F}^{\mathcal{GG}}(p), \quad \nu(\tilde{M}'') = \beta(\hat{J}''),$$

$$\tilde{M}' = ((\tilde{H}^{\bullet}, \tilde{\nu}, \tilde{\mu}), z(q^{\mathcal{GG}}(\hat{M})), (K^{\bullet}, \nu', \mu')) \in \beta(\tilde{M}'').\mathcal{F}^{\mathcal{GG}}(p).\beta(\tilde{N}')$$

et $\nu(\tilde{M}') = \hat{M}$. Il s'ensuit

$$v(\tilde{M}'.\tilde{N}'.\tilde{J}'') = \hat{M}.\hat{N}'.\hat{J}'' = \hat{M}.\hat{J} = \hat{J}'' = v(\tilde{M}''.\tilde{J}'')$$

et, v étant fidèle,

$$\tilde{M}'.\tilde{N}'.\tilde{J}'' = \tilde{M}''.\tilde{J}''.$$

Etant donné que $\tilde{J}''$ est un $(\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p), \mathcal{F}'^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p))$-projecteur, on a donc

$$\tilde{M}'.\tilde{N}' = \tilde{M}''.$$

Par suite

$$\hat{M}.\hat{N}' = v(\tilde{M}'.\tilde{N}') = \beta(\hat{J}''),$$

et $\hat{M}$ est l'inverse de $\hat{N}'$ dans $\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$. Ceci signifie que $\hat{J}''$ est aussi un $(\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}, \mathcal{F}'^{\mathcal{I}\mathcal{J}})$-projecteur. ∎

COROLLAIRE. *Avec les hypothèses du théorème 17, tout* $(H^\bullet, s) \in \mathcal{F}(p)_0$ *engendre une* $\hat{p}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$*-structure libre* $\hat{u}$ *telle que* $v(\hat{u})$ *soit une* $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$*-complétion libre de* $H^\bullet$.

En effet, ceci résulte du théorème 17, appliqué à l'élément

$$u = (H^\bullet, s, \emptyset, \emptyset),$$

où $\emptyset$ est l'application vide. ∎

EXEMPLES. 1°) Si p est le foncteur θ projection vers $\mathcal{M}$ de la catégorie $\mathcal{T}$ des applications continues relatives à l'univers $\mathcal{M}_0$, les conditions du théorème 17 sont remplies, car θ est $\curlywedge$-étalant à section maximale. Par suite : Soit $(H^\bullet, T)$ une catégorie topologique, ν une application $\mathcal{I}$-limite projective partielle et μ une application $\mathcal{J}$-limite inductive partielle sur $H^\bullet$; si $(\hat{H}^\bullet, \hat{\nu}, \hat{\mu})$ est la $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-complétion de $(H^\bullet, \nu, \mu)$, il existe un foncteur continu injectif $\overline{F}$ de $(H^\bullet, T)$ vers une catégorie topologique $(\hat{H}^\bullet, \hat{T})$, compatible avec $(\nu, \hat{\nu})$ et $(\mu, \hat{\mu})$, solution du problème universel du plongement de $(H^\bullet, T, \nu, \mu)$ dans une catégorie topologique munie de deux applications $\mathcal{I}$-limite projective et $\mathcal{J}$-limite inductive. En effet, $(\hat{H}^\bullet, \hat{T}, \hat{\nu}, \hat{\mu})$ est la $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-complétion topologique de $(H^\bullet, T, \nu, \mu)$ et $\tilde{\theta}(\overline{F})$ est une injection, en vertu du théorème 13.

2°) Le théorème 16 et ses corollaires s'appliquent lorsque p est l'un des foncteurs $p_{\mathcal{N}}$, $p_{\mathcal{N}'}$ ou $p_{\mathcal{F}}$ projection vers $\mathcal{M}$ de la catégorie $\mathcal{N}$ des homomorphismes entre classes multiplicatives, $\mathcal{N}'$ des néofoncteurs,

$\mathcal{F}$ des foncteurs, car ces foncteurs sont ζ- $\vdash$- engendrants pour $\mathfrak{M}$ pour tout ordinal ζ de seconde espèce tel que $\zeta < \Lambda$.

THEOREME 18. *Soit $\mathcal{H}'$ une sous-catégorie de $\mathcal{H}$ stable par produits dans $\mathcal{H}$ et vérifiant la condition (σ) relativement à $(\mathfrak{M}^{\iota}, p)$ (chap. III, C.S.). Le théorème 16 et ses corollaires sont aussi vrais si on remplace partout $\mathcal{F}(p)$ par sa sous-catégorie pleine $\mathcal{F}_1(p)$ ayant pour unités les catégories $p(\mathcal{H}', \mathcal{H})$-(resp. $p((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H})$-) structurées.*

En effet, les démonstrations données plus haut s'appliquent sans changement, en utilisant les résultats suivants :

1°) $\mathcal{F}_1(p)$ est stable par produits dans $\mathcal{F}(p)$ (th. 1-II [14]);

2°) Si $(C^{\bullet}, s) \in \mathcal{F}_1(p)_0$, si $\hat{s}$ est une p-sous-structure de s et si $p(\hat{s})$ définit une sous-catégorie $\hat{C}^{\bullet}$ de $C^{\bullet}$, on a

$$(\hat{C}^{\bullet}, \hat{s}) \in \mathcal{F}_1(p)_0$$

et $(\hat{C}^{\bullet}, \hat{s})$ est une $\hat{p}'_1$-sous-structure de $(C^{\bullet}, s)$, en désignant par $\hat{p}'_1$ la restriction de $\hat{p}'$ à $\mathcal{F}_1(p)$ (II [14]). ∎

B. ADJONCTION DE LIMITES A UNE CATEGORIE ORDONNEE.

Soit ω le foncteur canonique vers $\mathfrak{M}$ de la catégorie Ω des applications ordonnées relative à l'univers $\mathfrak{M}_0$, et Ω' la sous-catégorie de Ω formée des applications ordonnées strictes [15]. Le foncteur ω est $\vdash$-étalant et Ω' est stable par produits et vérifie la condition (σ) relativement à $(\mathfrak{M}^{\iota}, p)$. Ainsi Ω est ζ-$\vdash$-engendrant pour $\mathfrak{M}$ pour tout ordinal $\zeta < \Lambda$. D'après le théorème 16 (resp. 18) le problème «universel» de l'adjonction de $\mathcal{I}$-limites projectives et de $\mathcal{J}$-limites inductives à une catégorie ω-structurée (resp. catégorie ordonnée) admet une solution.

Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ deux parties de $\mathfrak{M}_0$ telles que $\mathcal{L} \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$ et $\mathcal{L}' \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$. En fait $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ interviendrait seulement par les ordinaux

$$\lambda_{\mathcal{L}} = \sup_{L \in \mathcal{L}} (\bar{L}+1) \quad \text{et} \quad \lambda_{\mathcal{L}'} = \sup_{L' \in \mathcal{L}'} (\bar{L}'+1).$$

DEFINITION. *On appelle* classe $\mathcal{L}\mathcal{L}'$-inductive (*resp.* $\mathcal{L}\mathcal{L}'$-sous-inductive) *une classe ordonnée $(M, <)$ telle qu'une partie A (resp. A majorée dans $(M, <)$) de M admette un agrégat $\cup A$ (resp. un sous-agrégat $\overset{x}{\bigcup} A$ si*

$A < x \in M$) lorsque l'ordinal $\overline{A}$ est inférieur à $\lambda_{\mathcal{L}}$ et une intersection $\cap A$ si $\overline{A} < \lambda_{\mathcal{L}'}$.

Evidemment une classe $\mathcal{L}\mathcal{L}'$-(resp. $\mathcal{L}\mathcal{L}'$-sous-)inductive est aussi $\hat{\mathcal{L}}\hat{\mathcal{L}}'$-(resp. $\hat{\mathcal{L}}\hat{\mathcal{L}}'$-sous-) inductive si, pour tout $\hat{L} \in \hat{\mathcal{L}}$ et tout $\hat{L}' \in \hat{\mathcal{L}}'$, il existe $L \in \mathcal{L}$ et $L' \in \mathcal{L}'$ tels que $\hat{L} \subset L$ et $\hat{L}' \subset L'$.

Soit $\Omega(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ (resp. $\Omega^s(\mathcal{L}\mathcal{L}')$) la sous-catégorie de Ω formée des

$$f = ((M', <), \underline{f}, (M, <))$$

vérifiant les conditions:

1°) Si $A \subset M$, $\overline{A} < \lambda_{\mathcal{L}}$ et s'il existe $\cup A$ (resp. $\overset{x}{\bigcup} A$) dans $(M, <)$, alors $f(\cup A) = \cup f(A)$ (resp. $f(\overset{x}{\bigcup} A) = \overset{y}{\bigcup} f(A)$, où $y = f(x)$).

2°) Si $A \subset M$ (resp. $A < x \in M$), si $\overline{A} < \lambda_{\mathcal{L}'}$ et s'il existe $\cap A$ dans $(M, <)$, on a $f(\cap A) = \cap f(A)$.

Soit $\mathcal{P}(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ (resp. $\mathcal{P}^s(\mathcal{L}\mathcal{L}')$) la catégorie des *applications $\mathcal{L}\mathcal{L}'$-inductives* (resp. *$\mathcal{L}\mathcal{L}'$-sous-inductives*), i.e. la sous-catégorie pleine de $\Omega(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ (resp. de $\Omega^s(\mathcal{L}\mathcal{L}')$) ayant pour unités les classes $\mathcal{L}\mathcal{L}'$-inductives (resp. $\mathcal{L}\mathcal{L}'$-sous-inductives). Soit $\omega(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ (resp. $\omega^s(\mathcal{L}\mathcal{L}')$) la restriction de ω à cette sous-catégorie de Ω. Désignons par $\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{L}\mathcal{L}')$, $\hat{\mathcal{P}}^s(\mathcal{L}\mathcal{L}')$, $\hat{\omega}(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ et $\hat{\omega}^s(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ les catégories et foncteurs définis de même à partir de l'univers $\hat{\mathfrak{M}}_0$, ces foncteurs étant des restrictions de $\hat{\omega} = (\hat{\mathfrak{M}}, \underline{\hat{\omega}}, \hat{\Omega})$.

THEOREME 19. *$\hat{\omega}(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ et $\hat{\omega}^s(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ sont des foncteurs ζ-ρ-engendrants pour $\mathfrak{M}$, pour tout ordinal régulier ζ tel que $\sup(\lambda_{\mathcal{L}}, \lambda_{\mathcal{L}'}) \leq \zeta < \Lambda$.*

DEMONSTRATION. Soit $\hat{\gamma}$ l'isomorphisme canonique de $\hat{\Omega}$ sur la sous-catégorie pleine $\hat{\mathcal{F}}_\omega$ de $\hat{\mathcal{F}}$ qui associe à $(M, <)$ la catégorie des couples définissant $(M, <)$. Soit $\tilde{\mathcal{L}}$ (resp. $\tilde{\mathcal{L}}'$) la classe des catégories triviales $\tilde{L}^0$ telles qu'il existe $L \in \mathcal{L}$ (resp. $\in \mathcal{L}'$) vérifiant $\tilde{L} \subset L$. Si $(M, <)$ est une classe $\mathcal{L}\mathcal{L}'$-inductive, $C^\cdot = \hat{\gamma}(M, <)$ est une catégorie à $\tilde{\mathcal{L}}$-produits et à $\tilde{\mathcal{L}}'$-sommes (chap. IV, C.S.). Comme tout inversible de $C^\cdot$ est une unité, il existe une seule application $\tilde{\mathcal{L}}$-limite projective ν et une seule application $\tilde{\mathcal{L}}'$-limite inductive μ sur $C^\cdot$, de sorte que l'on a

$$\Gamma(M, <) = (C^\cdot, \nu, \mu) \in \mathcal{F}^{\tilde{\mathcal{L}}\tilde{\mathcal{L}}'}.$$

La surjection

$$((M',<),\underline{f},(M,<)) \to (\Gamma(M',<),(\underline{f}\times\underline{f})\iota,\Gamma(M,<))$$

définit un isomorphisme Γ de $\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ sur la sous-catégorie pleine $\hat{\mathcal{F}}_{\omega}^{\mathcal{L}\mathcal{L}'}$ de $\mathcal{F}^{\tilde{\mathcal{L}}\tilde{\mathcal{L}}'}$ ayant pour unités les $(C^{\cdot},\nu,\mu)\in\hat{\mathcal{F}}_{\circ}^{\tilde{\mathcal{L}}\tilde{\mathcal{L}}'}$ tels que $C^{\cdot}\in\hat{\mathcal{F}}_{\omega}$. Soit $Q_{\omega}^{\mathcal{L}\mathcal{L}'}$ la restriction de $Q^{\tilde{\mathcal{L}}\tilde{\mathcal{L}}'}$ à $\mathcal{F}_{\omega}^{\mathcal{L}\mathcal{L}'}$. D'après le théorème 12, $Q^{\tilde{\mathcal{L}}\tilde{\mathcal{L}}'}$ est ρ-engendrant pour $\mathfrak{M}$; une démonstration analogue prouve que $Q_{\omega}^{\mathcal{L}\mathcal{L}'}$ est $(\mathfrak{M}^{U},X,\mathcal{F}_{\omega}^{\mathcal{L}\mathcal{L}'})$-engendrant, $P^{\tilde{\mathcal{L}}\tilde{\mathcal{L}}'}(X)=$ classe des $(C^{\cdot},\iota,\hat{C}^{\cdot}).F$, où $\hat{C}^{\cdot}$ est pleine dans $C^{\cdot}$ et $F\in\mathcal{F}_{\gamma}$. Donc $\hat{\omega}(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ est ρ-engendrant pour $\mathfrak{M}$. - Soit ζ un ordinal régulier tel que

$$\lambda_{\mathcal{L}}\leq\zeta<\Lambda \quad \text{et} \quad \lambda_{\mathcal{L}'}\leq\zeta<\Lambda;$$

il en existe, par exemple l'ordinal initial d'indice $sup(\lambda_{\mathcal{L}},\lambda_{\mathcal{L}'})+1$. Soient $u=(M,<)\in\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{L}\mathcal{L}')_{0}$ et, pour tout $\lambda<\zeta$, $u_{\lambda}=(M_{\lambda},<)$ une $\hat{\omega}(\mathcal{L}\mathcal{L}')$-sous-structure de u vérifiant $M_{\xi}\subset M_{\xi'}$ si $\xi<\xi'<\zeta$. On montre (comme dans le théorème 3-4 [1]) que $(M_{\lambda},<)$ est une sous-classe $\mathcal{L}\mathcal{L}'$-inductive de $(M,<)$, i.e. une classe ordonnée par la relation d'ordre induite par $(M,<)$ sur $M_{\lambda}\subset M$, telle que pour $A_{\lambda}\subset M_{\lambda}$, on ait $\cup A_{\lambda}\in M_{\lambda}$ si $\overline{A}_{\lambda}<\lambda_{\mathcal{L}}$ et $\cap A_{\lambda}\in M_{\lambda}$ si $\overline{A}_{\lambda}<\lambda_{\mathcal{L}'}$, où $\cup A_{\lambda}$ et $\cap A_{\lambda}$ sont calculés dans $(M,<)$. Posons $\hat{M}=\bigcup_{\lambda<\zeta}M_{\lambda}$. Soit $A\subset\hat{M}$ et $\overline{A}<\lambda_{\mathcal{L}}$. Pour tout $a\in A$, il existe $\lambda_{a}<\zeta$ tel que $a\in M_{\lambda_{a}}$. Puisque la suite transfinie $(\lambda_{a})_{a\in A}$, où $\lambda_{a}<\zeta$, est de type $\overline{A}<\lambda_{\mathcal{L}}\leq\zeta$ et que ζ est régulier, on a

$$\lambda_{A}=\sup_{a\in A}\lambda_{a}<\zeta.$$

Il s'ensuit

$$A\subset M_{\lambda_{A}}, \quad \text{d'où} \quad \cup A\in M_{\lambda_{A}}\subset\hat{M},$$

car $M_{\lambda_{A}}$ est une sous-classe $\mathcal{L}\mathcal{L}'$-inductive de $(M,<)$. On voit de même que, si $\overline{A}<\lambda_{\mathcal{L}'}$, on a $\cap A\in\hat{M}$. Par suite $(\hat{M},<)$ est une sous-classe $\mathcal{L}\mathcal{L}'$-inductive de $(M,<)$ et, a fortiori, une $\hat{\omega}(\mathcal{L}\mathcal{L}')$-sous-structure de $(M,<)$. Ainsi $\hat{\omega}(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ est ζ-ρ-engendrant pour $\mathfrak{M}$.

- Supposons $(M,<)\in\hat{\mathcal{P}}^{s}(\mathcal{L}\mathcal{L}')_{0}$. Les $\hat{\omega}^{s}(\mathcal{L}\mathcal{L}')$-sous-structures de $(M,<)$ sont les sous-classes $\mathcal{L}\mathcal{L}'$-sous-inductives de $(M,<)$, c'est-à-dire les sous-classes ordonnées $(M',<)$ telles que

$$((M,<),\iota,(M',<))\in\hat{\mathcal{P}}^{s}(\mathcal{L}\mathcal{L}').$$

Soit $K \subset M$. Désignons par $K_{\mathcal{P}}$ (resp. par $K_{\mathcal{P}'}$) la classe des couples (A, x), où

$$A \subset K, \quad x \in K, \quad A < x \quad \text{et} \quad \overline{A} < \lambda_{\mathcal{P}} \text{ (resp. } < \lambda_{\mathcal{P}'}).$$

Soit g (resp. g') la surjection associant à $(A, x) \in K_{\mathcal{P}}$ (resp. $\in K_{\mathcal{P}'}$) l'élément $\overset{x}{\bigcup} A$ (resp. $\cap A$). Posons

$$\tau(K) = g(K_{\mathcal{P}}) \cup g'(K_{\mathcal{P}'});$$

on trouve $K \subset \tau(K)$, car $x = \overset{x}{\bigcup} \{x\}$ pour tout $x \in K$. Pour que la sous-classe ordonnée $(K, <)$ de $(M, <)$ soit une sous-classe $\mathcal{L}\mathcal{L}'$-sous-inductive de $(M, <)$, il faut et il suffit que $K = \tau(K)$. - Supposons $K \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$. Les relations

$$K_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{P}(K) \times K \in \tilde{\mathfrak{M}}_o \quad \text{et} \quad K_{\mathcal{P}'} \subset \mathcal{P}(K) \times K \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$$

entraînent, $\tilde{\mathfrak{M}}_o$ étant un univers,

$$g(K_{\mathcal{P}}) \in \tilde{\mathfrak{M}}_o, \quad g'(K_{\mathcal{P}'}) \in \tilde{\mathfrak{M}}_o \quad \text{et} \quad \tau(K) \in \tilde{\mathfrak{M}}_o.$$

Soit ζ un ordinal régulier tel que $sup(\lambda_{\mathcal{P}}, \lambda_{\mathcal{P}'}) \leq \zeta < \Lambda$. Soit $1 \leq \lambda < \zeta$ et supposons définie une partie K_ξ de M pour tout $\xi < \lambda$, de sorte que

$$K_1 = \tau(K), \quad K_\xi \in \tilde{\mathfrak{M}}_o \quad \text{et} \quad K_\xi \subset K_{\xi'} \text{ si } \xi < \xi'.$$

Posons $K_\lambda = \tau(\bigcup_{\xi < \lambda} K_\xi)$; on a

$$K_\lambda \in \tilde{\mathfrak{M}}_o \quad \text{et} \quad K_\xi \subset K_\lambda \text{ si } \xi < \lambda.$$

Par récurrence transfinie, nous obtenons ainsi une suite transfinie $(K_\lambda)_{\lambda < \zeta}$ de parties de M. Soit $\hat{K} = \bigcup_{\lambda < \zeta} K_\lambda$. Etant donné que $\tilde{\mathfrak{M}}_o$ est un univers admettant Λ pour ordinal associé, que $\zeta < \Lambda$ et que $K_\lambda \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$ pour tout $\lambda < \zeta$, on a $\hat{K} \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$. Montrons que la sous-classe ordonnée $(\hat{K}, <)$ de $(M, <)$ est une sous-classe $\mathcal{L}\mathcal{L}'$-sous-inductive de $(M, <)$, i.e. que $\tau(\hat{K}) = \hat{K}$. En effet, soit $(A, x) \in \hat{K}_{\mathcal{P}}$ (resp. $\in \hat{K}_{\mathcal{P}'}$). Comme plus haut, on voit qu'il existe un ordinal $\lambda_A < \zeta$ tel que $A \subset K_{\lambda_A}$; il existe aussi $\lambda_x < \zeta$ tel que $x \in K_{\lambda_x}$; soit $\lambda = sup(\lambda_A, \lambda_x)$; des relations $\lambda + 1 < \zeta$ et $(A, x) \in (K_\lambda)_{\mathcal{P}}$ (resp. $\in (K_\lambda)_{\mathcal{P}'}$), on déduit

$$g(A, x) = \overset{x}{\bigcup} A \in K_{\lambda+1} \subset \hat{K} \text{ (resp. } g'(A, x) = \cap A \in K_{\lambda+1} \subset \hat{K}),$$

d'où

$$\tau(\hat{K}) = g(\hat{K}_{\mathcal{P}}) \cup g'(\hat{K}_{\mathcal{P}'}) = \hat{K}.$$

Ainsi $(\hat{K},<)$ est une sous-classe $\mathcal{L}\mathcal{L}'$-sous-inductive de $(M,<)$.-Il est évident que $\hat{K} \subset K'$ si $(K',<)$ est une sous-classe $\mathcal{L}\mathcal{L}'$-sous-inductive de $(M,<)$ et si $K \subset K'$. Donc $(\hat{K},<)$ est la $\hat{\omega}^s(\mathcal{L}\mathcal{L}')$-sous-structure de $(M,<)$ engendrée par K et, puisque $\hat{K} \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$, le foncteur $\hat{\omega}^s(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ est $\frown$-engendrant pour $\mathfrak{M}$.-Un raisonnement analogue à celui conduit ci-dessus prouve que, si $(M_\lambda,<)$ est une $\hat{\omega}^s(\mathcal{L}\mathcal{L}')$-sous-structure de $(M,<)$ pour tout $\lambda < \zeta$, $(\bigcup_{\lambda<\zeta} M_\lambda,<)$ est aussi une $\hat{\omega}^s(\mathcal{L}\mathcal{L}')$-sous-structure de $(M,<)$, de sorte que $\hat{\omega}^s(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ est ζ-$\frown$-engendrant pour $\mathfrak{M}$. ■

COROLLAIRE 1. *Soit $u \in \Omega_o$; alors u admet une $(\mathcal{P}(\mathcal{L}\mathcal{L}'),\Omega)$- (resp. une $(\mathcal{P}^s(\mathcal{L}\mathcal{L}'),\Omega)$-, une $(\mathcal{P}(\emptyset\mathcal{L}'),\Omega(\emptyset\mathcal{L}'))$-, ou une $(\mathcal{P}^s(\emptyset\mathcal{L}'),\Omega^s(\emptyset\mathcal{L}'))$-) projection dont u est une sous-classe ordonnée (resp. ordonnée, l'injection canonique appartenant à $\Omega(\emptyset\mathcal{L}')$ ou à $\Omega^s(\emptyset\mathcal{L}')$).*

DEMONSTRATION. Les foncteurs $\omega(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ et $\omega^s(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ sont des foncteurs d'homomorphismes saturés à $\mathfrak{M}_o$-limites projectives. Posons $\mathcal{K} = \mathcal{P}(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ (resp. $= \mathcal{P}^s(\mathcal{L}\mathcal{L}')$); le foncteur $(\Omega,\iota,\mathcal{K})$ étant à noyaux et le foncteur $(\hat{\Omega},\iota,\hat{\mathcal{K}})$ à $\hat{\mathfrak{M}}_o$-produits, le théorème 19 montre que les conditions du critère 1 sont vérifiées relativement à $(\Omega,\iota,\mathcal{K})$ et à $(\Omega(\mathcal{L}\mathcal{L}'),\iota,\mathcal{K})$ (resp. et à $(\Omega^s(\mathcal{L}\mathcal{L}'),\iota,\mathcal{K})$), de sorte que ces foncteurs admettent des adjoints.-Soit $u = (M,<) \in \Omega_o$ et soit $j = ((\hat{M},<),\underline{j},u)$ un $(\mathcal{K},\Omega)$ projecteur. Si on munit $\mathfrak{M}_o$ de la relation d'ordre $\subset$:

$$M' < M \text{ si, et seulement si, } M' \subset M,$$

on trouve

$$(\mathfrak{M}_o,\subset) \in \hat{\mathcal{P}}(\mathcal{L}\mathcal{L}')_o \subset \hat{\mathcal{P}}^s(\mathcal{L}\mathcal{L}').$$

On définit une bijection $\underline{f}$ de M sur $M_1 \subset \mathfrak{M}_o$ en associant à tout $x \in M$ la classe $x^>$ des minorants de x dans u, et on a

$$f = ((\mathfrak{M}_o,\subset),\underline{f},(M,<)) \in \hat{\Omega}.$$

Puisque $\underline{f}(M) \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$, le théorème 19 assure l'existence d'un $g \in \mathcal{K}_o.\hat{\mathcal{K}}_\gamma$ tel que $\alpha(g)$ soit la $\hat{\omega}(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ (resp. $\hat{\omega}^s(\mathcal{L}\mathcal{L}')$-) sous-structure de $(\mathfrak{M}_o,\subset)$

engendrée par $\underline{f}(M)$. Il en résulte

$$f' = (\beta(g), \underline{g}\,\underline{f}, u) \in \mathcal{K}_0 . \Omega,$$

de sorte qu'il existe un $f'' \in \mathcal{K}$ tel que $f''.j = f'$. Comme $\omega(f')$ est une injection, $\omega(j)$ sera aussi une injection, car $\omega(f'').\omega(j) = \omega(f')$. Soient

$$x \in M, \quad y \in M \quad \text{et} \quad \underline{j}(x) < \underline{j}(y)$$

dans $(\hat{M}, <)$; les relations

$$\underline{g}(x^>) = \underline{f}'(x) = \underline{f}''(\underline{j}(x)) < \underline{f}''(\underline{j}(y)) = \underline{g}(y^>)$$

entraînent $x^> \subset y^>$, g étant inversible, d'où $x < y$ dans $(M, <)$. Donc $\underline{j}$ définit un isomorphisme de u sur la sous-classe ordonnée $(\underline{j}(M), <)$ de $(\hat{M}, <)$. Il s'ensuit que la classe ordonnée obtenue à partir de $(\hat{M}, <)$ en identifiant $\underline{j}(M)$ à M est une $(\mathcal{K}, \Omega)$-projection de u, dont $(M, <)$ est une sous-classe ordonnée. - Supposons de plus $\mathcal{L} = \emptyset$. Si A est une partie (resp. partie majorée) de M telle que $\overline{A} < \lambda_{\mathcal{L}'}$, et s'il existe $x = \cap A$ dans $(M, <)$, on trouve

$$x^> = \bigcap_{a \in A} a^> \quad \text{et par suite} \quad f \in \hat{\Omega}(\emptyset\,\mathcal{L}') \text{ (resp. } \in \hat{\Omega}^s(\emptyset\;\mathcal{L}')\text{)}.$$

Un raisonnement analogue au précédent prouve donc que u est isomorphe à une sous-classe ordonnée dans $\Omega(\emptyset\mathcal{L}')$ (resp. $\Omega^s(\emptyset\mathcal{L}')$) de la $(\mathcal{K}, \Omega(\emptyset\mathcal{L}'))$- (resp. $(\mathcal{K}, \Omega^s(\emptyset, \mathcal{L}')$-) projection de u. ∎

COROLLAIRE 2. *Soit $p = \omega(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ (resp. $= \omega^s(\mathcal{L}\mathcal{L}')$). Si $(C^\bullet, <)$ est une catégorie p-structurée et si r est une relation d'équivalence sur C, il existe une catégorie p-structurée quasi-quotient de $(C^\bullet, <)$ par r. La catégorie $\mathcal{F}^{\bullet \mathcal{I}\mathcal{J}}(p)$ est une catégorie à $\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p)$-projections, si $\mathcal{I} \subset \mathcal{F}_0$, $\mathcal{J} \subset \mathcal{F}_0$ et $p_{\mathcal{F}}(\mathcal{I} \cup \mathcal{J}) \in \mathfrak{M}_0$.*

DEMONSTRATION. Soit ζ l'ordinal initial régulier d'indice

$$sup(\lambda_{\mathcal{L}}, \lambda_{\mathcal{L}'}, \lambda_{\mathcal{I}\mathcal{J}}) + 1,$$

où $\lambda_{\mathcal{I}\mathcal{J}} = \sup_{I^\bullet \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}} \overline{I}$; on a $\lambda_{\mathcal{I}\mathcal{J}} < \zeta < \Lambda$ et, d'après le théorème 19, P est ζ-$\leftharpoondown$-engendrant pour $\mathfrak{M}$. Le théorème 16 affirme donc que $Q^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(P)$ est $\leftharpoondown$-engendrant pour $\mathfrak{M}$, et son corollaire 1 que $\mathcal{F}^{\bullet \mathcal{I}\mathcal{J}}(p)$ est une catégorie à $\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p)$-projections car $X = Q^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(P)_i^{\ulcorner}$. Si $\mathcal{I} = \emptyset = \mathcal{J}$, le foncteur $Q^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(P)$

s'identifie au foncteur Q projection canonique vers $\hat{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{F}(P)$, de sorte que ce foncteur est $\frown$-engendrant pour $\mathcal{M}$; étant aussi un foncteur d'homomorphismes saturé à $\hat{\mathcal{M}}_o$-limites projectives (prop. 1-3 [1]), Q vérifie les conditions du théorème 2; par suite sa restriction à $\mathcal{F}(p)$ est à structures quasi-quotient.■

REMARQUES. 1°) Si $\mathfrak{L} = \emptyset$, la catégorie $\mathcal{P}^s(\emptyset\mathfrak{L}')$ est isomorphe à une sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}^{\emptyset\tilde{\mathfrak{L}}'}$, où $\tilde{\mathfrak{L}}'$ est la classe des catégories obtenues en ajoutant un élément initial aux catégories triviales L^o telles que $L \subset L' \in \mathfrak{L}'$. Par suite on peut aussi démontrer que $\omega^s(\emptyset\mathfrak{L}')$ est ζ-$\frown$-engendrant pour $\mathcal{M}$ par un raisonnement analogue à celui utilisé dans la première partie de la démonstration du théorème 19.

2°) Soit $H^{\cdot}$ la catégorie de couples associée à $(M,<) \in \Omega_o$. Soit $(\hat{H}^{\cdot}, \hat{\nu}, \hat{\mu})$ l'élément de $\mathcal{F}^{\tilde{\mathfrak{L}}\tilde{\mathfrak{L}}'}$ correspondant à la $(\mathcal{P}(\mathfrak{L}\mathfrak{L}'), \Omega)$-projection $(\hat{M},<)$ de $(M,<)$. Si $(C^{\cdot}, \nu, \mu)$ est une $(\tilde{\mathfrak{L}}, \tilde{\mathfrak{L}}')$-complétion de $(H^{\cdot}, \emptyset, \emptyset)$, il existe un foncteur de $C^{\cdot}$ vers $\hat{H}^{\cdot}$ compatible avec $(\nu, \hat{\nu})$ et avec $(\mu, \hat{\mu})$. Mais $\hat{H}^{\cdot}$ n'est pas isomorphe à $C^{\cdot}$, car $C^{\cdot}$ ne définit pas un ordre sur la classe de ses unités. En fait, $\hat{H}^{\cdot}$ n'est pas une $(\tilde{\mathfrak{L}}, \tilde{\mathfrak{L}}')$-complétion libre de $C^{\cdot}$, comme on voit facilement lorsque $\mathfrak{L} = \emptyset$, d'après la construction de la complétion $\mathfrak{L}'$-projective libre canonique de $C^{\cdot}$ donnée au théorème 10.

Appelons *catégorie* $\mathfrak{L}\mathfrak{L}'$*-inductive* (resp. *catégorie* $\mathfrak{L}\mathfrak{L}'$*-sous-inductive*) une catégorie $p(\mathcal{H}', \alpha(p))$-structurée, où $p = \omega(\mathfrak{L}\mathfrak{L}')$ (resp. $= \omega^s(\mathfrak{L}\mathfrak{L}')$) et $\mathcal{H}' = \alpha(p) \cap \Omega'$. Du corollaire 2 du théorème 19 et du théorème 18, il résulte qu'il existe une solution pour le problème «universel» de l'adjonction à une catégorie $\mathfrak{L}\mathfrak{L}'$-inductive (resp. $\mathfrak{L}\mathfrak{L}'$-sous-inductive) de $\mathcal{I}$-limites projectives et de $\mathcal{J}$-limites inductives, avec conservation de certaines limites données. En particulier, si $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$ (resp. $\mathfrak{L} = \emptyset$), et si $\mathfrak{L}'$ est la classe des parties finies de l'ensemble des entiers, une application $\mathfrak{L}\mathfrak{L}'$-sous-inductive est une application f-sous-inductive (resp. sous-préinductive) et une catégorie $\mathfrak{L}\mathfrak{L}'$-inductive (resp. $\emptyset\mathfrak{L}'$-sous-inductive) est une catégorie f-inductive (resp. sous-préinductive) [1]. Ainsi le corollaire 2 du théorème 19 généralise le théorème 4-5 [1].

C. ADJONCTION DE LIMITES A DES CATEGORIES MULTIPLES.

Soit $p_{\mathcal{F}}^{[n]}$ le foncteur projection vers $\mathfrak{M}$ de la catégorie $\mathcal{F}^{[n]}$ des foncteurs n-uples [14]. Soit $P_{\mathcal{F}}^{[n]}$ le foncteur de $\hat{\mathcal{F}}^{[n]}$ vers $\hat{\mathfrak{M}}$ associé de même à l'univers $\hat{\mathfrak{M}}_o$.

THEOREME 20. *$P_{\mathcal{F}}^{[n]}$ est un foncteur ζ-$\frown$-engendrant pour $\mathfrak{M}$, pour tout ordinal de seconde espèce $\zeta < \Lambda$.*

DEMONSTRATION. Soit $(C^{\perp_i})_{i \leqslant n}$ une catégorie n-uple telle que $C \in \hat{\mathfrak{M}}$, et soit $B \subset C$. Désignons par $\sigma_i(B)^{\perp_i}$ la sous-catégorie de $C^{\perp_i}$ engendrée par B, pour tout $i \leq n$. Posons

$$\sigma^{[n]}(B) = \bigcup_{i \leqslant n} \sigma_i(B).$$

Si $B \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$, on a $\sigma^{[n]}(B) \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$, puisque $P_{\mathcal{F}}$ est $\frown$-engendrant pour $\mathfrak{M}$. Supposons

$$K \subset C \quad \text{et} \quad K \in \tilde{\mathfrak{M}}_o .$$

Par récurrence, nous construisons une suite croissante de sous-classes K_i de C telle que

$$K_1 = \sigma^{[n]}(K) \quad \text{et} \quad K_{j+1} = \sigma^{[n]}(K_j)$$

pour tout entier j. Posons $\hat{K} = \bigcup_{j \in N} K_j$. Etant donné que $\tilde{\mathfrak{M}}_o$ est un univers, on a $\hat{K} \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$. Montrons que $\hat{K}$ définit une sous-catégorie n-uple de $(C^{\perp_i})_{i \leq n}$, c'est-à-dire (th. 5-II [14]) une sous-catégorie de $C^{\perp_i}$ pour tout $i \leq n$. En effet, soient

$$x \in \hat{K}, \quad y \in \hat{K} \quad \text{et} \quad (y, x) \in C^{\perp_i} * C^{\perp_i}.$$

Il existe un entier j tel que $x \in K_j$ et $y \in K_j$. Puisque $\sigma_i(K_j)^{\perp_i}$ est la sous-catégorie de $C^{\perp_i}$ engendrée par K_j, on trouve

$$\alpha^{\perp_i}(x) \in \sigma_i(K_j) \subset \sigma^{[n]}(K_j) = K_{j+1} \subset \hat{K},$$

$$\beta^{\perp_i}(y) \in \sigma_i(K_j) \subset \hat{K} \quad \text{et} \quad y \perp_i x \in \sigma_i(K_j) \subset \hat{K}.$$

Par suite $\hat{K}^{\perp_i}$ est une sous-catégorie de $C^{\perp_i}$ pour tout $i \leq n$. Il est évident que $(\hat{K}^{\perp_i})_{i \leqslant n}$ est la sous-catégorie n-uple de $(C^{\perp_i})_{i \leqslant n}$ engendrée par K, de sorte que $P_{\mathcal{F}}^{[n]}$ est $\frown$-engendrant pour $\mathfrak{M}$.

- Soit $\zeta < \Lambda$ un ordinal de seconde espèce. Pour tout $\lambda < \zeta$, supposons donnée une sous-catégorie n-uple $(C_\lambda^{\perp i})_{i \leqslant n}$ de $(C^{\perp i})_{i \leqslant n} \in \hat{\mathfrak{F}}_o^{[n]}$, de manière que l'on ait

$$C_\lambda \subset C_{\lambda'} \quad \text{si} \quad \lambda < \lambda'.$$

Posons $\hat{C} = \bigcup_{\lambda < \zeta} C_\lambda$. Si

$$x \in \hat{C}, \quad y \in \hat{C} \quad \text{et} \quad (y, x) \in C^{\perp i} * C^{\perp i},$$

il existe un ordinal $\lambda < \zeta$ tel que $x \in C_\lambda$ et $y \in C_\lambda$. Par conséquent

$$\alpha^{\perp i}(x) \in C_\lambda \subset \hat{C}, \quad \beta^{\perp i}(x) \in \hat{C} \quad \text{et} \quad y \perp_i x \in C_\lambda \subset \hat{C}.$$

Ceci prouve que $(\hat{C}^{\perp i})_{i \leqslant n}$ est une sous-catégorie n-uple de $(C^{\perp i})_{i \leqslant n}$. On en déduit que $p_{\mathfrak{F}}^{[n]}$ est ζ-$\nearrow$-engendrant pour $\mathfrak{M}$. ■

COROLLAIRE 1. *Soient $(C^{\perp i})_{i \leqslant n}$ une catégorie n-uple et r une relation d'équivalence sur C; il existe une catégorie n-uple quasi-quotient de $(C^{\perp i})_{i \leqslant n}$ par r.*

En effet, $p_{\mathfrak{F}}^{[n]}$ est un foncteur d'homomorphismes saturé à $\hat{\mathfrak{M}}_o$-limites projectives et $\nearrow$-engendrant pour $\mathfrak{M}$; d'après le théorème 2, $p_{\mathfrak{F}}^{[n]}$ est donc à structures quasi-quotient. ■

COROLLAIRE 2. *La catégorie $\mathfrak{F}^{\cdot \mathfrak{I}\mathfrak{J}}(p_{\mathfrak{F}}^{[n]})$ est à $\mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}(p_{\mathfrak{F}}^{[n]})$-projections, où $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{F}_o$, $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{F}_o$, $p_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{I} \cup \mathfrak{J}) \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$.*

En effet, ce corollaire résulte du corollaire 1 du théorème 16, dont les hypothèses sont vérifiées, en vertu du théorème 20, en prenant par exemple pour ζ l'ordinal régulier $\tilde{\lambda}$ d'indice $(\sup_{I \in \mathfrak{I} \cup \mathfrak{J}} \overline{I}) + 1$. ■

Soit $\mathfrak{F}^{\cdot \mathfrak{I}\mathfrak{J}}[n]_o$ la classe ayant pour éléments les familles

$$e = (C^{\perp i}, \nu_i, \mu_i)_{i \leqslant n}$$

vérifiant

$$p_i(e) = (C^{\perp i}, \nu_i, \mu_i) \in \mathfrak{F}_o^{\cdot \mathfrak{I}\mathfrak{J}} \quad \text{et} \quad p_{[n]}^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}(e) = (C^{\perp i})_{i \leqslant n} \in \mathfrak{F}^{[n]}.$$

Soit $\mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}[n]_o$ la sous-classe de $\mathfrak{F}^{\cdot \mathfrak{I}\mathfrak{J}}[n]_o$ formée des e tels que $p_i(e) \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}$ pour tout $i \leq n$. Soit $\mathfrak{F}^{\cdot \mathfrak{I}\mathfrak{J}}[n]$ la sous-catégorie de la catégorie produit $(\mathfrak{F}^{\cdot \mathfrak{I}\mathfrak{J}})^n$ dont les éléments sont les familles $(\hat{F}_i)_{i \leqslant n}$ telles que

$$\hat{F}_i \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}} \text{ et } q^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}(\hat{F}_i) = q^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}(\hat{F}_{i'}) \text{ si } i \leq n \text{ et } i' \leq n.$$

Nous identifions $\mathfrak{F}'^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}[n]_o$ à la classe des unités de $\mathfrak{F}'^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}[n]$. Soit $\mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}[n]$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{F}'^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}[n]$ ayant $\mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}[n]_o$ pour classe de ses unités. Désignons par $q^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}[n]$ le foncteur de $\mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}[n]$ vers $\mathfrak{M}$ associant $q^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}(\hat{F}_i)$ à $(\hat{F}_i)_{i \leqslant n}$. Soient $\hat{\mathfrak{F}}'^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}[n]$, $\hat{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}[n]$ et $Q^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}[n]$ les catégories et foncteur définis de même à partir de l'univers $\hat{\mathfrak{M}}_o$. On définit un foncteur $p^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}_{[n]}$ de $\hat{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}[n]$ vers $\mathfrak{F}^{[n]}$ en associant $((\hat{C}^{\perp i})_{i \leqslant n}, \underline{F}, (C^{\perp i})_{i \leqslant n})$ à

$$((\hat{C}^{\perp i}, \hat{\nu}_i, \hat{\mu}_i), \underline{F}, (C^{\perp i}, \nu_i, \mu_i))_{i \leqslant n} \in \hat{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}[n].$$

THEOREME 21. *Le foncteur $Q^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}[n]$ est ρ-engendrant pour $\mathfrak{M}$. La catégorie $\mathfrak{F}'^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}[n]$ est une catégorie à $\mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}[n]$-projections et $p^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}_{[n]}$ admet un adjoint.*

DEMONSTRATION. Soit $\tilde{\lambda}$ l'ordinal régulier d'indice

$$\lambda_{\mathfrak{I}\mathfrak{J}} + 1, \text{ où } \lambda_{\mathfrak{I}\mathfrak{J}} = \sup_{I^\bullet \in \mathfrak{I} \cup \mathfrak{J}} \overline{I}.$$

Supposons $e = (C^{\perp i}, \nu_i, \mu_i)_{i \leqslant n} \in \hat{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}[n]_o$. Pour toute sous-catégorie n-uple $(B^{\perp i})_{i \leqslant n}$ de $(C^{\perp i})_{i \leqslant n}$, désignons par $\hat{\sigma}_i(M)$ la sous-classe de C obtenue en appliquant à B l'opérateur $\sigma^{\nu_i \mu_i}$ relatif à $(C^{\perp i}, \nu_i, \mu_i) \in \hat{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}$ (construit à la fin de la démonstration du théorème 12), et ce pour tout $i \leq n$. Soit

$$\sigma_{[n]}(B) = \bigcup_{i \leqslant n} \hat{\sigma}_i(B).$$

Si $B \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$, on a $\hat{\sigma}_i(B) \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$ d'après le théorème 12, et par suite

$$\sigma_{[n]}(B) \in \tilde{\mathfrak{M}}_o.$$

Supposons $K \subset C$ et $K \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$. Par récurrence transfinie, nous construisons une sous-classe K_λ de C pour tout ordinal $\lambda < \tilde{\lambda}$ comme suit :

1°) $(K_1^{\perp i})_{i \leqslant n}$ est la $P_{\mathfrak{F}}^{[n]}$-sous-structure de $(C^{\perp i})_{i \leqslant n}$ engendrée par K (qui existe d'après le théorème 20);

2°) $(K_\lambda^{\perp i})_{i \leqslant n}$ est la $P_{\mathfrak{F}}^{[n]}$-sous-structure de $(C^{\perp i})_{i \leqslant n}$ engendrée par $\sigma_{[n]}(\bigcup_{\xi < \lambda} K_\xi)$.

Du théorème 20, il résulte que l'on a $K_\lambda \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$ pour tout $\lambda < \tilde{\lambda}$. Posons $\hat{K} = \bigcup_{\lambda < \tilde{\lambda}} K_\lambda$; alors $\hat{K} \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$, car $\tilde{\mathfrak{M}}_0$ est un univers et $\tilde{\lambda} < \Lambda$. Puisque K_λ définit une sous-catégorie de $C^{\perp i}$ pour tout $\lambda < \tilde{\lambda}$ et tout $i \leq n$, la classe $\hat{K}$ définit une sous-catégorie n-uple de $(C^{\perp i})_{i \leqslant n}$. Montrons que $\hat{K}$ est stable pour ν_i et pour μ_i. En effet, soit $i \leq n$; si Φ est un foncteur de $I^\cdot \in \mathcal{J}$ (resp. $\in \mathcal{J}$) vers $C^{\perp i}$ tel que $\underline{\Phi}(I) \subset \hat{K}$, en utilisant comme dans la démonstration du théorème 5 le fait que $\tilde{\lambda}$ est régulier, on voit qu'il existe un ordinal $\lambda < \tilde{\lambda}$ tel que $\underline{\Phi}(I) \subset K_\lambda$; il en résulte

$$\underset{\cdot}{Lim}^{\nu_i} \Phi \text{ (resp. } Lim^{\mu_i} \Phi) \in \hat{\sigma}_i(K_\lambda) \subset \sigma_{[n]}(K_\lambda) \subset K_{\lambda+1} \subset \hat{K}.$$

Donc $\hat{K}$ est stable pour ν_i (resp. pour μ_i) et définit une $Q^{\mathcal{J}\mathcal{J}}[n]$-sous-structure $e' = (\hat{K}^{\perp i}, \nu'_i, \mu'_i)_{i \leqslant n}$ de e. Il est évident que e' est la $Q^{\mathcal{J}\mathcal{J}}[n]$-sous-structure de e engendrée par K; ainsi, $Q^{\mathcal{J}\mathcal{J}}[n]$ est $\vdash$-engendrant pour $\mathfrak{M}$. - Puisque $Q^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ et $P^{[n]}_{\mathcal{F}}$ sont des foncteurs à $\hat{\mathfrak{M}}_0$-limites projectives, $(\mathcal{F}^{\cdot\mathcal{J}\mathcal{J}}[n], \iota, \mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}}[n])$ est à $\hat{\mathfrak{M}}_0$-produits. Les conditions du critère 1 d'existence de foncteurs adjoints sont ainsi remplies relativement à $(\mathcal{F}^{\cdot\mathcal{J}\mathcal{J}}[n], \iota, \mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}}[n])$ et à $p^{\mathcal{J}\mathcal{J}}_{[n]}$ par conséquent ces deux foncteurs admettent un adjoint. ■

Soit π_n le foncteur de $\mathcal{F}^{[n]}$ vers $\mathcal{F}^{[n-1]}$ tel que

$$\pi_n((C^{\perp i})_{i \leqslant n}) = (C^{\perp i})_{i \leqslant n-1} \text{ et } p^{[n-1]}_{\mathcal{F}} . \pi_n = p^{[n]}_{\mathcal{F}} .$$

Soit N l'ensemble des entiers positifs, Δ la sous-catégorie du groupoïde $(N \times N)^{\perp}$ associé à N formée des couples (i, j) tels que $i \leq j$. Nous définissons un foncteur π de Δ vers $\hat{\mathcal{F}}$ tel que

$$\pi(n, n) = \mathcal{F}^{[n]} \text{ et } \pi(n, n+1) = \pi_{n+1} \text{ pour tout } n \in N.$$

Soit $\mathcal{F}^{[\omega]}$ la catégorie limite projective de ce foncteur. Ses unités s'identifient aux suites $(C^{\perp i})_{i \in N}$ telles que :

1°) $C^{\perp i} \in \mathcal{F}_0$ pour tout $i \in N$;

2°) $(C^{\perp j}, \alpha^{\perp i}, C^{\perp j}) \in \mathcal{F}$ et $(C^{\perp j}, \beta^{\perp i}, C^{\perp j}) \in \mathcal{F}$ pour $i \in N, j \in N$;

3°) Axiome de permutabilité : Si les composés

$$(g' \perp_j f') \perp_i (g \perp_j f) \quad \text{et} \quad (g' \perp_i g) \perp_j (f' \perp_i f)$$

sont définis, ils sont égaux, pour tout $i \in N$, $j \in N$.
Les morphismes de $\mathcal{F}^{[\omega]}$ s'identifient aux triplets

$$((\hat{C}^{\perp i})_{i \in N}, f, (C^{\perp i})_{i \in N})$$

tels que

1°) $(C^{\perp i})_{i \in N} \in \mathcal{F}_o^{[\omega]}$ et $(\hat{C}^{\perp i})_{i \in N} \in \mathcal{F}_o^{[\omega]}$;

2°) $(\hat{C}^{\perp i}, f, C^{\perp i}) \in \mathcal{F}$ pour tout $i \in N$.

DEFINITION. *Une unité (resp. un morphisme) de* $\mathcal{F}^{[\omega]}$ *est appelé* une catégorie ω-uple *(resp. appelé* un foncteur ω-uple).

Soit $p_{\mathcal{F}}^{[\omega]}$ le foncteur projection de $\mathcal{F}^{[\omega]}$ vers $\mathfrak{M}$ associant C à $(C^{\perp i})_{i \in N}$. Soient $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ deux parties de $\mathcal{F}_o$ telles que $p_{\mathcal{F}}(\mathcal{I} \cup \mathcal{J}) \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$. Comme plus haut, définissons la sous-catégorie $\mathcal{F}^{\cdot \mathcal{I}\mathcal{J}}[\omega]$ de $(\mathcal{F}^{\cdot \mathcal{I}\mathcal{J}})^N$ obtenue comme suit : ses unités sont les familles $e = (C^{\perp i}, \nu_i, \mu_i)_{i \in N}$ telles que

$$p_i^{\omega}(e) = (C^{\perp i}, \nu_i, \mu_i) \in \mathcal{F}_o^{\cdot \mathcal{I}\mathcal{J}} \text{ et } p_{[\omega]}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(e) = (C^{\perp i})_{i \in N} \in \mathcal{F}^{[\omega]},$$

les morphismes étant les $(\hat{F}_i)_{i \in N}$ tels que

$$(\alpha(\hat{F}_i))_{i \in N} \in \mathcal{F}^{\cdot \mathcal{I}\mathcal{J}}[\omega]_o, \ (\beta(\hat{F}_i))_{i \in N} \in \mathcal{F}^{\cdot \mathcal{I}\mathcal{J}}[\omega]_o \text{ et } q^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(\hat{F}_i) = q^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(\hat{F}_j)$$

pour tout $i \in N$, $j \in N$. Soit $\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}[\omega]$ sa sous-catégorie pleine ayant pour unités les e tels que $p_i^{\omega}(e) \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$ pour tout $i \in N$. Désignons par $q^{\mathcal{I}\mathcal{J}}[\omega]$ et $p_{[\omega]}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$ les foncteurs canoniques de $\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}[\omega]$ vers $\mathfrak{M}$ et vers $\mathcal{F}$, par $Q^{\mathcal{I}\mathcal{J}}[\omega]$ et $P_{[\omega]}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$ les foncteurs de $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}[\omega]$ vers $\hat{\mathfrak{M}}$ obtenus de même à partir de $\hat{\mathfrak{M}}_o$.

THEOREME 22. *Le théorème 20, ses corollaires et le théorème 21 sont encore vrais si l'on remplace dans leurs énoncés* n *par* ω.

En effet, les démonstrations sont analogues, $i \leq n$ devenant $i \in N$, ce qui conduit à poser

$$\sigma^{[\omega]}(B) = \bigcup_{i \in N} \sigma_i(B) \quad (\text{resp. } \sigma_{[\omega]}(B) = \bigcup_{i \in N} \hat{\sigma}_i(B))$$

dans la démonstration du théorème 20 (resp. théorème 21). ■

DEFINITION. *Soit* $\delta = n \in N$ *(resp.* $= \omega$*). Une* $(\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}[\delta], \mathcal{F}'^{\mathcal{I}\mathcal{J}}[\delta])$*-projection de* $e \in \mathcal{F}'^{\mathcal{I}\mathcal{J}}[\delta]_0$ *sera appelée* complétion n-uple *(resp.* ω-uple) *de* e.

APPLICATIONS.

1°) *Construction de foncteurs types* : Soit $(C^\bullet, \nu, \mu) \in \hat{\mathcal{F}}_0^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$ et soit $\mathfrak{N}_{C^\bullet} = (\mathfrak{N}_{C^\bullet}^{\boxminus}, \mathfrak{N}_{C^\bullet}^{\blacklozenge})$ la catégorie double des transformations naturelles entre foncteurs de $C^\bullet$ vers $C^\bullet$. Alors $\mathfrak{N}_{C^\bullet}$ définit un élément

$$e = (\mathfrak{N}_{C^\bullet}, \hat{\nu}, \hat{\mu}) \in \hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(P_{\mathcal{J}})$$

(appendice II, proposition 2, C.S.). Toute partie K de $\mathfrak{N}_{C^\bullet}$ admet, en vertu des théorèmes 16 et 20, une $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-complétion structurée

$$\hat{e} = (\hat{K}^{\boxminus}, \hat{K}^{\blacklozenge}, \hat{\nu}', \hat{\mu}')$$

dans e (à savoir la $Q^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(P_{\mathcal{J}})$-sous-structure de e engendrée par K), et $\hat{K}$ est construite par la méthode exposée dans la démonstration du théorème 16. Supposons vérifiées les conditions suivantes : K admet pour seul élément la transformation naturelle définie par le triplet $(Y, y, C^\bullet)$; $\zeta < \Lambda$ est un ordinal de seconde espèce, $\mathcal{I}$ est la classe des catégories triviales I^0 telles que $\overline{I} < \zeta$ et $\mathcal{J}$ est la classe des catégories $J^\bullet$ telles que $\overline{J} < \zeta$ et que $J^\bullet$ définisse un bon ordre sur la classe de ses unités. On montre alors que la catégorie $\tilde{K}^{\blacklozenge} = (\hat{K} \boxminus C^\bullet)^{\blacklozenge}$ contient la catégorie des foncteurs de type (Y, y, ζ) (appendice II, C.S.); mais elle ne lui est pas identique, la construction des foncteurs types ne faisant pas intervenir les transformations naturelles projection canonique d'un produit parallèle de foncteurs naturalisés sur ses facteurs. Les éléments de la catégorie des triangles de $\hat{K}^{\boxminus}$ de sommet $C^\bullet$ peuvent être appelés *transformations naturelles canoniques entre foncteurs types.* En particulier, lorsque $C^\bullet = \mathfrak{M}$ et $(Y, y) = (\mathcal{P}, \gamma)$, où $\mathcal{P}$ est le foncteur «partie» et γ sa naturalisation canonique (C.S., app. II), on généralise ainsi les résultats de [8].

2°) Soit $C^\bullet \in \mathcal{F}_0$ et soit $(C^\bullet, F)$ un couple w-dominant une espèce de structures (C.S., chap. II), où $w = (\mathfrak{M}, \underline{w}, H^\bullet)$ est un foncteur fidèle. Soit $q = (H^\bullet, q, G^\bullet)$ un foncteur admettant un foncteur adjoint injectif q'. Alors $(C^\bullet, \overline{q'.F})$ est un couple $w.q$-dominant une espèce de structures, «plongement universel» de $(C^{\bullet}, F)$ dans une espèce de structures $w.q$-dominée. Ce procédé s'applique lorsque w est l'un des foncteurs qui admettent des adjoints d'après les résultats de cette partie II. Par exemple, si $w = p\mathcal{F}$ et $q = p^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}$, on plonge ainsi universellement une espèce de morphismes $(C^{\bullet}, F)$ (chap. II, C.S.) en une espèce de structures $q^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}$-dominée $(C^{\bullet}, \hat{F})$, dite *espèce de morphismes* $(\mathfrak{I}, \mathfrak{J})$-*complétée,* de sorte que $\hat{F}(e)$ soit une $(\mathfrak{I}, \mathfrak{J})$-complétion libre de $F(e)$ pour tout $e \in C^{\bullet}_{0}$.

APPENDICE

Nous allons indiquer divers lemmes implicitement utilisés dans le texte précédent ou liés aux questions étudiées ci-dessus. Nous en déduirons aussi quelques généralisations de résultats de [1] .

1. Image réciproque de sous-structures.

Dans ce §, nous désignons par p un foncteur $(\mathfrak{M}, \underline{p}, H^{\cdot})$ d'homomorphismes saturé, à produits fibrés finis. Si $f \in H$, nous posons $\underline{f} = \underline{p(f)}$.

LEMME 1. *1°) Si p est à $\{I\}$-produits fibrés et si s_i est une p-sous-structure de $S \in H_0^{\cdot}$ pour tout $i \in I$, il existe une p-sous-structure $\bigcap_{i \in I} s_i$ de S telle que*

$$p(\bigcap_{i \in I} s_i) = \bigcap_{i \in I} p(s_i).$$

2°) Si $f \in H$ et si $\hat{s}$ est une p-sous-structure de $\beta(f)$, il existe un $(\mathfrak{M}^{\iota}, p)$-sous-morphisme $f' \in \hat{s}.H$ de f tel que, en posant $\alpha(f') = \overset{-1}{f}(\hat{s})$, on ait $p(\overset{-1}{f}(\hat{s})) = \overset{-1}{\underline{f}}(p(\hat{s}))$.

DEMONSTRATION. Soit $h_i \in H$ et $\beta(h_i) = s$ pour tout $i \in I$. Si $(p(h_i), v_i)_{i \in I}$ est un produit fibré naturalisé dans $\mathfrak{M}$, il existe un produit fibré naturalisé $(h_i, \overline{v}_i)_{i \in I}$ dans $H^{\cdot}$ tel que $p(\overline{v}_i) = v_i$, si p est un foncteur d'homomorphismes saturé à $\{I\}$-produits fibrés; de plus (démonstration de la proposition 4), on a $\overline{v}_i \in p^{\frown}$ lorsque

$$h_{i'} \in p^{\frown} \quad \text{pour} \quad i' \in I \quad \text{et} \quad i \neq i'.$$

En appliquant ce résultat au cas où $h_i = S \underset{p}{\leftarrow} s_i$, on obtient $\bigcap_{i \in I} s_i$, puisqu'il existe un produit fibré naturalisé

$$(p(h_i), (p(s_i), \iota, \bigcap_{i \in I} p(s_i)))_{i \in I}.$$

- On construit de même $\overset{-1}{f}(\hat{s})$ en prenant $h_1 = \beta(f) \underset{p}{\leftarrow} \hat{s}$ et $h_2 = f$, étant donné qu'il existe un produit fibré naturalisé

$$(p(h_i), v_i)_{i = 1,2} \text{ tel que } v_2 \in \mathfrak{M}^{\iota}.\overset{-1}{\underline{f}}(p(\hat{s})). \blacksquare$$

COROLLAIRE 1. *Supposons p à $\{I\}$-produits fibrés, $f_i \in H$ et $\beta(f_i) = s$ pour tout $i \in I$. S'il existe $S \in H_0^{\cdot}$ tel que $\alpha(f_i) \underset{p}{\frown} S$ et si $\hat{s} \underset{p}{\frown} s$, il existe* *une p-sous-structure s' de S sur la classe* $\bigcap_{i \in I} \overset{-1}{f_i}(p(\hat{s}))$.

En effet, avec les notations du lemme, on a $s' = \bigcap_{i \in I} \overset{-1}{f_i}(\hat{s})$. ■

COROLLAIRE 2. *Soit* $h \in H$ *et* $f = (N, \underline{h}\,\iota, M)$ *une restriction de* $p(h)$. *Si* M *et* N *engendrent des p-sous-structures* s' *et* s *de* $\alpha(h)$ *et* $\beta(h)$ *respectivement, il existe un* $(\mathfrak{M}^L, p)$*-sous-morphisme* $h' \in s.H.s'$ *de* h.

En effet, d'après le lemme, il existe un p-sous-morphisme $g \in s.H$ de h tel que $\alpha(g) = \overset{-1}{h}(s)$. Comme $f(M) \subset N$, on a

$$M \subset p(\overset{-1}{h}(s)), \quad \text{d'où} \quad s' \underset{\frown}{\ } \overset{-1}{h}(s).$$

Ainsi l'élément cherché est $h' = g.(\overset{-1}{h}(s) \underset{p}{\leftarrow} s')$. ■

Supposons que $H^\bullet$ admette un élément final a tel que $p(a) = \{\emptyset\}$. Si $s_i \in H_0^\bullet$, il existe $f_i \in a.H.s_i$ et, p étant à produits fibrés finis, il existe un produit fibré naturalisé $((f_1, v_1), (f_2, v_2))$ dans p tel que $p(v_i)$ soit la projection canonique ~~de~~ $p(s_1) \times p(s_2)$ sur $p(s_i)$; l'élément $((v_1, v_2), \alpha(v_1))$ est donc un produit naturalisé dans p, de sorte que p est à produits finis. D'après le corollaire de la proposition 1, il s'ensuit que p est aussi résolvant à droite.

Comme dans [1] , n° 3, nous désignons par :

$\mathcal{K}'(p)$ la sous-catégorie pleine de la catégorie produit fibré $p \vee p_{\mathfrak{N}'}$ ayant pour unités les couples $(C^\bullet, s)$ tels que

$$C^\bullet \in \mathfrak{N}'_0, \quad s \in H_0^\bullet, \quad p(s) = C$$

et que $([C^\bullet], s)$ soit un graphe p-structuré [15] .

$\overline{\mathfrak{N}}'(p)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{K}'(p)$ ayant pour unités les graphes multiplicatifs fortement p-structurés (i.e. les couples $(C^\bullet, s) \in \mathcal{K}'(p)$ pour lesquels il existe $k \in s.H.s * s$, où $s * s \underset{\frown}{\ } s \times s$ et où $\underline{p(k)}$ est la loi de composition de $C^\bullet$).

$\mathfrak{N}(p)$ (resp. $\overline{\mathfrak{N}}(p)$) la catégorie des homomorphismes entre classes multiplicatives p-structurées (resp. fortement p-structurées) .

$\mathfrak{N}'(p)$ la sous-catégorie de $\mathfrak{N}(p)$ formée des néofoncteurs p-structurés; ses unités sont les graphes multiplicatifs p-structurés, i.e.

les triplets $(C^\bullet, s, s')$ tels que, κ étant la loi de composition de $C^\bullet$, on ait:

a) $(C^\bullet, s) \in \mathcal{K}'(p)_0$ et il existe $k \in s.H.s'$ vérifiant $p(k) = (C, \kappa, C^\bullet * C^\bullet)$;

b) Il existe $v_i \in s.H.s'$ tel que $p(v_i) = (C, \underline{p}_i \iota, C^\bullet * C^\bullet)$, où p_i désigne la i-ème projection canonique de $C \times C$ sur C.

REMARQUE. La condition b (ajoutée dans [1] à la définition de graphe multiplicatif p-structuré introduite dans [15]) est nécessaire pour la validité de la proposition 5-3 [1] (et par suite du théorème 2-4 [1]). En effet, cette proposition repose sur le fait que la surjection $[\beta, \alpha]$ définit un néofoncteur p-structuré de $(C^\bullet, s, s')$ vers le groupoïde p-structuré $((C_0^\bullet \times C_0^\bullet)^\perp, s_0 \times s_0)$, où $s_0 \leftarrow s$. Or cette propriété n'est plus vraie si $(C^\bullet, s, s')$ vérifie seulement la condition a. Par suite, il faut aussi supposer dans [16] (théorème 1-I et proposition 7-I) que, si $(C^\bullet, T, T')$ est un graphe multiplicatif prétopologique, alors T' est une topologie plus fine que la topologie induite par $T \times T$ sur $C^\bullet * C^\bullet$.

PROPOSITION 1. *Supposons que $(C^\bullet, s, s') \in \mathcal{N}(p)_0$ vérifie l'axiome b. Soit $\hat{s}$ une p-sous-structure de s et $\hat{C} = p(\hat{s})$. Il existe $\hat{s}' \underset{p}{\leftarrow} s'$ telle que $(\hat{C}^\bullet, \hat{s}, \hat{s}') \in \mathcal{N}(p)_0$.*

DEMONSTRATION. Soit $k \in s.H.s'$ tel que $p(k) = (C, \kappa, C^\bullet * C^\bullet)$. On a

$$\hat{C}^\bullet * \hat{C}^\bullet = (C^\bullet * C^\bullet) \cap \underline{v}_1^{-1}(\hat{C}) \cap \underline{v}_2^{-1}(\hat{C}) \cap \kappa^{-1}(\hat{C}).$$

D'après le corollaire 1 du lemme 1 appliqué à la famille (v_1, v_2, k), il existe $\hat{k} \in \hat{s}.H$ tel que

$$\alpha(\hat{k}) = \hat{s}' \leftarrow s' \quad \text{et} \quad p(\hat{k}) = (\hat{C}, \kappa\iota, \hat{C}^\bullet * \hat{C}^\bullet).$$

Donc (théorème 4-II [15]) $(\hat{C}^\bullet, \hat{s}, \hat{s}')$ est une sous-classe multiplicative p-structurée de $(C^\bullet, s, s')$. ■

COROLLAIRE 1. *Si $(C^\bullet, s) \in \mathcal{N}(p)_0$ et si $\hat{s} \underset{p}{\leftarrow} s$, on a $(\hat{C}^\bullet, \hat{s}) \in \mathcal{N}(p)$, où $\hat{C} = p(\hat{s})$.*

En effet, la classe multiplicative p-structurée $(C^\bullet, s, s * s)$, où $s * s \leftarrow s \times s$, vérifie l'axiome b, de sorte que l'on construit un

$$(\hat{C}^{\bullet}, \hat{s}, \hat{s}') \in \mathfrak{N}(p), \quad \text{où} \quad \hat{s}' \sqsubset s * s,$$

à l'aide de la proposition 1. Les relations

$$\hat{s}' \sqsubset s * s, \quad s * s \sqsubset s \times s, \quad \hat{s} \times \hat{s} \sqsubset s \times s \quad \text{et} \quad p(\hat{s}') \subset p(\hat{s} \times \hat{s})$$

entraînent $\hat{s}' \sqsubset \hat{s} \times \hat{s}$, d'où $(\hat{C}^{\bullet}, \hat{s}) \in \overline{\mathfrak{N}}(p)$. ∎

COROLLAIRE 2. *Soit* $(C^{\bullet}, s, s') \in \mathfrak{N}'(p)_o$. *Si* $\hat{C}^{\bullet}$ *est un sous-graphe multiplicatif de* $C^{\bullet}$ *et si* $\hat{s} \underset{p}{\sqsubset} s$ *et* $p(\hat{s}) = \hat{C}$, *alors il existe un sous-graphe multiplicatif* p*-structuré* $(\hat{C}^{\bullet}, \hat{s}, \hat{s}')$ *de* $(C^{\bullet}, s, s')$. *Si de plus* $(C^{\bullet}, s) \in \overline{\mathfrak{N}}'(p)_o$, *on a* $(\hat{C}^{\bullet}, \hat{s}) \in \overline{\mathfrak{N}}'(p)$.

En effet, d'après la proposition 1, il existe

$$(\hat{C}^{\bullet}, \hat{s}, \hat{s}') \in \mathfrak{N}(p)_o, \quad \text{où} \quad \hat{s}' \sqsubset s'.$$

En vertu du théorème 8-II [15], $([\hat{C}^{\bullet}], \hat{s})$ est un sous-graphe p-structuré de $([C^{\bullet}], s)$. Donc $(\hat{C}^{\bullet}, \hat{s}, \hat{s}') \in \mathfrak{N}'(p)_o$. La deuxième affirmation se démontre comme dans le corollaire 1. ∎

Supposons que $\mathfrak{M}_o$ soit un univers et que p soit la restriction d'un foncteur d'homomorphismes saturé à produits fibrés finis $P = (\hat{\mathfrak{M}}, \underline{P}, \hat{H}^{\bullet})$ à $H = \overset{-1}{P}(\mathfrak{M})$. Soit $\overline{\mathfrak{M}}$ la saturante de $\mathfrak{M}$ dans $\hat{\mathfrak{M}}$. Si $\mathfrak{V} = \mathfrak{K}', \mathfrak{N}, \mathfrak{N}', \overline{\mathfrak{N}}$ ou $\overline{\mathfrak{N}}'$, nous notons $\hat{P}_{\mathfrak{V}}$ et $\hat{P}^H_{\mathfrak{V}}$ les foncteurs projections canoniques de $\mathfrak{V}(P)$ vers $\hat{\mathfrak{M}}$ et vers $\hat{H}^{\bullet}$. Soit $X_{\mathfrak{V}}$ la classe des $\hat{P}_{\mathfrak{V}}$-monomorphismes $\hat{j}$ tels que $\hat{P}^H_{\mathfrak{V}}(\hat{j}) \in P_i^{\sqsubset}$.

PROPOSITION 2. *Supposons* $\hat{j} \in X_{\mathfrak{V}}$, *où* $\mathfrak{V} = \mathfrak{K}'$, $\overline{\mathfrak{N}}'$ *ou* $\mathfrak{N}'$ *(resp.* $= \overline{\mathfrak{N}}$*)*; *alors* $\hat{P}'_{\mathfrak{V}}(\hat{j}) \in (P_{\mathfrak{W}})_i^{\sqsubset}$, *en désignant par* $\hat{P}'_{\mathfrak{V}}$ *le foncteur canonique de* $\mathfrak{V}(P)$ *vers* $\mathfrak{W} = \hat{\mathfrak{N}}'$ *(resp.* $= \hat{\mathfrak{N}}$*). On a* $\overline{\mathfrak{N}}'(P)_o . X_{\mathfrak{K}'} = X_{\overline{\mathfrak{N}}'}$.

DEMONSTRATION. Puisque P est un foncteur d'homomorphismes saturé, $\hat{P}_{\mathfrak{V}}$ en est aussi un, et il suffit de prouver l'affirmation lorsque $\hat{P}_{\mathfrak{V}}(\hat{j}) \in \hat{\mathfrak{M}}^{\iota}$. Supposons donc

$$J = \hat{P}'_{\mathfrak{V}}(\hat{j}) = (C^{\bullet}, \iota, \hat{C}^{\perp}) \quad \text{et} \quad P^H_{\mathfrak{V}}(\hat{j}) = s \underset{P}{\leftarrow} \hat{s}.$$

Soit $\hat{C}^{\bullet}$ la sous-classe multiplicative de $C^{\bullet}$ définie par $\hat{C}$. - Si $\mathfrak{V} = \overline{\mathfrak{N}}$, on a $(\hat{C}^{\bullet}, \hat{s}) \in \overline{\mathfrak{N}}(P)$, d'après le corollaire 1 de la proposition 1. Comme

$(\hat{C}^{\bullet}, \hat{s})$ et $(\hat{C}^{\perp}, \hat{s})$ sont deux $\hat{P}_{\mathcal{N}}$-sous-structures de $(C^{\bullet}, s)$ sur la classe $\hat{C}$, elles sont égales; il s'ensuit

$$\hat{C}^{\perp} = \hat{C}^{\bullet} \quad \text{et} \quad J \in (P_{\mathcal{N}})_i^{\ulcorner}.$$

- Considérons le cas où J est un néofoncteur; alors $\hat{C}$ définit un sous-graphe multiplicatif $\hat{C}^{\bullet}$ de $C^{\bullet}$. - Si $\mathcal{O} = \mathcal{K}'$, le couple $([\hat{C}^{\bullet}], \hat{s})$ est un graphe P-structuré (théorème 8-II [15]); ainsi $\hat{e} = (\hat{C}^{\bullet}, \hat{s}) \in \mathcal{K}'(P)$ est une $\hat{P}_{\mathcal{K}'}$-sous-structure de $(C^{\bullet}, s)$. On en déduit $\hat{C}^{\bullet} = \hat{C}^{\perp}$ et $J \in (P_{\mathcal{N}'})_{\iota}^{\ulcorner}$. Si de plus $(C^{\bullet}, s) \in \mathcal{N}'(P)$, on a $\hat{e} \in \mathcal{N}'(P)$ d'après le corollaire 2 de la proposition 1, d'où $\hat{j} \in X_{\mathcal{N}'}$. - Si $\mathcal{O} = \mathcal{N}'$, on a de même $(\hat{C}^{\bullet}, \hat{s}) \in \mathcal{N}'(P)$, et par suite

$$\hat{C}^{\perp} = \hat{C}^{\bullet}, \quad J \in (P_{\mathcal{N}'})_{\iota}^{\ulcorner} \quad \text{et} \quad \hat{j} \in X_{\mathcal{K}'}.$$

- Soit $\mathcal{O} = \mathcal{N}'$ et posons

$$\beta(\hat{j}) = (C^{\bullet}, s, s') = e'.$$

En vertu du corollaire 2 de la proposition 1, il existe une $\hat{P}_{\mathcal{N}'}$-sous-structure $\hat{e} = (\hat{C}^{\bullet}, \hat{s}, \hat{s}')$ de e' telle que $\hat{s}' \underset{P}{\ulcorner} s'$. Un raisonnement analogue au précédent entraîne

$$\hat{e} = \alpha(\hat{j}) \quad \text{et} \quad J \in (P_{\mathcal{N}'})_{\iota}^{\ulcorner}. \blacksquare$$

LEMME 2. *Si $S \in \hat{H}_o$ et si s est une $(P_i^{\ulcorner}, H)$-sous-structure de S engendrée par M, alors s est une P-sous-structure de S engendrée par M.*

DEMONSTRATION. P étant saturé, il revient au même (prop. 2-2 [1]) de montrer que, si s est une $(P_{\iota}^{\ulcorner}, \tilde{H})$-sous-structure de S engendrée par $M \subset P(S)$ et si $M \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$, s est une P-sous-structure de S engendrée par M, en désignant par $\tilde{H}$ la saturante $\underline{P}^{-1}(\tilde{\mathfrak{M}})$ de H dans $\hat{H}^{\bullet}$. En effet, soit

$$s' \underset{P}{\ulcorner} S, \quad \text{et} \quad M \subset P(s').$$

D'après le lemme 1, il existe une P-sous-structure $\hat{s} = s \cap s'$ de S telle que

$$P(\hat{s}) = P(s') \cap P(s) \in \tilde{\mathfrak{M}}_o, \quad \hat{s} \underset{P}{\ulcorner} s' \quad \text{et} \quad \hat{s} \underset{P}{\ulcorner} s.$$

Des relations

$$\hat{s} \underset{P}{\ulcorner} S \quad \text{et} \quad M \subset P(\hat{s}) \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$$

on déduit $s \ulcorner \hat{s}$, par définition d'une $(P_\iota^{\ulcorner}, \tilde{H})$-sous-structure engendrée, d'où $\hat{s} = s$ et $s \underset{P}{\ulcorner} s'$. Ceci achève la démonstration. ■

PROPOSITION 3. *Si P est $\ulcorner$-engendrant pour $\mathfrak{M}$, il est $(\mathfrak{M}, \mathfrak{O})$-résolvant ([1], définition 1-3) pour $\mathfrak{O} = \mathfrak{K}', \mathfrak{N}', \bar{\mathfrak{N}}'$ ou $\bar{\mathfrak{N}}$.*

DEMONSTRATION. Supposons $(C^\bullet, s) \in \mathfrak{K}'(P)_o$ et $M \subset C$, $M \in \tilde{\mathfrak{M}}$. Il existe $\bar{a} \in s.\hat{H}.s$ tels que

$$P(\bar{a}) = (C, \alpha, C) \quad \text{et} \quad P(\bar{b}) = (C, \beta, C).$$

Si $\bar{M} = M \cup \alpha(M) \cup \beta(M)$, on a $\bar{M} \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$, car $\mathfrak{M}_o$ est un univers. Par hypothèse, $\bar{M}$ engendre une $(P_\iota^{\ulcorner}, \tilde{H})$-sous-structure $\hat{s}$ de s qui, d'après le lemme 2, est une P-sous-structure de s engendrée par M. Comme

$$\alpha' = (\bar{M}, \alpha_\iota, \bar{M}) \in \tilde{\mathfrak{M}} \quad \text{et} \quad \beta' = (\bar{M}, \beta_\iota, \bar{M}) \in \tilde{\mathfrak{M}},$$

le corollaire 2 du lemme 1 assure l'existence de

$$\hat{\alpha}' = (\hat{M}, \alpha_\iota, \hat{M}),\ \hat{\beta}' = (\hat{M}, \beta_\iota, \hat{M}),\ \bar{a}' \in \hat{s}.\hat{H}.\hat{s} \text{ et } \bar{b}' \in \hat{s}.\hat{H}.\hat{s}$$

tels que $p(\bar{a}') = \hat{\alpha}'$ et $p(\bar{b}') = \hat{\beta}'$. Ainsi $((\hat{M}, \hat{\beta}', \hat{\alpha}'), \hat{s})$ est un graphe p-structuré et l'on a $(\hat{M}^\bullet, \hat{s}) \in \mathfrak{K}'(P)_o$. Evidemment $(\hat{M}^\bullet, \hat{s})$ est la $(X_{\mathfrak{K}'}, \mathfrak{K}'(P))$-sous-structure de $(C^\bullet, s)$ engendrée par M, de sorte que P est $(\mathfrak{M}, \mathfrak{K}')$-résolvant, d'après la proposition 2-2 [1]. -Supposons de plus

$$e = (C^\bullet, s) \in \bar{\mathfrak{N}}'(P)_o \quad (\text{resp.} = (C^\bullet, s, s') \in \mathfrak{N}'(P)_o).$$

Du corollaire 2 de la proposition 1, il résulte

$$\hat{e} = (\hat{M}^\bullet, \hat{s}) \in \bar{\mathfrak{N}}'(P) \quad (\text{resp.} = (\hat{M}^\bullet, \hat{s}, \hat{s}') \in \mathfrak{N}'(P), \text{ où } \hat{s}' \underset{P}{\ulcorner} s').$$

Ainsi $\hat{e}$ est la $(X_{\mathfrak{O}}, \mathfrak{O}(P))$-sous-structure de e engendrée par M, pour $\mathfrak{O} = \bar{\mathfrak{N}}'$ (resp. $= \mathfrak{N}'$). -Si $(K^\bullet, S) \in \bar{\mathfrak{N}}(P)_o$ et si

$$A \subset K \quad \text{et} \quad A \in \tilde{\mathfrak{M}}_o,$$

on a $(\hat{K}^\bullet, \hat{S}) \in \bar{\mathfrak{N}}(P)_o$ et $\hat{K} = P(\hat{S}) \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$, en désignant par $\hat{S}$ la P-sous-structure de S engendrée par A (corollaire 1 de la proposition 1). Par suite $(\hat{K}^\bullet, \hat{S})$ est la $(X_{\bar{\mathfrak{N}}}, \bar{\mathfrak{N}}(P))$-sous-structure de $(K^\bullet, S)$ engendrée par A. ■

PROPOSITION 4. *Si P est dénombrablement engendrant pour $\mathfrak{M}$, alors $\hat{P}_{\mathfrak{N}}$ est $(\mathfrak{M}^{\cup}, X''_{\mathfrak{N}}, \mathfrak{N}(p))$-engendrant, en désignant par $X''_{\mathfrak{N}}$ la classe des*

$$\hat{j} = ((C^{\bullet}, s, s'), j, (\tilde{C}^{\bullet}, \tilde{s}, \tilde{s}')) \in X_{\mathfrak{N}}$$

tels que $j' \in P_{\iota}^{\ulcorner}$, où $j' \in s'.\hat{H}.\tilde{s}'$ et $P(j') = (C^{\bullet} * C^{\bullet}, \underline{j} \times \underline{j}\,\iota, \tilde{C}^{\bullet} * \tilde{C}^{\bullet})$.

DEMONSTRATION. Soit $(C^{\bullet}, s, s') \in \mathfrak{N}(P)_0$ et $M \subset \tilde{\underline{C}}$, $M \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$. On a

$$k \in s.\hat{H}.s', \qquad \text{où} \qquad P(k) = (C, \kappa, C^{\bullet} * C^{\bullet}),$$

κ étant la loi de composition de $C^{\bullet}$. Puisque P est $\ulcorner$-engendrant pour $\mathfrak{M}$ et que

$$\kappa_1 = (M\ , \kappa\iota\ , M^{\bullet} * M^{\bullet}) \in \tilde{\mathfrak{M}},$$

il existe, comme il est dit dans le lemme 2, des P-sous-structures s'_1 et s_1 de s' et s respectivement engendrées par $M^{\bullet} * M^{\bullet}$ et par M, et appartenant à la saturante $\tilde{H}$ de H dans $\hat{H}^{\bullet}$. Le corollaire 2 du lemme 1 assure l'existence d'un $k_1 \in s_1.\hat{H}.s'_1$ tel que $P(k_1) \in \tilde{\mathfrak{M}}$ soit une restriction de $P(k)$. Pour tout entier $i < n$, supposons défini un $(\hat{\mathfrak{M}}^{\iota}, P)$-sous-morphisme $k_i \in s_i.\hat{H}.s'_i$ de k, tel que $P(k_i) \in \tilde{\mathfrak{M}}$ et que $k_{i'}$ soit un P-sous-morphisme de k_i pour tout $i' \leq i$. Définissons par récurrence k_n comme suit : Soient p_1 et p_2 les projections canoniques de $C \times C$ sur C et posons

$$M_n = P(s_{n-1}) \cup p_1(P(s'_{n-1})) \cup p_2(P(s'_{n-1})).$$

On a $M_n \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$ et l'application $\kappa_n = (M_n, \kappa\iota, M^{\bullet}_n * M^{\bullet}_n) \in \tilde{\mathfrak{M}}$ admet $P(k_{n-1})$ pour restriction. Il existe des P-sous-structures s'_n et s_n de s' et s engendrées par $M^{\bullet}_n * M^{\bullet}_n$ et par M_n respectivement, et par suite un P-sous-morphisme $k_n \in s_n.\hat{H}.s'_n$ de k tel que $P(k_n)$ soit une restriction de $P(k)$ et admette κ_n, et a fortiori $P(k_{n-1})$, pour restrictions. -Comme P est dénombrablement engendrant pour $\mathfrak{M}$, il existe $\hat{s}' \underset{P}{\ulcorner} s'$ et $\hat{s} \underset{P}{\ulcorner} s$ telles que

$$P(\hat{s}') = \bigcup_{i \in N} P(s'_i) = \hat{M}' \quad \text{et} \quad P(\hat{s}) = \bigcup_{i \in N} P(s_i) = \hat{M}.$$

Les relations $\kappa(P(s'_i)) \subset P(s_i)$ pour tout $i \in N$ entraînant $\kappa(\hat{M}') \subset \hat{M}$, il existe

$$\hat{k} \in \hat{s}.\hat{H}.\hat{s}', \quad \text{avec} \quad P(\hat{k}) = (\hat{M}, \kappa\iota, \hat{M}') \in \tilde{\mathfrak{M}}.$$

Montrons que l'on a $\hat{M}' = \hat{M}^{\bullet} * \hat{M}^{\bullet}$. En effet, soit $(y,x) \in \hat{M}'$; on a $(y,x) \in P(s'_i)$ pour un certain entier i; il en résulte

$$y \in M_{i+1} \subset \hat{M}, \quad x \in M_{i+1} \subset \hat{M} \quad \text{et} \quad y.x \in M_{i+1} \subset \hat{M},$$

d'où $(y,x) \in \hat{M}^{\bullet} * \hat{M}^{\bullet}$. Inversement, si $(y',x') \in \hat{M}^{\bullet} * \hat{M}^{\bullet}$, il existe un entier n tel que

$$y' \in M_n, \quad x' \in M_n \quad \text{et} \quad y'.x' \in M_n,$$

c'est-à-dire $(y',x') \in M_n^{\bullet} * M_n^{\bullet} \subset P(s'_n) \subset \hat{M}'$. Ceci prouve que $\hat{M}^{\bullet} * \hat{M}^{\bullet} = \hat{M}'$, de sorte que $P(\hat{k})$ est la loi de composition de la sous-classe multiplicative $\hat{M}^{\bullet}$ de $C^{\bullet}$. On obtient donc

$$\hat{e} = (\hat{M}^{\bullet}, \hat{s}, \hat{s}') \in \mathfrak{N}(P)_o, \quad \hat{s} \underset{P}{\sqsubset} s, \quad M \subset \hat{M} \in \tilde{\mathfrak{M}},$$

et $\hat{e}$ est une $\hat{P}_{\mathfrak{N}}$-sous-structure de e.

- Supposons que $\tilde{e} = (\tilde{C}^{\bullet}, \tilde{s}, \tilde{s}')$ soit une $\hat{P}_{\mathfrak{N}}$-sous-structure de $(C^{\bullet}, s, s')$ vérifiant

$$M \subset \tilde{C}, \quad \tilde{s} \underset{P}{\sqsubset} s \quad \text{et} \quad \tilde{s}' \underset{P}{\sqsubset} s'.$$

Soit $\tilde{k}$ l'élément de $\tilde{s}.\hat{H}.\tilde{s}'$ appliqué par P sur $(\tilde{C}, \kappa\iota, \tilde{C}^{\bullet} * \tilde{C}^{\bullet})$. Comme s_1 et s'_1 sont les P-sous-structures de s et s' engendrées respectivement par $M \subset \tilde{C}$ et par $M^{\bullet} * M^{\bullet} \subset \tilde{C}^{\bullet} * \tilde{C}^{\bullet}$, on trouve

$$s_1 \underset{P}{\sqsubset} \tilde{s} \quad \text{et} \quad s'_1 \underset{P}{\sqsubset} \tilde{s}'.$$

Supposons prouvé, pour tout $i < n$:

$$s_i \underset{P}{\sqsubset} \tilde{s} \quad \text{et} \quad s'_i \underset{P}{\sqsubset} \tilde{s}'.$$

Alors on trouve

$$M_n \subset P(\tilde{s}) \cup p_1(P(\tilde{s}')) \cup p_2(P(\tilde{s}')) = \tilde{C}$$

et $M_n^{\bullet} * M_n^{\bullet} \subset \tilde{C}^{\bullet} * \tilde{C}^{\bullet}$, de sorte que

$$s_n \underset{P}{\sqsubset} \tilde{s} \quad \text{et} \quad s'_n \underset{P}{\sqsubset} \tilde{s}'.$$

Par récurrence, on en déduit

$$P(\hat{s}) = \bigcup_{i \in N} P(s_i) \subset \tilde{C} \quad \text{et} \quad P(\hat{s}') = \bigcup_{i \in N} P(s'_i) \subset \tilde{C}^{\bullet} * \tilde{C}^{\bullet}.$$

Par suite $\hat{s} \underset{P}{\frown} \tilde{s}$ et $\hat{s}' \underset{P}{\frown} \tilde{s}'$. Ceci prouve que $(\hat{C}^{\bullet}, \hat{s}, \hat{s}')$ est la $(X''_{\mathfrak{N}}, \mathfrak{N}(P))$-sous-structure de $(C^{\bullet}, s, s')$ engendrée par M. Le foncteur d'homomorphismes $\hat{P}_{\mathfrak{N}}$ étant saturé, $\hat{P}_{\mathfrak{N}}$ est $(\mathfrak{M}^{\cup}, X''_{\mathfrak{N}}, \mathfrak{N}(p))$-engendrant, en vertu de la proposition 2-2 [1], ce qu'il fallait démontrer. ■

REMARQUE. Les propositions 4 et 3 admettent la proposition 4-3 [1] pour cas particulier. Il en résulte le résultat suivant (dans l'énoncé duquel nous reprenons les notations du n° 3 [1]), qui généralise le théorème 1-3 [1].

COROLLAIRE. *Supposons que* $\hat{\mathfrak{M}}_0$ *soit un univers, que* P *soit (resp. soit dénombrablement)* $\frown$*-engendrant pour* $\mathfrak{M}$ *et à* $\hat{\mathfrak{M}}_0$*-produits et que* $H \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$. *Soit* $\mathfrak{O}(p)$ *une sous-catégorie pleine de* $\mathfrak{U}(p)$ *telle que* $\bar{\mathfrak{N}}'(p) \subset \mathfrak{O}(p)$, $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{O}$ *et* $\mathfrak{K} \neq \mathfrak{O}$ *(resp. de* $\mathfrak{U}(p)$*). Si* $e \in \mathfrak{U}(p)_0$ *et si* r *est une relation sur* $\hat{p}_{\mathfrak{U}}(e)$, *il existe une* $(\mathfrak{O}(p), \hat{p}_{\mathfrak{U}})$*-structure quasi-quotient de* e *par* r.

En effet, la démonstration est analogue à celle du théorème 1-3 [1], le foncteur P étant $(\mathfrak{M}, \mathfrak{O})$-résolvant d'après la proposition 3 (resp. d'après le théorème 1-5 [1] si $\mathfrak{O} = \mathfrak{K}$ ou si $\mathfrak{F}(p) \supset \mathfrak{O}(p)$, et le foncteur $\hat{P}_{\mathfrak{N}}$ est $(\mathfrak{M}^{\cup}, X''_{\mathfrak{N}}, \mathfrak{N}(p))$-engendrant en vertu de la proposition 4). ■

LEMME 3. *Soit* $q = (\mathfrak{M}, \underline{q}, K^{\bullet})$ *un foncteur fidèle admettant une section maximale* z *(n° 4 [1]); alors* $z(\mathfrak{M}^i) \subset q^{\frown}$.

DEMONSTRATION. Soit $f \in \mathfrak{M}^i$ et $j = z(f)$. Supposons

$$k \in \beta(j).K, \quad s = \alpha(k) \quad \text{et} \quad q(k) = f.g.$$

On a $z(q(k)) = j.z(g)$. Par définition d'une section maximale, il existe $h \in z(s).K.s$ tel que $q(h) = q(s)$. Comme q est fidèle, on trouve $k = z(q(k)).h$. Les relations

$$j.(z(g).h) = z(q(k)).h = k \quad \text{et} \quad q(z(g).h) = g$$

entraînent que j est un q-monomorphisme. ■

PROPOSITION 5. *Supposons que* p *admette une section maximale* z. *Soit* $\hat{p}'_{\mathfrak{U}}$ *le foncteur canonique de* $\mathfrak{U}(p)$ *vers* $\mathfrak{W}$, *où* $\mathfrak{U} = \mathfrak{K}', \mathfrak{N}'$ *ou* $\bar{\mathfrak{N}}'$ *et*

$\mathfrak{W} = \mathfrak{N}'$ *(resp.* $\mathfrak{U} = \mathfrak{W} = \mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_g$, $\mathfrak{G}$ *ou* $\mathfrak{G}'$, *resp.* $\mathfrak{U} = \mathfrak{N}$ *ou* $\overline{\mathfrak{N}}$ *et* $\mathfrak{W} = \mathfrak{N}$*). Alors* $\hat{p}'_{\mathfrak{U}}$ *admet une section maximale.*

DEMONSTRATION. Soit $C^{\bullet} \in \mathfrak{N}_0$; posons

$$s = z(C), \quad j = z(C \times C, \iota, C^{\bullet} * C^{\bullet}) \quad \text{et} \quad k = z(C, \kappa, C^{\bullet} * C^{\bullet})$$

où κ est la loi de composition de $C^{\bullet}$. D'après la proposition 1-4 [1], $\beta(j) = s \times s$ et, en vertu du lemme 3, $j \in p^{\ulcorner}$. Donc $(C^{\bullet}, s) \in \overline{\mathfrak{N}}(p)_0$. Si de plus on suppose $C^{\bullet} \in \mathfrak{U}$, où $\mathfrak{U} = \mathfrak{N}'$ (resp. $= \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_g, \mathfrak{G}$ ou $\mathfrak{G}'$), on obtient

$$z(C, \alpha, C) \in s.H.s \quad \text{et} \quad z(C, \beta, C) \in s.H.s,$$

de sorte que l'on a $(C^{\bullet}, s) \in \overline{\mathfrak{N}}'(p)$ (resp. $\in \mathfrak{U}(p)$). Ainsi on définit un foncteur section $z_{\mathfrak{U}}$ de $\hat{p}'_{\mathfrak{U}}$ en posant

$$z_{\mathfrak{U}}(\hat{C}^{\bullet}, \underline{g}, C^{\bullet}) = (\hat{C}^{\bullet}, z(\hat{C}, \underline{g}, C), C^{\bullet}) \quad \text{si } (\hat{C}^{\bullet}, \underline{g}, C^{\bullet}) \in \mathfrak{W}.$$

- Soit $e = (C^{\bullet}, \hat{s}, \hat{s}') \in \mathfrak{U}(p)_0$. Par définition de z, il existe

$$h \in z(C).H.\hat{s} \quad \text{et} \quad h' \in z(C^{\bullet} * C^{\bullet}).H.\hat{s}'$$

tels que $p(h) = C$ et $p(h') = C^{\bullet} * C^{\bullet}$. Par suite, il existe aussi

$$\hat{h} \in (C^{\bullet}, z(C)).\mathfrak{U}(p).e \quad \text{tel que} \quad \hat{p}'_{\mathfrak{U}}(\hat{h}) = C^{\bullet}.$$

Ceci montre que $z_{\mathfrak{U}}$ est une section maximale de $\hat{p}'_{\mathfrak{U}}$. ■

REMARQUE. La proposition 5 généralise la proposition 2-4 [1].

2. Relation structurée engendrée par une relation.

Soit $\mathfrak{M}^r$ la catégorie des homomorphismes entre relations d'équivalence dont les éléments sont les triplets $\hat{h} = (r', h, r)$, où r et r' sont des relations d'équivalence sur M et M' respectivement et où $h = (M', \underline{h}, M) \in \mathfrak{M}$ est une application compatible avec (r', r). Soit ρ le foncteur canonique de $\mathfrak{M}^r$ vers $\mathfrak{M}$, qui associe h à $\hat{h}$. Dire que r est une relation d'équivalence compatible (resp. bicompatible) sur $C^{\bullet}$, où $C^{\bullet} \in \mathfrak{N}_0$ (resp. $\in \mathfrak{N}'_0$) signifie que l'on a

$$(C^{\bullet}, r) \in \overline{\mathfrak{N}}(\rho)_0 \quad (\text{resp. } \in \overline{\mathfrak{N}}'(\rho)_0).$$

LEMME 4. *Soient* $C^{\bullet} \in \mathfrak{N}'_0$ *et* $r = (C, A, C)$ *une relation compatible avec* *les applications source α et but β de $C^\bullet$. La relation d'équivalence $\hat{r}$ compatible sur $C^\bullet$ engendrée par r est bicompatible sur $C^\bullet$.*

DEMONSTRATION. La relation d'équivalence engendrée par r est évidemment compatible avec α et β, de sorte que nous pouvons supposer directement que r est une relation d'équivalence. Soit r_o la relation d'équivalence induite par r sur $C_o^\bullet$ et soit $\tilde{r}_o$ la surjection canonique de $C_o^\bullet$ sur $C_o^\bullet / r_o$. En désignant par $S^\perp$ le groupoïde des couples associé à $C_o^\bullet / r_o$, on trouve

$$F = (S^\perp, [\tilde{r}_o\, \beta, \tilde{r}_o\, \alpha], C^\bullet) \in \mathfrak{N}';$$

puisque r est compatible avec α et β, le néofoncteur F est aussi compatible avec r. Soit J le $p\mathfrak{N}$-épimorphisme canonique de $C^\bullet$ sur la classe multiplicative $C^\bullet/\hat{r}$ quotient de $C^\bullet$ par $\hat{r}$; on sait que J est une $p\mathfrak{N}$-quasi-surjection définissant $C^\bullet/\hat{r}$ comme $p\mathfrak{N}$-structure quasi-quotient de $C^\bullet$ par r; il s'ensuit qu'il existe un et un seul $F' \in \mathfrak{N}$ tel que $F'.J = F$. Supposons

$$f \in C, \quad f' \in C \quad \text{et} \quad f' \sim f \bmod \hat{r}.$$

On a $J(f) = J(f')$, d'où $F(f) = F(f')$ et

$$F(\alpha(f)) = \alpha(F(f)) = \alpha(F(f')) = F(\alpha(f')).$$

Par définition de F, l'égalité $F(\alpha(f)) = F(\alpha(f'))$ entraîne $\alpha(f) \sim \alpha(f')$ $\bmod\, r$ et, a fortiori, $\alpha(f) \sim \alpha(f') \bmod \hat{r}$. On montre de même que l'on a $\beta(f) \sim \beta(f') \bmod \hat{r}$. Donc $\hat{r}$ est bicompatible sur $C^\bullet$. ∎

Nous désignerons par N l'ensemble des entiers positifs.

PROPOSITION 6. *Soit $C^\bullet \in \mathfrak{N}_o$ et $r = (C, A, C)$ une relation. La relation d'équivalence (resp. d'équivalence compatible sur $C^\bullet$) engendrée par r peut être construite par récurrence.*

DEMONSTRATION. Soit $S^\perp = (S, \kappa^\perp)$ le groupoïde des couples associé à C. La relation symétrique engendrée par r est (C, B, C), où $B = A \cup A^{-1}$, en désignant par A^{-1} la classe des inverses des éléments de A dans $S^\perp$. La relation d'équivalence engendrée par r est la relation

$(C, e(A), C)$, où $e(A)^{\perp}$ désigne le sous-groupoïde de $S^{\perp}$ engendré par B_1. Définissons B_n par récurrence pour tout entier n en posant :

$$B_1 = B \cup S_o^{\perp} \quad \text{et} \quad B_n = \kappa^{\perp}(S^{\perp} * S^{\perp} \cap (B_{n-1})^2).$$

On obtient par récurrence

$$B_{n-1}^{-1} = B_{n-1} \subset B_n, \quad \text{d'où} \quad e(A) = \bigcup_{2 \leq n \in N} B_n.$$

-Soit $P^{\bullet} = (P, \kappa_2)$ la classe multiplicative produit $C^{\bullet} \times C^{\bullet}$. Si $M \subset C \times C$, posons

$$M^{*2} = (P^{\bullet} * P^{\bullet}) \cap (M \times M).$$

Construisons par récurrence pour tout entier n la partie A_n de $C \times C$ à l'aide des égalités :

$$A_1 = e(A) \quad \text{et} \quad A_{n+1} = e(\kappa_2(A_n^{*2}) \cup A_n).$$

Soit $\hat{A} = \bigcup_{n \in N} A_n$. Montrons que la relation $\hat{r}$ compatible sur $C^{\bullet}$ engendrée par r est $\hat{r}' = (C, \hat{A}, C)$. En effet, on a $\hat{r}' \subset \hat{r}$ et $\hat{r}'$ est une relation d'équivalence, car c'est la réunion d'une famille de relations d'équivalence croissantes. Il suffit donc de prouver que $\hat{r}'$ est compatible sur $C^{\bullet}$. Or, si l'on a

$$(x', x) \in \hat{A}, \ (y', y) \in \hat{A}, \ (y', x') \in C^{\bullet} * C^{\bullet} \ \text{et} \ (y, x) \in C^{\bullet} * C^{\bullet},$$

il existe un entier i tel que

$$\xi = ((y', y), (x', x)) \in A_i^{*2},$$

et par suite

$$\kappa_2(\xi) = (y'.x', y.x) \in A_{i+1} \subset \hat{A}.$$

Ainsi $\hat{r} = \hat{r}'$. ∎

COROLLAIRE. *Si $C^{\bullet}$ est un graphe multiplicatif et $r' = (C, A', C)$ une relation, la relation d'équivalence bicompatible $\hat{r}$ sur $C^{\bullet}$ engendrée par r' peut être construite par récurrence.*

En effet, la relation compatible avec α et β engendrée par r' est la relation $r = (C, A, C)$, où

$$A = A' \cup \alpha^2(A') \cup \beta^2(A').$$

Du lemme 4, on déduit que $\hat{r}$ est la relation compatible sur $C^{\bullet}$ engendrée par r, relation qui a été construite par récurrence dans la démonstration précédente. ■

Soit $p = (\mathfrak{M}, \underline{p}, H^{\bullet})$ un foncteur d'homomorphismes saturé à produits fibrés finis. Soit X une partie de $p_{\iota}^{\ulcorner}$ contenant $H_o^{\bullet}$.

DEFINITION. On appelle *relation* (p, X)*-structurée* un couple (s, r) tel que $s \in H_o^{\bullet}$, que r soit une relation d'équivalence $(p(s), A, p(s))$ et qu'il existe $j \in s \times s . X$ vérifiant $p(\alpha(j)) = A$.

Soit $\mathfrak{M}^r(p)$ la sous-catégorie pleine de la catégorie produit fibrée $p \vee \rho$ ayant pour unités les relations (p, X)-structurées. On définit un ordre sur $\mathfrak{M}^r(p)_o$ en posant

$$(s', r') < (s, r) \text{ si, et seulement si, } s' = s \text{ et } r' \subset r.$$

Soit $s \in H_o^{\bullet}$, $p(s) = C$ et (C, A, C) une relation r. S'il existe un plus petit élément $(s, \hat{r})$ dans la sous-classe ordonnée de $(\mathfrak{M}^r(p)_o, <)$ formée des éléments (s, r') tels que $r \subset r'$, on appelle $\hat{r}$ la *relation* (p, X)*-structurée engendrée par* r *sur* s.

Soit $\rho(p)$ le foncteur de $\mathfrak{M}^r(p)$ vers $\mathfrak{M}$ associant à $(h, (r'', p(h), r'))$ l'application

$$(A'', \underline{h} \times \underline{h}\,\iota, A'), \text{ où } r' = (C', A', C') \text{ et } r'' = (C'', A'', C'').$$

Soit Y la classe des $\hat{h} \in \mathfrak{M}^r(p)$ tels que

$$\hat{h} = (s, (r'', C, r')), \quad s \in H_o^{\bullet} \text{ et } p(s) = C.$$

Dire que $\hat{r}$ est la relation (p, X)-structurée engendrée par $r = (C, A, C)$ sur $s \in H_o^{\bullet}$ signifie que $(s, \hat{r})$ est une $(Y, \mathfrak{M}^r(p))$-sous-structure de $(s, (C, C \times C, C))$ engendrée par A (relativement au foncteur $\rho(p)$).

LEMME 5. *Si* $\mathfrak{M}_o$ *est un univers et si* $p' = (\mathfrak{M}, \underline{p}\,\iota, X^{\bullet})$ *est un foncteur à* $\mathfrak{M}_o$*-produits fibrés,* $\rho(p)$ *est* $(\mathfrak{M}, Y, \mathfrak{M}^r(p))$*-engendrant.*

DEMONSTRATION. Soient $s \in H_o^{\bullet}$, $C = p(s)$ et $A \subset C \times C$. Désignons par J la classe des $j \in s \times s . X$ tels que $A \subset p(\alpha(j))$ et $(s, r') \in \mathfrak{M}^r(p)_o$, où $r' = (C, p(\alpha(j)), C)$. D'après la proposition 11-I, on a $J \in \mathfrak{M}_o$, de sorte qu'il existe un produit fibré $\hat{s}'$ de $(j)_{j\in J}$ dans $X^{\bullet}$. Il s'ensuit que $(s,\hat{r})$, où $\hat{r}=(C,p(\hat{s}'),C)$, est la relation (p,X)-structurée engendrée par (C,A,C) sur s, ce qui achève la démonstration, d'après la remarque précédant le lemme. ∎

EXEMPLE. Soit X la sous-classe de $\mathfrak{N}'$ formée des néofoncteurs $(C^{\bullet},\iota,\hat{C}^{\bullet})$ tels que $\hat{C}^{\bullet}$ soit un sous-graphe multiplicatif stable de $C^{\bullet}$. Soit $C^{\bullet}\in\mathfrak{N}'_0$ et r une relation sur C. Pour que $(C^{\bullet},r)$ soit une relation $(p_{\mathfrak{N}'},X)$-structurée, il faut et il suffit que r soit une relation d'équivalence bicompatible sur $C^{\bullet}$. Toute relation r sur C engendre une relation $(p_{\mathfrak{N}'},X)$-structurée sur $C^{\bullet}$, à savoir la relation bicompatible sur $C^{\bullet}$ engendrée par r.

PROPOSITION 7. *Supposons que $p'=(\mathfrak{M},\underline{p}\,\iota,X^{\bullet})$ soit un foncteur dénombrablement engendrant pour $\mathfrak{M}$. Si $s\in H^{\bullet}_0$, si $C=p(s)$ et si $r=(C,A,C)$ est une relation, on peut construire par récurrence la relation (p,X)-structurée engendrée par r sur s.*

DEMONSTRATION. Nous désignons par $S^{\perp}=(S,\kappa)$ le groupoïde des couples associé à C. On sait [14] que $(S^{\perp},s\times s)$ est un groupoïde p-structuré, de sorte qu'il existe $k\in s\times s.H$ vérifiant les conditions

$$p(k)=(S,\kappa,S^{\perp}*S^{\perp})\quad\text{et}\quad\alpha(k)=\sigma\underset{p}{\frown}(s\times s)\times(s\times s).$$

De plus il existe $v_i\in s\times s.H.\sigma$, où $i=1$ et 2, tels que

$$p(v_i)=(S,\underline{p_i}\,\iota,S^{\perp}*S^{\perp}),$$

en notant p_i les projections canoniques de $S\times S$ sur S. Puisque p' est $\digamma$-engendrant pour $\mathfrak{M}$, il existe une (X,H)-sous-structure s'_1 de $s\times s$ engendrée par

$$A\cup A^{-1}\cup S^{\perp}_0\subset p(s\times s).$$

D'après le corollaire1 du lemme 1,il existe aussi une p-sous-structure σ_1 de σ telle que $\sigma_1=\overset{-1}{v}_1(s'_1)\cap\overset{-1}{v}_2(s'_1)$. Supposons définies, pour tout entier $i<n$, des p-sous-structures s'_i et σ_i de $s\times s$ et σ respectivement, de sorte que

$$p(s'_{i-1}) \subset p(s'_i) \quad \text{et} \quad \sigma_i = \overset{-1}{v_1}(s'_i) \cap \overset{-1}{v_2}(s'_i).$$

Soit s'_n la (X, H)-sous-structure de $s \times s$ engendrée par

$$A_n \cup A_n^{-1}, \quad \text{où} \quad A_n = \kappa(p(\sigma_{n-1})),$$

et soit $\sigma_n = \overset{-1}{v_1}(s'_n) \cap \overset{-1}{v_2}(s'_n)$. Si $(y, x) \in p(s'_{n-1})$, on a

$$(x, x) \in p(s'_1) \subset p(s'_{n-1}),$$

d'où

$$\xi = ((y, x), (x, x)) \in p(\sigma_{n-1}) \text{ et } (y, x) = \kappa(\xi) \in A_n \subset p(s'_n).$$

Ainsi nous avons construit par récurrence une suite croissante $(s'_n)_{n \in N}$ de p-sous-structures de $s \times s$. Comme p' est dénombrablement engendrant pour $\mathfrak{M}$, il existe $\hat{s}' \in H_o^{\cdot}$ et $\hat{j} \in s \times s . X . \hat{s}'$ tels que

$$\hat{A} = p(\hat{s}') = \bigcup_{n \in N} p(s'_n).$$

Montrons que $\hat{r} = (C, \hat{A}, C)$ est une relation d'équivalence. En effet, on a

$$S_o^{\perp} \subset \hat{A} = \bigcup_{n \in N} A_n = \hat{A}^{-1}, \text{ car } S_o^{\perp} \subset A_n \cup A_n^{-1} \subset p(s'_n) \subset A_{n+1}.$$

Si $(y', y) \in \hat{A}$ et $(y, x) \in \hat{A}$, il existe un entier n tel que

$$(y', y) \in A_n \quad \text{et} \quad (y, x) \in A_n;$$

on en déduit

$$\eta = ((y', y), (y, x)) \in p(\sigma_n) \quad \text{et} \quad (y', x) = \kappa(\eta) \in A_{n+1} \subset \hat{A}.$$

Donc $(s, \hat{r})$ est une relation (p, X)-structurée. - Soit (s, r'') une relation (p, X)-structurée, où $r \subset r'' = (C, A'', C)$; alors $A'' = p(s'')$ et $s'' \underset{p}{\sqsubset} s \times s$; de plus A'' définit un sous-groupoïde de $S^{\perp}$ contenant A. On a $p(s'_1) \subset A''$. Si l'on a prouvé que $p(s'_{n-1}) \subset A''$, on obtient

$$p(\sigma_{n-1}) \subset A''^{\perp} * A''^{\perp}, \quad A_n = \kappa(p(\sigma_{n-1})) \subset A'' \quad \text{et} \quad A_n^{-1} \subset A''.$$

Il s'ensuit $s'_n \underset{p}{\sqsubset} s''$ et, par récurrence, $\hat{s}' \underset{p}{\sqsubset} s''$. Ceci prouve que $\hat{r}$ est la relation (p, X)-structurée engendrée par r sur s. ■

COROLLAIRE. *Supposons que p soit dénombrablement engendrant pour $\mathfrak{M}$. Si $(C^{\cdot}, s) \in \mathcal{U}(p)_o$, toute relation r sur C engendre une relation*

$(\hat{p}_{\mathfrak{U}}, Y_{\mathfrak{U}})$-structurée sur $(C^\bullet, s)$ que l'on peut construire par récurrence, $Y_{\mathfrak{U}}$ étant la classe des $\hat{p}_{\mathfrak{U}}$-monomorphismes $\hat{j}$ tels que $\hat{p}^H_{\mathfrak{U}}(\hat{j}) \in p_i^{\ulcorner}$ (notations § 1) si $\mathfrak{U} \neq \mathfrak{N}$ et $Y_{\mathfrak{N}} = X''_{\mathfrak{N}}$.

En effet, si $\mathfrak{U} = \mathfrak{K}', \mathfrak{N}', \bar{\mathfrak{N}}'$ ou $\bar{\mathfrak{N}}$ (resp. $= \mathfrak{N}$, resp. si $\mathfrak{U}(p) \subset \mathfrak{F}(p)$), la démonstration de la proposition 3 (resp. proposition 4, resp. du théorème 1-5 [1]) montrent que $(\mathfrak{M}, \underline{\hat{p}}_{\mathfrak{U}\iota}, Y^\bullet_{\mathfrak{U}})$ est dénombrablement engendrant; le corollaire résulte de la proposition 7. ■

EXEMPLE. Soit $C^\bullet \in \mathfrak{N}'_0$ et $r = (C, A, C)$ une relation. D'après l'exemple donné plus haut, la proposition 7 permet de construire par récurrence la relation bicompatible $\hat{r}$ sur $C^\bullet$ engendrée par r. Remarquons que la construction est différente de celle indiquée dans la proposition 6. Reprenons les notations de la démonstration de la proposition 7, pour $p = p_{\mathfrak{N}'}$ et $s = C^\bullet$. Si r est compatible avec α et β, alors $p(s'_1)$ est formée de tous les couples

$$(g_n \cdot \ldots \cdot g_1, f_n \cdot \ldots \cdot f_1) \quad \text{tels que} \quad (g_j, f_j) \in A \cup A^{-1} \cup S_o^{\perp}$$

pour tout $j \leq n$ et $n \in N$. Les propositions 37 et 52, chapitre III, C.S., signifient que, sous les hypothèses de ces propositions, $\hat{r}$ est la relation d'équivalence engendrée par $(C, p(s'_1), C)$.

Soit $[C]$ un graphe et $L^\bullet$ la catégorie libre des chemins propres de $[C]$; nous identifions C à une partie de L. Soit $r = (L, A, L)$ une relation ayant les propriétés suivantes :

1°) $A \subset (C^2 \times C) \cup \Delta_C$, où Δ_C est la diagonale de C;

2°) Si $(y, x) \in A$, on a $\beta(y) = \beta(x)$ et $\alpha(y) = \alpha(x)$;

3°) Si $(y, x) \in A$ et $(y, x') \in A$, alors $x = x'$;

4°) Les conditions $(x'', x', x) \in C^3$, $((x'', x'), x_2) \in A$ et $((x', x), x_1) \in A$ assurent l'existence d'un $\hat{x} \in C$ tel que $(x'' \cdot x_1, \hat{x}) \in A$ et $(x_2 \cdot x, \hat{x}) \in A$.

PROPOSITION 8. *Supposons les hypothèses précédentes vérifiées et soit $\hat{r}$ la relation d'équivalence bicompatible sur $L^\bullet$ engendrée par r. Pour tout $m \in L$, la classe $m \bmod \hat{r}$ contient un chemin $\gamma(m)$ de longueur minimale (dit irréductible). Il existe une bijection de $L/\hat{r}$ sur $\gamma(L)$ et C s'identifie à une partie de $L/\hat{r}$.*

DEMONSTRATION. Les symboles i, j et n représenteront des entiers positifs. Si $m \in L$, nous notons $l(m)$ la longueur de m, i.e. l'entier n tel que $m \in C^n$. Soit A' la classe formée des couples $(m^1, m^2) \in L \times L$ de la forme

$$m^i = g'.y^i.g, \quad i = 1 \text{ et } 2, \quad g \in L, \quad g' \in L, \quad y^1 \neq y^2 \quad \text{et} \quad (y^1, y^2) \in A.$$

D'après la condition 1, on a

$$l(m^1) = l(m^2) + 1 \quad \text{si} \quad y^2 \notin L_o^{\bullet},$$

$$l(m^1) = l(m^2) + 2 \quad \text{si} \quad y^2 \in L_o^{\bullet}.$$

Soit $B = A' \cup A'^{-1} \cup \Delta_L$. Il résulte de la proposition 37, chap. III, C.S., que $\hat{r}$ est la relation d'équivalence engendrée par (L, B, L); autrement dit, on a $m \sim m' \bmod \hat{r}$ si, et seulement si, il existe $(m_i)_{i \leqslant n}$ tels que

$$m_1 = m, \quad m_n = m' \quad \text{et} \quad (m_i, m_{i+1}) \in B \text{ pour tout } i < n.$$

- Supposons $m = (x_n, \dots, x_1) \in L$ et $l(m) = n$. Construisons par récurrence un chemin $\gamma(m)$ de la façon suivante :

1°) Soit $\gamma_0(m) = m$. S'il n'existe aucun couple $(m, m') \in A'$, posons $\gamma_1(m) = m$; en particulier $\gamma_1(m) = m$ lorsque $m \in C$.

2°) Sinon, soit i le plus petit entier tel que $((x_{i+1}, x_i), x^i) \in A$; posons

$$\gamma_1(m) = (x_n, \dots, x_{i+2}).x^i.(x_{i-1}, \dots, x_1) \in L.$$

Par hypothèse sur A, le chemin $\gamma_1(m)$ est bien défini et l'on a

$$(m, \gamma_1(m)) \in A', \quad l(\gamma_1(m)) < l(m).$$

3°) Supposons défini $\gamma_j(m)$ pour tout $j < i \leq n$ et posons

$$\gamma_i(m) = \gamma_1(\gamma_{i-1}(m)).$$

On a $l(\gamma_i(m)) \leq l(\gamma_{i-1}(m))$, l'égalité ayant lieu seulement si $\gamma_i(m) = \gamma_{i-1}(m)$.

4°) Puisque $(\gamma_i(m))_{i \leqslant n}$ est une suite de chemins de longueur décroissante, il existe un plus petit $\bar{j} < n$ tel que $\gamma_1(\gamma_{\bar{j}}(m)) = \gamma_{\bar{j}}(m)$. Nous noterons $\gamma(m)$ le chemin $\gamma_{\bar{j}}(m)$. Ainsi on obtient un chemin $\gamma(m)$ tel que

$$l(\gamma(m)) \leq l(m) - \bar{j} \quad \text{et} \quad \gamma(\gamma(m)) = \gamma(m),$$

de sorte que $\gamma : m \to \gamma(m)$ est une rétraction de L sur $\gamma(L)$. Des relations

$$(\gamma_i(m), \gamma_{i+1}(m)) \in A' \text{ pour tout } i < \bar{j},$$

on déduit $m \sim \gamma(m) \bmod \hat{r}$. Si de plus $m' \in L$ et $\gamma(m') = \gamma(m)$, on a $m' \sim m \bmod \hat{r}$, car $\hat{r}$ est une relation d'équivalence et

$$m' \sim \gamma(m') = \gamma(m) \sim m \bmod \hat{r}.$$

- Supposons $(m^1, m^2) \in A'$, où $m^i = g'.y^i.g$ et $i = 1$ et 2. Montrons que l'on a $\gamma(m^1) = \gamma(m^2)$. Il suffit de prouver l'existence d'entiers i' et i'' tels que $\gamma_{i'}(m^1) = \gamma_{i''}(m^2)$, cette égalité entraînant $\gamma(m^1) = \gamma(m^2)$ par construction de γ. En effet, par définition, on a

$$(y^1, y^2) \in A \quad \text{et} \quad y^1 = (x'', x') \in C^2 \cap L.$$

Il existe un plus petit $j \geq 0$ tel que $\gamma_j(m^i) = g'.y^i.\gamma(g)$. Si $\gamma(g) \in L_o^{\bullet}$, on obtient

$$\gamma_{j+1}(m^1) = g'.y^2 = \gamma_j(m^2).$$

Supposons $\gamma(g) \notin L_o^{\bullet}$; il existe $x \in C - L_o^{\bullet}$ tel que $\gamma(g) = x.g_1$, où $g_1 \in \gamma(L)$. Alors

$$\gamma_j(m^1) = g'.x''.x'.x.g_1 \quad \text{et} \quad \gamma_j(m^2) = g'.y^2.x.g_1.$$

Deux cas se présentent :

1°) Si $((x', x), y) \notin A$ pour tout $y \in C$, on a

$$\gamma_{j+1}(m^1) = g'.y^2.x.g_1 = \gamma_j(m^2).$$

2°) S'il existe $((x', x), x_1) \in A$, on a

$$\gamma_{j+1}(m^1) = g'.x''.x_1.g_1 = m_1^1,$$

et la propriété 4 assure l'existence de $(x''.x_1, \hat{x}) \in A$ et $(y^2.x, \hat{x}) \in A$. Il s'ensuit $\gamma_\varepsilon(m^2) = g'.\hat{x}.g_1 = m_1^2$, où $\varepsilon = j$ si $y^2 \in L_o^{\bullet}$ et $\varepsilon = j+1$ si $y^2 \notin L_o^{\bullet}$. Si $x_1 \in L_o^{\bullet}$, on a $\hat{x} = x''$ et $m_1^1 = m_1^2$. Supposons $x_1 \notin L_o^{\bullet}$. Alors $(m_1^1, m_1^2) \in A'$.

a) Si $\gamma(x_1.g_1) = x_1.g_1$, on obtient $\gamma_{j+2}(m^1) = \gamma_\varepsilon(m^2)$;

b) Si $l(\gamma(g)) = 1$, on a $g_1 \in L_o^{\bullet}$ et, d'après a, $\gamma(m^1) = \gamma(m^2)$. Supposons cette égalité déjà prouvée dès que $l(\gamma(g)) < \hat{n}$ et soit $l(\gamma(g)) = \hat{n}$. Comme $(m_1^1, m_1^2) \in A'$ et que

$$l(\gamma(g_1)) < l(\gamma(g)) = \hat{n},$$

on en déduit $\gamma(m_1^1) = \gamma(m_1^2)$, d'où $\gamma(m^1) = \gamma(m_1^i) = = \gamma(m^2)$. Par récurrence, le résultat est ainsi prouvé.

En conclusion, $\gamma(m^1) = \gamma(m^2)$ lorsque $(m^1, m^2) \in A'$, et par suite lorsque $(m^1, m^2) \in B$.

- Supposons $m \sim m' \bmod \hat{r}$; il existe $(m_i)_{i \leqslant n}$ tels que $m = m_1$, $m' = m_n$ et $(m_i, m_{i+1}) \in B$. Il en résulte $\gamma(m_i) = \gamma(m_{i+1})$ pour tout $i < n$, d'où

$$\gamma(m) = \gamma(m_1) = \ldots = \gamma(m_i) = \ldots = \gamma(m_n) = \gamma(m'),$$

i.e. γ est compatible avec $\hat{r}$. De plus $l(\gamma(m)) \leq l(m')$, l'égalité ayant lieu seulement si $l(\gamma(m')) = l(m')$, c'est-à-dire si $m' = \gamma(m') = \gamma(m)$. Donc $\gamma(m)$ est l'unique élément de $m \bmod \hat{r}$ tel que $l(\gamma(m)) \leq l(m')$ pour tout $m' \in m \bmod \hat{r}$. Nous appelons $\gamma(m)$ le chemin irréductible (relativement à r) associé à $m \bmod \hat{r}$. On construit une bijection $\hat{\gamma}$ de $L/\hat{r}$ sur $\gamma(L)$ en associant $\gamma(m)$ à $m \bmod \hat{r}$. Cette bijection définit un isomorphisme de $L^{\bullet}/\hat{r}$ sur la catégorie $\gamma(L)^{\perp}$ telle que

$$(m_2, m_1) \to \gamma(m_2 . m_1) \text{ si, et seulement si, } \alpha(m_2) = \beta(m_1).$$

- Soit $m \in \gamma(L)$ et $m' \in \gamma(L)$. Comme $m = \gamma(m)$ et $m' = \gamma(m')$, on a $m \sim m' \bmod \hat{r}$ si, et seulement si, $m = m'$. Etant donné que $C \subset \gamma(L)$, l'application $f \to f \bmod \hat{r}$, où $f \in C$, est une bijection de C sur une partie $\hat{C}$ de $L/\hat{r}$. ■

COROLLAIRE. *La conclusion de la proposition 8 est valable si* $[C] = = [G_\lambda]$ *et si* $\hat{r}$ *est la relation bicompatible* $\hat{r}_\lambda$ *sur* $L^{\bullet} = L[G_\lambda]^{\bullet}$ *considérée dans la démonstration du théorème 8-II.*

DEMONSTRATION. Reprenons les notations de la première partie de la démonstration du théorème 8-II. - Si $\lambda' = 1$ et $\lambda = 2$, on a

$$(H_2 \cup H'_2 \cup K_2) \cap H = \emptyset,$$

de sorte que la relation r_2 sur $L[G_2]$ vérifie évidemment les propriétés 1, 2, 3 et 4; ainsi la proposition 8 s'applique dans ce cas. En particulier, $[G_2]$ s'identifie à un sous-graphe de $[\hat{M}^\bullet_2]$ et $H^\bullet$ à une sous-catégorie de $\hat{M}^\bullet_2 = L[G_2]^\bullet/\hat{r}_2$; l'égalité

$$h_1.k_1 = h_2.k_2, \text{ où } k_i \in H_2 \text{ et } h_i \in H \text{ (resp. } \in H'_2)$$

entraîne $h_1 = h_2$ et $k_1 = k_2$.- Soit λ un ordinal de la forme $\lambda = \lambda' + 1$. Supposons construite, pour tout $\xi < \lambda$, une catégorie $\hat{M}^\bullet_\xi$ de façon que, si $\xi = \xi' + 1$:

a) $\hat{M}^\bullet_\xi$ soit la catégorie quotient de $L[G_\xi]^\bullet$ par $\hat{r}_\xi$ et que $[G_\xi]$ s'identifie à un sous-graphe de $[\hat{M}^\bullet_\xi]$;

b) si $h_1.k_1 = h_2.k_2$, où $k_i \in H_\xi$ et $h_i \in \hat{M}_{\xi'}$, alors $h_1 = h_2$ et $k_1 = k_2$;

c) si $(i, \underline{\Phi}^\bullet).h \in \hat{M}_{\xi'}$ pour tout $i \in \alpha(\underline{\Phi})$, où $h \in \underline{\Phi}^\bullet.\hat{M}_\xi$, on ait $h \in H'_\xi$.

Soient $[G_\lambda]$, r_λ et $\hat{M}^\bullet_\lambda$ les éléments définis dans le théorème 8-II. Posons

$$L^\bullet = L[G_\lambda]^\bullet \quad \text{et} \quad r = (L, A, L), \text{ où } A = D_\lambda \cup D'_\lambda,$$

en désignant par D'_λ la classe des couples $((h.(i, \underline{\Phi}^\bullet), \underline{\Psi}^\bullet), h.\tau(i))$ tels que $(\hat{M}^\bullet_{\lambda'}, \underline{\Psi}, \alpha(\underline{\Psi})^\bullet)$ soit la transformation naturelle définie par le triplet $(\underline{\Phi}, \tau, \hat{e})$ et que $\alpha(h) = \underline{\Phi}(i)$. Un simple calcul montre que A possède les propriétés 1, 2, 3 et 4. Comme $\hat{r}_\lambda$ est aussi la relation $\hat{r}$ bicompatible sur $L^\bullet$ engendrée par r, les conclusions de la proposition 8 s'appliquent à cette relation. Il s'ensuit que les conditions a, b et c sont encore satisfaites pour $\xi = \lambda$, de sorte que, par récurrence transfinie, le corollaire est vrai pour tout $\lambda \leq \hat{\lambda}$. ∎

EXEMPLE. Soit $[G]$ un graphe, $[C]$ un symétrisé de $[G]$ (n° 4 [1]) et $L^\bullet$ la catégorie libre $L[C]^\bullet$. Soit r la relation (L, A, L), où A est la classe des couples

$$(f, f), \quad ((f^{-1}, f), \alpha(f)) \quad \text{et} \quad ((f, f^{-1}), \beta(f))$$

tels que $f \in G - [G]_0$. Cette relation vérifie les propriétés 1, 2, 3 et 4. De plus $L^\bullet/\hat{r}$, où $\hat{r}$ est la relation bicompatible sur $L^\bullet$ engendrée par r, est le groupoïde libre $\Gamma[G]^{\cdot}$ associé à $[G]$ (i.e. la q-structure libre engendrée par $[G]$, en notant q le foncteur fidèle de $\mathcal{F}_g$ vers la catégorie $\mathcal{G}$ des morphismes entre graphes qui associe $[S^{\cdot}]$ au groupoïde $S^{\cdot}$), d'après le théorème 9, chapitre III, C.S. (voir aussi [1], n° 4). Par suite la proposition 8 montre comment est construit un élément de $\Gamma[G]^{\cdot}$.

3. Lemmes relatifs au théorème 12-II.

Les notations sont celles des § 1 et 3, II.

LEMME 6. *Soit* $(C^{\cdot}, \nu) \in \hat{\mathcal{F}}_o^{\mathcal{I}}$ *tel que* Lim^{ν} *soit injectif. Soit* $M^{\cdot}$ *une sous-catégorie de* $C^{\cdot}$ *vérifiant la condition :*

> *(A) Si* $\Phi = (C^{\cdot}, \underline{\Phi}, I^{\cdot}) \in \hat{\mathcal{F}}.\mathcal{I}$ *et si* $Lim^{\nu}\Phi \in M$, *on a* $\underline{\Phi}(I) \subset M$ *et* $(M^{\cdot}, \underline{\Phi}, I^{\cdot})$ *admet* $(\boxminus M^{\cdot}, \underline{\nu(\Phi)}, I^{\cdot})$ *pour limite projective naturalisée.*

Alors $M^{\cdot}$ *est une sous-catégorie pleine de* $\hat{M}^{\cdot}$, *en notant* $(\hat{M}^{\cdot}, \hat{\nu})$ *la complétion* $\mathcal{I}$*-projective de* M *dans* $(C^{\cdot}, \nu)$.

DEMONSTRATION. Bien que la condition *(A)* soit plus faible que la condition $Lim^{\nu}\Phi \notin M$ du théorème 5-II, la démonstration du théorème 5-II (dont nous reprenons les notations) peut être utilisée sans modification pour prouver l'égalité $N_{\lambda} = M_{\lambda}$; il en résulte aussi que $M^{\cdot} = M_1^{\cdot}$ est une sous-catégorie pleine de $M_2^{\cdot}$. Soit $\lambda \leq \hat{\lambda}$ et supposons montré

$$(M_{\xi'})_o^{\cdot} . M_{\xi} . M_o^{\cdot} \subset M_{\xi'} \text{ pour tout } \xi' < \xi < \lambda .$$

Soit $f \in (M_{\xi'})_o^{\cdot} . M_{\lambda} . M_o^{\cdot}$, où $\xi' < \lambda$.

1°) Si λ est de seconde espèce, il existe $\xi < \lambda$ tel que $\xi' \leq \xi$ et $f \in M_{\xi}$; l'hypothèse de récurrence entraîne $f \in M_{\xi'}$.

2°) Supposons $\lambda = \lambda' + 1$. On sait que $f = m'' . m . m' \in N_{\lambda}$. Comme $\alpha(f) \in M$, on a (démonstration du théorème 5-II) $m' \in C_o^{\cdot}$ et $f \in M_{\lambda'} . A_{\lambda}^{\cdot} . M_o^{\cdot}$. Montrons $M_{\lambda'} . A_{\lambda} . M_o^{\cdot} \subset M_{\lambda'} . M_o^{\cdot}$. En effet, soit $m_1 \in A_{\lambda} . M_o^{\cdot}$ et $\beta(m_1) \in M_{\lambda'}$; alors $m_1 = lim^{\nu}\Psi$, où Ψ est définie par le triplet $(\Phi, \tau, \hat{e})$. Puisque $Lim\,\Phi \in M_{\lambda'}$ et que Lim^{ν} est injectif, il existe $\xi < \lambda'$ tel que $\beta(\underline{\Phi}) \subset M_{\xi}$, de sorte que

$$p_i^{\nu}(\Phi) . m_1 = \tau(i) \in M_{\xi} . M_{\lambda'} . M_o^{\cdot} \subset M_{\xi}$$

pour tout $i \in \underline{\alpha}(\Psi)$. Mais, par construction de M_{ξ}, il s'ensuit

$$m_1 \in M_{\xi+1} \subset M_{\lambda'}, \text{ d'où } M_{\lambda'} . A_{\lambda} . M_o^{\cdot} \subset M_{\lambda'} .$$

-D'après la démonstration du théorème 5-II, on a $A_{\lambda}.M_{\lambda'} \subset A_{\lambda} \cup M_{\lambda'}$ et, par définition de N_{λ}, il existe $m_i \in A_{\lambda}$ tels que $m = m_n \ldots . m_1$. Il s'ensuit $m_2 . m_1 \in M_{\lambda'} . M_o^{\cdot}$, car

$$m_2 . m_1 \in A_{\lambda}.(A_{\lambda}.M_o^{\cdot}) \subset A_{\lambda}.M_{\lambda'}.M_o^{\cdot} \subset (A_{\lambda} \cup M_{\lambda'}).M_o^{\cdot} ,$$

et, par récurrence finie, $m \in M_{\lambda'}$. Donc

$$f = m'' . m \in M_{\lambda'} \text{ et } f \in (M_{\xi'})_o^{\cdot} . M_{\lambda'} . M_o^{\cdot} \subset M_{\xi'} .$$

3°) Par récurrence transfinie, on obtient $(M_{\xi'})_o^{\cdot} . M_{\lambda} . M_o^{\cdot} \subset M_{\xi'}$, pour tout $\xi' < \lambda \leq \hat{\lambda}$. - En particulier, $M_o . \hat{M} . M_o^{\cdot} \subset M$; autrement dit, $M^{\cdot}$ est une sous-catégorie pleine de $\hat{M}^{\cdot}$. ∎

LEMME 7. *Soient* $(C^{\cdot}, \nu, \mu) \in \hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$, $\Phi \in C^{\cdot} . \hat{\mathcal{F}} . \mathcal{I}$ *et* $\Phi' \in C^{\cdot} . \hat{\mathcal{F}} . \mathcal{J}$. *Si* Ψ *est une transformation naturelle définie par le triplet* $(\Phi, \tau, \hat{E}')$, *où* $E' = $ $= \underrightarrow{Lim}^{\mu} \Phi'$, *il existe* Ψ' *tel que* $lim^{\nu} \Psi = \underrightarrow{lim}^{\mu} \Psi'$.

DEMONSTRATION. Posons $I^{\cdot} = \alpha(\Phi)$ et $J^{\cdot} = \alpha(\Phi')$. Si $j \in J_o^{\cdot}$, le triplet $(\Phi, \tau_j, \widehat{\Phi'(j)})$, où $\tau_j(i) = \tau(i) . s_j^{\mu}(\Phi')$ pour tout $i \in I_o^{\cdot}$, définit une transformation naturelle Ψ_j; soit $\tau'(j) = lim^{\nu} \Psi_j$. Si $k \in j' . J . j$, on obtient

$$p_i^{\nu}(\Phi) . \tau'(j') . \Phi'(k) = \tau(i) . s_{j'}^{\mu}(\Phi') . \Phi'(k) = \tau(i) . s_j^{\mu}(\Phi') =$$
$$= p_i^{\nu}(\Phi) . \tau'(j),$$

pour tout $i \in I_o^{\cdot}$, et par suite $\tau'(j') . \Phi'(k) = \tau'(j)$. Ainsi le triplet $(\hat{E}, \tau', \Phi')$, où $\hat{E}$ est le foncteur constant sur $E = Lim^{\nu} \Phi$, définit une transformation naturelle Ψ' et il existe $h = \underrightarrow{lim}^{\mu} \Psi'$. Comme

$$p_i^{\nu}(\Phi) . h . s_j^{\mu}(\Phi') = p_i^{\nu}(\Phi) . \tau'(j) = \tau_j(i) = \tau(i) . s_j^{\mu}(\Phi')$$

pour tout $j \in J_o^{\cdot}$, il s'ensuit $p_i^{\nu}(\Phi) . h = \tau(i)$ pour tout $i \in I_o^{\cdot}$, c'est-à-dire $h = lim^{\nu} \Psi$. ∎

COROLLAIRE. *Reprenons toutes les hypothèses du théorème 12-II et les notations de sa démonstration. Alors* $\hat{M}_{\lambda'}$ *(resp. Alors* M'_{λ}*) vérifie la* *condition A du lemme 6 relativement à* $(C^{\cdot}, \nu)$ *(resp. à* (C^*, μ^*)*) pour tout* $\lambda = \lambda' + 1 < \tilde{\lambda}'$.

DEMONSTRATION. M définit une sous-catégorie pleine $M_1^{\cdot}$ de $M_2^{\prime\cdot}$ d'après le théorème 5-II. Si $\Phi' \in C^{\cdot}.\mathfrak{F}.\mathfrak{J}$, on a $\underrightarrow{Lim}^{\mu}\Phi' \notin M$ par hypothèse et $\underrightarrow{Lim}^{\mu}\Phi' \notin M'_2$, car le foncteur Z somme de $\underrightarrow{Lim}^{\nu}$ et de $\underrightarrow{Lim}^{\mu}$ est injectif; donc, en vertu du théorème 11-II, $M_2^{\prime\cdot}$ est une sous-catégorie pleine de $\hat{M}_{\tilde{2}}^{\cdot}$. - Soit $\lambda = \lambda' + 1 < \tilde{\lambda}'$. Supposons prouvé que $M_{\xi+1}^{\prime\cdot}$ et $\hat{M}_{\xi+1}^{\cdot}$ sont des sous-catégories pleines de $\hat{M}_{\lambda'}^{\cdot}$ pour tout $\xi < \lambda'$. Montrons que $\hat{M}_{\lambda'}$ vérifie la condition A relativement à $(C^{\cdot}, \nu)$. En effet, soit $\underline{\Phi} = (C^{\cdot}, \Phi, I^{\cdot})$ un foncteur et $E = Lim^{\nu}\underline{\Phi} \in \hat{M}_{\lambda'}$. Comme Z est injectif, il existe un $\xi < \lambda'$ tel que $E \in M'_{\xi+1} - M$, de sorte que l'on a

$$\underline{\Phi}(I) \subset \hat{M}_{\xi} \quad \text{et} \quad p_i^{\nu}(\Phi) \in M'_{\xi+1},$$

$M'_{\xi+1}$ étant stable pour ν. Soit Ψ une transformation naturelle définie par le triplet $(\Phi, \tau, \hat{E}')$ telle que $\beta(\Psi) \subset \square \hat{M}_{\lambda'}$. Posons $h = \overline{lim}^{\nu}\Psi$. Il nous faut montrer que $h \in \hat{M}_{\lambda'}$. Plusieurs cas se présentent :

1°) S'il existe $\xi' + 1 \leq \lambda'$ tel que $\xi \leq \xi'$ et $E' \in M'_{\xi'+1}$, alors $\beta(\underline{\Psi}) \subset \square M'_{\xi'+1}$ puisque $M_{\xi'+1}^{\prime\cdot}$ est une sous-catégorie pleine de $\hat{M}_{\lambda'}^{\cdot}$ d'après l'hypothèse de récurrence. $M'_{\xi'+1}$ étant stable pour ν, il en résulte $h \in M'_{\xi'+1} \subset \hat{M}_{\lambda'}$. En particulier tel est le cas lorsque λ' est de seconde espèce.

2°) Dans le cas contraire, on a $\lambda' = \lambda'' + 1$ et $E' \in \hat{M}_{\lambda'} - M'_{\lambda'}$. En vertu du théorème 5-II appliqué à (C^*, μ^*), on trouve

$$\hat{M}_{\lambda'} = \bigcup_{\zeta < \hat{\lambda}} M_{\lambda', \zeta} \quad \text{et} \quad M_{\lambda', 1} = M'_{\lambda'}.$$

De plus $E' \in M_{\lambda', \zeta+1}$ entraîne $E = \underrightarrow{Lim}^{\mu}\Phi'$ où $\beta(\underline{\Phi}') \subset M_{\lambda', \zeta}$.

a) Si $E' \in M_{\lambda', 2}$, alors $M_{\lambda'}^{\prime\cdot}$ étant pleine dans $\hat{M}_{\lambda'}^{\cdot}$, on obtient

$$\tau_j(i) = \tau(i).s_j^{\mu}(\Phi') \in M'_{\lambda'}$$

pour tout $i \in I_0^{\cdot}$ et tout $j \in \alpha(\Phi')_0$. Comme $M'_{\lambda'}$ est stable pour ν, la transformation naturelle Ψ_j définie par $(\Phi, \tau_j, \widehat{\Phi'(j)})$ est telle que $\tau'(j) = lim^{\nu}\Psi_j \in M'_{\lambda'}$. D'après le lemme 7, on a $h = \underrightarrow{Lim}^{\mu}\Psi'$, où Ψ' est définie par le triplet $(\hat{E}, T', \Phi')$. Donc, $\hat{M}_{\lambda'}$ étant stable pour μ, on en conclut $h \in \hat{M}_{\lambda'}$.

b) Supposons prouvé $h \in \hat{M}_{\lambda'}$ lorsque $E' \in M_{\lambda', \zeta'}$ et $\zeta' < \zeta$; soit $E' \in M_{\lambda', \zeta}$. Avec les mêmes notations que dans a, on trouve

$$T'(j) = lim^{\nu}\, \Psi_j \in \hat{M}_{\lambda'}$$

d'après l'hypothèse de récurrence, la source de Ψ_j étant le foncteur constant sur $\Phi'(j) \in M_{\lambda', \zeta'}$ où $\zeta' < \zeta$. On en déduit $h = \underrightarrow{Lim}^{\mu}\Psi' \in \hat{M}_{\lambda'}$, car $\hat{M}_{\lambda'}$ est stable pour μ.

c) Par récurrence transfinie sur ζ, on obtient $h \in \hat{M}_{\lambda'}$ dans tous les cas.

- Ainsi E est une limite projective de $(\underline{\boxminus \hat{\dot{M}}_{\lambda'}}, \Phi, I^{\cdot})$. Autrement dit, $\hat{M}_{\lambda'}$ vérifie la condition A du lemme 6. Ce lemme affirme que $\hat{\dot{M}}_{\lambda'}$ est une sous-catégorie pleine de $M'^{\cdot}_{\lambda}$. A fortiori, $\hat{M}^{\cdot}_{\xi+1}$ et $M'^{\cdot}_{\xi+1}$ sont des sous-catégories pleines de $M'^{\cdot}_{\lambda}$ lorsque $\xi < \lambda'$.

- En utilisant le résultat précédent, une démonstration analogue prouve que M'_{λ} vérifie la condition A relativement à (C^*, μ^*), de sorte que $M'^{\cdot}_{\lambda}$ est une sous-catégorie pleine de $\hat{\dot{M}}_{\lambda}$. On en conclut, par récurrence transfinie sur λ, que $\hat{\dot{M}}_{\lambda'}$ est pleine dans $M'^{\cdot}_{\lambda}$ et $M'^{\cdot}_{\lambda}$ pleine dans $\hat{\dot{M}}_{\lambda}$ pour tout ordinal $\lambda = \lambda' + 1 < \tilde{\lambda}'$. ■

BIBLIOGRAPHIE

C.S. = C. EHRESMANN, Catégories et structures, Dunod, Paris, 1965 .

[1] C. EHRESMANN, Structures quasi-quotient, Math. Ann. (à l'impression); multigraphié, Paris, 1965, 93 pages.

[2] A. GROTHENDIECK, Textes réunis du Séminaire Bourbaki 1959 - 62 .

[3] ECKMANN-HILTON, Group-Like structures in general categories, Math. Ann. I, 151, 1963, p. 150 - 186 .

[4] B. MITCHELL, Theory of categories, Academic Press, New-York-London, 1965 .

[5] P. FREYD, Abelian categories, Harper & Row, New-York, 1964 .

[6] D.M. KAN, Adjoint functors, Trans. A.M.S., 87, 1958, p. 294 - 329 .

[7] F. LAWVERE, Functorial semantics of algebraic theories, Thesis, Columbia Univ. 1963 .

[8] C. EHRESMANN, Catégorie des foncteurs types, Rev. Un. Mat. Arg. 20, 1960, p. 194 - 209 .

[9] J. BENABOU, Structures algébriques dans les catégories, Cahiers de topo. et Géo. Diff., 1967 (à l'impression); thèse multigraphiée Paris, 1966 .

[10] F. FOLTZ, Sur les produits tensoriels, Thèse 3e Cycle (à paraître).

[11] C. EHRESMANN, Cohomologie à valeurs dans une catégorie dominée, Coll. de Topo. de Bruxelles, C.B.R.M. 1964, p. 21 - 80 .

[12] J.R. ISBELL, Structure of categories, Bull. A.M.S., 72, 1966, p. 619 - 655 .

[13] W. SIERPINSKI, Leçons sur les nombres transfinis, Gauthier-Villars, Paris, 1950 .

[14] C. EHRESMANN, Catégories structurées, Ann. Ec. Norm. Sup., 80, 1963, p. 349 - 426 .

[15] C. EHRESMANN, Structures quotient, Comm. Math. Helv. 38, 1963, p. 219 - 283 .

[16] C. EHRESMANN, Catégories topologiques, Proc. Neder. Akad. Amsterdam, A, 69, 1966, p. 133 - 175 .

[17] A. ROUX, Un théorème de plongement des catégories, C.R.A.S. Paris, 258, 1964, p. 4646 .

[18] M.S. TSALENKO, Complétion des catégories par des produits directs et libres, Mat. Sb. 60, 1963, p. 235 - 256 .

[19] J. LAMBEK, Completion of categories, Lecture Notes in Math., Springer 1966, 70 p.

[20] V. TRNKOVA, Limits in categories and limit-preserving functors*), Comm. Math. Univ. Carolinae Prag., 7-1, 1966, p. 1-73.

---

*) Cet article nous a été signalé par l'auteur lors de la correction des épreuves du présent travail. Bien que le problème abordé soit le même que celui considéré dans les § 1 et 3 de II, les méthodes et les résultats diffèrent complètement. En effet, dans [20] le but est d'obtenir un théorème de plongement à une équivalence près d'une catégorie $H^\bullet$ telle que $\overline{H} \leq \Lambda$ dans une catégorie $C^\bullet$ à limites telle que $\overline{C} \leq \Lambda$; pour cela les limites sont ajoutées «une à une». Ici le principal résultat est le théorème 13 de plongement, à un *isomorphisme* près d'une catégorie $H^\bullet$ munie d'applications limite partielles ν et μ et telle que $\overline{H} < \Lambda$ dans une catégorie $C^\bullet$ munie d'applications limite (totales) prolongeant ν et μ et telle que $\overline{C} < \Lambda$. Le seul résultat commun semble être le théorème 14 (auxiliaire dans les deux articles), encore que les conditions sur les ordinaux n'y soient pas les mêmes.