CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

CHARLES EHRESMANN

Sur l'existence de structures libres et de foncteurs adjoints

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 9, nº 1 (1967), p. 33-126

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1967__9_1_33_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE IX

Gratefully to the Department of Mathematics,
University of Kansas,
in the "Heart of mid-America", so stimulating
a place (regardless some tornadoes) for writing
this paper (Spring 1966).

SUR L'EXISTENCE DE STRUCTURES LIBRES ET DE FONCTEURS ADJOINTS

par Charles EHRESMANN

INTRODUCTION

Les «problèmes universels», qui interviennent dans tous les domaines des Mathématiques (construction de structures algébriques libres, complétion d'un espace uniforme, etc...), peuvent se formuler dans le cadre de la théorie des catégories à l'aide de la notion de p-structure libre, où p est un foncteur. Il est donc important d'avoir des critères «maniables» d'existence et de construction de p-structures libres.

De tels critères sont connus : Le théorème de Freyd [4] assure l'existence d'un foncteur adjoint de p si p est à limites projectives et si les catégories sont «assez petites»; le critère de Lawvere (plus général [7]) prouve qu'il existe une p-structure libre lorsqu'il existe une p-structure semi-libre (définie comme une p-structure libre, mais sans la propriété d'unicité) et certains noyaux; les propositions d'existence de projections de [1] dont l'idée est reprise et systématisée dans le présent travail.

Dans la partie I, nous supposons que p est la restriction à H d'un foncteur P. Le théorème 1 lie la notion de p-structure libre à celle de morphisme (P, X, H)-engendré de but une (H, P)-structure semi-libre. Les morphismes engendrés sont étudiés dans les § 1 et 2; en choisissant judicieusement la classe X, des conditions faciles à vérifier entraînent l'existence de morphismes engendrés, et par suite de p-structures libres. Les théorèmes de Freyd et de Lawvere sont ainsi «relativisés» et plusieurs critères d'existence d'adjoints sont indiqués. Comme application, nous généralisons les théorèmes d'existence de structures quasi-quotient et de limites inductives de [1] et, dans le § 4, nous étudions le problème de la quasi-cohomologie à valeurs dans une catégorie dominée.

La partie II, qui contient les principaux résultats de l'article, est consacrée à la complétion des catégories, problème abordé récemment par de nombreux auteurs. Ici nous utilisons le théorème d'existence de structures libres, le point délicat étant de prouver que certains foncteurs sont « engendrants» (th. 5, 12, 16). Le § 1 contient la (longue) démonstration du théorème de complétion projective (th. 6 dont le th. 5 est un auxiliaire) : Plongement universel, à un isomorphisme près, d'une catégorie H dans une catégorie admettant H pour sous-catégorie pleine, munie d'une application $\mathcal{I}$-limite projective univoque, et appartenant au même univers. Par « abstraction» de cette démonstration, nous construisons par récurrence transfinie une complétion projective canonique de H (th. 7). Le théorème 8 montre que cette complétion est aussi une « complétion projective libre», i.e. une solution du problème universel du plongement, à une équivalence près, de H dans une catégorie à limites projectives (c'est ce dernier problème qui avait été considéré auparavant). La construction se simplifie lorsqu'on veut seulement ajouter des produits (th. 9) et montre qu'il n'existe généralement pas de complétion projective libre qui soit une sous-catégorie de la catégorie des transformations naturelles entre foncteurs de H^* vers une catégorie d'applications (une solution de cette forme a été cherchée par différents auteurs). Le théorème 10 résoud le problème de la complétion projective avec conservation de certaines limites : Etant donnée une application limite projective partielle ν sur H, il existe une structure quasi-quotient de la complétion projective de H admettant H pour sous-catégorie et munie d'une application limite projective prolongeant ν.

Des résultats analogues relatifs à la complétion de catégories (adjonction à la fois de $\mathcal{I}$-limites projectives et de $\mathcal{J}$-limites inductives) sont obtenus dans le § 3. La complétion « structurée» des catégories structurées fait l'objet du § 4, avec application aux catégories ordonnées et multiples. Par exemple la complétion des catégories doubles intervient dans la construction des foncteurs types [8].

TABLE DES MATIERES

CONVENTIONS. La terminologie est celle du livre «Catégories et structures», Dunod, désigné par C.S.. En particulier : si $C^{\bullet}$ est une catégorie, α et β sont ses applications source et but, $C_0^{\bullet}$ la classe de ses unités, $C_{\gamma}^{\bullet}$ le groupoïde de ses inversibles, C^* sa duale. $\mathfrak{M}$ désigne une catégorie pleine d'applications, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$ et $\mathfrak{F}$ les catégories des homomorphismes entre classes multiplicatives, des néofoncteurs et des foncteurs associées, $p_{\mathfrak{H}}$, $p_{\mathfrak{H}'}$ et $p_{\mathfrak{F}}$ leurs foncteurs projection vers $\mathfrak{M}$. Pour une catégorie pleine d'applications $\hat{\mathfrak{M}}$ telle que $\mathfrak{M} \subset \hat{\mathfrak{M}}$, nous notons $\hat{\mathfrak{H}}, \hat{\mathfrak{H}}', \hat{\mathfrak{F}}, \hat{p}_{\mathfrak{H}}, \hat{p}_{\mathfrak{H}'}$ et $\hat{p}_{\mathfrak{F}}$ les catégories et foncteurs correspondants. «Univers» signifie classe de classes (ici «classe» et «ensemble» sont synonymes) $\mathfrak{M}_0$ vérifiant les conditions d'un univers au sens de Grothendieck, à l'exclusion de l'axiome : Si $x \in M$ et $M \in \mathfrak{M}_0$, alors $x \in \mathfrak{M}_0$.

I. EXISTENCE DE STRUCTURES LIBRES.

1. Morphismes engendrés.

Si $P = (K^\bullet, \underline{P}, H^\bullet)$ est un foncteur, désignons par $P^{\ulcorner}$ la classe de toutes les P-injections, par $P_i^{\ulcorner}$ la classe des P-monomorphismes; on a $P_i^{\ulcorner} \subset R_g(H^\bullet)$, en notant $R_g(H^\bullet)$ la classe des monomorphismes de $H^\bullet$. Si $(j_i, j'_i)_{i \in I}$ est un produit fibré naturalisé dans $H^\bullet$ (C.S. déf. 9, chap. IV) tel que $(P(j_i), P(j'_i))_{i \in I}$ soit un produit fibré naturalisé dans $K^\bullet$, nous dirons que $(j_i, j'_i)_{i \in I}$ est un produit fibré naturalisé *dans* P. On définit de même un produit naturalisé *dans* P. Nous dirons que P est un *foncteur à I-produits* (resp. *à I-produits fibrés*) si toute famille $(e_i)_{i \in I}$, où $e_i \in H_0^\bullet$ pour tout $i \in I$ (resp. toute famille $(j_i)_{i \in I}$, $j_i \in e.H$ pour tout $i \in I$), admet un produit (resp. un produit fibré) naturalisé dans P.

A. NOYAUX.

Soient $H^\bullet$ une catégorie, h et h' deux éléments de H de même source et de même but. Si $X \subset H$, on dira que $\hat{j} \in X$ est un *X-noyau de (h, h') dans $H^\bullet$* si on a $h.\hat{j} = h'.\hat{j}$ et si les conditions $j \in X$ et $h.j = h'.j$ assurent l'existence d'un et d'un seul $f \in H$ tel que $j = \hat{j}.f$. Si $X = H$, un H-noyau de (h, h') est un noyau de (h, h') dans $H^\bullet$ au sens de [2], aussi appelé égalisateur de (h, h') dans [3] ou « difference kernel » dans [4].

Soit $p = (K^\bullet, \underline{p}, H^\bullet)$ un foncteur et X une sous-classe de H.

DEFINITION. Si $h \in H$ et $h' \in \beta(h).H.\alpha(h)$, on dira que j est un *X-noyau de (h, h') dans p* si :

1) j est un X-noyau de (h, h') dans $H^\bullet$;

2) $p(j)$ est un noyau de $(p(h), p(h'))$ dans $K^\bullet$.

S'il existe un X-noyau de (h, h') dans p pour tout couple (h, h') tel que

$$\alpha(h) = \alpha(h') \text{ et } \beta(h) = \beta(h'),$$

on dira que p est un *foncteur à X-noyaux* (resp. *à noyaux* si $X = H$).

En particulier, si p est le foncteur injectif canonique $(K^\bullet, \iota, H^\bullet)$, alors j est un X-noyau de (h, h') dans p si, et seulement si, j est un $(H, X, K^\bullet)$-noyau de (h, h') au sens de [1], où $X \subset R_g(K^\bullet)$.

PROPOSITION 1. *Soit $h \in H$, $\alpha(h) = s$ et $h' \in \beta(h).H.s$. Si $H^\bullet$ est* *une catégorie à produits fibrés finis et s'il existe un produit naturalisé* $((\pi, \pi'), s \times s)$ *dans* $H^{\bullet}$, *alors* (h, h') *admet un noyau dans* $H^{\bullet}$.

DEMONSTRATION. Il existe un produit fibré naturalisé $((h, k), (h', k'))$ dans $H^{\bullet}$ et un produit fibré naturalisé

$$(([s, s], v), ([k, k'], v'))$$

dans $H^{\bullet}$. Montrons que v est le noyau cherché. En effet, posons $d = [s, s]$ et $g = [k, k']$. On a $\pi . g . v' = \pi . d . v = v = \pi' . d . v = \pi' . g . v'$ et

$$h . v = h . \pi . g . v' = h . k . v' = h' . k' . v' = h' . \pi' . g . v' = h' . v.$$

Puisque g est un monomorphisme, il en est de même pour v. -
Si, par ailleurs, nous supposons $j \in s . H$ tel que $h . j = h' . j$, il existe $j' \in H$ vérifiant

$$k . j' = j = k' . j',$$

car $((h, k), (h', k'))$ est un produit fibré naturalisé. Les relations

$$g . j' = [k, k'] . j' = [k . j', k' . j'] = [j, j] = d . j$$

assurent l'existence d'un et d'un seul $j'' \in H$ tel que

$$v . j'' = j \text{ et } v' . j'' = j',$$

car $((d, v), (g, v'))$ est un produit fibré naturalisé. Il s'ensuit que v est un noyau de (h, h') dans $H^{\bullet}$. ■

COROLLAIRE. *Si* p *est un foncteur à produits finis et à produits fibrés finis, alors* p *est à noyaux. Si* $\mathcal{J}$ *est une classe de classes telle que l'on ait* $\{1, 2\} \in \mathcal{J}$, *et que* p *soit un foncteur à* $\mathcal{J}$*-produits,* p *est à noyaux si, et seulement si,* p *est à* $\mathcal{J}$*-produits fibrés, ou encore si, et seulement si,* p *est à* $I^{\bullet}$*-limites projectives, pour toute catégorie* $I^{\bullet}$ *telle que* $I \in \mathcal{J}$ *et* $I_0^{\bullet} \in \mathcal{J}$.

DEMONSTRATION. La première affirmation résulte directement de la proposition 1.- Réciproquement : Soit $(h_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de H de même but s et supposons qu'il existe un produit naturalisé $((p_i)_{i \in I}, S)$ de $(\alpha(h_i))_{i \in I}$ dans $H^{\bullet}$. Si $I = \{1, 2\}$ et si n est un noyau de

$$(h_1 . p_1, h_2 . p_2) \text{ dans } H^{\bullet},$$

alors $\alpha(n)$ est un produit fibré de (h_1, h_2) dans $H^{\bullet}$. S'il existe un produit s^I dans $H^{\bullet}$ ainsi qu'un produit fibré naturalisé

$$(([\,s\,]_{i \in I}, v'), (\prod_{i \in I} h_i, v)) \text{ dans } H^{\bullet},$$

où $[\,s\,]_{i \in I}$ est le morphisme diagonal de s^I, alors $(h_i, p_i . v)_{i \in I}$ est un produit fibré naturalisé. De plus, on sait [4] que, si $H^{\bullet}$ est une catégorie à noyaux et à $\mathcal{J}$-produits, $H^{\bullet}$ est à $I^{\bullet}$-limites projectives. En effet, soit $F = (H^{\bullet}, \underline{F}, I^{\bullet})$ un foncteur, où $I \in \mathcal{J}$; soit $((p_i)_{i \in I_o}, S)$ un produit naturalisé de $(F(i))_{i \in I_o}$ et, pour tout $f \in I$, désignons par n_f un noyau de $(p_{\beta(f)}, F(f) . p_{\alpha(f)})$; alors F admet pour limite projective un produit fibré de $(n_f)_{f \in I}$ dans $H^{\bullet}$. -Cette construction montre que p est aussi à $I^{\bullet}$-limites projectives si p est à noyaux et à $\mathcal{J}$-produits. ∎

PROPOSITION 2. *Si $j \in H$ est tel que $h . j = h' . j$, que $p(j)$ soit un noyau de $(p(h), p(h'))$ dans $\hat{K}^{\bullet}$ et que $j \in p^{\ulcorner}$, alors j est un noyau de (h, h') dans p. Si j' est un noyau de (h, h') dans $H^{\bullet}$, si $p(j') \in R_g(K^{\bullet})$ et si p est fidèle, on a $j' \in p_i^{\ulcorner}$, et par suite $j' . p_i^{\ulcorner} \subset p_i^{\ulcorner}$.*

DEMONSTRATION. Montrons la première affirmation. Soit $k \in H$ tel que $h . k = h' . k$. Comme $p(j)$ est un noyau de $(p(h), p(h'))$ dans $K^{\bullet}$, la relation

$$p(h) . p(k) = p(h') . p(k)$$

assure l'existence d'un $f \in K$ tel que $p(k) = p(j) . f$. Puisque j est une P-injection, il existe un et un seul $k' \in H$ tel que

$$k = j . k' \text{ et } p(k') = f.$$

Par suite, j est un noyau de (h, h') dans $H^{\bullet}$. -Supposons que j' soit un noyau de (h, h') dans $H^{\bullet}$, et soit $k \in \beta(j') . H$ tel que $p(k) = p(j') . f$. Les relations $\alpha(h . k) = \alpha(h' . k)$, $\beta(h . k) = \beta(h' . k)$ et

$$p(h . k) = p(h) . p(j') . f = p(h') . p(j') . f = p(h' . k)$$

entraînent $h . k = h' . k$, si p est fidèle. Par suite il existe un et un seul

$k' \in H$ tel que $k = j'.k'$. Il s'ensuit

$$p(j').p(k') = p(k) = p(j').f,$$

d'où $p(k') = f$, si $p(j')$ est un monomorphisme. Donc j' est un p-monomorphisme. ■

COROLLAIRE 1. *Si p est à $p_i^{\ulcorner}$-noyaux, p est à noyaux. Si p est fidèle et à noyaux, p est à $p_i^{\ulcorner}$-noyaux.*

COROLLAIRE 2. *Si p est à $p_i^{\ulcorner}$-noyaux et à $\mathcal{I}$-produits, où $\mathcal{I}$ est une classe de classes admettant $\{1, 2\}$ pour élément, p est à $\mathcal{I}$-produits fibrés, et par suite à $I^{\bullet}$-limites projectives, si $I \in \mathcal{I}$ et $I_0^{\bullet} \in \mathcal{I}$.*

Supposons que $\mathfrak{M}$ soit une catégorie pleine d'applications et $p = (\mathfrak{M}, \underline{p}, H^{\bullet})$ un foncteur. Nous désignons par $\mathfrak{M}^i$ la classe des injections, par $\mathfrak{M}^{\iota}$ la classe des injections canoniques (M, ι, M'), par $p_{\iota}^{\ulcorner}$ la classe des $(\mathfrak{M}^{\iota}, p)$-injections. Soit $h \in H$ et $h' \in \beta(h).H.\alpha(h)$. Pour que j soit un $(\mathfrak{M}^{\iota}, p)$-noyau de (h, h') au sens de la déf. 6, chap. III, C.S., il faut et il suffit que j soit un $p_{\iota}^{\ulcorner}$-noyau de (h, h') dans p. Si p est un foncteur d'homomorphismes saturé (C.S., déf. 20, chap. II), il est résolvant à droite (i.e. à $p_{\iota}^{\ulcorner}$-noyaux) (C.S., déf. 8, chap. III) si, et seulement si, p est à $p_i^{\ulcorner}$-noyaux, donc (corollaire 1, prop. 2) si, et seulement si, il est à noyaux. Soit $\hat{\mathfrak{M}}$ une catégorie pleine d'applications contenant $\mathfrak{M}$. Un couple (f, f'), où f et f' sont deux applications de $M \in \mathfrak{M}_0$ dans $M' \in \mathfrak{M}_0$, admet pour noyau dans $\mathfrak{M}$ l'injection (M, ι, N), où N est la classe des $x \in M$ tels que $f(x) = f'(x)$. Il s'ensuit que $\mathfrak{M}$ est à noyaux. - Comme (M, ι, N) est aussi un noyau de (f, f') dans $\hat{\mathfrak{M}}$, le foncteur $(\hat{\mathfrak{M}}, \iota, \mathfrak{M})$ est à noyaux. Supposons que p soit une restriction d'un foncteur $P = (\hat{\mathfrak{M}}, \underline{P}, \hat{H}^{\bullet})$. De la proposition 2 résulte que, si p est à $p_i^{\ulcorner}$-noyaux et si X est une partie de $P_i^{\ulcorner}$ contenant tout $p_i^{\ulcorner}$-noyau, $H^{\bullet}$ est une catégorie à $(X, \hat{H}^{\bullet})$-noyaux; ceci généralise la proposition 1-2 [1] relative au cas où p est résolvant à droite.

Supposons que $\mathfrak{M}_0$ soit un univers. Nous désignons toujours par :

1) π l'application $\mathfrak{M}_0$-produit canonique dans $\mathfrak{M}$ telle que (C.S. chap. IV)

$$\pi((M_i)_{i\in I}) = ((p_i)_{i\in I}, \prod_{i\in I} M_i),$$

où $p_{\bar{i}}$ est la $\bar{i}$-ème projection canonique du produit cartésien $\prod_{i\in I} M_i$ sur $M_{\bar{i}}$.

2) ν l'application $\mathfrak{M}_0$-produit fibré naturalisé telle que (C.S. chap. IV)

$$\nu((f_i)_{i\in I}) = ((\nu_i)_{i\in I}, \bigvee_{i\in I} f_i),$$

où $\bigvee_{i\in I} f_i$ est la classe des

$$(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \alpha(f_i) \text{ tels que } f_i(x_i) = f_{\bar{i}}(x_{\bar{i}}) \text{ pour tout } i, \bar{i} \in I,$$

et où $\nu_{\bar{i}}$ est la restriction à $\bigvee_{i\in I} f_i$ de la $\bar{i}$- ème projection canonique de $\prod_{i\in I} \alpha(f_i)$.

Le corollaire de la proposition 1 entraîne que, si p est un foncteur d'homomorphismes saturé π-compatible, il est ν-compatible si, et seulement si, il est résolvant à droite. Dans ce cas, il est à $I^{\bullet}$-limites projectives, pour toute catégorie $I^{\bullet}$ telle que $I \in \mathfrak{M}_0$.

B. EJECTEURS STRICTS ET COEJECTEURS.

Soit $\hat{C}^{\bullet}$ une catégorie. Nous désignons par $<$ la relation de préordre sur $\hat{C}$ définie par (C.S. déf. 21, chap. I)

$$g < g' \text{ si, et seulement si, il existe } h \in \hat{C} \text{ tel que } g = g'.h.$$

Si $A \subset e.\hat{C}$, où $e \in \hat{C}_0^{\bullet}$, on dit (C.S. déf. 21, chap. I) que $\hat{g}$ est un $\hat{C}^{\bullet}$-minimum de A si $\hat{g} \in A$ et si $\hat{g} < g$ pour tout $g \in A$, et un $\hat{C}^{\bullet}$-maximum de A si $\hat{g} \in A$ et si $g < \hat{g}$ pour tout $g \in A$.

DEFINITION. Soient Y et Z deux parties de $\hat{C}$. On dira que $\hat{g}$ est un *éjecteur* (resp. un *coéjecteur) relativement à* $(Z, Y, \hat{C}^{\bullet})$ si $\hat{g} \in Y$ et si, pour tout $g \in \beta(\hat{g}).Z$, on a

$$g < \hat{g} \quad (\text{resp. } \hat{g} < g).$$

On appelle *projecteur* (resp. *coprojecteur) relativement à* $(Z, Y, \hat{C}^{\bullet})$ un éjecteur (resp. un coéjecteur) relativement à $(Z, Y, \hat{C}^{*})$, où $\hat{C}^{*}$ est la catégorie duale de $\hat{C}^{\bullet}$.

Ainsi $\hat{g}$ est un projecteur (resp. un coprojecteur) relativement à $(Z, Y, \hat{C}^{\bullet})$ si, et seulement si, $\hat{g} \in Y$ et si, pour tout $g \in Z.\alpha(\hat{g})$, il existe

$$h \in \hat{C} \text{ tel que } g = h.\hat{g} \quad (\text{resp. que } \hat{g} = h.g),$$

Lorsque $Y = Z$, un éjecteur (resp. un coéjecteur) $\hat{g}$ relativement à $(Y, Y, \hat{C}^{\bullet})$ est simplement un $\hat{C}^{\bullet}$-maximum (resp. un $\hat{C}^{\bullet}$-minimum) de $\beta(\hat{g}).Y$.

EXEMPLES. Si C est une sous-classe de $\hat{C}$, nous notons $R_g(\hat{C}^{\bullet}, C)$ (resp. $R_d(C, \hat{C}^{\bullet})$) la classe des éléments C-réguliers à gauche (resp. C-réguliers à droite) dans $\hat{C}^{\bullet}$, i.e. (C.S. déf. 17, chap. I) des $g \in \hat{C}$ tels que $h = h'$ si $h \in C$, $h' \in C$ et $g.h = g.h'$ (resp. et $h.g = h'.g$). Soit $C^{\bullet}$ une sous-catégorie pleine de $\hat{C}^{\bullet}$. Alors g est un éjecteur relativement à $(\hat{C}.C_0^{\bullet}, R_g(\hat{C}^{\bullet}, C).C_0^{\bullet}, \hat{C}^{\bullet})$ si, et seulement si, g est un $(\hat{C}^{\bullet}, C)$-éjecteur (C.S. déf. 15*, chap. III). Pour que $g \in \hat{C}$ soit un projecteur relativement à $(C_0^{\bullet}.\hat{C}, C_0^{\bullet}.R_d(C, \hat{C}^{\bullet}), \hat{C}^{\bullet})$, il faut et il suffit que g soit un $(C, \hat{C}^{\bullet})$-projecteur. Si de plus C' définit une sous-catégorie pleine de $C^{\bullet}$, alors g est un projecteur relativement à

$$(C_0'^{\bullet}.\hat{C}, C_0^{\bullet}.R_d(C_0'^{\bullet}.C, \hat{C}^{\bullet}), \hat{C}^{\bullet})$$

si, et seulement si, g est un $(C', C, \hat{C}^{\bullet})$-projecteur au sens de la définition 5-2 [1].

Il est souvent utile de préciser les définitions précédentes comme suit :

DEFINITION. Soient Y et Z deux parties de $\hat{C}$. On dira que $\hat{g}$ est un *éjecteur strict* (resp. *éjecteur costrict*) relativement à $(Z, Y, \hat{C}^{\bullet})$ si $\hat{g}$ est un $\hat{C}^{\bullet}$-maximum (resp. un $\hat{C}^{\bullet}$-minimum) de la classe des éjecteurs relativement à $(Z, Y, \hat{C}^{\bullet})$ de but $\beta(\hat{g})$. On dira que $\hat{g}$ est un *coéjecteur strict* (resp. *coéjecteur costrict*) si $\hat{g}$ est un $\hat{C}^{\bullet}$-minimum (resp. un $\hat{C}^{\bullet}$-maximum) de la classe des coéjecteurs relativement à $(Z, Y, \hat{C}^{\bullet})$, de but $\beta(\hat{g})$. Si $\hat{g}$ est un éjecteur strict (resp. un coéjecteur strict, resp. un éjecteur costrict, resp. un coéjecteur costrict) relativement à $(Z, Y, \hat{C}^{*})$, on dira que $\hat{g}$ est un *projecteur strict* (resp. un *coprojecteur strict*, resp. un *projecteur costrict*, resp. un *coprojecteur costrict)* relativement à $(Z, Y, \hat{C}^{\bullet})$

Lorsque Y est formée de monomorphismes de $\hat{C}^{\bullet}$, la classe des éjecteurs stricts (resp. éjecteurs costricts) relativement à $(Z, Y, \hat{C}^{\bullet})$ de but e est la classe $Y \cap \hat{g}.\hat{C}^{\bullet}_{\gamma}$, où $\hat{g}$ est un éjecteur strict (resp. costrict) relativement à $(Z, Y, \hat{C}^{\bullet})$.

De nombreux problèmes reviennent à chercher des éjecteurs, coéjecteurs, projecteurs ou coprojecteurs stricts ou costricts, i.e. des éléments «optimaux» en un certain sens. De tels problèmes peuvent être appelés problèmes «universels», en généralisant un peu la définition de ([2] et C.S., appendice II).

EXEMPLE. Soit $Z \subset e.\hat{C}$, où $e \in \hat{C}^{\bullet}_{o}$. Si $(i, v_i)_{i \in Z}$ est un produit fibré naturalisé dans $\hat{C}^{\bullet}$, alors $v_o = i.v_i$ est un coéjecteur costrict relativement à $(Z, \hat{C}, \hat{C}^{\bullet})$. Si Z est formé de monomorphismes et si $v_o \in e.R_g(\hat{C}^{\bullet})$ est un coéjecteur costrict relativement à $(Z, \hat{C}, \hat{C}^{\bullet})$, alors $\alpha(v_o)$ est un produit fibré de $(i)_{i \in Z}$ dans $\hat{C}^{\bullet}$

C. MORPHISMES ENGENDRES.

Soient $\hat{C}^{\bullet}$ une catégorie, $C^{\bullet}$ une sous-catégorie pleine de $\hat{C}^{\bullet}$ et $Y \subset \hat{C}$.

DEFINITION. On appelle $(\hat{C}^{\bullet}, Y, C)$-*coéjecteur* (resp.-*coéjecteur strict)* un coéjecteur (resp. coéjecteur strict) relativement à $(Y.C^{\bullet}_{o}, Y, \hat{C}^{\bullet})$.

D'après le § B, $\hat{g}$ est un $(\hat{C}^{\bullet}, Y, C)$-coéjecteur si, et seulement si, $\hat{g} \in Y$ et si $\hat{g} < g$ pour tout $g \in \beta(\hat{g}).Y.C^{\bullet}_{o}$. C'est un $(\hat{C}^{\bullet}, Y, C)$-coéjecteur strict si $\hat{g} < g'$ pour tout $(\hat{C}^{\bullet}, Y, C)$-coéjecteur g'. Si $e \in \hat{C}^{\bullet}_{o}$ et si $e.Y.C^{\bullet}_{o} = \emptyset$, tout $g \in e.Y$ est un $(\hat{C}^{\bullet}, Y, C)$-coéjecteur et s'il existe un $\hat{C}^{\bullet}$-minimum de $e.Y$, cet élément est un $(\hat{C}^{\bullet}, Y, C)$-coéjecteur strict.

Si $Y \subset R_g(\hat{C}^{\bullet})$ et si $\hat{g}$ et $\hat{g}'$ sont deux $(\hat{C}^{\bullet}, Y, C)$-coéjecteurs stricts, de même but, on a $\hat{g} \in \hat{g}'.\hat{C}^{\bullet}_{\gamma}$. Si $Y' \subset Y$, un $(\hat{C}^{\bullet}, Y, C)$-coéjecteur g tel que $g \in Y'$ est un $(\hat{C}^{\bullet}, Y', C)$-coéjecteur; mais $g \in Y'$ peut être un $(\hat{C}^{\bullet}, Y, C)$- coéjecteur strict sans être un $(\hat{C}^{\bullet}, Y', C)$-coéjecteur strict. Un $(\hat{C}^{\bullet}, Y, C)$-coéjecteur g tel que $\alpha(g) \in C$ est un $(\hat{C}^{\bullet}, Y.C^{\bullet}_{o}, C)$-coéjecteur strict.

Si g est un $(\hat{C}^\bullet, Y, C)$-coéjecteur et si $g' \in \alpha(g).\hat{C}$, alors $g.g'$ est un $(\hat{C}^\bullet, Y, C)$-coéjecteur lorsque $g.g' \in Y$. Si de plus g est un $(\hat{C}^\bullet, Y, C)$-coéjecteur strict, $g.g'$ est un $(\hat{C}^\bullet, Y, C)$-coéjecteur strict et on a $g < g.g' < g$, d'où $g = g.g'.g''$; si $g \in R_g(\hat{C}^\bullet)$, cette égalité entraîne que g' admet un inverse à droite.

Soit $\overline{A}_1 = S.Y.C_0^\bullet$ et soit $\overline{A}_2$ la classe des $(\hat{C}^\bullet, Y, C)$-coéjecteurs de but S. Si $\overline{A}_i \neq \emptyset$, si $A_i \subset \overline{A}_i \subset A_i.\hat{C}_\gamma^\bullet$ et s'il existe un produit fibré naturalisé $(g, v_g)_{g \in A_i}$ dans $\hat{C}^\bullet$ tel que $\hat{g}_i = g.v_g \in Y$ pour $i = 1$ ou 2, alors $\hat{g}_1$ est évidemment un $(\hat{C}^\bullet, Y, C)$-coéjecteur, $\hat{g}_2$ un $(\hat{C}^\bullet, Y, C)$-coéjecteur strict.

Soit $P = (K^\bullet, P, \hat{H}^\bullet)$ *un foncteur*, $\overline{H}^\bullet$ *une sous-catégorie pleine de* $\hat{H}^\bullet$ *et* X *une partie de* $\overline{H}$. Soit $\hat{C}^\bullet$ la catégorie ayant pour éléments les triplets

$$(f, h, f') \quad \text{tels que } h \in \hat{H},\ f \in K,\ f' \in K \text{ et } f = P(h).f',$$

la loi de composition étant

$$((f_1, h_1, f'_1), (f, h, f')) \to (f_1, h_1.h, f')$$

si, et seulement si, $f'_1 = f$ et $\alpha(h_1) = \beta(h)$. Identifions les unités de $\hat{C}^\bullet$ aux couples (s, f) tels que $s \in \hat{H}_0^\bullet$ et $f \in P(s).K$. Soit Y (resp. C) la classe des

$$(f, h, f') \in \hat{C} \quad \text{tels que } h \in X \text{ (resp. } h \in \overline{H}).$$

Pour que $(f, \hat{j}, \hat{f}')$ soit un $(\hat{C}^\bullet, Y, C)$-coéjecteur, il faut et il suffit que l'on ait

$$\hat{j} \in X, \qquad f = P(\hat{j}).\hat{f}'$$

et que, si $j \in \beta(\hat{j}).X.\overline{H}_0^\bullet$ et $f = P(j).f'$, il existe $h \in \hat{H}$ vérifiant

$$\hat{j} = j.h \quad \text{et} \quad f' = P(h).\hat{f}'.$$

Pour que $(f, \hat{j}, \hat{f}')$ soit un $(\hat{C}^\bullet, Y, C)$-coéjecteur strict, il faut et il suffit que, de plus, pour tout $(\hat{C}^\bullet, Y, C)$-coéjecteur $(f, \hat{j}', \hat{f}'')$ tel que $\beta(\hat{j}) = \beta(\hat{j}')$, il existe $h' \in \hat{H}$ vérifiant

$$\hat{j} = \hat{j}'.h' \quad \text{et} \quad \hat{f}'' = P(h').\hat{f}'.$$

DEFINITION. Si $(f, \hat{j}, \hat{f}')$ est un $(\hat{C}^{\bullet}, Y, C)$-coéjecteur (resp. -coéjecteur strict), $\hat{j}$ est dit *(P, X, H)-distingué pour* (resp. dit *(P, X, H)-engendré par*) $(f, \hat{f}')$. Soit $f \in K$; on dira que $\hat{j}$ est *(P, X, H)-distingué pour* (resp. *-engendré par*) f s'il existe $\hat{f}'$ tel que $\hat{j}$ soit (P, X, H)-distingué pour (resp. - engendré par) $(f, \hat{f}')$.

EXEMPLES.

1) Soit P le foncteur constant de $\hat{H}^{\bullet}$ sur la catégorie $\{\emptyset\}^{\bullet}$ admettant un seul élément, $\emptyset$. Pour que $\hat{j}$ soit (P, X, H)-distingué pour (resp. -engendré par) $\emptyset$, il faut et il suffit que $\hat{j}$ soit un $(\hat{H}^{\bullet}, X, H)$-coéjecteur (resp.-coéjecteur strict).

2) Supposons que l'on ait $P(X) \subset R_g(K^{\bullet})$. Pour que $\hat{j}$ soit (P,X,H)-distingué pour $f \in K$, il faut et il suffit que l'on ait $\hat{j} \in X$, $f < P(\hat{j})$ et que, pour $j \in \beta(\hat{j}).X.H_0^{\bullet}$ tel que $f < P(j)$, on ait $\dot{\imath} < j$. Pour que $\hat{j}$ soit (P, X, H)- engendré par f, il faut et il suffit que $\hat{j}$ soit un $\hat{H}^{\bullet}$-minimum de la classe des éléments (P, X, H)- distingués pour f. Dans ce cas, si $\hat{j}$ est (P, X, H)-distingué pour $f.k$ et si $f < P(\hat{j})$, alors $\hat{j}$ est (P, X, H)-distingué pour f.

3) Si $X \subset P_i^{\ulcorner}$, un élément $\hat{j}$ est $(P, X.H_0^{\bullet}, H)$-engendré par f si, et seulement si, $\hat{j}$ est un (X, H)-sous-morphisme de $\beta(\hat{j})$ engendré par f au sens de [1].

4) j est $(P, R_g(\hat{H}^{\bullet}), \hat{H})$-engendré par $f \in K$ si, et seulement si, $\alpha(j)$ est une «sous-structure de $\beta(j)$ engendrée» par f au sens de [3].

PROPOSITION 3. *Si $\hat{j}$ est $(P, X.H_0^{\bullet}, H)$-distingué pour (f, f'), il est $(P, X.H_0^{\bullet}, H)$-engendré par (f, f'). Supposons que $\hat{j}$ soit (P, X, H)-distingué pour (resp. - engendré par) (f, f') et que j soit tel que $\hat{j}.j \in X$ et $f' < P(j)$; alors $\hat{j}.j$ est (P, X, H)-distingué pour (resp. -engendré par) f.*

En effet, la première affirmation est évidente.- Si $g = (f, \hat{j}, f')$ est un $(\hat{C}^{\bullet}, Y, C)$-coéjecteur (resp. -coéjecteur strict) et si $g' = (f', j, f'') \in \hat{C}$, nous avons vu que

$$g.g' = (f, \hat{j}.j, f'')$$

est un $(\hat{C}^{\bullet}, Y, C)$- coéjecteur (resp.-coéjecteur strict), donc $\hat{j}.j$ est (P, X, H)- distingué pour (resp.-engendré par) (f, f''). ■

DEFINITION. On dira que X est ∇*-stable dans* $\hat{H}^{\bullet}$ si X est une sous-classe stable dans $\hat{H}^{\bullet}$ et si les conditions

$$j \in X,\ j' \in X,\ h \in \hat{H} \text{ et } j.h = j'$$

entraînent $h \in X$. On dira que X est $\mathcal{I}$-$\vee$-*stable pour* (P, H) si $X.X.\hat{H}^{\bullet}_0 \subset X$, si $\mathcal{I}$ est une classe de classes et si les conditions

$$I \in \mathcal{I},\ j_i \in X.\hat{H}^{\bullet}_0 \text{ et } \beta(j_i) = e \quad \text{pour tout } i \in I$$

assurent l'existence d'un produit fibré naturalisé $(j_i, j'_i)_{i \in I}$ dans P tel que $j'_i \in X$. Si X est $\{\{1, 2\}\}$-$\vee$-stable pour (P, H), on dit aussi que X est $\vee$*-stable pour* (P, H).

Soit $\nabla\hat{H}^{\bullet}$ la catégorie des triangles de $\hat{H}^{\bullet}$, i.e. la sous-catégorie de $\boxminus\hat{H}^{\bullet}$ formée des quatuors

$$(e, f', f, h) \quad \text{tels que } e \in \hat{H}^{\bullet}_0$$

(C.S. , p. 85, exemple 4, où $\boxplus$ doit être remplacé par $\boxminus$). Si X est stable dans $\hat{H}^{\bullet}$, alors X est ∇-stable dans $\hat{H}^{\bullet}$ si, et seulement si, la classe de

$$(e, f', f, h) \in \nabla\hat{H}^{\bullet} \quad \text{tels que } f \in X,\ f' \in X \text{ et } h \in X$$

définit une sous-catégorie pleine de $\nabla\hat{H}^{\bullet}$.

EXEMPLES. $R_g(\hat{H}^{\bullet})$ est ∇-stable dans $\hat{H}^{\bullet}$ et, si P est à $\mathcal{I}$-produits fibrés, $\mathcal{I}$-$\vee$-stable pour $(P, \hat{H})$.

PROPOSITION 4. *Soit* $X = P^{\ulcorner}$*; alors* X *est* ∇*-stable dans* $\hat{H}^{\bullet}$ *et, si* P *est à* $\mathcal{I}$*-produits fibrés,* $\mathcal{I}$-$\vee$*-stable pour* $(P, \hat{H})$.

DEMONSTRATION. X est ∇-stable, car c'est une sous-catégorie de $\hat{H}^{\bullet}$ (C.S. prop. 1, chap. III) vérifiant la condition supplémentaire voulue (C.S. théo. 1, chap. III). Supposons donnée une famille $(j_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\hat{H}$ vérifiant les conditions : on a

$$s \in \hat{H}^{\bullet}_0 \text{ et } j_i \in s.X \quad \text{pour tout } i \in I - \{\bar{i}\};$$

il existe un produit fibré naturalisé $(j_i, j'_i)_{i \in I}$ dans $\hat{H}^{\bullet}$ tel que

$(P(j_i), P(j'_i))_{i\in I}$ soit un produit fibré naturalisé dans $K^\bullet$. Nous allons montrer que l'on a $j'_{\bar i} \in P^{\ulcorner}$, d'où résultera la proposition. En effet, soit $h \in \beta(j'_{\bar i}).\hat{H}$ tel que $P(h) = P(j'_{\bar i}).f$. Etant donné que $j_i \in P^{\ulcorner}$, les égalités

$$P(j_{\bar i}.\, h) = P(j_i).P(j'_i).f \qquad \text{pour tout } i \in I - \{\bar i\}$$

entraînent qu'il existe un et un seul $h_i \in \hat{H}$ tel que

$$j_{\bar i}.h = j_i.h_i \quad \text{et} \quad P(h_i) = P(j'_i).f\,;$$

posons de plus $h = h_{\bar i}$. Il s'ensuit, $(j_i, j'_i)_{i\in I}$ étant un produit fibré naturalisé dans $\hat{H}^\bullet$, qu'il existe un et un seul $h' \in \hat{H}$ tel que

$$j'_i.h' = h_i \text{ et } j'_{\bar i}.h' = h_{\bar i} = h.$$

Comme $(P(j_i), P(j'_i))_{i\in I}$ est un produit fibré naturalisé dans $K^\bullet$, les relations

$$P(j'_i).P(h') = P(h_i) = P(j'_i).f,$$

pour tout $i \in I$, assurent que l'on a $P(h') = f$. - Supposons aussi

$$h = j'_{\bar i}.h'' \quad \text{et} \quad P(h'') = f.$$

On a, pour tout $i \in I - \{\bar i\}$, $j_i \in P^{\ulcorner}$,

$$j_i.j'_i.h'' = j_{\bar i}.j'_{\bar i}.h'' = j_{\bar i}.h = j_i.h_i \text{ et } P(j'_i.h'') = P(j'_i).f = P(h_i),$$

d'où $j'_i.h'' = h_i$. Par suite $h' = h''$, car

$$j'_i.h'' = h_i = j'_i.h' \quad \text{pour tout} \quad i \in I.$$

Ainsi h' est l'unique élément de $\hat{H}$ tel que

$$j'_{\bar i}.h' = h \quad \text{et} \quad P(h') = f,$$

de sorte que $j'_{\bar i} \in P^{\ulcorner}$. ■

Dans la suite de ce paragraphe, $\hat{C}^\bullet$ désignera toujours la catégorie associée plus haut à P et le mot coéjecteur (resp. coéjecteur strict) signifiera $(\hat{C}^\bullet, Y, C)$- coéjecteur (resp. - coéjecteur strict).

PROPOSITION 5. *Soient $S \in \hat{H}^\bullet_o$, $j \in S.X.H^\bullet_o$, $f = P(j).f'$ et $\hat{j}' \in \alpha(j).X$. Supposons que $j.j' \in X$, que $X.H^\bullet_o$ (resp. X) soit $\vee$-stable pour (P, H) (resp. (P, H) et que, si $s \in \hat{H}^\bullet_o$ et $f'_1 \in P(s).K.\alpha(f)$, il existe $j' \in s.X.H^\bullet_o$*

tel que $f'_1 < P(\hat{j}'))$. *Si* $\hat{j}'$ *est* (P, X, H)-*distingué pour* f', $j.\hat{j}'$ *est* (P, X, H)- *distingué pour* f. *Si* $\hat{j}'$ *est* (P, X, H)- *engendré par* f', *si* X *est* ∇-*stable dans* $\hat{H}^\bullet$ *et si* $j \in R_g(\hat{H}^\bullet)$, *alors* $j.\hat{j}'$ *est* (P, X, H)-*engendré par* f.

DEMONSTRATION. Posons $g = (f, j, f') \in Y$. Soit $\hat{g}' = (f', \hat{j}', \hat{f}'')$ un coéjecteur. On a

$$\hat{j} = j.\hat{j}' \in X.X \subset X \quad \text{et} \quad \hat{g} = g.\hat{g}' = (f, \hat{j}, \hat{f}'') \in Y.$$

Supposons

$$j_1 \in \beta(j).X.H_o^\bullet \quad \text{et} \quad g_1 = (f, j_1, f_1) \in Y.C_o^\bullet.$$

Puisque $X.H_o^\bullet$ (resp. Puisque X)est V - stable pour (P, H), il existe un produit fibré naturalisé $((j, v), (j_1, v_1))$ dans P tel que $v \in X.H_o^\bullet$ (resp. $\in X$). L'égalité

$$P(j_1).f_1 = f = P(j).f'$$

assure l'existence d'un $f'_1 \in K$ tel que

$$P(v_1).f'_1 = f_1 \quad \text{et} \quad P(v).f'_1 = f'.$$

Il s'ensuit $g'_1 = (f', v, f'_1) \in Y.C_o^\bullet$ (resp. $\in Y$ et, par hypothèse, il existe un

$$g'' = (f'_1, j', f'_2) \in \beta(g'_1).Y.C_o^\bullet;$$

on a $g'_2 = g'_1.g'' \in Y.C_o^\bullet$) de sorte que, $\hat{g}'$ étant un coéjecteur, il existe $k \in \hat{C}$ tel que $\hat{g}' = g'_i.k$, où $i = 1$ (resp. $= 2$); par suite

$$\hat{g} = g.\hat{g}' = g.g'_i.k.$$

Comme

$$g.g'_1 = (f, j.v, f'_1) = (f, j_1.v_1, f'_1) = g_1.k',$$

où $k' = (f_1, v_1, f'_1)$, on obtient $\hat{g} = g_1.k'.k$ (resp. $\hat{g} = g_1.k'.g''.k$). Donc $\hat{g}$ est un coéjecteur, i.e. $\hat{j}$ est (P, X, H)-distingué pour $(f, \hat{f}'')$.
-Nous supposons de plus que $\hat{g}'$ soit un coéjecteur strict, que $j \in R_g(\hat{H}^\bullet)$ et que X soit ∇-stable dans $\hat{H}^\bullet$. Soit $\hat{g}'' = (f, j'', f'')$ un coéjecteur de but $\beta(\hat{g})$. Puisque $\alpha(g) \in C$, il existe $k = (f', h, f'') \in \hat{C}$ tel que $\hat{g}'' = g.k$. Etant donné que X est ∇-stable dans $\hat{H}^\bullet$, les relations

$$j'' = j.h, \quad j'' \in X \text{ et } j \in X$$

entraînent $h \in X$, et $k \in Y$. Montrons que k est un coéjecteur. En effet, soit $g_1 \in \beta(k).\hat{C}.C_o^{\bullet}$. On a $g.g_1 \in \beta(\hat{g}'').\hat{C}.C_o^{\bullet}$ et, $\hat{g}''$ étant un coéjecteur, il existe $g_1'' \in \hat{C}$ tel que $\hat{g}'' = g.g_1.g_1''$. Les égalités

$$g.g_1.g_1'' = \hat{g}'' = g.k$$

ont pour conséquence $g_1.g_1'' = k$, car, j étant un monomorphisme, $g \in R_g(\hat{C}^{\bullet})$. Ceci montre que k est un coéjecteur. $\hat{g}'$ étant un coéjecteur strict, on en déduit l'existence d'un $k' \in \hat{C}$ tel que $\hat{g}' = k.k'$, d'où

$$\hat{g} = g.\hat{g}' = g.k.k' = \hat{g}''.k'.$$

Par conséquent $\hat{g}$ est un coéjecteur strict, i.e. $\hat{f}$ est (P, X, H)-engendré par f. ■

PROPOSITION 6. *Supposons que $\hat{j}$ soit (P, X, H)-distingué pour (f, f'') (resp. -engendré par (f, f'') et $X.H_o^{\bullet}$ soit V- stable pour (P, H)). Soit $\hat{j}' \in X$ et $j \in X$ (resp. $j \in X.H_o^{\bullet}$) tels que $\hat{j} = j.\hat{j}'$ et $f = P(j).f'$, où $f' = P(\hat{j}').f''$. Si $j \in R_g(\hat{H}^{\bullet})$ et $j.X.H_o^{\bullet} \subset X$, alors $\hat{j}'$ est (P, X, H)-distingué pour (resp. -engendré par) (f', f'').*

DEMONSTRATION. Par hypothèse $\hat{g} = (f, \hat{j}, f'')$ est un coéjecteur,

$$g = (f, j, f') \in Y \quad \text{et} \quad \hat{g}' = (f', \hat{j}', f'') \in \alpha(g).Y.$$

Montrons que $\hat{g}'$ est un coéjecteur. En effet, soit $g' \in \beta(\hat{g}').Y.C_o^{\bullet}$; on a $g.g' \in Y.C_o^{\bullet}$ et, $\hat{g}$ étant un coéjecteur, il existe $k \in \hat{C}$ tel que $\hat{g} = g.g'.k$. Puisque j est un monomorphisme, g est un monomorphisme de $\hat{C}^{\bullet}$, de sorte que l'on déduit $\hat{g}' = g'.k$ de $g.\hat{g}' = \hat{g} = g.g'.k$. Donc $\hat{g}'$ est un coéjecteur.

- Nous supposons de plus que $\hat{g}$ soit un coéjecteur strict, $X.H_o^{\bullet}$ soit V-stable pour (P, H) et que $j \in X.H_o^{\bullet}$, c'est-à-dire $g \in Y.C_o^{\bullet}$. Soit

$$\hat{g}_1' = (f', \hat{j}_1', f_1'') \in \beta(\hat{g}').Y$$

un coéjecteur. Montrons que

$$\hat{g}_1 = g.\hat{g}_1' = (f, j.\hat{j}_1', f_1'') \in \beta(\hat{g}).Y$$

est un coéjecteur. En effet, soit

$$g_1 = (f, j_1, f'_1) \in \beta(\hat{g}_1).Y.C_o^{\bullet}.$$

$X.H_o^{\bullet}$ étant V - stable pour (P, H), il existe un produit fibré naturalisé $((j, v), (j_1, v_1))$ dans P tel que $v \in X.H_o^{\bullet}$. Les relations

$$P(j).f' = f = P(j_1).f'_1$$

assurent l'existence d'un f_1 tel que

$$f' = P(v).f_1 \text{ et } f'_1 = P(v_1).f_1.$$

Il s'ensuit $k_1 = (f'_1, v_1, f_1) \in \hat{C}$, $g'_1 = (f', v, f_1) \in \beta(\hat{g}'_1).Y.C_o^{\bullet}$ et

$$g.g'_1 = (f, j.v, f_1) = g_1.k_1.$$

$\hat{g}'_1$ étant un coéjecteur, il existe k' tel que $\hat{g}'_1 = g'_1.k'$, d'où

$$\hat{g}_1 = g.\hat{g}'_1 = g.g'_1.k' = g_1.k_1.k'.$$

Ainsi $\hat{g}_1$ est un coéjecteur. Comme $\hat{g}$ est un coéjecteur strict, il existe $k'_1 \in \hat{C}$ tel que $\hat{g} = \hat{g}_1.k'_1$. Il en résulte

$$g.\hat{g}' = \hat{g} = g.\hat{g}'_1.k'_1,$$

et par suite $\hat{g}' = \hat{g}'_1.k'_1$, car $g \in R_g(\hat{C}^{\bullet})$. Donc $\hat{g}'$ est un coéjecteur strict. ∎

PROPOSITION 7. *Soit $P' = (\hat{K}^{\bullet}, P', K^{\bullet})$ un foncteur fidèle (resp. foncteur et soit $P(X) \subset R_g(K^{\bullet})$); $\overline{\text{soit}}$ $\hat{j} \in X$. Si $f = P(\hat{j}).f'$ et si $\hat{j}$ est $(P'.P, X, H)$- distingué pour $(P'(f), P'(f'))$, alors $\hat{j}$ est (P, X, H)- distingué pour (f, f'). Supposons $P(X) \subset P'^{\ulcorner}$; si $\hat{j}$ est (P, X, H)- distingué pour f, il est $(P'.P, X, H)$- distingué pour $P'(f)$; de plus $\hat{j}$ est $(P'.P, X, H)$- engendré par $(P'(f), P'(f'))$ si, et seulement si, $\hat{j}$ est (P, X, H)- engendré par (f, f') et $f = P(\hat{j}).f'$.*

DEMONSTRATION. Soient $\hat{C}''$ la catégorie, C' et Y' les sous-classes de $\hat{C}'$, associées à $P'.P$ pour définir les morphismes $(P'.P, X, H)$- distingués. L'application

$$(f, j, f') \to (P'(f), j, P'(f'))$$

définit un foncteur q de $\hat{C}^{\bullet}$ vers $\hat{C}'^{\bullet}$ tel que $q(Y) \subset Y'$ et $q(C) \subset C'$.
Soit

$$\hat{g} = (f, \hat{j}, f') \in \hat{C}.$$

Supposons que $q(\hat{g})$ soit un $(\hat{C}'^{\bullet}, Y', C')$-coéjecteur et soit

$$g = (f, j, f'') = \beta(\hat{g}).\hat{C}.C_0^{\bullet}.$$

Comme $q(g) \in \beta(q(\hat{g})).\hat{C}'.C_0'^{\bullet}$, il existe

$$k = (P'(f''), h, P'(f')) \in \hat{C}' \text{ tel que } q(\hat{g}) = q(g).k,$$

c'est-à-dire on a

$$\hat{j} = j.h \quad \text{et} \quad P'(f'') = P'(P(h).f').$$

Il s'ensuit (resp. Si $P(j) \in R_g(K^{\bullet})$, les égalités

$$P(j).f'' = f = P(\hat{j}).f' = P(j).P(h).f'$$

entraînent) $f'' = P(h).f'$, d'où $g' = (f'', h, f') \in \hat{C}$ et $\hat{g} = g.g'$. Ainsi $\hat{g}$ est un coéjecteur, i.e. $\hat{j}$ est (P, X, H)-distingué pour (f, f').

-Nous supposons $P(X) \subset P'^{\ulcorner}$. Si $\hat{j} \in X$, $f \in \beta(P(\hat{j})).K$,

$$k = (P'(f), j, m) \in Y' \quad \text{et} \quad \beta(\hat{j}) = \beta(j),$$

il existe un et un seul $f' \in K$ tel que

$$f = P(j).f' \quad \text{et} \quad P'(f') = m,$$

de sorte que l'on obtient

$$k = q(g), \quad \text{où} \quad g = (f, j, f') \in Y.$$

Si $\hat{g}$ est un coéjecteur et si $k \in \beta(q(\hat{g})).Y'.C_0'^{\bullet}$, on a $k = q(g)$, où $g \in \beta(\hat{g}).Y.C_0^{\bullet}$, et il existe $g' \in \hat{C}$ tel que $\hat{g} = g.g'$; par suite $q(\hat{g}) = = k.q(g')$, et $q(\hat{g})$ est un $(\hat{C}'^{\bullet}, Y', C')$- coéjecteur.-Supposons de plus que $\hat{g}$ soit un coéjecteur strict. Soit $\hat{k}$ un $(\hat{C}'^{\bullet}, Y', C')$- coéjecteur de but $\beta(q(\hat{g}))$; alors $\hat{k} = q(\hat{g}')$, où $\hat{g}' \in \beta(\hat{g}).\hat{C}'$. D'après ce qui précède, $\hat{g}'$ est un coéjecteur, de sorte qu'il existe $g'' \in \hat{C}$ tel que $\hat{g} = \hat{g}'.g''$; il en résulte $q(\hat{g}) = \hat{k}.q(g'')$. Ainsi $q(\hat{g})$ est un $(\hat{C}'^{\bullet}, Y', C')$- coéjecteur strict.-Enfin soit $q(\hat{g})$ un $(\hat{C}'^{\bullet}, Y', C')$-coéjecteur strict; $\hat{g}$ est un coéjecteur $(f, \hat{j}, f')$. Soit

$$g_1' = (f, j', f'') \in \beta(\hat{g}).Y$$

un coéjecteur. Comme $q(g_1')$ est un $(\hat{C}'^{\bullet}, Y', C')$ - coéjecteur, il existe

$$k_1 = (P'(f''), h, P'(f')) \in \hat{C}' \quad \text{tel que} \quad q(\hat{g}) = q(g_1').k_1.$$

Puisque P' est fidèle et que $P'(f'') = P'(P(h).f')$ (resp. Puisque

$$\hat{j} = j'.h, \quad P(j').f'' = f = P(\hat{j}).f' = P(j').P(h).f',$$

$P(X) \subset R_g(K^{\cdot})$), on trouve $f'' = P(h).f'$. Il s'ensuit $g_1 = (f'', h, f') \in \hat{C}'$ et $\hat{g} = g_1'.g_1$. Ceci prouve que $\hat{g}$ est un coéjecteur strict. ■

2. Foncteurs engendrants.

Dans tout ce paragraphe, $\mathfrak{M}_o$ désigne un univers, sauf dans $B, 2$).

DEFINITION. Nous appellerons $\mathfrak{M}_o$-*classe* une classe A telle qu'il existe une bijection de A sur un élément de $\mathfrak{M}_o$.

Soient $P = (K^{\cdot}, P, \hat{H}^{\cdot})$ un foncteur, $H^{\cdot}$ une sous-catégorie pleine de $\hat{H}^{\cdot}$ et X une partie de $\bar{\hat{H}}$. Soient $\hat{C}^{\cdot}$ la catégorie, C et Y les parties de $\hat{C}$, associées à P dans § 1-C. Coéjecteur signifie encore $(\hat{C}^{\cdot}, Y, C)$-coéjecteur.

DEFINITION. Si $S \in \hat{H}^{\cdot}_o$, nous désignons par $S.X/\hat{H}^{\cdot}_{\gamma}$ la classe quotient de $S.X$ par la relation d'équivalence : $j \sim j'$ si, et seulement si, $j \in j'.\hat{H}^{\cdot}_{\gamma}$. On dira que $\hat{H}^{\cdot}$ est $\mathfrak{M}_o$-*petite pour* X si $S.X/\hat{H}^{\cdot}_{\gamma}$ est une $\mathfrak{M}_o$-classe pour tout $S \in \hat{H}^{\cdot}_o$.

EXEMPLES.

1) $\hat{H}^{\cdot}$ est localement petite [4] (ou «à sous-objets $\mathfrak{M}_o$-petits») si elle est $\mathfrak{M}_o$-petite pour $R_g(\hat{H}^{\cdot})$ et si $S'.\hat{H}.S \in \mathfrak{M}_o$ lorsque $S \in \hat{H}^{\cdot}_o$ et $S' \in \hat{H}^{\cdot}_o$.

2) Soient $S \in \hat{H}^{\cdot}_o$ et $f \in P(S).K$; on a $e = (S, f) \in \hat{C}^{\cdot}_o$. Pour que $\hat{C}^{\cdot}$ soit $\mathfrak{M}_o$-petite pour $e.Y$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

a) soit M la classe des $j \in S.X$ tels que $f < P(j)$; alors $M/\hat{H}^{\cdot}_{\gamma}$ est une $\mathfrak{M}_o$-classe;

b) pour tout $j \in S.X$, soit M_j la classe des f' tels que $f = P(j).f'$; alors $M_j / P(\hat{H}^{\cdot}_{\gamma})^*$ est une $\mathfrak{M}_o$-classe.

Si $\hat{H}^{\cdot}$ est $\mathfrak{M}_o$-petite pour $S.X$, la condition a est satisfaite. Si

$$P(X) \subset R_g(K^{\cdot}),$$

la classe M_j a au plus un élément, de sorte que b est vérifiée. b est aussi remplie lorsque $P(s).K.\alpha(f)$ est une $\mathfrak{M}_o$-classe pour tout $s \in \alpha(X)$.

A. EXISTENCE DE MORPHISMES ENGENDRES.

DEFINITION. Soit $K' \subset K$; on dira que P est (K', X, H)-*engendrant* si, pour tout $S \in \hat{H}_o^\bullet$ et tout $f \in P(S).K'$, il existe un morphisme $(P, X.H_o^\bullet, H)$-engendré par f de but S.

Soient $S \in \hat{H}_o^\bullet$ et $f \in P(S).K$. Désignons par $\overline{I}_1$ la classe des couples (j, f') tels que $j \in S.X.H_o^\bullet$ et $f = P(j).f'$, c'est-à-dire tels que $(f, j, f') \in (S, f).Y.C_n^\bullet$. Si $i = (j, f') \in \overline{I}_1$, posons $j_i = j$ et $f'_i = f'$. De même soit $\overline{I}_2$ la classe des couples (j', f'') tels que $j' \in S.X$ soit (P, X, H)- distingué pour (f, f'') et soit

$$j_{i'} = j' \text{ et } f'_{i'} = f'' \text{ pour tout } i' = (j', f'') \in \overline{I}_2 .$$

PROPOSITION 8. *Posons $n = 1$ (resp. $n = 2$). Supposons que I_n soit une partie de $\overline{I}_n$ telle que, pour tout $(j_i, f'_i) \in \overline{I}_n$, il existe $h \in \hat{H}_\gamma^\bullet$, où*

$$(j_i.h, P(h)^{-1}.f'_i) \in I_n.$$

Si l'on a $\hat{j} \in X$, $v_i \in \hat{H}$, $j_i.v_i = \hat{j}$ pour tout $i \in I_n$ et si $(P(j_i), P(v_i))_{i \in I_n}$ est un produit fibré naturalisé dans $K^\bullet$, alors $\hat{j}$ est (P, X, H)- distingué pour (resp. - engendré par) f.

DEMONSTRATION. Soit $i = (j_i, f'_i) \in \overline{I}_n$; on a $g_i = (f, j_i, f'_i) \in Y$. Soient A_n et $\overline{A}_n$ les classes des g_i tels que $i \in I_n$ et $i \in \overline{I}_n$ respectivement. Si $g_i \in \overline{A}_n$, il existe par hypothèse

$$g^i = (f'_i, h, P(h)^{-1}.f'_i) \in \hat{C}_\gamma^\bullet \text{ tel que } g_i.g^i \in A_n,$$

i.e. on a $\overline{A}_n \subset A_n.\hat{C}_\gamma^\bullet$. Comme $(P(j_i), P(v_i))_{i \in I_n}$ est un produit fibré naturalisé dans $K^\bullet$ et que $f = P(j_i).f'_i$, il existe un et un seul $f'' \in K$ tel que

$$f'_i = P(v_i).f'' \text{ pour tout } i \in I_n,$$

d'où $w_i = (f'_i, v_i, f'') \in \hat{C}$ et

$$\hat{g}_n = g_i.w_i = (f, j_i.v_i, f'') \in Y,$$

si $i \in I_n$. Lorsque $i \in \overline{I}_n$, on a $g_i.g^i = g_{i'} \in A_n$ et les relations

$$\hat{g}_n = g_{i'}.w_{i'} = g_i.g^i.w_{i'} < g_i$$

montrent que l'élément $\hat{g}_1$ (resp. $\hat{g}_2$) $\in Y$ est un coéjecteur (resp. coéjecteur strict. Par suite, $\hat{j} = j_i . v_i$ est (P, X, H)-distingué pour (f, f'') (resp. (P, X, H)-engendré par $(f, f''))$. ■

REMARQUE. Considérons les conditions, où $j_i \in S.X$, $i \in I_n$, $\hat{j} \in X$:

a) Il existe $v_i \in \hat{H}$ tels que $j_i . v_i = \hat{j}$ et que $(P(j_i), P(v_i))_{i \in I_n}$ soit un produit fibré naturalisé dans $K^\bullet$;

b) $(j_i, v_i)_{i \in I_n}$ est un produit fibré naturalisé dans P et $\hat{j} = j_i . v_i$.

b entraîne a. Si $X \subset P_i^{\ulcorner}$, les conditions a et b sont équivalentes.

COROLLAIRE 1. *Supposons que* $\hat{C}^\bullet$ *soit* $\mathfrak{M}_o$*-petite pour* $(S, f).Y.C^\bullet_o$ *(resp. pour* $(S, f).Y$*), que* $X.X \subset X$ *et que* X *soit* $\mathfrak{M}_o$*-*V*-stable pour* (P, H) *(resp.* $(P, \hat{H})$*). S'il existe* $j \in S.X$ *tel que* $f < P(j)$*, il existe un morphisme* (P, X, H)*-distingué pour (resp. -engendré par)* f*, de but* S.

DEMONSTRATION. Soit u une bijection de $(S, f).Y.C^\bullet_o/\hat{C}^\bullet_\gamma$ (resp. de $\overline{A}_2/\hat{C}^\bullet_\gamma$, où $\overline{A}_2$ est la classe des coéjecteurs de but (S, f)) sur un élément J_1 (resp. J_2) de $\mathfrak{M}_o$. Pour tout $m \in J_n$, où $n = 1$ ou 2, choisissons un

$$g_m = (f, j_m, f'_m) \in u^{-1}(m).$$

L'application $m \to (j_m, f'_m)$ est une bijection de J_n sur une partie I_n de $\overline{I}_n$ vérifiant la condition de la proposition 8. D'après la $\mathfrak{M}_o$-V-stabilité de X, il existe un produit fibré naturalisé $(j_i, v_i)_{i \in I_n}$, où $n = 1$ (resp.$= 2$); soit $\hat{j}_n = j_i . v_i$. Si $\overline{I}_1 = \emptyset$, $j \in S.X$ est $(P, X, \hat{H})$-distingué pour f; si $\overline{I}_1 \neq \emptyset$, la proposition 8 affirme que $\hat{j}_1$ est (P, X, H)-distingué pour f. (resp. pour f. Il s'ensuit $I_2 \neq \emptyset$ et, d'après la même proposition, $\hat{j}_2$ est (P, X, H)-engendré par f.) ■

COROLLAIRE 2. *Si les trois conditions a, b, c ou a, b', c suivantes sont vérifiées,* P *est* (K', X, H)*-engendrant :*

a) $\hat{H}^\bullet$ *est* $\mathfrak{M}_o$*-petite pour* $X.H^\bullet_o$ *et* $P(X) \subset R_g(K^\bullet)$ *(resp. et* $P(s).K.e/P(H^\bullet_\gamma)^*$ *est une* $\mathfrak{M}_o$*-classe si* $e \in \alpha(K')$ *et* $s \in H^\bullet_o$*).*

b) $X.H^\bullet_o$ *est* $\mathfrak{M}_o$*-*V*-stable pour* (P, H)*.*

b') On a $X.X.H^\bullet_o \subset X$ *et* $K' = K.\alpha(K')$*. Si* $j_i \in S.X.H^\bullet_o$ *pour* *tout* $i \in I$, *où* $S \in \hat{H}^{\bullet}_{o}$ *et* $I \in \mathfrak{M}_{o}$, *il existe un produit fibré naturalisé* $(j_i, v_i)_{i \in I}$ *dans* P *tel que* $j_i . v_i \in X$.

c) Si $S \in \hat{H}^{\bullet}_{o}$ *et* $f \in P(S).K'$, *il existe* $j \in S.X.H^{\bullet}_{o}$ *où* $f < P(j)$.

DEMONSTRATION. Soit $S \in \hat{H}^{\bullet}_{o}$ et $f \in P(S).K'$. La condition a entraîne que $\hat{C}^{\bullet}$ est $\mathfrak{M}_{o}$-petite pour $(S, f).Y.C^{\bullet}_{o}$ d'après l'exemple 2. Le corollaire 1 permet de construire un $\hat{j}$ qui est (P, X, H)- distingué pour (f, f'). Si b, c sont vérifiées, on a $\alpha(\hat{j}) \in H$, donc $\hat{j}$ est $(P, X.H^{\bullet}_{o}, H)$- engendré par f. - Si a, b' et c sont satisfaites, on a

$$f = P(\hat{j}).f', \quad \text{où} \quad f' \in K.\alpha(f) \subset K.\alpha(K') = K',$$

de sorte qu'il existe $j \in \alpha(\hat{j}).X.H^{\bullet}_{o}$ tel que $f' < P(j)$. En vertu de la proposition 3, $\hat{j}.j$ est $(P, X.H^{\bullet}_{o}, H)$- distingué pour f. ■

COROLLAIRE 3. *Si les trois conditions a, b, c ou a, b', c suivantes sont vérifiées,* P *est* (K', X, H)- *engendrant :*

a) $H^{\bullet}$ *est* $\mathfrak{M}_{o}$-*petite pour* $X \cap H$, *et on a* $P(X \cap H) \subset R_g(K^{\bullet})$ *(resp. et, si* $s \in H^{\bullet}_{o}$ *et* $s' \in H^{\bullet}_{o}$, *la classe* $P(s').K.P(s)/P(H^{\bullet}_{\gamma})^{*}$ *est une* $\mathfrak{M}_{o}$-*classe).* Y *est* $\vee$-*stable pour* (P, H), *où* $Y = X.H^{\bullet}_{o}$ *(resp.* $= X$ *et* $K' = K.\alpha(K')$*).*

b) $X.X.H^{\bullet}_{o} \subset X$; $X \cap H$ *est* $\mathfrak{M}_{o}$-$\vee$-*stable pour* $(P_{H'}, H)$ *et* K' *est* ∇-*stable dans* $K^{\bullet}$; *(on pose* $P_H = (K^{\bullet}, P\iota, H^{\bullet})$*).*

b') $X.X \subset X$ *et* $K' = K.\alpha(K')$. *Si* $j_i \in s.X.H^{\bullet}_{o}$ *pour tout* $i \in I$, *où* $s \in H^{\bullet}_{o}$ *et* $I \in \mathfrak{M}_{o}$, *il existe un produit fibré naturalisé* $(j_i, v_i)_{i \in I}$ *dans* P *tel que* $j_i . v_i \in X$.

c) Si $S \in \hat{H}^{\bullet}_{o}$ *et* $f \in P(S).K'$, *il existe* $j \in S.X.H^{\bullet}_{o}$ *tel que* $f < P(j)$ *et* $P(j) \in K'$.

DEMONSTRATION. Soit $S \in \hat{H}^{\bullet}_{o}$ et $f \in P(S).K'$. Il existe $j \in S.X.H^{\bullet}_{o}$ tel que $f < P(j) \in K'$; soit $s = \alpha(j)$ et $f = P(j).f'$. Puisque K' est ∇-stable dans $K^{\bullet}$, on a $f' \in K'$. La condition a entraîne que $\hat{C}^{\bullet}$ est $\mathfrak{M}_{o}$-petite pour $(s, f').Y.C^{\bullet}_{o}$ (exemple 2). Le corollaire 1 assure qu'il existe $\hat{j} \in s.X$ qui est (P, X, H)- distingué pour (f', f''). D'après la proposition 5, $j.\hat{j}$ est (P, X, H)- distingué pour f. - Si a, b, c sont vérifiées, on a

$\alpha(\hat{j}) \in H$, donc $j.\hat{j}$ est $(P, X.H_0^{\bullet}, H)$-engendré par f. - Si a, b', c sont remplies, on a $f'' \in K.\alpha(f') \subset K'$, de sorte qu'il existe $j' \in \alpha(\hat{j}).X.H_0^{\bullet}$ tel que $f'' < P(j')$. En vertu de la proposition 3, $(j.\hat{j}).j'$ est $(P, X.H_0^{\bullet}, H)$-engendré par f. ■

EXEMPLES.

1) Supposons $P(X) \subset R_g(K^{\bullet})$. L'application $(j_i, f_i') \to j_i$ est une bijection de la classe $\overline{I}_1$ sur la classe B des $j \in S.X.H_0^{\bullet}$ tels que $f < P(j)$. Par suite, si $B \subset \overline{B} \subset B.\hat{H}_{\gamma}^{\bullet}$ et si $(j, v_j)_{j \in B}$ est un produit fibré naturalisé dans P tel que $\hat{j} = j.v_j$ appartienne à X, alors $\hat{j}$ est (P, X, H)- distingué pour f.

2) Supposons $H = \hat{H}$ et $\hat{H}_0^{\bullet} \subset X$; la condition c du corollaire 3 est alors vérifiée (on peut prendre S pour j); par suite, en appliquant le corollaire 2 au cas où $X = R_g(\hat{H}^{\bullet})$, on obtient le résultat suivant [4] : Si $\hat{H}^{\bullet}$ est localement petite, si P est à $\mathfrak{M}_0$-produits fibrés et si $e_2.K.e_1 \in \mathfrak{M}_0$ pour tout $e_i \in K_0^{\bullet}$, le foncteur P est $(K, R_g(\hat{H}^{\bullet}), \hat{H})$- engendrant.

Soit $\underline{F} = (\hat{H}^{\bullet}, F, D^{\bullet})$ un foncteur et $(P.\underline{F}, t, G)$ un triplet définissant une transformation naturelle telle que $t(D_0^{\bullet}) \subset K' \subset K$. Considérons les conditions :

1) Si $j \in X.H_0^{\bullet}$ et $g \in \beta(j).\hat{H}$, il existe un produit fibré naturalisé $((j, v), (g, v'))$ dans P tel que $v' \in X$. On a $X \subset R_g(\hat{H}^{\bullet})$.

2) Si $S \in \hat{H}_0^{\bullet}$ et $f \in P(S).K'$, il existe $j \in S.X.H_0^{\bullet}$ tel que $f < P(j)$.

PROPOSITION 9. *Supposons que X vérifie 1 et 2, que $P(X) \subset K'$ et K' soit ∇-stable dans $K^{\bullet}$ (resp. que $K' = K.\alpha(K')$) et $X.X.H_0^{\bullet} \subset X$. Si, pour $e \in D_0^{\bullet}$, il existe $T(e) \in F(e).X$ qui soit $(P, X.H_0^{\bullet}, H)$-distingué pour $t(e)$, il existe un triplet $(\underline{F}, T, F')$ définissant une transformation naturelle.*

DEMONSTRATION. Soit $k \in D$, $\alpha(k) = e'$ et $\beta(k) = e$. Posons

$$F(k) = h, \quad T(e') = j' \quad \text{et} \quad T(e) = j.$$

Montrons qu'il existe h' tel que

$$(h, j, j', h') \in \square \hat{H}^{\bullet}.$$

En effet, par hypothèse, il existe un produit fibré naturalisé $((j, v), (h, v'))$ dans P tel que $v' \in X$. Puisque j est (P, X, H)- distingué pour $t(e)$, il existe $f \in K$ tel que $t(e) = P(j).f$. Les relations

$$P(j).f.G(k) = t(e).G(k) = P(h).t(e')$$

assurent l'existence d'un $f' \in K$ vérifiant

$$f.G(k) = P(v).f' \quad \text{et} \quad t(e') = P(v').f'.$$

Par hypothèse $t(e') \in K'$ car $P(v') \in K'$; on a $f' \in K'$, et K' est ∇-stable (resp. $f' \in K.\alpha(K') \subset K'$). En vertu de la condition 2, il existe

$$j_1 \in \alpha(v').X.H_0^{\bullet} \quad \text{tel que} \quad f' < P(j_1).$$

On a $v'.j_1 \in X.X.H_0^{\bullet} \subset X.H_0^{\bullet}$ et

$$t(e') = P(v').f' < P(v').P(j_1).$$

Etant donné que j' est (P, X, H)- distingué pour $t(e')$, il existe $g \in \hat{H}$ tel que $j' = v'.j_1.g$. En posant $h' = v.j_1.g$, on obtient

$$j.h' = j.v.j_1.g = h.v'.j_1.g = h.j',$$

d'où $q(k) = (h, j, j', h') \in \square\hat{H}^{\bullet}$.

-Enfin si $(k', k) \in D^{\bullet} * D^{\bullet}$, les éléments

$$q_1 = q(k'.k) \quad \text{et} \quad q_2 = q(k') \boxminus q(k)$$

construits par la méthode précédente sont deux quatuors de la forme

$$(F(k'.k), T(\beta(k')), j', h_i''), \quad \text{où} \quad i = 1, 2.$$

Par hypothèse, $T(\beta(k'))$ est un monomorphisme; il s'ensuit $h_1'' = h_2''$, et par conséquent $q_1 = q_2$. Ceci prouve que l'application $k \to q(k)$ définit la transformation naturelle de F' vers F cherchée, F' étant le foncteur défini par $k \to h'$. ■

COROLLAIRE. *Supposons que $X.H_0^{\bullet}$ (au lieu de X) vérifie la condition 1 et que, pour tout $e \in D_0^{\bullet}$, il existe $T(e) \in F(e).X$ qui soit $(P, X.H_0^{\bullet}, H)$-engendré par $t(e)$. Alors il existe un foncteur F' tel que (F, T, F') définisse une transformation naturelle. Si $X = P_i^{\Gamma}$, on appelle F' un $\mathfrak{N}(K,P,H)$-sous-foncteur de F engendré par G.*

En effet, les hypothèses sur K' et la condition 2 sont inutiles si $\alpha(v') \in H$, car la démonstration précédcnte s'applique alors sans changement, en prenant $K' = K$ et $j_1 = \alpha(v')$, la relation $X.X.H_0^{\bullet} \subset X$ n'ayant été utilisée que pour affirmer que l'on a $v'.j_1 \in X$. ■

B. CAS PARTICULIERS.

1) Images.

Supposons que P soit le foncteur identique d'une catégorie $\hat{H}^{\bullet}$. Soient $H^{\bullet}$ une sous-catégorie pleine de $\hat{H}^{\bullet}$ et X une partie de $\hat{H}$.

Dire que $\hat{j}$ est $(\hat{H}^{\bullet}, X, H)$-distingué pour $g \in S.\hat{H}$ signifie que $\hat{j} \in S.X$ et qu'il existe $\hat{h} \in \hat{H}$ vérifiant les conditions : $g = \hat{j}.\hat{h}$ et, si $j \in S.X.H_0^{\bullet}$ et $g = j.h$, il existe $k \in H$ tel que $\hat{j} = j.k$ et $h = k.\hat{h}$. Pour que $\hat{j}$ soit $(\hat{H}^{\bullet}, X, H)$-engendré par g, il faut et il suffit que $\hat{j}$ remplisse les conditions précédentes et que, de plus, si $\hat{j}' \in S.X$ est $(\hat{H}^{\bullet}, X, H)$-distingué pour g et si $g = \hat{j}'.h'$, il existe $k' \in H$ tel que

$$\hat{j} = \hat{j}'.k' \quad \text{et} \quad h' = k.\hat{h}.$$

En particulier, $\hat{j}$ est une $(X.H_0^{\bullet}, \hat{H}^{\bullet}, \hat{H})$-image de g (C.S., déf. 30 chap. III, où l'on suppose de plus $X.H_0^{\bullet} \subset R_g(\hat{H}^{\bullet})$) si, et seulement si, $\hat{j}$ est $(\hat{H}^{\bullet}, X.H_0^{\bullet}, H)$-engendré par g. Rappelons (prop. 5-2 [1], voir aussi § 3) qu'un critère pour l'existence de $(H, \hat{H}^{\bullet})$-projecteurs demande qu'il existe des $(X.H_0^{\bullet}, \hat{H}^{\bullet}, \hat{H})$-images. La proposition 8 donne les critères suivants pour l'existence de telles images de $g \in \hat{H}$.

PROPOSITION 10. *Soit $\bar{I}$ la classe des $i = (j_i, h_i)$ tels que $j_i \in X.H_0^{\bullet}$ et $j_i.h_i = g$. Soit I une partie de $\bar{I}$ vérifiant les conditions :*

a) $I \neq \emptyset$; pour tout $(j, h) \in \bar{I}$, il existe $k \in \hat{H}_{\gamma}^{\bullet}$ tel que

$$(j.k, k^{-1}.h) \in I;$$

b) il existe un produit fibré naturalisé $(j_i, v_i)_{i \in I}$ dans $\hat{H}^{\bullet}$ tel que $\hat{j} = j_i.v_i \in X.H_0^{\bullet}$.

Alors $\hat{j}$ est une $(X.H_0^{\bullet}, \hat{H}^{\bullet}, \hat{H})$-image de g.

COROLLAIRE 1. *Si les conditions suivantes a', b', c' ou a', b" sont véri-*

fiées, g admet une $(X.H_o^{\bullet}, \hat{H}^{\bullet}, \hat{H})$*- image :*

a') $H^{\bullet}$ *est* $\mathfrak{M}_o$*-petite pour* $X \cap H$ *et* $X \cap H \subset R_g(\hat{H}^{\bullet})$ *(resp. et* $s'.H.s/H_{\bar{\gamma}}^{\bullet}$ *est une* $\mathfrak{M}_o$*-classe si* $s \in H_o^{\bullet}$ *et* $s' \in H_o^{\bullet}$*).*

b') $X.X \subset X$ *et, si* $j_i \in s.X.H_o^{\bullet}$ *pour tout* $i \in I$*, où* $s \in H_o^{\bullet}$ *et* $I \in \mathfrak{M}_o$*, il existe un produit fibré naturalisé* $(j_i, v_i)_{i \in I}$ *dans* $\hat{H}^{\bullet}$ *tel que* $j_i.v_i \in X$*. La classe X est* $\vee$*-stable pour* $(\hat{H}^{\bullet}, H)$*.*

b") $X.H_o^{\bullet}$ *est* $\vee$*-stable, et* $X \cap H$ *est* $\mathfrak{M}_o$*-*$\vee$*-stable. pour* $(\bar{\hat{H}}^{\bullet}, H)$*; il existe* $j \in X.H_o^{\bullet}$ *tel que* $g = j.g'$*.*

c') Si $g = j.g'$ *et* $j \in X \cup \{\beta(g)\}$*, on a* $g' = j'.g''$*, où* $j' \in X.H_o^{\bullet}$*.*

COROLLAIRE 2. *Si* $\hat{H}^{\bullet}$ *est* $\mathfrak{M}_o$*-petite pour* $X \subset R_g(\hat{H}^{\bullet})$ *et si* $(\hat{H}^{\bullet}, \iota, X^{\bullet})$ *est un foncteur à* $\mathfrak{M}_o$*-produits fibrés (par exemple si* $\hat{H}^{\bullet}$ *est localement petite et à* $\mathfrak{M}_o$*- produits fibrés et si* $X = R_g(\hat{H}^{\bullet})$*), tout* $g \in X_o^{\bullet}.\hat{H}$ *a une* $(X, \hat{H}^{\bullet}, \hat{H})$*- image.*

En particulier, soit $\tilde{H}^{\bullet}$ une sous-catégorie pleine de $\hat{H}^{\bullet}$ telle que

1) $H \subset \tilde{H}$ et $\tilde{H}^{\bullet}$ est $\mathfrak{M}_o$-petite pour H (resp. est localement petite);

2) $(\hat{H}^{\bullet}, \iota, \tilde{H}^{\bullet})$ est un foncteur à $\mathfrak{M}_o$-produits fibrés;

3) Si $g \in \tilde{H}_o^{\bullet}.\hat{H}$, on a $g = j.g'$, où $j \in \tilde{H}.H_o^{\bullet}$ (resp. $\in R_g(\hat{H}^{\bullet}).H_o^{\bullet}$).

D'après le corollaire 1, tout $g \in \tilde{H}_o^{\bullet}.\hat{H}$ admet une $(\tilde{H}.H_o^{\bullet}, \hat{H}^{\bullet}, \hat{H})$- (resp. une $(R_g(\hat{H}^{\bullet}).H_o^{\bullet}, \hat{H}^{\bullet}, \hat{H})$-) image. (La condition 1 est par exemple vérifiée si $H \in \mathfrak{M}_o$).

Soit $p = (K^{\bullet}, \underline{p}, H^{\bullet})$ un foncteur et $K'^{\bullet}$ une sous-catégorie de $K^{\bullet}$ formée de monomorphismes. Soit X la classe des (K', p)- injections (C. S., déf. 1, chap. III). Soit $g \in H$. Pour que j soit une (K', p, H)-image de g (C.S., déf. 30, chap. III), il faut et il suffit que j soit une $(X, H^{\bullet}, H)$- image de g. Puisque X est formée de monomorphismes (C.S., prop. 1, chap. III), la proposition 7 affirme que j est une (K', p, H)-image de g si, et seulement si, j est (p, X, H)- engendré par $p(g)$. Supposons $K' = R_g(K^{\bullet})$. Si p est à $\mathfrak{M}_o$-produits fibrés, on déduit de la proposition 4 que $\overleftarrow{p_i}$ est $\mathfrak{M}_o$ - $\vee$ - stable pour (p, H). Par suite le corollaire 2 de la proposition 10 entraîne que, si $H^{\bullet}$ est $\mathfrak{M}_o$-petite pour $\overleftarrow{p_i}$ et si p est à $\mathfrak{M}_o$-produits fibrés, où $\mathfrak{M}_o$ est un univers, tout $g \in H$ admet une (K', p, H) -

image.

Considérons le cas où $K^\bullet$ est la catégorie pleine d'applications $\mathfrak{M}$ associée à l'univers $\mathfrak{M}_o$, c'est-à-dire $p = (\mathfrak{M}, \underline{p}, H^\bullet)$. Pour tout $h \in H$, désignons par $\underline{h}$ la surjection définissant l'application $p(h)$. Pour que $g \in H$ admette une $(\mathfrak{M}^i, p, H)$-image j, il faut et il suffit que j soit $(p, p_i^{\ulcorner}, H)$-engendré par $p(g)$. On a $p(g) = f.\underline{g}$, où $\underline{g} \in \mathfrak{M}_\gamma$ et $f = (p(S), \iota, \beta(\underline{g}))$, $S = \beta(g)$; par conséquent j est une $(\mathfrak{M}^i, p, H)$-image de g si, et seulement si, j est $(p, p_i^{\ulcorner}, H)$-engendré par f.

PROPOSITION 11. *Soit $p = (\mathfrak{M}, \underline{p}, H^\bullet)$ un foncteur; alors $H^\bullet$ est $\mathfrak{M}_o$-petite pour $p^{\ulcorner}$. Si p est à $\mathfrak{M}_o$-produits fibrés, tout élément de H admet une $(\mathfrak{M}^i, p, H)$-image.*

DEMONSTRATION. Soit $S \in H_o^\bullet$ et $A = S.p_i^{\ulcorner}$. Soit r la relation d'équivalence sur A telle que $A/r = A/H_\gamma^\bullet$. Si $j \sim j' \bmod r$, on a $\beta(\underline{j}) = \beta(\underline{j}')$. Inversement, si

$$j \in A, \quad j' \in A \quad \text{et} \quad \beta(\underline{j}) = \beta(\underline{j}'),$$

l'application $x \to \underline{j}^{-1}\underline{j}'(x)$, où $x \in \alpha(\underline{j}')$, est une bijection f telle que $p(j).f = p(j')$. En vertu du théorème 1*, chap. III, C.S., il existe

$$g \in H_\gamma^\bullet \quad \text{tel que} \quad j.g = j' \quad \text{et} \quad p(g) = f;$$

donc $j \sim j' \bmod r$. Ainsi l'application $j \bmod r \to \beta(\underline{j})$ définit une bijection de A/r sur une partie A' de $\mathcal{P}(p(S))$. Puisque $\mathfrak{M}_o$ est un univers, on a $\mathcal{P}(p(S)) \in \mathfrak{M}_o$, d'où $A' \in \mathfrak{M}_o$. Ceci prouve que $H^\bullet$ est $\mathfrak{M}_o$-petite pour $p_i^{\ulcorner}$. La proposition en résulte. ∎

2) Sous-structures engendrées.

Supposons que $\mathfrak{M}$ et $\hat{\mathfrak{M}}$ soient deux catégories pleines d'applications telles que $\mathfrak{M} \subset \hat{\mathfrak{M}}$. Désignons par $\tilde{\mathfrak{M}}$ la saturante de $\mathfrak{M}$ dans $\hat{\mathfrak{M}}$ et par $\mathfrak{M}^{\cup}$ la classe $\hat{\mathfrak{M}}^\iota.\tilde{\mathfrak{M}}_o$ dont les éléments sont donc les $(\hat{M}, \iota, M) \in \hat{\mathfrak{M}}^\iota$ tels que M soit une $\mathfrak{M}_o$-classe appartenant à $\hat{\mathfrak{M}}_o$.

Soit $P = (\hat{\mathfrak{M}}, \underline{P}, \hat{H}^\bullet)$ un foncteur et $H^\bullet$ une sous-catégorie pleine de $\hat{H}^\bullet$ telle que $\overline{P(H)} \subset \mathfrak{M}$. Posons $p = (\mathfrak{M}, \underline{P\iota}, H^\bullet)$. Soit X une sous-classe de la classe des P-monomorphismes $P_i^{\ulcorner}$; donc $X \subset R_g(\hat{H}^\bullet)$.

Soit $S \in \hat{H}^{\bullet}_{o}$ et $M \subset P(S)$. Rappelons [1] que s est une *(X, H)-sous-structure de S engendrée par M* s'il existe un $\hat{H}^{\bullet}$-minimum $\hat{j}$ de la classe des $j \in S.X.H^{\bullet}_{o}$ tels que $M \subset \beta(\underline{j})$, et si $s = \alpha(\hat{j})$; autrement dit, s'il existe un $\hat{j} \in S.X.s$ qui soit $(P, X.\overline{H^{\bullet}_{o}}, H)$-engendré par $(P(S), \iota, M)$.

Des propositions 5 et 6, il résulte que, si X est ∇-stable dans $\hat{H}^{\bullet}$ et $X.H^{\bullet}_{o}$ $\vee$-stable pour (P,H) et s'il existe $j \in S.X.H^{\bullet}_{o}$ tel que $M \subset \beta(\underline{j})$, les (X, H)-sous-structures de S engendrées par M sont les $(X, \overline{H})$-sous-structures de $\alpha(j)$ engendrées par $\underline{j}^{-1}(M)$. D'après la proposition 8, si la classe $\overline{A}$ des $j \in S.X.H^{\bullet}_{o}$ tels que $M \subset \beta(\underline{j})$ n'est pas vide et s'il existe un produit fibré naturalisé $(j, v_j)_{j \in A}$ dans $\overline{P}$ tel que

$$A \subset \overline{A} \subset A.\hat{H}^{\bullet}_{\gamma} \quad \text{et que} \quad j.v_j \in X.H^{\bullet}_{o},$$

alors $\alpha(v_j)$ est une (X, H)-sous-structure de S engendrée par M.

La notion de foncteur $(\mathfrak{M}^{\cup}, X, H)$-engendrant a été définie dans [1] sous le nom de foncteur $\frown$-engendrant pour $(\mathfrak{M}, X, H)$, si $\hat{H}^{\bullet}_{o} \subset X$.

DEFINITION. *P est $\frown$-engendrant pour* $\mathfrak{M}$ s'il est $(\mathfrak{M}^{\cup}, P^{\frown}_{i}, \underline{\overline{P}}^{-1}(\mathfrak{M}))$-engendrant [1]. Une $(P^{\frown}_{\iota}, \hat{H})$-sous-structure de $S \in \hat{H}^{\bullet}_{o}$ engendrée par $M \subset P(S)$ est appelée *P-sous-structure de S engendrée par M*, notée S/M.

Sauf indication contraire, nous ne supposons pas que $\mathfrak{M}_{o}$ ni $\hat{\mathfrak{M}}_{o}$ sont des univers. Soient $S \in \hat{H}^{\bullet}_{o}$ et $f \in P(S).\hat{\mathfrak{M}}.\mathfrak{M}_{o}$; on a $f = k.f'$, où

$$f' = (\beta(\underline{f}), \underline{f}, \alpha(f)) \in \tilde{\mathfrak{M}}_{\gamma} \quad \text{et} \quad k = (\beta(f), \iota, \beta(\underline{f})) \in \mathfrak{M}^{\cup}.$$

Pour que $\hat{j} \in S.X$ soit (P, X, H)-distingué pour f, il faut et il suffit qu'il soit (P, X, H)-distingué pour k. Donc si P est $(\mathfrak{M}^{\cup}, X, H)$-engendrant, P est aussi $(\hat{\mathfrak{M}}.\tilde{\mathfrak{M}}_{o}, X, H)$-engendrant ou, ce qui est équivalent, $(\hat{\mathfrak{M}}.\mathfrak{M}_{o}, X, H)$-engendrant.

PROPOSITION 12. *P est $(\mathfrak{M}^{\cup}, X, H)$-engendrant si les conditions a et b (resp. a et b') sont vérifiées :*

a) Si $S \in \hat{H}^{\bullet}_{o}$, $M \in \tilde{\mathfrak{M}}_{o}$ et $M \subset P(S)$, il existe $j \in S.X.H^{\bullet}_{o}$ tel que $M \subset \beta(\underline{j})$.

b) On a $X.X.H^{\bullet}_{o} \subset X$; si $j_i \in S.X.H^{\bullet}_{o}$ pour tout $i \in I$, où $I \in \hat{\mathfrak{M}}_{o}$ et $S \in \hat{H}^{\bullet}_{o}$, il existe un produit fibré naturalisé $(j_i, v_i)_{i \in I}$ dans P tel que $j_i.v_i \in X$. Enfin $\hat{\mathfrak{M}}_{o}$ est un univers.

b') On a $X.X \subset X$ *; si* $j_i \in s.X.H_o^{\bullet}$ *pour tout* $i \in I$, *où* $I \in \mathfrak{M}_o$ *et* $s \in H_o^{\bullet}$, *il existe un produit fibré naturalisé* $(j_i, v_i)_{i \in I}$ *dans* P *tel que* $j_i.v_i \in X$. *De plus,* X *est* $\vee$*-stable pour* (P, H), $\mathfrak{M}_o$ *est un univers.*

DEMONSTRATION. En vertu de la proposition 11, $\hat{H}^{\bullet}$ est $\hat{\mathfrak{M}}_o$-petite pour $P_i^{\ulcorner}$, donc pour $X \subset P_i^{\ulcorner}$ (resp. $H^{\bullet}$ est $\mathfrak{M}_o$-petite pour $X \cap H \subset p_i^{\ulcorner}$). Soient $S \in \hat{H}_o^{\bullet}$, $M \in \bar{\mathfrak{M}}_o$ et $M \subset P(S)$. D'après les corollaires de la proposition 8, il existe une (X, H)-sous-structure s de S engendrée par M, construite comme suit : Si a et b (resp. b') sont vérifiées, soit $\bar{A}$ la classe des

$$j \in S.X.H_o^{\bullet} \quad \text{tels que} \quad M \subset \beta(\underline{j})$$

(resp. soit $j_1 \in S.X.H_o^{\bullet}$ tel que $M \subset \beta(\underline{j}_1)$ et soit $\bar{A}$ la classe des $j \in \alpha(j_1).X.H_o^{\bullet}$ tels que $\underline{j}_1^{-1}(M) \subset \beta(\underline{j}))$. Il existe une $\hat{\mathfrak{M}}_o$-classe (resp. une $\mathfrak{M}_o$-classe) A telle que $A \subset \bar{A} \subset A.\hat{H}_{\gamma}^{\bullet}$, un produit fibré naturalisé $(j, v_j)_{j \in A}$ dans P et un $j' \in \alpha(v_j).X.H_o^{\bullet}$ tel que $\underline{\hat{j}}^{-1}(M) \subset \beta(\underline{j}')$ (resp. que $\underline{\hat{j}}^{-1}(\underline{j}_1^{-1}(M)) \subset \beta(\underline{j}'))$, où $\hat{j} = j.v_j$. Alors on a $s = \alpha(j')$. ■

COROLLAIRE. *Si* P *est à* $\mathfrak{M}_o$*-produits fibrés, il est* $\ulcorner$*-engendrant pour* $\mathfrak{M}$ *si, et seulement si, la condition a de la proposition 12 est remplie, en prenant* $H = \overset{-1}{\underline{P}}(\mathfrak{M})$ *et* $X = P_i^{\ulcorner}$, *et en supposant que* $\mathfrak{M}_o$ *est un univers.*

En effet, $P_i^{\ulcorner}$ est $\mathfrak{M}_o$-$\vee$-stable pour $(P, \hat{H})$ d'après la proposition 4 et le corollaire résulte de la proposition 12. ■

Soit $F = (\hat{H}^{\bullet}, \underline{F}, D^{\bullet})$ un foncteur et G un $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}^{\cup}, \hat{\mathfrak{M}})$-sous-foncteur de $P.F$. Considérons les hypothèses suivantes :

A) P est fidèle, à produits fibrés finis et $\ulcorner$-engendrant pour $\mathfrak{M}$.

B) $X^{\bullet}$ est une sous-catégorie de $\hat{H}^{\bullet}$ vérifiant les conditions 1 et 2, proposition 9, avec $K' = \mathfrak{M}^{\cup}$; le foncteur $(\mathfrak{M}.\underline{P\iota}, X^{\bullet})$ est à $\mathfrak{M}_o$-produits fibrés et $\mathfrak{M}_o$ est un univers.

PROPOSITION 13. *Si l'hypothèse A (resp. B) est vérifiée, il existe un* $\mathfrak{N}(\hat{\mathfrak{M}}^i, P, \overset{-1}{\underline{P}}(\mathfrak{M}))$*-sous-foncteur* F' *de* F *engendré par* G *(resp. de* F *tel que* $F'(e)$ *soit une* (X, H)*-sous-structure de* $F(e)$ *engendrée par* $G(e)$ *pour* $e \in D_o^{\bullet}$*) (C.S., chap. III, déf. 37).*

DEMONSTRATION. Si la condition B est satisfaite, P est $(\mathfrak{M}^{\cup}, X, H)$-

engendrant en vertu de la proposition 12, par suite les hypothèses de la proposition 9 sont vérifiées; et l'existence de F' découle de cette proposition. - Supposons que A soit remplie et montrons que les conditions de la proposition 9 sont vérifiées, en posant $H = \underline{P}^{-1}(\mathfrak{M})$, $K' = \hat{\mathfrak{M}}.\tilde{\mathfrak{M}}_o$ et $X = P_i^{\ulcorner}$. En vertu du corollaire de la proposition 12, la condition 2 de la proposition 9 est remplie. De plus, on a

$$K.\alpha(K') = K', \qquad X.X.H_o^{\bullet} \subset P_i^{\ulcorner}.P_i^{\ulcorner}.H_o^{\bullet} \subset X.$$

Montrons que la condition 1 de la proposition 9 est satisfaite. En effet, soit $j \in X.H_o^{\bullet}$ et $g \in \beta(j).\hat{H}$. Il existe un produit fibré naturalisé $((j,v),(g,v'))$ dans P, et la démonstration de la proposition 4 prouve que $v' \in P_i^{\ulcorner}$. La proposition 13 s'en déduit. ∎

3. Existence de structures libres engendrées.

A. PROJECTEURS STRICTS.

Soient $\tilde{H}^{\bullet}$ une catégorie, $H^{\bullet}$ et $\hat{H}^{\bullet}$ deux sous-catégories pleines de $\tilde{H}^{\bullet}$ telles que $H \subset \hat{H}$. Rappelons [1] que g est un $(H,\hat{H},\tilde{H}^{\bullet})$-projecteur si $g \in \hat{H}_o^{\bullet}.\tilde{H}$ et si, pour tout $h \in \tilde{H}_o^{\bullet}.H.\alpha(g)$, il existe un et un seul $k \in \hat{H}$ tel que $k.g = h$ (exemple § 1 -B).

DEFINITION. On dira que g est un $(H,\hat{H},\tilde{H}^{\bullet})$*-projecteur strict* si g est un projecteur strict relativement à $(H_o^{\bullet}.\tilde{H}, \hat{H}_o^{\bullet}.R_d(H_o^{\bullet}.\hat{H},\tilde{H}^{\bullet}),\tilde{H}^{\bullet})$.

$g \in \tilde{H}$ est un $(H,\hat{H},\tilde{H}^{\bullet})$-projecteur strict lorsque g est un $(H,\hat{H},\tilde{H}^{\bullet})$-projecteur et que, pour tout $(H,\hat{H},\tilde{H}^{\bullet})$-projecteur $g' \in \tilde{H}.\alpha(g)$, il existe un $k' \in \hat{H}$ tel que $k'.g = g'$.

Il est évident que les notions de $(H,H,\tilde{H}^{\bullet})$-projecteur, de $(H,H,\tilde{H}^{\bullet})$-projecteur strict et de $(H,\tilde{H}^{\bullet})$-projecteur sont identiques. Si g est un $(H,\hat{H},\tilde{H}^{\bullet})$-projecteur tel que $\beta(g) \in H$, alors g est un $(H,\tilde{H}^{\bullet})$-projecteur. Si g et g' sont deux $(H,\hat{H},\tilde{H}^{\bullet})$-projecteurs stricts de même source appartenant à $R_d(\hat{H},\tilde{H}^{\bullet})$, on a $g \in \hat{H}_{\gamma}^{\bullet}.g'$.

EXEMPLE. On voit facilement que les projecteurs construits dans [1], théorème 3-6 et 4-7 sont en réalité des projecteurs stricts.

Soit $\underline{P} = (\hat{K}^{\bullet},\underline{P},\hat{H}^{\bullet})$ un foncteur et $p = (K^{\bullet},\underline{P}\iota,H^{\bullet})$ une restriction de P aux sous-catégories pleines $H^{\bullet}$ et $K^{\bullet}$ de $\hat{H}^{\bullet}$ et $\hat{K}^{\bullet}$ respectivement. Soit $\tilde{H}^{\bullet}$ la catégorie associée au couple de foncteurs

$$(P,\ (\hat{K}^{\bullet},\iota,\hat{K}^{\bullet}))$$

par la construction de la proposition 36, chapitre II, C.S. (voir aussi C.S., appendice I). Soit Σ la classe des couples

$$(s,k) \quad \text{tels que} \quad s \in \hat{H}_0^{\bullet} \quad \text{et} \quad k \in P(s).\hat{K}.$$

Les éléments de $\tilde{H}$ sont les couples $(\hat{H},h)$, où $h \in \hat{H}$, les couples $(\hat{K},g)$, où $g \in \hat{K}$, et les couples $(\Sigma,(s,k))$, où $(s,k) \in \Sigma$; la loi de composition est telle que l'application $h \to (\hat{H},h)$ (resp. l'application $g \to (\hat{K},g)$) définisse un isomorphisme de $\hat{H}^{\bullet}$ (resp. de $\hat{K}^{\bullet}$) sur une sous-catégorie pleine de $\tilde{H}^{\bullet}$ et que l'on ait

$$(\Sigma,(s,k)).(\hat{K},g) = (\Sigma,(s,k.g)) \quad \text{si} \quad \alpha(k) = \beta(g)\ ,$$

$$(\hat{H},h).(\Sigma,(s,k)) = (\Sigma,(\beta(h),P(h).k)) \quad \text{si} \quad \alpha(h) = s.$$

CONVENTION. Si $A \subset \hat{H}$, nous notons A' la classe des couples $(\hat{H},h) \in \tilde{H}$ tels que $h \in A$; en particulier H' est la classe des couples $(\hat{H},h)$, où $h \in H$. Pour simplifier, nous désignerons par $\langle s,k \rangle$ le couple

$$(\Sigma,(s,k)) \in \tilde{H}\ .$$

DEFINITION. On dira que $(\hat{s},g)$ est un *(H,P)-projecteur* (resp. un *(H,P)-projecteur strict)* si $\langle \hat{s},g \rangle$ est un $(H',\hat{H}',\tilde{H}^{\bullet})$-projecteur (resp. -projecteur strict). On dira que $\hat{s}$ est une *P-structure libre engendrée par $\alpha(g)$* s'il existe un $(\hat{H},P)$-projecteur strict $(\hat{s},g)$.

Si, pour tout $e \in \hat{K}_0^{\bullet}$, il existe une P-structure libre $q(e)$ engendrée par e, l'application $e \to q(e)$ se prolonge en un foncteur q de $\hat{K}^{\bullet}$ vers $\hat{H}^{\bullet}$ qui est un foncteur adjoint à gauche [6] (nous dirons seulement adjoint) de P. Pour que $(\hat{s},g)$ soit un (H,p)-projecteur, il faut et il suffit que $(\hat{s},g)$ soit un (H,P)-projecteur tel que $\hat{s} \in H_0^{\bullet}$ et $g \in K$.

EXEMPLE. Supposons $s \in \hat{H}_0^{\bullet}$ et $X \subset R_g(\hat{H}^{\bullet})$. Désignons par $\hat{C}^{\bullet}$ (resp. par $C^{\bullet}$) la sous-catégorie de la catégorie $\nabla\hat{H}^{\bullet}$ (voir 1-C) formée des quatuors $(s,j',j,h) \in \square\hat{H}^{\bullet}$ tels que j et j' appartiennent à X (resp.

à $X.\hat{H}^{\bullet}_{o})$. Soit $\nabla' P$ le foncteur de $\hat{C}^{\bullet}$ vers $\nabla \hat{K}^{\bullet}$ restriction de $\boxminus P$. Pour que $(j^{\boxminus}, (P(s), P(j), f, f'))$ soit un $(C, \nabla' P)$-projecteur (resp.-projecteur strict), il faut et il suffit que j soit (P, X, H)-distingué pour (resp. -engendré par) (f, f').

Soient $\hat{s} \in H^{\bullet}_{o}$ et $g \in P(s).\hat{K}$. Pour que $(\hat{s}, g)$ soit un (H, P)-projecteur, il faut et il suffit que, si $s \in H^{\bullet}_{o}$ et $k \in P(s).\hat{K}.\alpha(g)$, il existe un et un seul $h \in s.\hat{H}.\hat{s}$ tel que $k = P(h).g$. De plus $(\hat{s}, g)$ est un (H, P)-projecteur strict si, et seulement si, pour tout (H,P)-projecteur (s', g'), il existe un $h' \in s'.H.\hat{s}$ tel que $g' = P(h').g$. __

Nous désignons par $\overline{P}$ une restriction $(\overline{K}^{\bullet}, \underline{P}\iota, A^{\bullet})$ de P, où $\overline{K}^{\bullet}$ est une sous-catégorie pleine de $\vec{\hat{K}}^{\bullet}$, par X une partie de $\hat{H}$.

DEFINITION. Nous dirons que P *vérifie* $N(X, \overline{P}, s)$, où $s \in \hat{H}^{\bullet}_{o}$ et $N \subset \hat{H}^{\bullet}_{o}$, si pour tout couple (h, h'), où $h \in A.\hat{H}.s$ et $h' \in \beta(h).\hat{H}.s$, il existe n tel que $n \in R_{g}(\hat{H}^{\bullet}, \hat{H}.\alpha(n)).N$, $h.n = h'.n$, $X.n \subset X$ et que $P(n)$ soit un noyau de $(P(h), P(h'))$ dans $\overline{K}^{\bullet}$. (Donc $P(s) \in \overline{K}$).

Lorsque p est à noyaux n et si $X.n \subset X.f$, où $f \in H^{\bullet}_{\gamma}$ (resp. Si $X.X \subset X \subset R_{g}(\hat{H}^{\bullet})$ et si p est à $X \cap H$-noyaux), P vérifie $N(X.H^{\bullet}_{o}, p, s)$ pour $s \in H^{\bullet}_{o} = N$.

Soit $e \in \hat{K}^{\bullet}_{o}$; notons I la classe $H'^{\bullet}_{o}.\tilde{H}.(\hat{K}, e)$ des éléments $\langle s, k \rangle$ tels que

$$s \in H^{\bullet}_{o} \quad \text{et} \quad k \in p(s).\hat{K}.e\ ;$$

pour tout $i \in I$ nous poserons $i = \langle s_i, k_i \rangle$. Considérons les hypothèses :

P_e) Il existe un produit naturalisé $((p_i)_{i \in I}, S)$ dans P de $(s_i)_{i \in I}$, où $I = H'^{\bullet}_{o}.\tilde{H}.(\hat{K}, e)$, et soit $\hat{g} = [k_i]_{i \in I}$.

P'_e) Il existe $\langle S, \hat{g} \rangle \in H$ tel que, pour tout $i \in I$, il existe $p_i \in H$ vérifiant la relation $(\hat{H}, p_i).\langle S, \hat{g} \rangle = \langle s_i, k_i \rangle = i$.

Naturellement P_e entraîne P'_e.

THEOREME 1. *Soit $e \in K^{\bullet}_{o}$. Si e vérifie P_e et si $(\hat{s}, g)$ est un (H, P)-projecteur tel que $e = \alpha(g)$, on a $\hat{g} = P(\hat{j}).g$, où $\hat{j}$ est $(P, \hat{H}, H)$-distingué pour $\hat{g}$ et $\hat{j} \in S.\hat{H}.\hat{s}$. Supposons que e vérifie P'_e, que P vérifie*

$N(X, \overline{P}, \hat{s})$, où $N = H^{\bullet}_{o}$ (resp. $= \hat{H}^{\bullet}_{o}$), qu'il existe $\hat{j} \in S.R_g(\hat{H}^{\bullet}).\hat{s}$ qui soit (P, X, H)-distingué pour $\hat{g}$ et que $\hat{g} = P(\hat{j}).g$ (resp. - engendré par $(\hat{g}, g)$); alors

$$\langle \hat{s}, g \rangle \in R_d(A'.\tilde{H}, \tilde{H}^{\bullet});$$

de plus $(\hat{s}, g)$ est un (H, P)-projecteur si $H^{\bullet}_{o} \subset A$ (resp. A et un (H,P)-projecteur strict si $X = \hat{H}$ et $A \supset \hat{H}^{\bullet}_{o}$ et si e vérifie P_e).

DEMONSTRATION. Supposons que e vérifie P_e et que $(\hat{s}, g)$ soit un (H, P)- projecteur tel que $e = \alpha(g)$. Si $i = \langle s_i, k_i \rangle \in I$, il existe

$$h_i \in s_i.H.\hat{s} \quad \text{tel que} \quad P(h_i).g = k_i.$$

Par suite il existe $\hat{j} = [h_i]_{i \in I}$ et, puisque $(P(p_i)_{i\in I}, P(S))$ est un produit naturalisé dans $\hat{K}^{\bullet}$, on a (C.S., prop. 9, chap. IV) :

$$P(\hat{j}) = [P(h_i)]_{i\in I}, \text{ d'où } P(\hat{j}).g = [P(h_i).g]_{i\in I} = [k_i]_{i\in I} = \hat{g}.$$

Montrons que $\hat{j}$ est $(P, \hat{H}, H)$- distingué pour $(\hat{g}, g)$. En effet, soit

$$j \in S.\hat{H}.H^{\bullet}_{o} \quad \text{et} \quad \hat{g} = P(j).k.$$

Comme $(\hat{s}, g)$ est un (H, P)- projecteur et que $\langle s, k \rangle \in I$, où $s = \alpha(j)$, il existe un et un seul

$$h \in s.\hat{H}.\hat{s} \quad \text{tel que} \quad k = P(h).g.$$

Il s'ensuit, pour tout $i = \langle s_i, k_i \rangle \in I$:

$$P(p_i.j.h).g = P(p_i).P(j).k = P(p_i).\hat{g} = k_i = P(h_i).g.$$

Ces égalités entraînent $p_i.j.h = h_i$, puisque $\langle \hat{s}, g \rangle \in R_d(H'^{\bullet}_{o}.\tilde{H}, \tilde{H}^{\bullet})$. Il en résulte $\hat{j} = j.h$, car $\hat{j} = [h_i]_{i\in I}$, ce qui prouve la première partie.

- Supposons que e vérifie P'_e et que $\hat{j} \in S.R_g(\hat{H}^{\bullet})$ soit (P, X, H)-distingué pour $\hat{g}$ et $\hat{g} = P(\hat{j})$ (resp.- engendré par $(\hat{g}, g)$); soit $\hat{s} = \alpha(\hat{j})$. Supposons que P vérifie $N(X, \overline{P}, \hat{s})$, pour $N = H^{\bullet}_{o}$ (resp. $= \hat{H}^{\bullet}_{o}$). Soient

$$h \in s.H.\hat{s},\ h' \in s.H.\hat{s},\ s \in A^{\bullet}_{o} \quad \text{et} \quad P(h).g = P(h').g.$$

Il existe $n \in R_g(\hat{H}^{\bullet}, \hat{H}.\alpha(n)).N$ tel que

$$h.n = h'.n, \quad \hat{j}.n \in X$$

et que $P(n)$ soit un noyau de $(P(h), P(h'))$ dans $\overline{K}^{\bullet}$. Il s'ensuit $g \in \overline{K}$,

$$g < P(n) \quad \text{et} \quad \hat{g} = P(\hat{j}).g < P(\hat{j}.n).$$

Comme $\hat{j}.n \in X.H_0^{\bullet}$ (resp. $\hat{j}.n$ est (P,X,H)-distingué pour $\hat{g}$ d'après la proposition 3), il existe $n' \in \hat{H}$ tel que $\hat{j} = \hat{j}.n.n'$. Utilisant $\hat{j} \in R_g(\hat{H}^{\bullet})$, on trouve $\hat{s} = n.n'$ et, puisque $n \in R_g(\hat{H}^{\bullet}, \alpha(n).\hat{H}.\alpha(n))$, on voit que $n \in \hat{H}_{\gamma}^{\bullet}$. Donc $h = h'$ et $\langle \hat{s}, g \rangle \in R_d(A'.\tilde{H}, \tilde{H}^{\bullet})$.-Par ailleurs, avec les notations de P'_e, on a pour tout $i = \langle s_i, k_i \rangle \in I$:

$$h_i = p_i.\hat{j} \in s_i.H.\hat{s} \quad \text{et} \quad P(h_i).g = P(p_i).P(\hat{j}).g = P(p_i).\hat{g} = k_i.$$

Ainsi $(\hat{s}, g)$ est un (H,P)- projecteur si $H_0^{\bullet} \subset A$.

-Nous supposons de plus que $A \supset \hat{H}_0^{\bullet}$, $X = \hat{H}$ et que e vérifie P_e. Alors $(\hat{s}, g)$ est un (H, P)- projecteur et $\langle \hat{s}, g \rangle \in R_d(\hat{H}', \tilde{H}^{\bullet})$. Soit (s', g') un (H, P)-projecteur tel que $\alpha(g') = e$. D'après le début de la démonstration, il existe un $j' \in S.\hat{H}.s'$ qui est $(P, \hat{H}, H)$-distingué pour $\hat{g}$ et tel que $\hat{g} = P(j').g'$. Lorsque $\hat{j}$ est $(P, \hat{H}, H)$- engendré par $(\hat{g}, g)$, on en déduit

$$\hat{j} = j'.h \quad \text{et} \quad g' = P(h).g.$$

Il en résulte que $(\hat{s}, g)$ est un (H, P)- projecteur strict. ■

COROLLAIRE 1. *Soit $e \in K_0^{\bullet}$. Si e vérifie P_e et s'il existe une p- structure libre $\hat{s}$ engendrée par e, il existe un $\hat{j} \in S.R_g(\hat{H}^{\bullet}).\hat{s}$ qui est $(P, \hat{H}.H_0^{\bullet}, H)$- engendré par $\hat{g}$. Soit $N = H_0^{\bullet}$; si e vérifie P'_e, si P vérifie $N(X.H_0^{\bullet}, p, \hat{s})$ et si $\hat{j} \in S.R_g(H^{\bullet}).\hat{s}$ est $(P, X.H_0^{\bullet}, H)$-distingué pour $\hat{g}$, alors $\hat{s}$ est une p-structure libre engendrée par e.*

DEMONSTRATION. Soit $(\hat{s}, g)$ un (H, p)-projecteur. Alors $(\hat{s}, g)$ est un (H, P)- projecteur tel que $\hat{s} \in H$.-Si e vérifie P_e, reprenons les notations de la démonstration du théorème 1; il existe $\hat{j} \in S.H.\hat{s}$ tel que $\hat{j}$ soit $(P, \hat{H}, H)$-distingué pour $\hat{g}$ et que $\hat{g} = P(\hat{j}).g$, à savoir $\hat{j} = [\, h_i \,]_{i \in I}$. Or $\overline{i} = \langle \hat{s}, g \rangle \in I$, d'où $h_{\overline{i}} = \hat{s}$, par suite $p_{\overline{i}}.\hat{j} = h_{\overline{i}} = \hat{s}$, de sorte que $\hat{j}$ est inversible à droite, et a fortiori $\hat{j} \in R_g(\hat{H}^{\bullet})$.-La deuxième affirmation du corollaire se déduit du théorème 1, en prenant pour $\overline{P}$ et pour X respectivement p et $X.H_0^{\bullet}$, dans l'énoncé de ce théorème. ■

COROLLAIRE 2. *Soit X une partie de* $R_g(\hat{H}^\bullet)$ *telle que P soit* $(\hat{K}.K_o^\bullet, X, H)$-*engendrant et vérifie la condition* $N(X.H_o^\bullet, p, s)$ *pour tout* $s \in H_o^\bullet$. *Si tout* $e \in K_o^\bullet$ *vérifie la condition* P'_e, *alors p admet un foncteur adjoint.*

En effet, ce corollaire résulte immédiatement du corollaire 1.

COROLLAIRE 3. *Soit* $e \in \tilde{K}_o^\bullet$. *Supposons que :*

1) $H^\bullet$ *vérifie la condition* $\Sigma(H)$: *Si* $s' \in \hat{H}_o^\bullet$ *et* $k' \in P(s').K.e$, *il existe* $h' \in s'.\hat{H}.H_o^\bullet$ *et* $k'' \in \hat{K}$ *tels que* $k' = P(h').k''$;

2) *e vérifie la condition* P'_e *et P la condition* $N(X, P, \hat{s})$;

3) *il existe* $\hat{j} \in S.R_g(\hat{H}^\bullet).\hat{s}$ *qui soit* (P, X, H)- *engendré par* $\hat{g}$.

Alors $\hat{s}$ *est une P-structure libre engendrée par e.*

DEMONSTRATION. Soit $\hat{g} = P(\hat{j}).g$. D'après le théorème 1, $(\hat{s}, g)$ est un (H, P)- projecteur et

$$\langle \hat{s}, g \rangle \in R_d(\hat{H}', \tilde{H}^\bullet).$$

Soient $s' \in \hat{H}_o^\bullet$ et $k' \in P(s').\hat{K}.e$. La condition 1 assure qu'il existe $\langle s'', k'' \rangle \in I$ et $h' \in s'.\hat{H}.s''$ tels que $P(h').k'' = k'$. Par suite il existe $h'' \in s''.\hat{H}.\hat{s}$ tel que $P(h'').g = k''$, d'où

$$P(h'.h'').g = P(h').k'' = k'.$$

Donc $(\hat{s}, g)$ est un $(\hat{H}, P)$- projecteur. ∎

COROLLAIRE 4. *Supposons que* $e \in \overline{K}_o^\bullet$ *vérifie la condition* P'_e : *soit M la classe des* $h \in S.\hat{H}.S$ *tels que* $P(h).\hat{g} = \hat{g}$ *et* $h \in X.p_i$ *pour un* $i \in I$. *Supposons qu'il existe un* $\hat{j} \in X.\hat{s}$ *ayant les propriétés :* $\hat{j} \in R_g(\hat{H}^\bullet)$, $\hat{j} = h.\hat{j}$ *pour tout* $h \in M$, $P(\hat{j})$ *est un noyau de* $P(M)$ *dans* $\hat{K}^\bullet$ *et P vérifie* $H_o^\bullet(X, \overline{P}, \hat{s})$. *Alors on a* $\hat{g} = P(\hat{j}).g$, *et* $(\hat{s}, g)$ *est un* (H, P)-*projecteur, si* $H_o^\bullet \subset A$.

DEMONSTRATION. D'après le théorème 1, il suffit de montrer que $\hat{j}$ est (P, X, H)-distingué pour $\hat{g}$. En effet, puisque $P(\hat{j})$ est un noyau de $P(M)$ dans $\hat{K}^\bullet$, on a $\hat{g} = P(\hat{j}).g$. Soit $j \in S.X.H_o^\bullet$, $\hat{g} = P(j).g'$. Comme e vérifie P'_e, il existe $p_i \in \alpha(j).\hat{H}.S$ tel que $P(p_i).\hat{g} = g'$, d'où

$$\hat{g} = P(j).P(p_i).\hat{g}, \qquad j.p_i \in M.$$

$$\text{et} \quad \hat{j} = j.p_i.\hat{j} < j.$$

Puisque $P(p_i.\hat{j}).g = g'$, il s'ensuit que $\hat{j}$ est (P, X, H)-distingué pour $\hat{g}$. Donc $(\hat{s}, g)$ est un (H, P)- projecteur. ■

Du corollaire 1 il résulte que, si e vérifie P_e, si $e \in K_o^{\bullet}$ et si p est à noyaux, il existe une p- structure libre $\hat{s}$ engendrée par e si, et seulement si, il existe $\hat{j} \in S.\hat{H}.\hat{s}$ qui soit $(P, R_g(\hat{H}^{\bullet}, H).H_o^{\bullet}, H)$- engendré par $\hat{g}$. Dans ce cas, $\hat{j}$ est aussi $(P, \hat{H}.H_o^{\bullet}, H)$- engendré par $\hat{g}$.

B. CRITERES D'EXISTENCE DE FONCTEURS ADJOINTS.

Supposons que $\hat{\mathfrak{M}}_o$ soit un univers, que $\mathfrak{M}_o \subset \hat{\mathfrak{M}}_o$ et que $\mathfrak{M}_o \in \hat{\mathfrak{M}}_o$; soient $\mathfrak{M} \subset \hat{\mathfrak{M}}$ les catégories pleines d'applications correspondantes, $\tilde{\mathfrak{M}}$ la saturante de $\mathfrak{M}$ dans $\hat{\mathfrak{M}}$. Soit $Q = (\hat{\mathfrak{M}}, \underline{Q}, \hat{K}^{\bullet})$ un foncteur fidèle tel que $Q(K) \subset \mathfrak{M}$, lorsqu'il en existe un. Des § 2 et 3, on déduit :

CRITERE 1. *Si les conditions suivantes sont vérifiées, p admet un adjoint p'(resp. p'; $\hat{s}$ est une P-structure libre engendrée par $e \in K_o^{\bullet}$, si $\hat{s} = p'(e)$):*

1) $Q.P$ est $(\mathfrak{M}^{\cup}, X, H)$- engendrant; $X \subset R_g(\hat{H}^{\bullet})$, $P(X) \subset Q_i^{\ulcorner}$;

2) P est à $\hat{\mathfrak{M}}_o$- produits et, pour tout $M \in \mathfrak{M}_o$, on a $H_M \in \hat{\mathfrak{M}}_o$, où H_M est la classe des $s \in H_o^{\bullet}$ tels que $Q.P(s) = M$;

3) P vérifie $N(X.H_o^{\bullet}, \overline{P}, s)$, où $s \in H$, $\overline{P} = p$ (resp. $= P$).

En effet, puisque $Q(\hat{K}.K_o^{\bullet}) \subset \hat{\mathfrak{M}}.\mathfrak{M}_o$ et que $Q.P$ est $(\hat{\mathfrak{M}}.\mathfrak{M}_o, X, H)$-engendrant, P est $(\hat{K}.K_o^{\bullet}, X, H)$-engendrant d'après la proposition 7-1. Soit $e \in K_o^{\bullet}$; alors $H^{\bullet}$ vérifie $\Sigma(H)$ (cor. 3, th. 1); l'application

$$\langle s, g \rangle \to (s, Q(g))$$

est une injection de $H_o^{\bullet\bullet}.\tilde{H}.(\tilde{K}, e)$ dans $I' = \bigcup_{M \in \mathfrak{M}_o} (H_M \times M.\mathfrak{M}.Q(e))$.

Comme $\mathfrak{M}_o \in \hat{\mathfrak{M}}_o$ et que $\hat{\mathfrak{M}}_o$ est un univers, on trouve $I' \in \hat{\mathfrak{M}}_o$. Donc I est une $\hat{\mathfrak{M}}_o$- classe et, P étant à $\hat{\mathfrak{M}}_o$- produits, e vérifie la condition P_e. Le critère 1 résulte alors des corollaires 2 et 3 du théorème 1. ■

COROLLAIRE. *Supposons $P = (\hat{\mathfrak{M}}, \underline{P}, \hat{H}^{\bullet})$ et $H = \overset{-1}{\underline{P}}(\mathfrak{M}) \in \hat{\mathfrak{M}}_o$. Si P est à $\hat{\mathfrak{M}}_o$-produits, résolvant à droite et $\ulcorner$- engendrant pour $\mathfrak{M}$, alors p admet un adjoint.*

CRITERE 2. *Si les conditions suivantes sont vérifiées, p a un adjoint :*

1) P est à $\mathfrak{M}_o$- produits fibrés;

2) Pour tout $S \in \hat{H}^{\bullet}_o$, $M \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$ et $M \subset Q.P(S)$, il existe $j \in S.X.H^{\bullet}_o$ tel que $M \subset \underline{\beta}(j')$, où $\underline{j}' = Q.P(j)$ et $X = (Q.P)^{\ulcorner}_i \cap \underline{\overset{-1}{P}}(Q^{\ulcorner}_i)$;

3) P est à $\hat{\mathfrak{M}}_o$-produits et $H^{\bullet}_o \in \hat{\mathfrak{M}}_o$;

4) P est fidèle et Q est compatible avec les noyaux.

En effet, on a $P(X) \subset Q^{\ulcorner}_i$ et $X.X \subset X$. Les conditions 1 et 2 entraînent que $Q.P$ est $(\mathfrak{M}^{\cup}, X, H)$-engendrant d'après la proposition 12. Si n est un noyau de (h, h') dans P, et par suite dans $Q.P$, on a $n \in X$ (proposition 2). Si $\alpha(n) = s$ et $\beta(n) \in \hat{H}^{\bullet}_o$, il existe un $j \in s.X.H^{\bullet}_o$ qui est (P, X, H)-distingué pour $Q.P(s)$ et on a $\hat{j} \in \hat{H}^{\bullet}_{\gamma}$, car $Q.P(\hat{j}) \in \tilde{\mathfrak{M}}_{\gamma}$. Donc $n.\hat{j} \in X.H^{\bullet}_o$, de sorte que P vérifie $H^{\bullet}_o(X.H^{\bullet}_o, P, \beta(n))$. Ainsi le critère 2 est ramené au critère 1.∎

CRITERE 3. *Si les conditions suivantes sont vérifiées, P admet un adjoint :*

1) P est à X-noyaux et à $\hat{\mathfrak{M}}_o$-produits; $\hat{H}^{\bullet}_o \subset X.X \subset X \subset R_g(\hat{H}^{\bullet})$;

2) $\hat{H}^{\bullet}$ est $\hat{\mathfrak{M}}_o$- petite pour X et $e'.\hat{K}.e \in \mathfrak{M}_o$, si $e \in \hat{K}^{\bullet}_o$ et $e' \in \hat{K}^{\bullet}_o$;

3) X est $\hat{\mathfrak{M}}_o$-$\vee$-stable pour $(P, \hat{H})$;

4) Pour tout $e \in \hat{K}^{\bullet}_o$, il existe une sous-catégorie $H^{\bullet}_e$ de $\hat{H}^{\bullet}$ telle que $H^{\bullet}_e \in \hat{\mathfrak{M}}_o$ et que $H^{\bullet}_e$ vérifie la condition $\Sigma(H_e)$ (corollaire 3 du théorème 1).

En effet, soit $e \in \hat{K}^{\bullet}_o$ et $H = H_e$. La classe $I/\tilde{H}^{*}_{\gamma}$ est isomorphe à

$$I' \subset \bigcup_{e' \in P(H^{\bullet}_o)} (H \times e'.\hat{K}.e) \in \hat{\mathfrak{M}}_o,$$

de sorte que e vérifie P_e. Puisque P est à X-noyaux, il vérifie $\hat{H}^{\bullet}_o(X, P, s)$ pour tout $s \in (H_e)^{\bullet}_o$. Le corollaire 2 de la proposition 8 appliqué au cas $H = \hat{H}$ prouve que P est $(\hat{K}, X, \hat{H})$-engendrant. Les hypothèses du corollaire 3 du théorème 1 sont donc vérifiées, et ce corollaire affirme qu'il existe une P- structure libre engendrée par e. Il s'ensuit que P admet un adjoint.∎

CRITERE 4. *Si la condition 4 du critère 3 est vérifiée ainsi que les conditions 1 et 2 suivantes, P admet un adjoint :*

1) P est un foncteur à noyaux et à $\hat{\mathfrak{M}}_o$-produits;

2) $e'.\hat{K}.e \in \hat{\mathfrak{M}}_o$ pour tout $e \in \hat{K}^{\bullet}_o$ et tout $e' \in \hat{K}^{\bullet}_o$ et $S.\hat{H}.S \in \hat{\mathfrak{M}}_o$ si $S \in \hat{H}^{\bullet}_o$.

En effet, soit $e \in \hat{K}^{\bullet}_o$ et $H = H_e$. On voit comme dans le critère 3 que e vérifie P_e relativement à H. Si $s \in \hat{H}^{\bullet}_o$ et $g \in P(s).\hat{K}.e$, il existe

$$h \in s.\hat{H}.H_e \quad \text{et} \quad g' \in \hat{K} \quad \text{tels que} \quad P(h).g' = g.$$

La relation $i = \langle \alpha(h), g' \rangle \in I$ assure l'existence de $p_i \in \alpha(h).\hat{H}.S$ tel que $g' = P(p_i).\hat{g}$. On en déduit $P(h.p_i).\hat{g} = g$, de sorte que e vérifie P'_e relativement à $\hat{H}$. P étant à noyaux et à $\hat{\mathfrak{M}}_o$- produits, il est à $\hat{\mathfrak{M}}_o$- limites projectives. Par suite la classe M des $h \in S.\hat{H}.S$ tels que $P(h).\hat{g} = \hat{g}$ a un noyau. Le critère résulte du coro. 4 (pour $X = \hat{H} = H$). ∎

CAS PARTICULIERS

1) Si on prend pour X dans le critère 3 la classe $R_g(\hat{H}^{\bullet})$, on retrouve le théorème d'existence d'adjoint dû à Freyd [5] : *Si P est à $\hat{\mathfrak{M}}_o$- limites projectives, si $\hat{H}^{\bullet}$ est localement petite et si, pour tout $e \in \hat{K}^{\bullet}_o$, il existe une petite catégorie $H^{\bullet}_e$ vérifiant la condition $\Sigma(H_e)$* (corollaire 3 du théorème 1), *alors P admet un adjoint.* Le critère 4 a été montré directement dans [7], dans le cas où $X = \hat{H} = H$ (voir aussi [9]).

2) Supposons que P soit le foncteur injection canonique vers $\hat{K}^{\bullet}$ d'une sous-catégorie pleine $\hat{H}^{\bullet}$ de $\hat{K}^{\bullet}$. De la proposition 7 et, du corollaire 1 du théorème 1 résultent les propositions 5-2, 6-2 [1] et corollaires.

REMARQUES.

1) Le corollaire 1 d'une part et d'autre part les corollaires 3 et 4 du théorème 1 sont de nature différente, et a fortiori les critères d'existence d'adjoints qui s'en déduisent (corollaire 2 du théorème 1, critères 1 et 2 d'une part; corollaire 3 du théorème 1, critères 3 et 4 et théorème de de Freyd d'autre part). Alors que dans les corollaires 3 et 4 du théorème 1 la conclusion porte sur le foncteur P, dans le corollaire 2 le foncteur P intervient seulement en tant qu'auxilliaire (i.e. on peut choisir P de la manière la plusintéressante). En particulier supposer qu'il existe un pro-

duit de $(s_i)_{i \in I}$ dans P est une condition beaucoup plus faible que de demander l'existence de certains produits dans p; en effet, nous verrons plus loin que tout foncteur peut être étendu en un foncteur à produits. Ainsi le corollaire 2 permet de montrer l'existence de foncteurs adjoints pour des foncteurs qui ne sont pas à produits, ce qui n'est pas le cas pour les critères 3 et 4 (et le théorème de Freyd).

2) Supposons que p soit de la forme $(K^{\bullet}, \iota, H^{\bullet})$, où $H^{\bullet}$ est une sous-catégorie pleine de $K^{\bullet}$, et qu'il existe un foncteur d'homomorphismes $q = (\mathfrak{M}, \underline{q}, K^{\bullet})$ tel que $K_o^{\bullet}$ soit la classe des structures d'une espèce de structures $(\mathfrak{M}_{\gamma}, K_o^{\bullet}, \kappa')$ définie par un foncteur typique F [8], $H_o^{\bullet}$ étant la classe des structures relative à un sous-foncteur typique F' de F. On pourra alors choisir pour P le foncteur $(\hat{K}^{\bullet}, \iota, \hat{H}^{\bullet})$, en désignant par $\hat{K}^{\bullet}$ et $\hat{H}^{\bullet}$ les catégories d'homomorphismes relatives aux espèces de structures définies par les foncteurs typiques $\hat{F}$ et $\hat{F}'$ respectivement prolongeant F et F' à l'univers $\hat{\mathfrak{M}}_o$. Par exemple, si $p = (\mathfrak{N}', \iota, \mathfrak{F})$, on prendra pour P le foncteur $(\hat{\mathfrak{N}}', \iota, \hat{\mathfrak{F}})$ associé à $\hat{\mathfrak{M}}$. Le critère 1 prouve que $\mathfrak{N}'$ est une catégorie à $\mathfrak{F}$-projections (C.S. th.9, chap. III).

3) Supposons que $Q' = Q.P$ soit $\digamma$-engendrant pour $\hat{\mathfrak{M}}$ et que, si $\hat{M} \in \mathfrak{M}_o$, il existe un cardinal $\alpha(\overline{\overline{M}})$ (où $\overline{\overline{M}}$ = cardinal de M) inférieur au cardinal $sup\ \overline{\overline{R}}$, où $R \in \hat{\mathfrak{M}}_o$, et tel que :

a) Soit $S \in \hat{H}_o^{\bullet}$, $M' \subset Q'(S)$ et $\overline{\overline{M'}} \leq \overline{\overline{M}}$; si s est la Q'-sous-structure de S engendrée par M', on a $\overline{\overline{Q'(s)}} \leq \alpha(\overline{\overline{M}})$.

b) Soit $\mathfrak{M}'$ la classe des $M' \in \hat{\mathfrak{M}}_o$ tels que $\overline{\overline{M'}} \leq \alpha(\overline{\overline{M}})$; si $M' \in \mathfrak{M}'$, on a $\overline{\overline{H_{M'}}} \leq \alpha(\overline{\overline{M}})$, où $H_{M'} = \overset{-1}{\underline{Q'}}(M') \cap \hat{H}_o^{\bullet}$.

Soit $e \in \hat{K}_o^{\bullet}$ et $M = \underline{Q}(e)$; notons $H_e^{\bullet}$ une réduite (C.S. chap. V) de $\overline{H}^{\bullet}$ en posant $\overline{H} = \overset{-1}{Q'}(\mathfrak{M}'.\hat{\mathfrak{M}}.\mathfrak{M}')$. Si Q'_{γ} est un foncteur d'hypermorphismes saturé, $\underline{Q'}$ est $(\mathfrak{M}.e, X, H_e)$-engendrant, où $X = \overline{Q'_i}$, et P remplit la condition 4 du critère 3. Donc (critère 3 et prop. 11) si P est à X-noyaux et à $\hat{\mathfrak{M}}_o$-produits, il admet un adjoint.

C. APPLICATIONS.

THEOREME 2. *Soit $\hat{q} = (\mathfrak{M}, \underline{\hat{q}}, \hat{H}^{\bullet})$ un foncteur et soit $H^{\bullet}$ une sous-caté-*

gorie pleine de $\hat{H}^{\bullet}$ *telle que* $H \in \hat{\mathfrak{M}}_0$ *et* $\hat{q}(H) \subset \mathfrak{M}$. *Supposons que* $\hat{q}$ *soit à* $\hat{\mathfrak{M}}_0$*-produits et* $H^{\bullet}$ *à noyaux, que* $X \subset \hat{q}_i^{\ulcorner}$ *et* $X.n \subset X.H^{\bullet}_{\gamma}$ *pour tout noyau* n *dans* $H^{\bullet}$ *et que* $\hat{q}$ *soit* $(\mathfrak{M}^{\cup}, X, H)$*-engendrant. Alors :*

1) Si $K^{\bullet}$ *est une catégorie telle que* $K \in \mathfrak{M}_0$ *et si* $\mathfrak{M}_0$ *et* $\hat{\mathfrak{M}}_0$ *sont des univers,* $H^{\bullet}$ *est une catégorie à* $K^{\bullet}$*-limites inductives.*

2) Si $s \in H^{\bullet}_0$ *et si* r *est une relation d'équivalence sur* $\hat{q}(s)$, *il existe une* q*-structure quasi-quotient de* s *par* r, *où* $q = (\mathfrak{M}, \underline{\hat{q}}\,\iota, H^{\bullet})$.

DEMONSTRATION. Soit $K^{\bullet} \in \mathfrak{F}_0$. Désignons par $\hat{N}^{\bullet}$ la catégorie longitudinale des transformations naturelles $\mathfrak{N}(\hat{H}^{\bullet}, K^{\bullet})^{\square\square}$ entre foncteurs de $K^{\bullet}$ vers $\hat{H}^{\bullet}$. Soit P le foncteur de $\hat{H}^{\bullet}$ vers $\hat{N}^{\bullet}$ associant à h le foncteur de $K^{\bullet}$ vers $\boxminus \hat{H}^{\bullet}$ constant sur $h^{\boxminus}$. Nous posons $P(h) = \overline{h}$.

-Soit $s_i \in \hat{H}^{\bullet}_0$ pour tout $i \in I$, où $I \in \hat{\mathfrak{M}}_0$. Par hypothèse, il existe un produit naturalisé $((p_i)_{i \in I}, S)$ de $(s_i)_{i \in I}$ dans $\hat{H}^{\bullet}$. On peut aussi définir S comme la limite projective du foncteur σ de I^o vers $\hat{H}^{\bullet}$ défini par : $i \to s_i$, en désignant par I^o la catégorie telle que $I^o_0 = I$. Par suite il résulte de la proposition duale de la proposition 2 (C.S. appendice II) que $\overline{S}$ est la limite projective de $(\hat{N}^{\bullet}, \underline{P\,\sigma}, I^o)$, c'est-à-dire que S est un produit de $(s_i)_{i \in I}$ dans P.- Désignons par $N^{\bullet}$ la sous-catégorie de $\hat{N}^{\bullet}$ isomorphe à $\mathfrak{N}(H^{\bullet}, K^{\bullet})^{\square\square}$, formée des

$$\Psi \in \hat{N} \quad \text{tels que} \quad \Psi(K) \subset \square H^{\bullet}.$$

On a $P(H) \subset N$. De la même proposition on déduit que $p = (N^{\bullet}, \underline{P}\,\iota, H^{\bullet})$ est un foncteur à noyaux, de sorte que P vérifie $H^{\bullet}_0(X.H^{\bullet}_0, p, s)$ pour tout $s \in H^{\bullet}_0$.- Supposons $S \in \hat{H}^{\bullet}_0$ et $\Psi \in \overline{S}.\hat{N}.N^{\bullet}_0$; soit $(\overline{M}, \tau, G)$, où $M = \hat{q}(S)$, le triplet définissant la transformation naturelle $\boxminus \hat{q}.\Psi$. Pour tout $e \in K^{\bullet}_0$, on a $\tau(e) \in \hat{\mathfrak{M}}.\mathfrak{M}_0$, d'où $M' = \underline{\bigcup_{e \in K^{\bullet}_0} \beta(\tau(e))} \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$. Par hypothèse, il existe un $j \in S.\hat{q}_i^{\ulcorner}$ qui est $(\hat{q}, X.H^{\bullet}_0, H)$-engendré par (M, ι, M'). On montre facilement que j est alors $(P, X.H^{\bullet}_0, H)$-engendré par Ψ. Donc P est $(\hat{N}.N^{\bullet}_0, X, H)$-engendrant.- Si $\Phi \in N^{\bullet}_0$ et si I est la classe des (s, Ψ) tels que $s \in H^{\bullet}_0$ et $\Psi \in \overline{s}.N.\Phi$, on définit une bijection $(s, \Psi) \to (s, (\Psi(e))_{e \in K^{\bullet}_0})$ de I sur $I' \in \hat{\mathfrak{M}}_0$, car $H \in \hat{\mathfrak{M}}_0$. Il s'ensuit que Φ vérifie P_{Φ}. Ainsi les hypothèses du corollaire 1 du théorème 1 sont remplies, et p admet un adjoint. Ceci signifie que $H^{\bullet}$ est à $K^{\bullet}$-limites inductives. -La démonstration du théorème 2-2 [1] s'étend immédiatement pour démontrer la deuxième affirmation. - Rappelons que, d'après le théorème 3-2 [1], si $F = (H^{\bullet}, \underline{F}, K^{\bullet}) \in \mathcal{F}$, alors F admet pour limite inductive s une q-structure quasi-quotient de $S = \sum_{i \in K_o^{\bullet}} F(i)$, lorsque q est fidèle, à savoir : si j désigne l'application canonique de

$$E = \sum_{i \in K_o^{\bullet}} q.F(i)$$

dans $q(S)$, alors s est une q- structure quasi-quotient de S par la relation d'équivalence engendrée par $j(E, A, E)$, où A est la classe des

$$(x, q.F(k)(x)) \quad \text{tels que} \quad x \in q.F(i) \quad \text{et} \quad k \in K.i,$$

i. e. par la relation d'équivalence image par j de la relation r telle que

$$\varinjlim q.F = E/r. \blacksquare$$

Le théorème 3-2 [1] suggère de généraliser comme suit la notion de limite inductive : Soit $q = (\mathfrak{M}, \underline{q}, H^{\bullet})$ un foncteur fidèle. Soit $I^{\bullet}$ une catégorie, Φ_o une application de $I_o^{\bullet}$ dans $H_o^{\bullet}$ et φ un foncteur de $I^{\bullet}$ vers $\mathfrak{M}$ tel que

$$q(\Phi_o(i)) = \varphi(i) \quad \text{pour tout} \quad i \in I_o^{\bullet}.$$

Supposons qu'il existe une somme $\sum_{i \in I_o^{\bullet}} \Phi_o(i) = S$ dans $H^{\bullet}$ et soit j l'application canonique de

$$E = \sum_{i \in I_o^{\bullet}} \varphi(i)$$

dans $q(S)$; soit r la relation d'équivalence sur E telle que $\varinjlim \varphi = E/r$.

DEFINITION. Avec les notations précédentes et s'il existe une q- structure quasi-quotient $\hat{s}$ de S par $j(r)$, on appellera $\hat{s}$ une *q-limite inductive de* (φ, Φ_o).

En particulier, si Φ_o est la restriction à $I_o^{\bullet}$ d'un foncteur $\Phi = (H^{\bullet}, \underline{\Phi}, I^{\bullet})$ tel que $q.\Phi = \varphi$ (ces conditions déterminent alors Φ d'une manière unique puisque q est fidèle), il résulte du théorème 3-2 [1] que $\hat{s}$ est une limite inductive de Φ si, et seulement si, $\hat{s}$ est une q- limite inductive de (φ, Φ_o). Du théorème 2, on déduit :

COROLLAIRE. *Si les conditions du théorème 2 sont vérifiées, si* $\varphi = (\mathfrak{M}, \underline{\varphi}, I^\bullet)$ *est un foncteur, où* $I^\bullet \in \mathfrak{F}_o$, *et si* Φ_o *est une application de* $I_o^\bullet$ *dans* $H_o^\bullet$ *telle que* $\underline{q}\Phi_o(i) = \varphi(i)$ *pour tout* $i \in I_o^\bullet$, *il existe une* q-*limite inductive de* (φ, Φ_o), *en supposant* q *fidèle.*

Produits tensoriels :

Soit $q = (\mathfrak{M}, \underline{q}, H^\bullet)$ un foncteur fidèle, $I \in \mathfrak{M}_o$ et $\Sigma(q)$ la classe des triplets $\overline{f} = (s, f, (s_i)_{i \in I})$ vérifiant les conditions :

1) $f = (q(s), \underline{f}, \prod_{i \in I} q(s_i)) \in \mathfrak{M}$, $s \in H_o^\bullet$, $s_i \in H_o^\bullet$;

2) Soit $\overline{i} \in I$ et $J = I - \{\overline{i}\}$. Pour tout $u = (x_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} q(s_j)$, il existe un $\overline{f}^u \in s.H.s_{\overline{i}}$ tel que $q(\overline{f}^u)$ soit l'application $x_{\overline{i}} \mapsto f(x_i)_{i \in I}$ de $q(s_{\overline{i}})$ dans $q(s)$.

On définit une catégorie $T(q)$, si $\mathfrak{M}_o$ est un univers, telle que

$$T(q) = H \cup H^I \cup \Sigma(q)$$

et que $H^\bullet$ et $H^{\bullet I}$ soient des sous-catégories pleines, en posant :

$$(s, f, (s_i)_{i \in I}).(g_i)_{i \in I} = (s, f.\prod_{i \in I} q(g_i), \alpha(g_i)_{i \in I})$$

$$\text{si } (s, f, (s_i)_{i \in I}) \in \Sigma(q) \quad \text{et} \quad g_i \in s_i.H;$$

$$g.(s, f, (s_i)_{i \in I}) = (\beta(g), q(g).f, (s_i)_{i \in I})$$

$$\text{si } (s, f, (s_i)_{i \in I}) \in \Sigma(q) \quad \text{et} \quad g \in H.s.$$

THEOREME 3. *Si les conditions du théorème 2 sont vérifiées et si* $q(n)$ *est une injection pour tout noyau* n *dans* $H^\bullet$, *alors* $T(q)$ *est une catégorie à* H-*projections, lorsque* $\hat{q}$ *est fidèle.*

DEMONSTRATION. Soit $T(\hat{q})$ la catégorie associée au foncteur $\hat{q}$ et à I. Le foncteur $\hat{q}$ se prolonge en un foncteur Q de $T(\hat{q})$ vers $\hat{\mathfrak{M}}$ en posant

$$Q(s, f, (s_i)_{i \in I}) = (\hat{q}(s), \underline{f}, \prod_{i \in I} \hat{q}(s_i)) \quad \text{et} \quad Q((g_i)_{i \in I}) = \prod_{i \in I} \hat{q}(g_i).$$

-Montrons que, si $s_\lambda \in \hat{H}_o^\bullet$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ où $\Lambda \in \hat{\mathfrak{M}}_o$ et si $((p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, S)$ est un produit naturalisé de $(s_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ dans $\hat{q}$, alors c'est aussi un produit naturalisé dans $T(\hat{q})$. En effet, soit

$$\overline{f}_\lambda = (s_\lambda, f_\lambda, (s'_i)_{i\in I}) \in \Sigma(\hat{q}) \quad \text{pour tout} \quad \lambda \in \Lambda.$$

On a

$$f = [\,\hat{q}(s_\lambda), \underline{f}_\lambda, \prod_{i\in I} \hat{q}(s'_i)]_{\lambda\in\Lambda} \in \hat{\mathfrak{M}}.$$

Soit $\overline{i} \in I$ et $J = I - \{\overline{i}\}$; si $u = (x_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} \hat{q}(s'_j)$, désignons par $\overline{f}^u_\lambda$ l'élément de $s_\lambda.\hat{H}.s'_{\overline{i}}$ associé à $\overline{f}_\lambda$ par définition de la catégorie $T(\hat{q})$. Posons

$$\overline{f}^u = [\,\overline{f}^u_\lambda\,]_{\lambda\in\Lambda} \in S.\hat{H}.s'_{\overline{i}}.$$

Comme $\hat{q}(\overline{f}^u)$ est l'application :

$$x_{\overline{i}} \mapsto (\overline{f}^u_\lambda(x_{\overline{i}}))_{\lambda\in\Lambda} = (f_\lambda((x_i)_{i\in I}))_{\lambda\in\Lambda} = f((x_i)_{i\in I})$$

de $\hat{q}(s'_{\overline{i}})$ dans $\hat{q}(S)$, on trouve

$$\overline{f} = (S, f, (s'_i)_{i\in I}) \in \Sigma(\hat{q}) \quad \text{et} \quad \overline{f}_\lambda = p_\lambda.\overline{f}.$$

Ainsi S est un produit de $(s_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ dans $T(\hat{q})$. - Soit n un noyau de (h, h') dans $H^{\bullet}$, où $h \in H$, $\alpha(h) = s$ et $h' \in \beta(h).H.s$. Par hypothèse $q(n)$ est un monomorphisme. Montrons que n est aussi un noyau de (h, h') dans $T(q)$. En effet, soit

$$\overline{f} = (s, f, (s_i)_{i\in I}) \in \Sigma(q) \quad \text{tel que} \quad h.\overline{f} = h'.\overline{f}.$$

Soit $\overline{i} \in I$, $J = I - \{\overline{i}\}$ et $u = (x_j)_{j\in J} \in \prod_{i\in J} \hat{q}(s_j)$. Les éléments $h.\overline{f}^u$ et $h'.\overline{f}^u$, où $\overline{f}^u$ est l'élément associé à $\overline{f}$ par définition, ont pour projection l'application

$$x_{\overline{i}} \mapsto \underline{h}(f((x_i)_{i\in I})) = \underline{h}'(f((x_i)_{i\in I})) \quad \text{de} \quad \hat{q}(s_{\overline{i}}) \quad \text{dans} \quad \hat{q}(\beta(h));$$

puisque $\hat{q}$ est fidèle, ils sont égaux. Par suite il existe un et un seul

$$\overline{k}^u \in s'.H.s_{\overline{i}} \quad \text{tel que} \quad \overline{f}^u = n.\overline{k}^u, \text{ où } s' = \alpha(n);$$

on a $\overline{k}^u(x_{\overline{i}}) = \underline{n}^{-1}(f((x_i)_{i\in I}))$. Il s'ensuit

$$k = (\hat{q}(s'), \underline{n}^{-1}f, \prod_{i\in I} \hat{q}(s_i)) \in \mathfrak{M} \quad \text{et} \quad \overline{k} = (s', k, (s_i)_{i\in I}) \in T(q);$$

de plus $\overline{k}$ est l'unique élément de $T(q)$ tel que $n.\overline{k} = \overline{f}$. Il en résulte que n est un noyau de (h, h') dans $T(q)$.- Une démonstration analogue prouve que $X \subset Q^{\leftarrow}_i$. Les hypothèses du critère 1 sont donc vérifiées pour

$$P = (T(\hat{q}), \iota, \hat{H}^{\bullet}) \quad \text{et} \quad p = (T(q), \iota, H^{\bullet}).$$

Par suite $T(q)$ est une catégorie à H-projections. ■

DEFINITION. Avec les notations du théorème 3, une $(H, T(q))$-projection de $(s_i)_{i \in I}$ est appelée un *q-produit tensoriel de* $(s_i)_{i \in I}$.

EXEMPLES.

1) Soit $H^{\bullet}$ la catégorie des homomorphismes entre modules sur un anneau A (unitaire ou non) relative à $\mathfrak{M}$, et soit q son foncteur projection canonique vers $\mathfrak{M}$. Alors $(M_i)_{i \in I}$ admet le produit tensoriel $\bigotimes_{i \in I} M_i$ (usuel) pour q-produit tensoriel.

2) Si q est l'un des foncteurs projection canonique vers $\mathfrak{M}$ de la catégorie $\mathfrak{T}$ des applications continues, Ω des applications ordonnées, $\mathfrak{F}$ des foncteurs, $\mathfrak{N}'$ des néofoncteurs ou de l'une des sous-catégories de Ω formées des applications sous-préinductives, f-sous-inductives [1] ou f-inductives [1], alors il existe des q-produits tensoriels .

REMARQUE. Soient $(C^{\bullet}, D)$ une catégorie q-dominée, $e \in H^{\bullet}_o$, $s \in C^{\bullet}_o$ et D_s le foncteur de $C^{\bullet}$ vers $H^{\bullet}$ tel que $D_s(k) = D(k, s)$. La notion de produit tensoriel considérée dans [5] (où $(C^{\bullet}, D)$ est une catégorie additive) se généralise en appelant D-produit tensoriel de (e, s) une D_s-structure libre engendrée par e. On peut «relativiser» la définition donnée plus haut, de sorte que les deux notions soient identiques lorsque $C^{\bullet}$ a un générateur. Les q-produits tensoriels «relativisés» seront étudiés dans [10], où sera indiquée une construction du q-produit tensoriel comme structure quasi-quotient d'une somme.

3. Quasi-cohomologie.

A) p-IDEAUX.

Soit $p = (\mathfrak{M}, \underline{p}, H^{\bullet})$ un foncteur fidèle, où $\mathfrak{M}$ est une catégorie pleine d'applications. Si $k \in H$ et si $p(k)$ est compatible avec une relation r sur $p(\alpha(k))$, on dira que k est compatible avec r.

PROPOSITION 14. *Soit $H^{\bullet}$ une catégorie et r une application de H dans la classe des relations vérifiant les conditions :*

1) $r(h)$ est une relation sur $p(\beta(h))$ pour tout $h \in H$;

2) Soit $(h, h') \in H^\bullet * H^\bullet$; si $k \in H.\beta(h)$ est compatible avec $r(h)$, alors k est aussi compatible avec $r(h.h')$.

La classe I_r formée des $k.h$ tels que $(k, h) \in H^\bullet * H^\bullet$ et k compatible avec $r(h)$ est un idéal de $H^\bullet$.

En effet, soit $k.h \in I_r$. Si $f \in H.\beta(k)$, on voit que $f.k$ est compatible avec $r(h)$, de sorte que $f.k.h \in I_r$, d'où $H.I_r \subset I_r$. Soit $f' \in \alpha(h).H$. Puisque k est compatible avec $r(h)$, il est compatible avec $r(h.f')$ d'après la condition 2, donc

$$k.(h.f') \in I_r \quad \text{et} \quad I_r.H \subset I_r.$$

Ceci montre que I_r est un idéal de $H^\bullet$. ■

DEFINITION. On appelle *p-idéal* un idéal J de $H^\bullet$ vérifiant la condition suivante : Pour tout $h \in \overleftarrow{p_i}$, il existe une relation r sur $p(\beta(h))$ telle que l'on ait :

$k.h \in J$ si, et seulement si, $k \in H.\beta(h)$ est compatible avec r.

Il peut y avoir plusieurs relations r ayant la propriété indiquée dans cette définition; nous supposerons que l'une de ces relations a été choisie, et nous la noterons $r(h)$. On pose encore $\underline{k} = \underline{p(k)}$, si $k \in H$.

PROPOSITION 15. *Supposons que $\mathfrak{M}_0$ soit un univers et p un foncteur à $\mathfrak{M}_0$-produits fibrés. Si J est un p-idéal, l'application $h \to r(h)$ de $\overleftarrow{p_i}$ dans la classe des relations se prolonge en une application r définie sur H, et J est l'idéal I_r associé à r dans la proposition 14.*

DEMONSTRATION. D'après la proposition 11, tout $f \in H$ admet des $(\mathfrak{M}^i, p, H)$-images; choisissons-en une notée $\hat{f}$. En particulier, si $h \in \overleftarrow{p_i}$, choisissons $\hat{h} = h$. Montrons que l'application $r : f \to r(\hat{f})$ vérifie les conditions de la proposition 14. En effet, $r(\hat{f})$ est une relation sur $p(\beta(f))$. Soit $(f, f') \in H^\bullet * H^\bullet$ et $k \in H.\beta(f)$ compatible avec $r(\hat{f})$. On a $k.\hat{f} \in J$, par définition. Puisque

$$f = \hat{f}.f_1, \quad \text{on a} \quad f.f' = \hat{f}.f_1.f';$$

il en résulte qu'il existe

$$g \in H \quad \text{tel que} \quad \widehat{(f.f')} = \hat{f}.g.$$

On en déduit

$$k.\widehat{(f.f')} = k.\hat{f}.g \in J.g \subset J$$

et, par hypothèse, k est compatible avec $r(f.f')$, ce qu'il fallait démontrer. - Soit I_r l'idéal associé à l'application r. Si $k.f \in I_r$, alors k est compatible avec $r(f)$, et l'on trouve

$$k.\hat{f} \in J \quad \text{et} \quad k.f = k.\hat{f}.f_1 \in J.f_1 \subset J.$$

Inversement, si $j \in J$, la relation $j.\alpha(j) \in J$ entraîne que j est compatible avec $r(\alpha(j))$, c'est-à-dire $j \in I_r$. Ceci prouve que $J = I_r$. ∎

EXEMPLES.

1) Supposons $p = p_{\mathcal{J}}$. Soit $h = (C^\cdot, \iota, G^\cdot).h' \in \mathcal{F}$, où $h' \in \mathcal{F}_\gamma$. Désignons par $r(h)$ la relation $r_G = (C, A_G, C)$ telle que A_G soit la classe des couples $(g, \alpha(g))$, où $g \in G$. D'après le théorème 3-1 [1] on a $k.h \in J_{\mathcal{J}}$ si, et seulement si, $k \in \mathcal{F}.C^\cdot$ est compatible avec r_G. Ainsi $J_{\mathcal{J}}$ est un $p_{\mathcal{J}}$-idéal. L'application r correspondante (prop. 15) de $\mathcal{F}$ dans la classe des relations est obtenue en posant :

$$r((\hat{C}^\cdot, \Phi, C^\cdot)) = (\hat{C}, \hat{A}, \hat{C}),$$

où $\hat{A}$ est formée des $(k, \alpha(k))$, où $k = \Phi(f_n). \dots .\Phi(f_1)$, $f_i \in C$.

2) Soit $\mathcal{F}(p)$ la catégorie des foncteurs p-structurés. Soit J_p l'idéal de $\mathcal{F}(p)$ formé (n° 8 [1]) par les $\bar{h} = (C^\cdot, \tilde{h}, G^\cdot) \in \mathcal{F}(p)$ tels que $h = (C^\cdot, \tilde{h}, G^\cdot) \in J_{\mathcal{J}}$. Si $\bar{p}_{\mathcal{J}}$ est le foncteur projection canonique de $\mathcal{F}(p)$ vers $\mathfrak{M}$, l'idéal J_p est un $\bar{p}_{\mathcal{J}}$-idéal, car à $\bar{h} \in \mathcal{F}(p)$ est associée la relation $r(h)$ définie dans l'exemple 1.

PROPOSITION 16. *Soit J un p-idéal et $h \in S.\overleftarrow{p_\iota}.s$, où $s \in H_0^\cdot$ et $S \in H_0^\cdot$. Les conditions suivantes sont équivalentes, où $\hat{r}$ désigne la relation d'équivalence engendrée par $r(h)$:*

1) $\hat{s}$ est une (p, J)-structure quotient de S par s (C. S. déf. 34, chap. III);

2) $\hat{s}$ est une p-structure quotient faible de S par $\hat{r}$ (déf. 2-1 [1]);

3) $\hat{s}$ est une p- structure quasi-quotient de S par $r(h)$ et $p(\hat{s}) =$ $= p(S)/\overline{r}$, où $\overline{r}$ est la relation p- compatible engendrée par $\hat{r}$.

En effet, soit p^r la catégorie servant à définir les p- structures quasi-quotient (n° 1 [1]). $(k, \hat{r})$ est un (H, p^r)- projecteur, où $k \in R_d(H^\bullet)$, si, et seulement si, on a $k' = g.k$ lorsque $k' \in H.S$ est compatible avec $r(h)$, c'est-à-dire si, et seulement si, $k' = g.k$ lorsque $k.h \in J$. Dans ce cas, pour que $\beta(k) = \hat{s}$ soit une p- structure quotient faible de s par $\hat{r}$, il faut et il suffit que $p(k)$ soit une surjection canonique (prop. 5-1 [1]), donc que (k, h) soit une (p, J)- suite exacte courte. ∎

La proposition 16 montre que l'étude des suites exactes courtes relatives à un p- idéal se ramène à l'étude des structures quotient d'une structure par une relation d'équivalence.

PROPOSITION 17. *Soit J un p-idéal et $h \in \overleftarrow{p_i}$. Pour que (k, h) soit une $(R_d(H^\bullet), \overleftarrow{p_i}, H^\bullet, J)$- suite exacte courte (C.S. déf. 32, chap. III), il faut et il suffit que $\beta(k)$ soit une p- structure quasi-quotient de $\alpha(k)$ par $r(h)$, la p-quasi-surjection correspondante étant k.*

DEMONSTRATION. Soit (k, h) une $(R_d(H^\bullet), \overleftarrow{p_i}, H^\bullet, J)$- suite exacte courte. On a $k.h \in J$; ainsi $k \in R_d(H^\bullet)$ est compatible avec $r(h)$ et, si $k' \in H.\beta(h)$ est compatible avec $r(h)$, il existe un et un seul $g \in H$ tel que $g.k = k'$. Ainsi $\beta(k)$ est une p- structure quasi-quotient de $\alpha(k)$ par $r(h)$. - Inversement, supposons que k soit une p- quasi-surjection définissant $\beta(k)$ comme p- structure quasi- quotient de $\alpha(k)$ par $r(h)$. Puisque $\hat{k} = (k, \hat{r})$, où $\hat{r}$ est la relation d'équivalence engendrée par $r(h)$, est un (H, p^r)- projecteur (not. n° 1 [1]), on a $k.h \in J$ et

$$\hat{k} \in R_d(H, p^r), \quad \text{d'où} \quad k \in R_d(H^\bullet).$$

Par ailleurs la condition $k'.h \in J$ entraîne $(k', \hat{r}) \in p^r$, de sorte qu'il existe

$$g \in H \quad \text{tel que} \quad k' = g.k.$$

Ceci montre que (k, h) est une $(R_d(H^\bullet), \overleftarrow{p_i}, H^\bullet, J)$- suite exacte . ∎

DEFINITION. Soit J un idéal de $H^\bullet$; si (k, h) est une $(R_d(H^\bullet), \overleftarrow{p_i}, H^\bullet, J)$-

suite exacte courte on dira que (k, h) est une J· *suite quasi-exacte courte* ou que $\beta(k)$ *est une J-structure quasi-quotient de* $\beta(h)$ *par* $\alpha(h)$.

B) FONCTEUR DE QUASI-COHOMOLOGIE.

Nous supposerons donnés dans la suite :

1) Un foncteur fidèle $p = (\mathfrak{M}, \underline{p}, H^{\bullet})$, un p-idéal J et une sous-catégorie $X^{\bullet}$ de $\overleftarrow{\underline{p}}_i$.

2) Une catégorie $K^{\bullet}$, un idéal I de $K^{\bullet}$ et une sous-catégorie $K'^{\bullet}$ de $K^{\bullet}$.

3) Un foncteur D de $K'^{\bullet} \times K^*$ vers $H^{\bullet}$ tel que $p.D$ soit une restriction de $Hom_{K^{\bullet}}$.

Nous désignons par $\mathfrak{K}(K^{\bullet}, I)$ la catégorie des morphismes entre complexes de $(K^{\bullet}, I)$ (voir [11]), par $\mathfrak{S}(K^{\bullet}, I)$ la catégorie $K^{\bullet} \times \mathfrak{K}(K^{\bullet}, I)^*$, par C^n, Z^n et B^n respectivement les foncteurs n-cochaînes, n-cocycles et n-cobords de $(K^{\bullet}, I)$, qui sont [11] des foncteurs de $\mathfrak{S}(K^{\bullet}, I)$ vers $\mathfrak{M}$, pour tout entier $n > 0$. Soit

$$\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}'(K^{\bullet}, I) = K'^{\bullet} \times \mathfrak{K}(K^{\bullet}, I)^* .$$

On définit un foncteur, noté $\overline{C}^n$, de $\mathfrak{S}'$ vers $H^{\bullet}$ en posant :

$$\overline{C}^n(k', (E', \tau, E)) = D(k', \tau(n))$$
$$\text{si} \quad k' \in K' \quad \text{et} \quad (E', \tau, E) \in \mathfrak{K}(K^{\bullet}, I).$$

DEFINITION. On appelle *foncteur de quasi-cohomologie d'ordre n pour* (X, J, D, I) un foncteur $\overline{H}^n$ de $\mathfrak{S}'$ vers $H^{\bullet}$ vérifiant les conditions suivantes, où $\sigma \in \mathfrak{S}'_0$:

1) Il existe des triplets définissant des transformations naturelles $(\overline{C}^n, h, \overline{Z}^n)$ et $(\overline{C}^n, h', \overline{B}^n)$ tels que $h(\sigma)$ et $h'(\sigma)$ soient (p, X, H)-engendrés respectivement par $(C^n(\sigma), \iota, Z^n(\sigma))$ et par $(C^n(\sigma), \iota, B^n(\sigma))$.

2) Il existe un triplet définissant une transformation naturelle $(\overline{H}^n, m', \overline{Z}^n)$ tel que $m'(\sigma)$ soit une p-quasi-surjection définissant $\overline{H}^n(\sigma)$ comme J-structure quasi-quotient de $\overline{Z}^n(\sigma)$ par $\overline{B}^n(\sigma)$.

On dira que p est X-*propre* (resp. est *propre)* pour la quasi-cohomologie si, lorsque J, D et I vérifient les conditions 1, 2, 3, il existe un foncteur de quasi-cohomologie d'ordre n pour (X, J, D, I) (resp. pour

$(p_i^{\frown}, J, D, I))$ pour tout entier $n > 0$.

PROPOSITION 18. *Si $\overline{H}_i^n$ est un foncteur de quasi-cohomologie d'ordre n pour (X, J, D, I), où $i = 1$ ou 2, il existe une équivalence naturelle de $\overline{H}_1^n$ vers $\overline{H}_2^n$.*

DEMONSTRATION. Soient $(\overline{C}^n, h_i, \overline{Z}_i^n)$ et $(\overline{C}^n, h'_i, \overline{B}_i^n)$ les triplets intervenant dans la définition du foncteur $\overline{H}_i^n$ Soit $\sigma \in \mathfrak{S}'_0$. On a

$$h_i(\sigma) \in \overline{C}^n(\sigma).X.\overline{Z}_i^n(\sigma) \quad \text{et} \quad h'_i(\sigma) \in \overline{C}^n(\sigma).X.\overline{B}_i^n(\sigma);$$

$h_i(\sigma)$ et $h'_i(\sigma)$ étant (p, X, H)-engendrés par $(C^n(\sigma), \iota, Z^n(\sigma))$ et $(C^n(\sigma), \iota, B^n(\sigma))$ respectivement, il existe

$$\gamma'(\sigma) \in \overline{B}_2^n(\sigma).H_\gamma^{\bullet}.\overline{B}_1^n(\sigma) \quad \text{et} \quad \gamma(\sigma) \in \overline{Z}_2^n(\sigma).H_\gamma^{\bullet}.\overline{Z}_1^n(\sigma)$$

tels que

$$h_2(\sigma).\gamma(\sigma) = h_1(\sigma) \quad \text{et} \quad h'_2(\sigma).\gamma'(\sigma) = h'_1(\sigma).$$

Comme $B^n(\sigma) \subset Z^n(\sigma)$, on a $B^n(\sigma) \subset \beta(h_i(\sigma))$, et par suite, par définition d'un morphisme (p, X, H)-engendré, il existe

$$m_i(\sigma) \in \overline{Z}_i^n(\sigma).\ H\ .\overline{B}_i^n(\sigma) \quad \text{tel que} \quad h_i(\sigma).m_i(\sigma) = h'_i(\sigma).$$

Les relations

$$h_2(\sigma).\gamma(\sigma).m_1(\sigma) = h_1(\sigma).m_1(\sigma) = h'_1(\sigma) = h'_2(\sigma).\gamma'(\sigma) =$$
$$= h_2(\sigma).m_2(\sigma).\gamma'(\sigma)$$

entraînent

$$q = (\gamma(\sigma), m_2(\sigma), m_1(\sigma), \gamma'(\sigma)) \in \square H^{\bullet},$$

car $h_2(\sigma) \in R_g(H^{\bullet})$. Par définition de $\overline{H}_i^n(\sigma)$, il existe une J-suite quasi-exacte courte $(m'_i(\sigma), m_i(\sigma))$ telle que $\beta(m'_i(\sigma)) = \overline{H}_i^n(\sigma)$. La proposition 44, chap. III, C.S., affirme que, en posant $M^{\bullet} = \square\square H^{\bullet}$, il existe une $(R_d(M^{\bullet}), R_g(M^{\bullet}), M^{\bullet}, \square(H^{\bullet}; J, H))$-suite exacte courte (q', q) telle que

$$q' = (\gamma''(\sigma), m'_2(\sigma), m'_1(\sigma), \gamma(\sigma)) \in \square(H^{\bullet}; H, H_\gamma^{\bullet}).$$

Comme $\overline{Z}_1^n$ et $\overline{Z}_2^n$ sont deux $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}^i, p)$-sous-foncteurs de $\overline{C}^n$, le triplet $(\overline{Z}_2^n, \gamma, \overline{Z}_1^n)$ définit une équivalence naturelle. Les foncteurs $\overline{H}_1^n$ et

$\overline{H}{}^n_2$ sont équivalents, car ce sont deux $\mathfrak{N}(R_d(H^\bullet), H^\bullet)$-foncteurs quotient de $\overline{Z}{}^n_1$. En effet, pour tout $u \in \sigma'.\mathfrak{S}'.\sigma$, on trouve :

$$\begin{aligned}\overline{H}{}^n_2(u).\gamma''(\sigma).m'_1(\sigma) &= \overline{H}{}^n_2(u).m'_2(\sigma).\gamma\ (\sigma) = \\ &= m'_2(\sigma').\overline{Z}{}^n_2(u).\gamma\ (\sigma) = \\ &= m'_2(\sigma').\gamma\ (\sigma').\overline{Z}{}^n_1(u) = \\ &= \gamma''(\sigma').m'_1(\sigma').\overline{Z}{}^n_1(u) = \\ &= \gamma''(\sigma').\overline{H}{}^n_1(\sigma).m'_1(\sigma),\end{aligned}$$

d'où

$$\overline{H}{}^n_2(u).\gamma''(\sigma) = \gamma''(\sigma').\overline{H}{}^n_1(\sigma).$$

Ceci montre que $(\overline{H}{}^n_2, \gamma'', \overline{H}{}^n_1)$ est un triplet définissant une équivalence naturelle. ∎

PROPOSITION 19. *Soit $\overline{H}{}^n$ un foncteur de quasi-cohomologie d'ordre n pour $(\overleftarrow{p_\iota}, J, D, I)$, $\overline{Z}{}^n$ et $\overline{B}{}^n$ les foncteurs correspondants. Pour que $\overline{H}{}^n$ soit un foncteur de cohomologie* [11] *pour (H, J, D, I), il faut et il suffit que, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}'_o$, on ait*

$$p(\overline{Z}{}^n(\sigma)) = Z^n(\sigma) \quad \text{et} \quad p(\overline{H}{}^n(\sigma)) = Z^n(\sigma)/\overline{r},$$

où $\overline{r}$ est la relation d'équivalence p-compatible engendrée par la relation $r(m)$ associée au p-monomorphisme $m \in \overline{Z}{}^n(\sigma).\overleftarrow{p_\iota}.\overline{B}{}^n(\sigma)$ canonique.

En effet, ces conditions sont nécessaires. Si elles sont vérifiées $\overline{H}{}^n(\sigma)$ est une (p, J)-structure quotient de $\overline{Z}{}^n(\sigma)$ par $\overline{B}{}^n(\sigma)$ d'après la proposition 16. ∎

Soient $\mathfrak{M}_o \subset \hat{\mathfrak{M}}_o$ deux univers tels que $\mathfrak{M}_o \in \hat{\mathfrak{M}}_o$; désignons par $\mathfrak{M}$ et $\hat{\mathfrak{M}}$ les catégories pleines d'applications correspondantes. Soit $P = (\hat{\mathfrak{M}}, P, \hat{H}^\bullet)$ *un foncteur d'homomorphismes résolvant à droite et $\hat{\pi}$-compatible.* Supposons que $p = (\mathfrak{M}, P\iota, H^\bullet)$ soit une restriction de P telle que $H = \overset{-1}{P}(\mathfrak{M}) \in \hat{\mathfrak{M}}_o$. Soit $\mathfrak{U}(\overline{p})$ l'une des sous-catégories de la catégorie $\mathfrak{F}(\overline{p})$ des foncteurs p-structurés : $\mathfrak{F}(p)$, $\mathfrak{F}_g(p)$, $\mathfrak{S}(p)$ ou $\mathfrak{S}'(p)$ considérées dans le n° 3 [1] ; le foncteur projection canonique de $\mathfrak{U}(p)$ vers $\mathfrak{M}$ est noté $\hat{p}_{\mathfrak{U}}$. Soit $X_{\mathfrak{U}}$ la sous-catégorie de $\mathfrak{F}(p)$ formée des $\hat{p}_{\mathfrak{U}}$-monomorphismes

$$\overline{h} = (C^\bullet, h, G^\bullet) \in (\hat{p}_{\mathfrak{U}})_i^{\ulcorner} \quad \text{tels que} \quad h \in p_i^{\ulcorner} \text{ (voir n° 3 [1])}.$$

THEOREME 4. *Si P est $\ulcorner$-engendrant pour $\mathfrak{M}$, alors p est propre pour la quasi-cohomologie; si P est $(\mathfrak{M}, \mathfrak{U})$-résolvant (déf. 1-3 [1]), $\hat{p}_{\mathfrak{U}}$ est $X_{\mathfrak{U}}$-propre pour la quasi-cohomologie.*

DEMONSTRATION. Supposons que P soit $\ulcorner$-engendrant pour $\mathfrak{M}$. Soient J, D, I vérifiant les conditions 1, 2, 3, p. 46. D'après la proposition 13, il existe des $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}^i, p, H)$-sous-foncteurs $\overline{Z}^n$ et $\overline{B}^n$ de $\overline{C}^n$ engendrés par Z^n et B^n respec., car p est $\ulcorner$-engendrant pour $\mathfrak{M}$ (prop. 12). Soit

$$\sigma \in \mathfrak{S}'_o, \quad S = \overline{Z}^n(\sigma) \quad \text{et} \quad s = \overline{B}^n(\sigma);$$

désignons par m le p-monomorphisme canonique $m \in S.p_i^{\ulcorner}.s$. Le théorème 2 (ou le th. 1-2 [1]) implique qu'il existe une p-quasi-surjection m' définissant une p-structure quasi-quotient s' de S par $r(m)$. D'après la proposition 17, (m', m) est une $(R_d(H^\bullet), R_g(H^\bullet), H^\bullet, J)$-suite exacte courte. Comme $\overline{B}^n$ est aussi un $\mathfrak{N}(R_g(H^\bullet), H^\bullet)$-sous-foncteur de $\overline{Z}^n$, on sait (cor. prop. 49*, chap. III, C.S.) qu'il existe un $\mathfrak{N}(R_d(H^\bullet), H^\bullet)$-foncteur quotient $\overline{H}^n$ de $\overline{Z}^n$ tel que $\overline{H}^n(\sigma) = s'$. Ainsi $\overline{H}^n$ est un foncteur de quasi-cohomologie pour $(p_i^{\ulcorner}, J, D, I)$, de sorte que p est propre pour la quasi-cohomologie.-Supposons que P soit $(\mathfrak{M}, \mathfrak{U})$-résolvant (déf. 1-3 [1]) et soit $\overline{J}$ un $\hat{p}_{\mathfrak{U}}$-idéal. La démonstration de la proposition 13 montre que $X_{\mathfrak{U}}$ vérifie la condition B de la proposition 13 relativement à $\hat{p}_{\mathfrak{U}}$. Soit $\overline{h} \in X_{\mathfrak{U}}$. D'après le théorème 1-3 [1], il existe une $\hat{p}_{\mathfrak{U}}$-structure quasi-quotient de $\beta(\overline{h})$ par la relation $r(\overline{h})$ associée au $\hat{p}_{\mathfrak{U}}$-idéal $\overline{J}$, c'est-à-dire il existe une $\overline{J}$-suite quasi-exacte courte $(\overline{k}, \overline{h})$. Il en résulte qu'une démonstration analogue à celle qui précède montre que $\hat{p}_{\mathfrak{U}}$ est $X_{\mathfrak{U}}$-propre pour la quasi-cohomologie. ∎

COROLLAIRE 1. *Si P est $\ulcorner$-étalant, il existe un foncteur de cohomologie pour (H, J, D, I) quel que soit le p-idéal J; de plus $\hat{p}_{\mathfrak{U}}$ est propre pour la quasi-cohomologie.*

En effet, dans la démonstration précédente, on peut choisir S et s

tels que $p(S) = Z^n(\sigma)$, $p(s) = B^n(\sigma)$ et $m \in p_i$; en vertu du corollaire du théorème 2-2 [1], on peut prendre pour $H^n(\sigma)$ une p-structure quotient faible de S par $r(m)$, à savoir la p-structure quotient de S par la relation d'équivalence p-compatible engendrée par $r(m)$. Ceci signifie (prop. 16) que $\overline{H}^n(\sigma)$ est une (p, J)-structure quotient de S par s, de sorte que $\overline{H}^n$ est, d'après la proposition 19, un foncteur de cohomologie pour (H, J, D, I). D'après le théorème 4, $\hat{p}_{\mathfrak{U}}$ est $X_{\mathfrak{U}}$-propre pour la quasi-cohomologie. Mais $X_{\mathfrak{U}} = (\hat{p}_{\mathfrak{U}})_i^{\urcorner}$, car p est $\urcorner$-étalant. Le corollaire en résulte. ■

COROLLAIRE 2. *Si P est un foncteur d'homomorphismes saturé dénombrablement engendrant pour $\mathfrak{M}$ (déf. 1-5 [1]), alors p est propre pour la quasi-cohomologie et $\hat{p}_{\mathfrak{U}}$ est $X_{\mathfrak{U}}$-propre pour la quasi-cohomologie.*

En effet, d'après le théorème 1-5 [1], P est $(\mathfrak{M}, \mathfrak{U})$-résolvant, de sorte que le corollaire 2 se déduit immédiatement du théorème 4.

EXEMPLES.

1) Si $p = p_{\mathcal{T}}$ ou p_Ω, il existe un foncteur de cohomologie pour (H, J, D, I) pour tout p-idéal J et $\hat{p}_{\mathfrak{U}}$ est propre pour la quasi-cohomologie, p étant $\urcorner$-étalant. Si $p = p_{\mathcal{T}'}$ ou $p_{\mathfrak{N}'}$, alors p et $\hat{p}_{\mathfrak{U}}$ sont propres pour la quasi-cohomologie.

2) Si $p = p_{\mathcal{H}}$, où $\mathcal{H}$ est l'une des catégories $\mathcal{G}^{ps}$, $\mathcal{G}^{fs}$ ou $\mathcal{G}^{f\cup}$ (n° 5 [1]), p est propre pour la quasi-cohomologie et $\hat{p}_{\mathfrak{U}}$ est $X_{\mathfrak{U}}$-propre pour la quasi-cohomologie, car P est dénombrablement engendrant pour $\mathfrak{M}$, en vertu des théorèmes 3-5 et 4-5 [1].

II. ADJONCTION DE LIMITES A UNE CATEGORIE.

Dans toute cette partie, nous désignons par $\mathfrak{M}_o$ et par $\hat{\mathfrak{M}}_o$ deux univers, $\mathfrak{M}_o \subset \hat{\mathfrak{M}}_o$, $\mathfrak{M}_o \in \hat{\mathfrak{M}}_o$, par $\mathfrak{M}$ et $\hat{\mathfrak{M}}$ les catégories pleines d'applications correspondantes, par $\mathcal{F}$ et $\hat{\mathcal{F}}$ les catégories des foncteurs associées.

1. Adjonction de limites projectives.

Soient $C^{\bullet}$ et $I^{\bullet}$ deux catégories. Nous notons $\mathfrak{N}(C^{\bullet}, I^{\bullet})^{\square}$ la catégorie des transformations naturelles entre foncteurs de $I^{\bullet}$ vers $C^{\bullet}$ dont nous identifions la classe des unités à la classe des foncteurs de $I^{\bullet}$

vers $C^\bullet$; de plus la sous-catégorie de $\mathfrak{N}(C^\bullet, I^\bullet)^{\square}$ formée des transformations naturelles qui sont des foncteurs de $I^\bullet$ vers la catégorie latérale $\boxminus C^\bullet$, constants sur une unité de $\boxminus C^\bullet$, est notée $\overleftarrow{C}^{\bullet I^\bullet}$; elle est isomorphe à $C^\bullet$.

Soit $\underline{\Phi} = (C^\bullet, \Phi, I^\bullet)$ un foncteur. Si Φ admet une limite projective e, et si p_i est, pour tout $i \in I_0^\bullet$, la projection canonique de e vers $\Phi(i)$, le $(\mathfrak{N}(C^\bullet, I^\bullet)^{\square}, \overleftarrow{C}^{\bullet I^\bullet})$-éjecteur correspondant à cette limite est la transformation naturelle définie par le triplet $(\Phi, \tau, \hat{e})$, où $\hat{e}$ est le foncteur de $I^\bullet$ vers $C^\bullet$ constant sur e et où $\tau(i) = p_i$ pour tout $i \in I_0^\bullet$.

Nous supposons donnée une classe $\mathcal{I}$ de catégories telle que $\mathcal{I} \subset \mathcal{F}_0$ et que la catégorie « vide » n'appartienne pas à $\mathcal{I}$ (restriction supprimée à la fin du § 2).

Si $C^\bullet$ est une catégorie, nous appellerons *application $\mathcal{I}$-limite projective partielle sur $C^\bullet$* une application ν qui associe, à certains foncteurs $\underline{\Phi}$ de $I^\bullet \in \mathcal{I}$ vers $C^\bullet$ admettant une limite projective, un $(\mathfrak{N}(C^\bullet, I^\bullet)^{\square}, \overleftarrow{C}^{\bullet I^\bullet})$-éjecteur $\nu(\Phi)$. Si une telle application ν est choisie, nous désignons par $Lim^\nu \Phi \in C_0^\bullet$ la limite projective de Φ déterminée par la source de $\nu(\Phi)$ par $p_i^\nu(\Phi)$ sa projection canonique vers $\Phi(i)$. Si

$$\Psi \in \Phi \square \mathfrak{N}(C^\bullet, I^\bullet) \quad \text{et} \quad \alpha^{\square}(\psi) \in \overleftarrow{C}^{\bullet I^\bullet},$$

l'unique élément $h \in C$ tel que

$$\nu(\Phi) \square \hat{h} = \Psi,$$

où $\hat{h}$ est l'élément de $\overleftarrow{C}^{\bullet I^\bullet}$ déterminé par h, est désigné par $lim^\nu \Psi$. Si aucune confusion n'est possible, les exposants ν seront supprimés.

Si $C^\bullet$ est une catégorie à $\mathcal{I}$-limites projectives, nous appellerons *application $\mathcal{I}$-limite projective sur $C^\bullet$* une application $\mathcal{I}$-limite projective partielle ν sur $C^\bullet$ telle que $\nu(\Phi)$ soit défini pour tout foncteur $\underline{\Phi} = (C^\bullet, \Phi, I^\bullet)$, où $I^\bullet \in \mathcal{I}$. Le foncteur vers $C^\bullet$ de la catégorie somme des catégories $\mathfrak{N}(C^\bullet, I^\bullet)^{\square}$, où $I^\bullet \in \mathcal{I}$, déterminé canoniquement par ν, est noté Lim^ν, et dit *foncteur limite projective associé à ν*.

Soit $\mathcal{F}'^{\mathcal{I}}$ la classe des triplets $((\hat{C}^\bullet, \hat{\nu}), \underline{F}, (C^\bullet, \nu))$ tels que

1°) $\underline{F} = (\hat{C}^\bullet, F, C^\bullet) \in \mathcal{F}$;

2°) ν et $\hat{\nu}$ sont des applications $\mathcal{I}$-limite projective partielles sur $C^{\bullet}$ et sur $\hat{C}^{\bullet}$ respectivement; si $\Phi \in C^{\bullet}.\mathcal{F}.\mathcal{I}$ et si $\nu(\Phi)$ est défini, $\hat{\nu}(F.\Phi)$ est défini et

$$\hat{\nu}(F.\Phi) = \boxminus F.\nu(\Phi).$$

$\mathcal{F}^{\prime\mathcal{I}}$ est une catégorie pour la loi de composition

$$((\hat{C}'^{\bullet},\hat{\nu}'),\underline{F}',(C'^{\bullet},\nu')).((\hat{C}^{\bullet},\hat{\nu}),\underline{F},(C^{\bullet},\nu)) = ((\hat{C}'^{\bullet},\hat{\nu}'),\underline{F}'\underline{F},(C^{\bullet},\nu))$$

si, et seulement si, $(C'^{\bullet},\nu') = (\hat{C}^{\bullet},\hat{\nu})$.

Nous identifions la classe de ses unités à la classe des couples $(C^{\bullet},\nu)$, où $C^{\bullet} \in \mathcal{F}_0$ et ν est une application $\mathcal{I}$-limite projective partielle sur $C^{\bullet}$. Soit $\mathcal{F}^{\mathcal{I}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}^{\prime\mathcal{I}}$ ayant pour unités les couples $(C^{\bullet},\nu)$ tels que ν soit une application $\mathcal{I}$-limite projective (partout définie) sur $C^{\bullet}$.

Soit $p^{\mathcal{I}}$ le foncteur de $\mathcal{F}^{\mathcal{I}}$ vers $\mathcal{F}$ défini par la surjection

$$((\hat{C}^{\bullet},\hat{\nu}),\underline{F},(C^{\bullet},\nu)) \to (\hat{C}^{\bullet},\underline{F},C^{\bullet}).$$

Soient $q^{\prime\mathcal{I}}$ et $q^{\mathcal{I}}$ les foncteurs projection canonique vers $\mathfrak{M}$ de $\mathcal{F}^{\prime\mathcal{I}}$ et de $\mathcal{F}^{\mathcal{I}}$ respectivement. Soient $P^{\mathcal{I}}$, $Q^{\mathcal{I}}$ et $Q^{\prime\mathcal{I}}$ les foncteurs de $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{I}}$ vers $\hat{\mathcal{F}}$, de $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{I}}$ vers $\hat{\mathfrak{M}}$ et de $\hat{\mathcal{F}}^{\prime\mathcal{I}}$ vers $\hat{\mathfrak{M}}$ définis de même à partir de l'univers $\hat{\mathfrak{M}}_0$.

PROPOSITION 20. *$\mathcal{F}^{\prime\mathcal{I}}$ est une catégorie à $\mathfrak{M}_0$-produits; $p^{\mathcal{I}}$ et $(\mathcal{F}^{\prime\mathcal{I}},\iota,\mathcal{F}^{\mathcal{I}})$ sont des foncteurs à $\mathfrak{M}_0$-limites projectives. $Q^{\mathcal{I}}$ est un foncteur $\frown$-engendrant pour $\hat{\mathfrak{M}}$.*

DEMONSTRATION. Soit $J \in \mathfrak{M}_0$ et supposons

$$(C_j^{\bullet},\nu_j) \in \mathcal{F}_0^{\prime\mathcal{I}} \quad \text{pour tout} \quad j \in J.$$

Désignons par $C^{\bullet}$ la catégorie $\prod_{j\in J} C_j^{\bullet}$, par F_j le foncteur projection canonique de $C^{\bullet}$ vers $C_j^{\bullet}$. Soit $\Phi = (C^{\bullet},\underline{\Phi},I^{\bullet}) \in \mathcal{F}.\mathcal{I}$. On sait que Φ admet une limite projective si, et seulement si, $F_j.\Phi$ en admet une pour tout $j \in J$; dans ce cas, $(Lim^{\nu_j} F_j.\Phi)_{j\in J}$ est une limite projective $Lim^{\nu}\Phi$ de Φ, dont la i-ème projection canonique est $(p_i^{\nu_j}(F_j.\Phi))_{j\in J}$. Soit $\nu(\Phi)$ le $(\mathfrak{N}(C^{\bullet},I^{\bullet})^{\boxplus},\overleftarrow{C}^{\bullet I^{\bullet}})$-éjecteur correspondant; on a

$$\nu(\Phi) = [\,\nu_j(F_j.\Phi)\,]_{j\in J}$$

dans la catégorie latérale des transformations naturelles $\mathfrak{N}^{\blacklozenge}$. L'application $\Phi \to \nu(\Phi)$ si, et seulement si, $\nu_j(\Phi)$ est défini pour tout $j \in J$ est une application $\mathcal{I}$-limite projective partielle ν sur $C^{\cdot}$. Il est évident que $(C^{\cdot}, \nu)$ est un produit de $((C_j^{\cdot}, \nu_j))_{j\in J}$ dans $\mathcal{F}^{\cdot\mathcal{I}}$. Donc $q^{\cdot\mathcal{I}}$ est un foncteur à $\mathfrak{M}_0$-produits. - Si de plus $(C_j^{\cdot}, \nu_j) \in \mathcal{F}_0^{\mathcal{I}}$ pour tout $j \in J$, on a

$$(C^{\cdot}, \nu) \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}},$$

de sorte que $(\mathcal{F}^{\cdot\mathcal{I}}, \iota, \mathcal{F}^{\mathcal{I}})$ et $p^{\mathcal{I}}$ sont des foncteurs à $\mathfrak{M}_0$-produits.

-Nous supposons

$$\hat{F} = ((\hat{C}^{\cdot}, \hat{\nu}), F, (C^{\cdot}, \nu)) \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}} \quad \text{et} \quad \hat{F}' = ((\hat{C}^{\cdot}, \hat{\nu}), F', (C^{\cdot}, \nu)) \in \hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{I}};$$

posons $\underline{F} = p^{\mathcal{I}}(\hat{F})$ et $\underline{F}' = p^{\mathcal{I}}(\hat{F}')$ et notons $N^{\cdot}$ le noyau de (F, F') dans $\mathcal{F}$. Soit $\Phi = (N^{\cdot}, \underline{\Phi}, I^{\cdot}) \in \mathcal{F}.\mathcal{I}$; le foncteur $\Phi' = (C^{\cdot}, \underline{\Phi}, I^{\cdot})$ admet une limite projective. Comme $F.\Phi' = F'.\Phi'$, on trouve

$$\boxminus F.\nu(\Phi') = \hat{\nu}(F.\Phi') = \hat{\nu}(F'.\Phi') = \boxminus F'.\nu(\Phi'),$$

d'où

$$Lim^{\nu}\Phi' \in N \quad \text{et} \quad p_i^{\nu}(\Phi') \in N \quad \text{pour tout} \quad i \in I_0^{\cdot}.$$

Si $\Psi \in \mathfrak{N}(N^{\cdot}, I^{\cdot})$ et $\alpha^{\boxplus}(\Psi) \in \overleftarrow{N}^{\cdot I^{\cdot}}$, on a de même $\boxminus F.\Psi' = \boxminus F'.\Psi'$, où $\Psi' = (\boxminus C^{\cdot}, \Psi, I^{\cdot})$. Il s'ensuit $lim^{\nu}\Psi \in N$, car

$$\underline{F}(lim^{\nu}\Psi) = lim^{\hat{\nu}}(\boxminus F.\Psi') = F'(lim^{\nu}\Psi).$$

Par suite l'application qui associe à Φ la transformation naturelle

$$(\boxminus N^{\cdot}, \underline{\nu(\Phi')}, I^{\cdot})$$

est une application $\mathcal{I}$-limite projective sur $N^{\cdot}$, notée ν'. On a

$$m = ((C^{\cdot}, \nu), \iota, (N^{\cdot}, \nu')) \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}}.$$

Ainsi m est un noyau de $(\hat{F}, \hat{F}')$ dans $\mathcal{F}^{\mathcal{I}}$, dans $\mathcal{F}^{\cdot\mathcal{I}}$ et dans $p^{\mathcal{I}}$. Donc les foncteurs $(\mathcal{F}^{\cdot\mathcal{I}}, \iota, \mathcal{F}^{\mathcal{I}})$ et $p^{\mathcal{I}}$ sont à noyaux. D'après la proposition 1, ces foncteurs sont aussi à $\mathfrak{M}_0$-limites projectives, puisque nous avons montré plus haut qu'ils sont à $\mathfrak{M}_0$-produits.

-Enfin, montrons que $Q^{\mathcal{I}}$ est $\rightharpoondown$-engendrant pour $\hat{\mathfrak{M}}$. En effet, supposons

$$(C^{\cdot}, \nu) \in \hat{\mathcal{F}}_0^{\mathcal{I}}, \quad M \subset C \quad \text{et} \quad M \neq \emptyset.$$

Disons qu'une sous-catégorie $H^\cdot$ de $C^\cdot$ est stable pour ν si les conditions

$$\Phi = (C^\cdot, \underline{\Phi}, I^\cdot) \in \hat{\mathfrak{F}}.\mathfrak{I} \quad \text{et} \quad \Phi(I) \subset H$$

entraînent $p_i^\nu(\Phi) \in H$ pour tout $i \in I_0^\cdot$, et si l'on a $lim^\nu \Psi \in H$ lorsque

$$\Psi = (\boxminus C^\cdot, \underline{\Psi}, I^\cdot) \in \hat{\mathfrak{F}}.\mathfrak{I}, \quad \alpha^{\square}(\Psi) \in \overleftarrow{C}^{\cdot I^\cdot} \quad \text{et} \quad \Psi(I) \subset \square H^\cdot.$$

Dans ce cas, $H^\cdot$ est une catégorie à $\mathfrak{I}$-limites projectives. La sous-catégorie $\hat{H}^\cdot$ de $C^\cdot$ intersection des sous-catégories $H^\cdot$ de $C^\cdot$ stables pour ν et contenant M est évidemment stable pour ν. C'est donc une catégorie à $\mathfrak{I}$-limites projectives, admettant pour application $\mathfrak{I}$-limite projective l'application $\hat{\nu}$ telle que $\hat{\nu}(\Phi) = (\boxminus \hat{H}^\cdot, \underline{\nu(\hat{\Phi})}, I^\cdot)$, où

$$\hat{\Phi} = (C^\cdot, \underline{\Phi}, I^\cdot), \quad \text{si} \quad \Phi = (\hat{H}^\cdot, \underline{\Phi}, I^\cdot) \in \mathfrak{F}.\hat{\mathfrak{I}}.$$

Par suite $(\hat{H}^\cdot, \hat{\nu}) \in \hat{\mathfrak{F}}_0^{\mathfrak{I}}$. Pour que $(K^\cdot, \nu')$ soit une $Q^{\mathfrak{I}}$-sous-structure de $(C^\cdot, \nu)$, il faut et il suffit que la sous-catégorie $K^\cdot$ soit stable pour ν. On en déduit que $(\hat{H}^\cdot, \hat{\nu})$ est la $Q^{\mathfrak{I}}$-sous-structure de $(C^\cdot, \nu)$ engendrée par M. ■

COROLLAIRE. *Tout élément de* $\mathfrak{F}^{,\mathfrak{I}}$ *admet une* $(\mathfrak{F}^{\mathfrak{I}}, \hat{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{I}}, \hat{\mathfrak{F}}^{,\mathfrak{I}})$*-projection.*

DEMONSTRATION. Soit $e = (C^\cdot, \nu) \in \mathfrak{F}^{,\mathfrak{I}}$ et $U = \mathfrak{F}_0^{\mathfrak{I}}.\mathfrak{F}^{,\mathfrak{I}}.e$. Alors U est une $\mathfrak{M}_0$-classe et, $\hat{\mathfrak{F}}^{,\mathfrak{I}}$ étant une catégorie à $\hat{\mathfrak{M}}_0$-produits (prop. 20), e vérifie la condition P_e relativement au foncteur $P = (\hat{\mathfrak{F}}^{,\mathfrak{I}}, \iota, \hat{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{I}})$(3-I).Soit

$$\hat{F} = ((\hat{C}^\cdot, \hat{\nu}), F, (C^\cdot, \nu)) = [\hat{F}_h]_{h \in U}.$$

La classe $F(C)$ engendre une $Q^{\mathfrak{I}}$-sous-structure $(N^\cdot, \hat{\nu}')$ de $(\hat{C}^\cdot, \hat{\nu})$; d'après la proposition 20; l'élément $((\hat{C}^\cdot, \hat{\nu}), \iota, (N^\cdot, \hat{\nu}'))$ est un morphisme $(P, \hat{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{I}}, \hat{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{I}})$-engendré par $\hat{F}$. Ainsi les conditions du théorème 1 sont vérifiées, de sorte que $(N^\cdot, \hat{\nu}')$ est une $(\mathfrak{F}^{\mathfrak{I}}, \hat{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{I}}, \hat{\mathfrak{F}}^{,\mathfrak{I}})$-projection de $(C^\cdot, \nu)$. ■

A. THEOREME DE COMPLETION PROJECTIVE RELATIVE.

DEFINITION. *Soient* $(C^\cdot, \nu) \in \hat{\mathfrak{F}}_0^{\mathfrak{I}}$ *et* $M \subset C$. *La* $Q^{\mathfrak{I}}$*-sous-structure* $(\hat{M}^\cdot, \hat{\nu})$ *de* $(C^\cdot, \nu)$ *engendrée par* M *(prop. 20) est appelée* complétion $\mathfrak{I}$-projective de M dans $(C^\cdot, \nu)$.

REMARQUE. Cette définition précise la notion de complétion gauche considérée dans [12].

Dans la suite de ce §, nous désignons par $\tilde{\mathfrak{M}}$ et par $\tilde{\mathfrak{F}}$ les saturantes respectivement de $\mathfrak{M}$ dans $\hat{\mathfrak{M}}$ et de $\mathfrak{F}$ dans $\hat{\mathfrak{F}}$. On sait que $\tilde{\mathfrak{M}}_0$ est un univers; un élément de $\tilde{\mathfrak{M}}_0$ est dit une $\mathfrak{M}_0$-classe. *Nous supposons que* $\mathfrak{I}$ *est une partie de* $\mathfrak{F}_0$ *telle que* $\mathfrak{I} \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$. Le symbole $I^{\bullet}$ représentera toujours un élément de $\mathfrak{I}$. Nous notons $\mathfrak{U}$ un univers tel que $\mathfrak{U} \subset \hat{\mathfrak{M}}_0$; une $\mathfrak{U}$-catégorie [2] est une catégorie $H^{\bullet}$ telle que $e'.H.e$ soit une $\mathfrak{U}$-classe pour tout couple (e', e) d'unités de $H^{\bullet}$.

THEOREME 5. *Supposons* $\mathfrak{I} \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$, $(C^{\bullet}, \nu) \in \hat{\mathfrak{F}}_0^{\mathfrak{I}}$ *et* $M \subset C$. *Soit* $(\hat{M}^{\bullet}, \hat{\nu})$ *la complétion* $\mathfrak{I}$*-projective de* M *dans* $(C^{\bullet}, \nu)$. *Si* $M \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$, *on a* $\hat{M} \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$. *Si* $M^{\bullet}$ *est une sous-catégorie de* $C^{\bullet}$, *si* Lim^{ν} *est injectif et si* $Lim^{\nu}\Phi \notin M$ *quel que soit* $\Phi \in C^{\bullet}.\hat{\mathfrak{F}}.\mathfrak{I}$, *alors* $M^{\bullet}$ *est pleine dans* $\hat{M}^{\bullet}$; *si de plus* $M^{\bullet}$ *est une* $\mathfrak{U}$*-catégorie et si* $p_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{I}) \subset \mathfrak{U}$, *la catégorie* $\hat{M}^{\bullet}$ *est aussi une* $\mathfrak{U}$*-catégorie.*

DEMONSTRATION. Si V est une classe, nous notons $\bar{\bar{V}}$ son cardinal. Si λ est un ordinal, nous désignons par $\bar{\lambda}$ le cardinal $\bar{\bar{A}}$, où $(A, <)$ est un ensemble bien ordonné de type λ [13]. Inversement, si n est un cardinal, soit $\bar{n}$ l'ordinal borne supérieure (dans la classe ordonnée des ordinaux) de la classe des ordinaux λ tels que $\bar{\lambda} < n$; en particulier, si V est une classe, nous posons $\bar{V} = \bar{n}$, où $n = \bar{\bar{V}}$. A un ordinal λ est aussi associé [13] l'ordinal initial ω_λ d'indice λ, tel que $\bar{\omega}_\lambda$ soit l'aleph d'indice λ. Dire que $\mathfrak{M}_0$ est un univers entraîne que l'ordinal Λ, borne supérieure de la classe des ordinaux $\bar{V}$, où $V \in \mathfrak{M}_0$, est inaccessible au sens de Tarski [13]; il s'ensuit $\omega_\Lambda = \Lambda$. Remarquons que l'on a aussi

$$\Lambda = \sup_{V' \in \tilde{\mathfrak{M}}_0} \bar{V}'.$$

- Si $I^{\bullet} \in \mathfrak{I}$, on a $I \in \mathfrak{M}_0$, et par suite $\bar{I} < \Lambda$. Comme $\mathfrak{I} \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$, on a

$$U = \bigcup_{I^{\bullet} \in \mathfrak{I}} I \in \mathfrak{M}_0, \quad \text{d'où} \quad \bar{I} \leqslant \bar{U} < \Lambda.$$

L'ordinal ω_Λ étant régulier [13], on en déduit

$$\lambda_{\mathcal{J}} = \sup_{I^\bullet \in \mathcal{J}} \overline{I} \leq \overline{U} < \Lambda \quad \text{et} \quad \lambda_{\mathcal{J}} + 1 < \Lambda .$$

L'ordinal initial $\omega_{\lambda_{\mathcal{J}}+1}$ est régulier, car son indice est de première espèce [13], et on a $\omega_{\lambda_{\mathcal{J}}+1} < \omega_\Lambda = \Lambda$; nous poserons $\hat{\lambda} = \omega_{\lambda_{\mathcal{J}}+1}$.

- Supposons $(C^\bullet, \nu) \in \hat{\mathfrak{F}}^{\mathcal{J}}_o$. Soit *Lim* le foncteur $\mathcal{J}$-limite projective Lim^ν associé à ν. Pour toute sous-catégorie $B^\bullet$ de $C^\bullet$, nous construisons une sous-classe $\sigma^\nu(B)$ de C de la façon suivante :

Soit $\delta^{I^\bullet}_B$ la classe des foncteurs $\Phi \in C^\bullet . \hat{\mathfrak{F}} . I^\bullet$ tels que $\Phi(I) \subset B$. Soit $\pi^{I^\bullet}_B$ la classe de tous les éléments $p^\nu_i(\Phi)$ tels que $\Phi \in \delta^{I^\bullet}_B$ et $i \in I^\bullet_o$. Soit $\Delta^{I^\bullet}_B$ la classe des transformations naturelles

$$\Psi \in \mathfrak{N}(C^\bullet, I^\bullet) \quad \text{telles que} \quad \alpha^{\square}(\Psi) \in \overleftarrow{B}^\bullet . I^\bullet \quad \text{et} \quad \Psi(I) \subset \square B^\bullet .$$

On pose

$$\sigma^\nu(B) = B \cup \Big(\bigcup_{I^\bullet \in \mathcal{J}} \pi^{I^\bullet}_B \cup lim^\nu(\Delta^{I^\bullet}_B) \Big).$$

On définit une bijection g_B de $\sigma^\nu(B)$ sur une partie de

$$N = B \cup \bigcup_{I^\bullet \in \mathcal{J}} ((I \times B . \hat{\mathfrak{M}} . I) \cup (\square B^\bullet . \hat{\mathfrak{M}} . I))$$

en posant

$$\begin{cases} g_B(m) = m \quad \text{si} \quad m \in B ; & \\ g_B(m) = (i, (B, \underline{\Phi}, I)) \in I \times B . \hat{\mathfrak{M}} . I & \text{si } m \notin B, \text{ si } m \in \pi^{I^\bullet}_B \text{ et si l'on a choisi } i \in I^\bullet_o \text{ et } \Phi \in \delta^{I^\bullet}_B \text{ tels que } m = p_i(\Phi) ; \\ g_B(m') = (\square B^\bullet, \underline{\Psi}, I) \in \square B^\bullet . \hat{\mathfrak{M}} . I & \text{si } g_B(m') \text{ n'est pas encore défini et si l'on a choisi } \Psi \in \Delta^{I^\bullet}_B \text{ tel que } m' = lim\, \Psi . \end{cases}$$

Si $B \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$, les relations $B \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$, $I \in \mathfrak{M}_o$ et $\mathcal{J} \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$ entraînent

$$B . \hat{\mathfrak{M}} . I = B . \tilde{\mathfrak{M}} . I \in \tilde{\mathfrak{M}}_o, \quad \square B^\bullet . \hat{\mathfrak{M}} . I \in \tilde{\mathfrak{M}}_o \quad \text{et} \quad N \in \tilde{\mathfrak{M}}_o,$$

car $\tilde{\mathfrak{M}}_o$ est un univers. Il s'ensuit

$$g_B(\sigma^\nu(B)) \in \tilde{\mathfrak{M}}_o \quad \text{et} \quad \sigma^\nu(B) \in \tilde{\mathfrak{M}}_o .$$

- Soit $M \subset C$. Pour tout ordinal $\lambda \leq \hat{\lambda}$, nous définissons par récurrence transfinie une sous-catégorie $M^{\bullet}_{\lambda}$ de $C^{\bullet}$ comme suit :

1°) $M^{\bullet}_{1}$ est la sous-catégorie de $C^{\bullet}$ engendrée par M;

2°) Si $\lambda = \lambda' + 1$, alors $M^{\bullet}_{\lambda}$ est la sous-catégorie de $C^{\bullet}$ engendrée par $\sigma^{\nu}(M_{\lambda'})$;

3°) Si λ est de seconde espèce (i.e. n'a pas de prédécesseur), on pose $M_{\lambda} = \bigcup_{\xi < \lambda} M_{\xi}$. On a évidemment $M_{\xi'} \subset M_{\xi}$ si $\xi' < \xi$. $M^{\bullet}_{\lambda}$ est une sous-catégorie de $C^{\bullet}$. Nous allons montrer que $M^{\bullet}_{\hat{\lambda}} = \hat{M}$, où $(\hat{M}^{\bullet}, \hat{\nu})$ est la complétion $\mathcal{J}$- projective de M dans $(C^{\bullet}, \nu)$. En effet, on a $M^{\bullet}_{\hat{\lambda}} \subset \hat{M}$, car toute sous-catégorie de $C^{\bullet}$ stable pour ν et contenant M doit évidemment contenir $M^{\bullet}_{\hat{\lambda}}$. D'après la proposition 20, il nous suffit de montrer que $M^{\bullet}_{\hat{\lambda}}$ est stable pour ν . En effet, soit $\Phi \in C^{\bullet} . \hat{\mathfrak{F}} . I^{\bullet}$ tel que $\Phi(I) \subset M^{\bullet}_{\hat{\lambda}}$. Pour tout $k \in I$, il existe $\xi_k < \lambda$ tel que $\Phi(k) \in M_{\xi}$. Puisque $\overline{I} < \hat{\lambda}$ et que $\hat{\lambda}$ est un ordinal initial régulier, la limite ξ de la suite transfinie $(\xi_k)_{k \in I}$ de type $\overline{I}$ vérifie la relation $\xi < \hat{\lambda}$, de sorte que l'on a $\Phi(k) \in M_{\xi}$ pour tout $k \in I$. Par suite $\Phi \in \delta^{I^{\bullet}}_{M_{\xi}}$ et, par construction, on a

$$p_i(\Phi) \in M_{\xi+1} \subset M^{\bullet}_{\hat{\lambda}} \quad \text{pour tout} \quad i \in I^{\bullet}_{o}.$$

Soit $\Psi \in \boxminus C^{\bullet} . \hat{\mathfrak{F}} . \mathcal{J}$ une transformation naturelle de $\hat{e}$ vers Φ telle que $\Psi(I) \subset \Box M^{\bullet}_{\hat{\lambda}}$, où $\hat{e}$ est le foncteur constant sur $e \in C^{\bullet}_{o}$. De même on trouve un ordinal ξ' tel que

$$\xi \leq \xi' < \hat{\lambda} \quad \text{et} \quad \Psi(I) \subset \Box M^{\bullet}_{\xi'} .$$

Il s'ensuit $\Psi \in \Delta^{I^{\bullet}}_{B}$, où $B = M_{\xi'+1}$, ce qui entraîne

$$lim\, \Psi \in M_{\xi'+2} \subset M^{\bullet}_{\hat{\lambda}} .$$

Donc $M^{\bullet}_{\hat{\lambda}}$ est stable pour ν, d'où $M^{\bullet}_{\hat{\lambda}} = \hat{M}$.

- Supposons $M \in \tilde{\mathfrak{M}}_{o}$; on a $M_1 \in \tilde{\mathfrak{M}}_{\rho}$, car $P\mathfrak{g}$ est $\leftarrow$- engendrant pour $\mathfrak{M}$ [1]. Supposons prouvé que $M_{\xi} \in \mathfrak{M}_{o}$ pour tout $\xi < \lambda$, où $\lambda \leqslant \hat{\lambda}$. Si $\lambda = \lambda' + 1$, alors $M_{\lambda} \in \tilde{\mathfrak{M}}_{o}$, car $M^{\bullet}_{\lambda}$ est la sous-catégorie de $C^{\bullet}$ engendrée par $\sigma^{\nu}(M_{\lambda'})$, qui appartient à $\tilde{\mathfrak{M}}_{o}$ d'après le début de la démonstration. Si λ est de seconde espèce, on a $M_{\lambda} = \bigcup_{\xi < \lambda} M_{\xi}$, d'où

$$\overline{M}_{\lambda} \leqslant \sum_{\xi < \lambda} \overline{M}_{\xi} < \Lambda ,$$

car Λ est régulier, $\tilde{M}_\xi < \Lambda$ pour tout $\xi < \lambda$ et $\lambda \leq \hat{\lambda} < \Lambda$. Par définition de Λ, il existe $V \in \mathfrak{M}_o$ tel que $\overline{\tilde{M}_\lambda} < \overline{V}$; autrement dit, il existe une bijection de M_λ sur une partie de V; ainsi on a $M_\lambda \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$. Par récurrence transfinie, on en déduit $M_{\hat{\lambda}} \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$. Par conséquent, il existe un isomorphisme G de $\hat{M}^\bullet$ sur une catégorie $S^\bullet \in \mathcal{F}_o$.

-Dans la fin de cette démonstration, nous supposons que $M^\bullet$ est une sous-catégorie (quelconque) de $C^\bullet$ (donc $M = M_1$), que les relations $Lim^\nu \Phi = = Lim^\nu \Phi'$ entraînent $\Phi = \Phi'$ et que $Lim^\nu \Phi \notin M$ pour tout $\Phi \in \delta^{I^\bullet}_{M_{\hat{\lambda}}}$. Examinons la forme des éléments de M_λ pour un ordinal $\lambda = \lambda' + 1 < \hat{\lambda}$. Soit A_λ la classe des éléments $lim\, \Psi \in M_\lambda$ tels que

$$\Psi \in \bigcup_{I^\bullet \in \mathcal{I}} \Delta^{I^\bullet}_{M_{\lambda'}}, \quad lim\, \Psi \notin M_{\lambda'} \quad \text{et} \quad \alpha(lim\, \Psi) \in M_{\lambda'},$$

et soit A'_λ la classe des composés $m_n \cdot \ldots \cdot m_1$ tels que

$$m_j \in A_\lambda \cup (M_\lambda)^\bullet_o \quad \text{si} \quad 1 \leq j \leq n;$$

on a $A'_\lambda . A'_\lambda \subset A'_\lambda$. Soit B_λ la classe des $m' \in M_\lambda$ tels que

$$m' \in (\bigcup_{I^\bullet \in \mathcal{I}} \pi^{I^\bullet}_{M_{\lambda'}}) \cup (M_\lambda)^\bullet_o \quad \text{et} \quad m' \notin M_{\lambda'} - (M_{\lambda'})^\bullet_o.$$

Si $m' = p_i(\Phi) \in B_\lambda$, on a $\alpha(m') = Lim\, \Phi$ et, par hypothèse, $\alpha(m') \notin M$. Si l'on avait $\alpha(m') \in M_{\lambda'} - M$, il existerait $\xi < \lambda'$ tel que

$$\alpha(m') = Lim\, \Phi' \quad \text{et} \quad \Phi' \in \delta^{I^\bullet}_{M_\xi};$$

Il s'ensuivrait $\Phi = \Phi'$ et $m' \in M_{\xi+1} \subset M_{\lambda'}$, ce qui est impossible. Donc $m' \in B_\lambda$ entraîne $\alpha(m') \notin M_{\lambda'}$ ou $m' = \alpha(m') \in M_{\lambda'}$. Soit N_λ la classe des composés $m''.m.m'$ tels que

$$m' \in B_\lambda, \quad m \in A'_\lambda \quad \text{et} \quad m'' \in M_{\lambda'} \cup (M_\lambda)^\bullet_o.$$

Montrons que l'on a $M_\lambda = N_\lambda$. On a évidemment

$$\sigma^\nu(M_{\lambda'}) \cup (M_\lambda)^\bullet_o \subset N_\lambda \subset M_\lambda.$$

Il nous suffit donc de prouver que N_λ est stable dans $C^\bullet$. Pour cela, montrons d'abord que l'on a

$$(A'_\lambda - (M_\lambda)^\bullet_o).M_{\lambda'} \subset A'_\lambda \cup M_{\lambda'}.$$

En effet, soient

$$m = m_n \dots . m_1 \in A'_\lambda - (M_\lambda)^\bullet_o \quad \text{et} \quad m'' \in \alpha(m) . M_{\lambda'} .$$

On peut se ramener au cas où

$$m_1 = \lim \Psi \in A_\lambda , \quad \text{avec} \quad \Psi \in \Delta^{I^\bullet}_{M_{\lambda'}} .$$

Soit $(\Phi, \tau, \widehat{\alpha(m_1)})$ le triplet définissant la transformation naturelle Ψ. Si τ' désigne la surjection

$$i \mapsto \tau(i) . m'' \in M_{\lambda'} \quad \text{pour tout} \quad i \in I^\bullet_o ,$$

le triplet $(\Phi, \tau', \widehat{\alpha(m'')})$ définit la transformation naturelle

$$\Psi' = \Psi \boxed{}\boxed{} \hat{m}'' \in \Delta^{I^\bullet}_{M_{\lambda'}}$$

et on a

$$m_1 . m'' = \lim \Psi' \in A_\lambda \cup M_{\lambda'} .$$

Il s'ensuit, par récurrence,

$$m . m'' = (m_n \dots . m_2) . (m_1 . m'') \in A'_\lambda \cup M_{\lambda'} .$$

Pour montrer que N_λ est stable, supposons

$$f = m'' . m . m' \in N_\lambda \quad \text{et} \quad \tilde{f} = \tilde{m}'' . \tilde{m} . \tilde{m}' \in N_\lambda . \beta(f) .$$

Les seuls cas possibles sont les suivants :

1°) Soit $m'' \in M_{\lambda'}$; nous avons vu que $\tilde{m}' = \beta(m'')$, par définition de B_λ.

a) Si $\tilde{m} \in (M_\lambda)^\bullet_o$, on a

$$\tilde{f} . f = (\tilde{m}'' . m'') . m . m' \in N_\lambda ,$$

car $\tilde{m}'' . m'' \in M_{\lambda'} . M_{\lambda'} \subset M_{\lambda'}$;

b) Si $\tilde{m} \in A'_\lambda - (M_\lambda)^\bullet_o$, en utilisant le résultat précédent, on trouve

$$\tilde{m} . m'' \in A'_\lambda . M_{\lambda'} \subset A'_\lambda \cup M_{\lambda'} \subset M_{\lambda'} . A'_\lambda ;$$

par suite $\tilde{m} . m'' . m \in M_{\lambda'} . A'_\lambda . A'_\lambda \subset M_{\lambda'} . A'_\lambda$ et

$$\tilde{f} . f = \tilde{m}'' . (\tilde{m} . \tilde{m}' . m'' . m) . m' \in N_\lambda .$$

2°) Supposons $m'' \notin M_{\lambda'}$, c'est-à-dire $m'' \in (M_\lambda)^\bullet_o - (M_{\lambda'})^\bullet_o$. Il s'ensuit $\alpha(\tilde{m}') \in M_\lambda - M_{\lambda'}$.

a) Si $\tilde{m}' = \alpha(\tilde{m}')$, on a $\alpha(\tilde{m}) \notin M_{\lambda'}$, d'où $\tilde{m} = \alpha(\tilde{m})$ par définition de A'_λ et $\tilde{f} = \alpha(\tilde{m})$ par construction de N_λ; ainsi $\tilde{f}.f = f \in N_\lambda$.

b) Supposons $\tilde{m}' = p_i(\Phi) \notin M_{\lambda'}$. Si $m \in (M_\lambda)^{\bullet}_o$, on a aussi $m' \in (M_\lambda)^{\bullet}_o$, d'où

$$f \in (M_\lambda)^{\bullet}_o \quad \text{et} \quad \tilde{f}.f = \tilde{f} \in N_\lambda.$$

Sinon, m admet une décomposition $m_n \ldots . m_1 \in A'_\lambda$ dans laquelle

$$m_n = lim\, \Psi \in (Lim\, \Phi).A_\lambda.M_{\lambda'}.$$

Puisque Lim est injectif, on en déduit $\Phi = \alpha^{\square}(\Psi)$ et

$$\tilde{m}'.m_n = p_i(\Phi).lim\, \Psi = \tau(i) \in M_{\lambda'},$$

en notant $(\Phi, \tau, \hat{e})$ le triplet définissant la transformation naturelle Ψ.

1) Si $\tilde{m} \in A'_\lambda - (M_\lambda)^{\bullet}_o$, on a

$\tilde{m}.\tilde{m}'.m_n \in A'_\lambda.M_{\lambda'} \subset M_{\lambda'}.A_\lambda$ et $\tilde{m}.\tilde{m}'.m \in M_{\lambda'}.A'_\lambda$.

donc $\tilde{f}.f = \tilde{m}''.(\tilde{m}.\tilde{m}'.m).m' \in N_\lambda$.

2) Si $\tilde{m} = \alpha(\tilde{m})$, à partir des relations

$$g = \tilde{m}''.\tilde{m}.\tilde{m}'.m''.m = \tilde{m}''.\tilde{m}'.m = (\tilde{m}''.\tilde{m}'.m_n).(m_{n-1} \ldots . m_1) \in M_{\lambda'}.A'_\lambda,$$

on trouve encore

$$\tilde{f}.f = g.m' \in N_\lambda.$$

Nous avons donc montré que, dans tous les cas, on a $\tilde{f}.f \in N_\lambda$, ce qui assure que N_λ est stable dans $C^\bullet$, et a fortiori définit une sous-catégorie de $C^\bullet$; autrement dit, $M_\lambda = N_\lambda$. - En particulier, soit $\lambda = 2$. Si $m = lim\, \Psi \in A_2$, on a

$$\beta(m) = Lim\, \beta^{\square}(\Psi) \notin M,$$

de sorte que $A'_2 = A_2 \cup (M_2)^{\bullet}_o$. Soit $f \in N_2 = M_2$; de la définition de N_2 et de A_2, il résulte

$$f = m.m', \quad \text{où} \quad m' \in B_2 \quad \text{et} \quad m \in A_2 \cup M \cup (M_2)^{\bullet}_o.$$

Si $\alpha(f) \in M_o^{\bullet}$, cette relation entraîne

$$m' = \alpha(m'), \quad \text{d'où} \quad f \in A_2 \cup M;$$

si de plus $\beta(f) \in M$, on obtient $f \in M$. Donc $M^{\bullet}$ est une sous-catégorie pleine de $M_2^{\bullet}$.

-Pour tout ordinal $\xi \leq \hat{\lambda}$, soit B'_ξ la classe des composés $m' = m'_n \ldots . m'_1$ tels que

$$\beta(m') \in M, \quad m'_j \in B_{\xi_j} \quad \text{et} \quad 1 < \xi_n < \xi_{n-1} < \ldots < \xi_1 \leq \xi,$$

les ordinaux ξ_j étant de première espèce. Si $m = \lim \Psi \in \beta(m').A_{\xi+1}$ et si $m'_1 = p_i(\Phi)$, les égalités

$$Lim\, \beta^{\square}(\Psi) = \beta(m) = \alpha(m'_1) = Lim\, \Phi$$

entraînent $\Phi = \beta^{\square}(\Psi)$, d'où

$$m'_1 . m = \tau(i) \in M_\xi \quad \text{et} \quad m'.m = (m'_n \ldots . m'_2).\tau(i) \in M_\xi,$$

en désignant par $(\Phi, \tau, \hat{e})$ le triplet définissant la transformation naturelle Ψ. Ainsi $B'_\xi . A_{\xi+1} \subset M_\xi$. Soit $\lambda \leq \hat{\lambda}$. Supposons montré que, pour tout $\xi < \lambda$, on ait $M_o^{\bullet}.M_\xi = M.B'_\xi$, et soit $f \in M_o^{\bullet}.M_\lambda$. Si λ est de seconde espèce, il existe $\xi < \lambda$ tel que

$$f \in M_o^{\bullet}.M_\xi \subset M.B'_\xi \subset M.B'_\lambda.$$

Soit $\lambda = \lambda' + 1$. Nous avons vu que l'on a $f = m''.m.m' \in N_\lambda$. Plusieurs cas se présentent :

1°) Si $m'' \in M_{\lambda'}.M_o^{\bullet}$, on a $m \in (M_\lambda)_o^{\bullet}$ car $\beta(m) \in M$ entraîne $\beta(m) \nmid Lim\, \Phi$. Il en résulte

$$f = m''.m' \in M.B_\lambda \subset M.B'_\lambda.$$

2°) Soit $m'' \in M_{\lambda'}$ et $\alpha(m'') \notin M$; on a $m'' \in M.B'_{\lambda'}$ par hypothèse.

a) Si $m \in (M_\lambda)_o^{\bullet}$, on trouve

$$f = m''.m' \in (M.B'_{\lambda'}).B_\lambda \subset M.B'_\lambda;$$

b) Soit $m = m_q \ldots . m_1 \in A'_\lambda$ et $m_q \notin (M_\lambda)_o^{\bullet}$. D'après ce qui précède

$$m''.m_q \in M.B'_{\lambda'}.A_{\lambda'+1} \subset M.M_{\lambda'} \subset M.B'_{\lambda'}$$

et, de même,

$$(m''.m_q).m_{q-1} \in M.B'_{\lambda'}.A_\lambda \subset M.B'_{\lambda'};$$

il s'ensuit, par récurrence, $m''.m \in M.B'_{\lambda'}$, de sorte que

$$f = (m''.m).m' \in (M.B'_{\lambda'}).B'_\lambda \subset M.B'_\lambda.$$

Par récurrence transfinie, on obtient

$$M_o^{\cdot}.\hat{M} = M_o^{\cdot}.M_{\hat{\lambda}} = M.B'_{\hat{\lambda}}.$$

Soit $1 \leq \xi \leq \lambda \leq \hat{\lambda}$ et $m' = m'_n \ldots . m'_1 \in B_\lambda.(M_\xi)_o^{\cdot}$. Il existe $\xi' < \xi$ et $\Phi \in \delta^{I^{\cdot}}_{M_{\xi'}}$ tels que $\alpha(m'_1) = Lim\, \Phi$. On en conclut

$$m'_1 \in B_{\xi'+1}, \quad m' \in B'_\xi \quad \text{et} \quad B'_\lambda.(M_\xi)_o^{\cdot} \subset B'_\xi.$$

Cette relation entraîne

$$M_o^{\cdot}.\hat{M}.(M_\lambda)_o^{\cdot} \subset M.B'_{\hat{\lambda}}.(M_\lambda)_o^{\cdot} \subset M.B'_\lambda = M_o^{\cdot}.M_\lambda,$$

et par suite $M_o^{\cdot}.\hat{M}.(M_\lambda)_o^{\cdot} = M_o^{\cdot}.M_\lambda$. En particulier,

$$M_o^{\cdot}.\hat{M}.M_o^{\cdot} \subset M_o^{\cdot}.\hat{M}.(M_2)_o^{\cdot}.M_o^{\cdot} \subset M_o^{\cdot}.M_2.M_o^{\cdot} \subset M.$$

Ainsi $M^{\cdot}$ est une sous-catégorie pleine de $\hat{M}^{\cdot}$.

-Supposons de plus que $M^{\cdot}$ soit une $\mathfrak{U}$-catégorie, l'univers $\mathfrak{U}$ contenant $\tilde{p}\mathfrak{F}(\mathfrak{I})$; désignons par $\tilde{\mathfrak{U}}$ l'univers obtenu par saturation de $\mathfrak{U}$ dans $\hat{\mathfrak{M}}$, i.e. $\tilde{\mathfrak{U}} = \beta(\hat{\mathfrak{M}}_\gamma.\mathfrak{U})$. Soit $E \in M_o^{\cdot}$. Si $E' \in M_o^{\cdot}$, on a

$$E.\hat{M}.E' = E.M.E' \in \tilde{\mathfrak{U}}.$$

Supposons montré que, pour tout $\xi < \lambda$, on a $E.\hat{M}.E' \in \tilde{\mathfrak{U}}$ si $E' \in (M_\xi)_o^{\cdot}$, où $\lambda \leq \hat{\lambda}$. Soit $E' \in (M_\lambda)_o^{\cdot}$. Si λ est de seconde espèce, il existe $\xi < \lambda$ tel que $E' \in M_\xi$, ce qui entraîne $E.\hat{M}.E' \in \tilde{\mathfrak{U}}$. Soit $\lambda = \lambda' + 1$, $E' \in M_\lambda - M_{\lambda'}$ et $f \in E.\hat{M}.E'$; nous avons prouvé que l'on a $E.\hat{M}.E' = E.M_\lambda.E'$ et

$$f = h.(m'_n.\ldots.m'_1) \in M.B'_\lambda.$$

Comme $\alpha(m'_1) = E' \notin M_{\lambda'}$, il existe un et un seul $\Phi \in \delta^{I^{\cdot}}_{M_{\lambda'}}$ tel que $E' =$
$= Lim\, \Phi$ et on a

$$m'_1 = p_i(\Phi) \in (M_{\lambda'})_o^{\cdot}.M_\lambda, \quad \text{avec} \quad i \in I_o^{\cdot}.$$

Il s'ensuit

$$f' = b.(m'_n \ldots . m'_2) \in E.M.B'_{\lambda'}.\Phi(i) \subset E.M_{\lambda'}.\Phi(i).$$

En associant à $f \in E.\hat{M}.E'$ le couple $(f', i) \in E.M_{\lambda'}.\Phi(i) \times I$, on définit une bijection de $E.\hat{M}.E'$ sur une partie de

$$U = (\bigcup_{i \in I_o^{\cdot}} E.M_{\lambda'}.\Phi(i)) \times I.$$

Puisque $E.M_{\lambda'}.\Phi(i) \in \tilde{\mathfrak{U}}$ pour tout $i \in I_o^{\cdot}$ et que $I_o^{\cdot} \subset I \in \tilde{\mathfrak{U}}$, on a $U \in \tilde{\mathfrak{U}}$, car $\tilde{\mathfrak{U}}$ est un univers, et par suite $E.\hat{M}.E' \in \tilde{\mathfrak{U}}$. Par récurrence transfinie, on en déduit que $E.\hat{M}.E'$ est une $\mathfrak{U}$-classe pour tout $E' \in \hat{M}_o^{\cdot}$ et $E \in M_o^{\cdot}$.

- Soit alors $E' \in \hat{M}_o^{\cdot}$. Supposons montré que, pour tout $\xi < \lambda$, où $1 < \lambda \leq \hat{\lambda}$, on a

$$E''.\hat{M}.E' \in \tilde{\mathfrak{U}} \quad \text{si} \quad E'' \in (M_\xi)_o^{\cdot}.$$

Soit $E'' \in (M_\lambda)_o^{\cdot}$. Si λ est de seconde espèce, il existe $\xi < \lambda$ tel que $E'' \in M_\xi$, de sorte que $E''.\hat{M}.E' \in \tilde{\mathfrak{U}}$. Soit $\lambda = \lambda' + 1$; on a, si $E'' \notin M$,

$$E'' = Lim\, \Phi', \quad \text{où} \quad \Phi' \in \delta^{I^{\cdot}}_{M_{\lambda'}}.$$

Si $f \in E''.\hat{M}.E'$, alors $f = lim\, \Psi$, où Ψ est la transformation naturelle définie par le triplet $(\Phi', \tau', \hat{E}')$ tel que

$$\tau'(i) = p_i(\Phi').f \quad \text{pour tout} \quad i \in I_o^{\cdot}.$$

L'application

$$f \to (p_i(\Phi').f)_{i \in I_o^{\cdot}}, \quad \text{où} \quad f \in E''.\hat{M}.E',$$

est une bijection de $E''.\hat{M}.E'$ sur une partie de $U' = \prod_{i \in I_o^{\cdot}} \Phi'(i).\hat{M}.E'$. Etant donné que $\Phi'(i) \in M_{\lambda'}$, on a $U' \in \tilde{\mathfrak{U}}$, car

$$\Phi'(i).\hat{M}.E' \in \tilde{\mathfrak{U}} \quad \text{et} \quad I_o^{\cdot} \in \tilde{\mathfrak{U}};$$

a fortiori $E.\hat{M}.E' \in \tilde{\mathfrak{U}}$. Par récurrence transfinie, il en résulte

$$E''.\hat{M}.E' \in \tilde{\mathfrak{U}} \quad \text{si} \quad E' \in \hat{M}_o^{\cdot} \quad \text{et} \quad E'' \in \hat{M}_o^{\cdot},$$

ce qui signifie que $\hat{M}^{\cdot}$ est une $\mathfrak{U}$-catégorie. La démonstration du théorème est ainsi achevée. ■

COROLLAIRE. *$Q^{\mathcal{I}}$ est ρ-engendrant pour $\mathfrak{M}$. Les foncteurs $p^{\mathcal{I}}$ et $(\mathcal{F}'^{\mathcal{I}}, \iota, \mathcal{F}^{\mathcal{I}})$ admettent des adjoints.*

En effet, la première partie résulte de la première affirmation du théorème 5 la deuxième du critère 1, les foncteurs $p^{\mathcal{I}}$ et $(\mathcal{F}^{\cdot\mathcal{I}}, \iota, \mathcal{F}^{\mathcal{I}})$ étant à $\mathfrak{M}_o$-limites projectives, les foncteurs $P^{\mathcal{I}}$ et $(\hat{\mathcal{F}}^{\cdot\mathcal{I}}, \iota, \hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{I}})$ à $\hat{\mathfrak{M}}_o$-produits, en vertu de la proposition 20.

REMARQUE. Si $(C^{\cdot}, \nu) \in \hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{I}}_o$ et si $(\hat{M}^{\cdot}, \hat{\nu})$ est la complétion $\mathcal{I}$-projective de M dans $(C^{\cdot}, \nu)$, alors $(\hat{M}^{\cdot}, \hat{\nu})$ est aussi la complétion $\mathcal{I}$-projective de M dans $(\hat{M}^{\cdot}, \hat{\nu})$.

DEFINITION. *Une* $(\mathcal{F}^{\mathcal{I}}, \mathcal{F}^{\cdot\mathcal{I}})$*-projection de* $(H^{\cdot}, \mu) \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}}_o$ *est appelée* complétion $\mathcal{I}$-projective de $(H^{\cdot}, \mu)$.

En particulier, $\mathcal{F}$ est isomorphe à la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}^{\cdot\mathcal{I}}$ ayant pour unités les couples $(H^{\cdot}, \emptyset)$, où $\emptyset$ est la surjection vide. On a

$$((K^{\cdot}, \nu), \underline{F}, (H^{\cdot}, \emptyset)) \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}}_o . \mathcal{F}^{\cdot\mathcal{I}}$$

si, et seulement si, $(K^{\cdot}, \nu) \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}}_o$ et $(K^{\cdot}, \underline{F}, H^{\cdot}) \in \mathcal{F}$.

Par suite, les $p^{\mathcal{I}}$-structures libres engendrées par $H^{\cdot} \in \mathcal{F}_o$ sont identiques aux complétions $\mathcal{I}$-projectives de $(H^{\cdot}, \emptyset)$.

B. $p^{\mathcal{I}}$-*STRUCTURES LIBRES.*

THEOREME 6. *Soit* $\mathcal{I} \subset \mathcal{F}_o$ *et* $\mathcal{I} \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$. *Tout* $H^{\cdot} \in \mathcal{F}_o$ *engendre une* $p^{\mathcal{I}}$-*structure libre* $(\hat{H}^{\cdot}, \hat{\nu})$ *ayant les propriétés suivantes :*

1) $\hat{\nu}$ *est injectif et* $H^{\cdot}$ *est une sous-catégorie pleine de* $\hat{H}^{\cdot}$;

2) Si $p_{\mathcal{F}}(\mathcal{I})$ *est contenu dans l'univers* $\mathfrak{U}$ *et si* $H^{\cdot}$ *est une* $\mathfrak{U}$-*catégorie,* $\hat{H}^{\cdot}$ *est une* $\mathfrak{U}$-*catégorie.*

DEMONSTRATION. D'après le corollaire du théorème 5, $H^{\cdot}$ engendre une $p^{\mathcal{I}}$-structure libre $(C^{\cdot}, \nu)$.

- Soit $K^{\cdot} \in \mathcal{F}_o$; soit $K^{\cdot}_{+}$ la catégorie obtenue en adjoignant à $K^{\cdot}$ un élément initial 0. Nous désignerons par $\mathfrak{A}(K^{\cdot})$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, (K_{+})^{*})^{\square}$, où $(K_{+})^{*}$ est la duale de $K^{\cdot}_{+}$, ayant pour unités les foncteurs F de $(K_{+})^{*}$ vers $\mathfrak{M}$ tels que $F(0)$ soit un atome (i.e. ait un seul élément). Soit $\eta_{K^{\cdot}}$ l'isomorphisme canonique (App. 1, C.S.) de $K^{\cdot}$ sur une sous-catégorie pleine de $\mathfrak{A}(K^{\cdot})$ qui associe à $e \in K^{\cdot}_o$ le foncteur $\eta_{K^{\cdot}}(e)$ de K^{*}_{+} vers $\mathfrak{M}$ défini par

$$\begin{cases} \eta_K.(e)(e') = e.K_+.e' & \text{si} \quad e' \in (K_+)^{\bullet}_o \\ \eta_K.(e)(f) = (e.K_+.\alpha(f), \tilde{f}, e.K_+.\beta(f)), \end{cases}$$
$$\text{où } \tilde{f}(k) = k.f \text{ pour } k \in e.K_+.\beta(f).$$

En particulier, on a $\eta_K.(e)(0) = \{(e,0)\}$. Puisque $\mathfrak{M}$ est une catégorie à $\mathfrak{I}$-limites projectives, $\mathfrak{N}(\mathfrak{M},(K_+)^*)^{\square}$ est une catégorie à $\mathfrak{I}$-limites projectives et le foncteur $\eta_K.$ est compatible avec les $\mathfrak{I}$-limites projectives. Nous allons définir sur $\mathfrak{A}(K^\bullet)$ une application $\mathfrak{I}$-limite projective $\nu^{\mathfrak{I}}_K.$ comme suit : Soit Lim le foncteur $\mathfrak{I}$-limite projective usuel sur $\mathfrak{M}$: si

$$F = (\mathfrak{M}, \underline{F}, I^\bullet) \in \hat{\mathfrak{F}}.\mathfrak{I},$$

la classe $Lim\ F$ est donc formée des $(s_i)_{i \in I^\bullet_o} \in \prod_{i \in I^\bullet_o} F(i)$ tels que

$$F(k)(s_i) = s_{i'}, \quad \text{pour tout} \quad k \in i'.I.i.$$

Soit $\Phi = (\mathfrak{A}(K^\bullet), \underline{\Phi}, I^\bullet)$ un foncteur. Pour tout $e \in (K_+)^\bullet_o$, l'application $k \to \Phi(k)(e)$ définit un foncteur Φ_e de $I^\bullet$ vers $\mathfrak{M}$. Désignons par $l(\Phi_e)$ la classe des couples

$$(z, \Phi), \quad \text{où} \quad z \in Lim\,\Phi_e;$$

évidemment $l(\Phi_e)$ est aussi une limite projective de Φ_e. Le foncteur

$$(\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, K^*_+)^{\square}, \underline{\Phi}, I^\bullet)$$

admet pour limite projective l'unique foncteur $Lim\,\Phi$ de K^*_+ vers $\mathfrak{M}$ tel que

$$Lim\,\Phi(e) = l(\Phi_e) \quad \text{pour tout} \quad e \in (K_+)^\bullet_o.$$

Comme $\Phi_0(e') = \Phi(e')(0)$ est un atome pour tout $e' \in K^\bullet_o$, la classe $Lim\,\Phi(0)$ est un atome de la forme $\{(z,\Phi)\}$. Par suite $Lim\,\Phi$ est aussi une limite projective de Φ. Pour tout $i \in I^\bullet_o$, la projection canonique de $Lim\,\Phi$ vers $\Phi(i)$ est la transformation naturelle $\hat{\tau}(i)$ définie par le triplet $(\Phi(i), \tau_i, Lim\,\Phi)$, où $\tau_i(e)$ est l'application

$$((z_i)_{i \in I^\bullet_o}, \Phi) \to z_i \quad \text{de} \quad Lim\,\Phi(e) \quad \text{dans} \quad \Phi(i)(e).$$

Nous désignons par $\nu^{\mathfrak{I}}_K.(\Phi)$ la transformation naturelle définie par le triplet

$(\Phi, \hat{\tau}, \hat{E})$, où $\hat{E}$ est le foncteur de $I^{\cdot}$ vers $K^{\cdot}$ constant sur $E = Lim\, \Phi$. L'application $\Phi \to \nu^{\mathcal{J}}_{K^{\cdot}}(\Phi)$ est une application $\mathcal{J}$-limite projective $\nu^{\mathcal{J}}_{K^{\cdot}}$ sur $\mathfrak{A}(K^{\cdot})$. Puisque $\mathfrak{M}_0 \in \hat{\mathfrak{M}}_0$, on a $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, K^*_+) \in \hat{\mathfrak{M}}_0$, d'où

$$S^{\mathcal{J}}_{K^{\cdot}} = (\mathfrak{A}(K^{\cdot}), \nu^{\mathcal{J}}_{K^{\cdot}}) \in \hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}}.$$

Si $Lim^{\nu^{\mathcal{J}}_{K^{\cdot}}} \Phi = Lim^{\nu^{\mathcal{J}}_{K^{\cdot}}} \Phi'$, la relation $l(\Phi_0) = l(\Phi'_0)$ entraîne $\Phi = \Phi'$, par construction. De plus $Lim\, \Phi$ n'appartient pas à $\eta_{K^{\cdot}}(K)$. D'après le théorème 5, la complétion $\mathcal{J}$-projective $(\overline{K}^{\cdot}, \overline{\nu})$ de $\eta_{K^{\cdot}}(K)$ dans $S^{\mathcal{J}}_{K^{\cdot}}$ est telle que $\overline{K} \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$ et que $\eta_{K^{\cdot}}(K)^{\cdot}$ soit une sous-catégorie pleine de $\overline{K}^{\cdot}$. Comme $Q^{\mathcal{J}}$ est un foncteur d'homomorphismes saturé, il existe

$$\hat{u} = ((\dot{\mathfrak{A}}'(K^{\cdot}), \hat{\nu}^{\mathcal{J}}_{K^{\cdot}}), \underline{u}, (\overline{K}^{\cdot}, \overline{\nu})) \in \mathcal{F}^{\mathcal{J}}_0 . \hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}}_{\gamma}.$$

Puisque $K \in \mathfrak{M}_0$ et que $p^{\mathcal{J}}(\hat{u}).\eta_{K^{\cdot}}$ est injectif, on peut supposer que $K^{\cdot}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathfrak{A}'(K^{\cdot})$ et que la restriction de $\overset{-1}{\underline{u}}$ à K est $\underline{\eta}_{K^{\cdot}}$.

-Soit $H^{\cdot} \in \mathcal{F}_0$ et soit $((C^{\cdot}, \nu), J)$ un $(\mathcal{F}^{\mathcal{J}}, p^{\mathcal{J}})$-projecteur. Les relations

$$(\mathfrak{A}'(H^{\cdot}), \hat{\nu}^{\mathcal{J}}_{H^{\cdot}}) \in \mathcal{F}^{\mathcal{J}}_0 \quad \text{et} \quad (\mathfrak{A}'(H^{\cdot}), \iota, H^{\cdot}) \in \mathcal{F}$$

assurent l'existence d'un et d'un seul $\hat{G}' \in \mathcal{F}^{\mathcal{J}}$ tel que

$$p^{\mathcal{J}}(\hat{G}').J = (\mathfrak{A}'(H^{\cdot}), \iota, H^{\cdot}).$$

Il s'ensuit que J est un foncteur injectif, de sorte que $J(H)^{\cdot}$ est une sous-catégorie $M^{\cdot}$ de $C^{\cdot}$ isomorphe à $H^{\cdot}$. Soit $\Phi = (C^{\cdot}, \Phi, I^{\cdot}) \in \mathcal{F}$ et $E = Lim^{\nu}\, \Phi$. Si l'on avait $E \in M$, on aurait $p^{\mathcal{J}}(\hat{G}')(E) \in \overline{H}$ et l'égalité

$$Lim(p^{\mathcal{J}}(\hat{G}').\Phi) = p^{\mathcal{J}}(\hat{G}')(E) \in H$$

entraînerait, en posant $\Phi' = p^{\mathcal{J}}(\hat{u}^{-1}.\hat{G}').\Phi$,

$$Lim^{\nu^{\mathcal{J}}_{H^{\cdot}}}(\mathfrak{A}'(H^{\cdot}), \underline{\Phi}', I^{\cdot}) \in \eta_{H^{\cdot}}(H),$$

ce qui est impossible par définition de $\nu^{\mathcal{J}}_{H^{\cdot}}$. Par conséquent $E \notin M$.

-D'après la construction d'une $p^{\mathcal{J}}$-structure libre (th. 1), $(C^{\cdot}, \nu)$ est la complétion $\mathcal{J}$-projective de M dans un élément de $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}}_0$, produit d'éléments de $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}_0$. La remarque précédant le théorème affirme que $(C^{\cdot}, \nu)$ est aussi la complétion $\mathcal{J}$-projective de M dans $(C^{\cdot}, \nu)$. Ainsi, en reprenant les notations du début de la démonstration du théorème 5, $C = \bigcup_{\lambda < \hat{\lambda}} M_\lambda$.- Montrons que Lim^ν est injectif. En effet, supposons qu'il existe

$$\Phi_m \in C^\bullet . \mathcal{F} . I^\bullet_m, \quad \text{où} \quad m = 1 \text{ et } 2,$$

tels que

$$Lim^\nu \Phi_1 = Lim^\nu \Phi_2 = E \quad \text{et} \quad \Phi_1 \neq \Phi_2 .$$

Soit λ le plus petit des ordinaux $\lambda' \leq \hat{\lambda}$ tels que

$$\Phi_1(I_1) \cup \Phi_2(I_2) \subset M_{\lambda'} ;$$

nous pouvons supposer que c'est Φ_2 qui vérifie

$$\Phi_2 \notin \delta^{I^\bullet}_{M_\xi} \quad \text{quel que soit} \quad \xi < \lambda .$$

On sait (démonstration du théorème 5) que $\lambda < \hat{\lambda}$. Désignons par A une classe de la forme $C^\bullet_0 \cup \{E'\}$, où $E' \notin C$, et par a l'application de A dans $C^\bullet_0$ telle que

$$a(E') = E \quad \text{et} \quad a(e) = e \quad \text{si} \quad e \neq E'.$$

La catégorie $a^*(C^\bullet)$ induite de $C^\bullet$ par a (chap. IV, C.S.) admet pour éléments les triplets $((e', e), f) \in A^2 \times C$ tels que $f \in a(e').C.a(e)$. Soit $\hat{C}^\bullet$ la catégorie obtenue à partir de $a^*(C^\bullet)$ en identifiant $C^\bullet$ à la sous-catégorie pleine de $a^*(C^\bullet)$ formée des $((\beta(f), \alpha(f)), f)$, où $f \in C$, et en identifiant $((E', E'), E)$ à E'. On a $((E', E), E) \in E'.\hat{C}^\bullet_\gamma .E$, de sorte que $\hat{C}^\bullet$ est un élargissement (chap. V, C.S.) de $C^\bullet$. Il en résulte que le foncteur $(\hat{C}^\bullet, \iota, C^\bullet)$ est à $\mathcal{I}$-limites projectives. En particulier, E et E' sont tous deux des limites projectives de $\hat{\Phi}_m$ pour $m = 1$ et 2. Choisissons sur $\hat{C}^\bullet$ une application $\mathcal{I}$-limite projective $\hat{\nu}$ telle que

$\hat{p}^\nu_i(\hat{\Phi}) = p^\nu_i(\Phi)$ si $\beta(\underline{\hat{\Phi}}) \subset C$ et $\Phi = (C^\bullet, \underline{\hat{\Phi}}, I^\bullet) \neq \Phi_2$, où $i \in I^\bullet_0$,

$\hat{Lim}^\nu \hat{\Phi}_2 = E'$ si $\hat{\Phi}_2 = (\hat{C}^\bullet, \underline{\Phi}_2, I^\bullet_2)$.

Les relations

$$(\hat{C}^\bullet, \hat{\nu}) \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}}_0 \quad \text{et} \quad (\hat{C}^\bullet, \iota, C^\bullet).J \in \mathcal{F}$$

assurent l'existence d'un et d'un seul

$$\hat{G} = ((\hat{C}^{\bullet}, \hat{\nu}), \underline{G}, (C^{\bullet}, \nu)) \in \mathcal{F}^{\mathcal{J}}$$

tel que $G.J = (\hat{C}^{\bullet}, \iota, C^{\bullet}).J$, où $G = p^{\mathcal{J}}(\hat{G})$. Soit G_ξ la restriction de G à $M^{\bullet}_\xi$ pour tout $\xi \leq \lambda$. Etant donné que J est injectif, $G_1 = (\hat{C}^{\bullet}, \iota, M^{\bullet}_1)$. Soit $\xi \leq \lambda$ et supposons prouvé que $G_{\xi'} = (\hat{C}^{\bullet}, \iota, M^{\bullet}_{\xi'})$ pour tout $\xi' < \xi$.

1°) Si ξ est de seconde espèce, $G_\xi = (\hat{C}^{\bullet}, \iota, M^{\bullet}_\xi)$, car $M_\xi = \bigcup_{\xi' < \xi} M_{\xi'}$.

2°) Soit $\xi = \xi' + 1$. Si $\Phi' \in \delta^{I^{\bullet}}_{M_{\xi'}}$, on a

$$\Phi' \neq \Phi_2, \quad \underline{G\Phi'} = \underline{G_{\xi'}}\underline{\Phi'} = \underline{\Phi'}$$

et,par construction de $\hat{\nu}$, pour tout $i \in I^{\bullet}_o$,

$$G(p^{\nu}_i(\Phi')) = p^{\hat{\nu}}_i(G.\Phi') = p^{\hat{\nu}}_i(\hat{C}^{\bullet}, \underline{\Phi'}, I^{\bullet}) = p^{\nu}_i(\Phi').$$

Si $\Psi \in \Delta^{I^{\bullet}}_{M_{\xi'}}$ est la transformation naturelle définie par le triplet $(\Phi', \tau, \hat{e})$, $lim^{\nu}\Psi$ est l'unique $h \in C$ tel que

$$p^{\nu}_i(\Phi').h = \tau(i) \in M_{\xi'} \quad \text{pour tout} \quad i \in I^{\bullet}_o;$$

les relations

$$\tau(i) = G(\tau(i)) = G(p^{\nu}_i(\Phi').h) = p^{\nu}_i(\Phi').G(h)$$

pour tout $i \in I^{\bullet}_o$ entraînent $G(h) = h$. Ainsi la restriction de $\underline{G}$ à $\sigma^{\nu}(M_{\xi'})$ est l'identité. Comme $\sigma^{\nu}(M_{\xi'})$ engendre la sous-catégorie $M^{\bullet}_\xi$ de $C^{\bullet}$ et de $\hat{C}^{\bullet}$, on en conclut $G_\xi = (\hat{C}^{\bullet}, \iota, M^{\bullet}_\xi)$.

Par récurrence transfinie, on obtient $G_\lambda = (\hat{C}^{\bullet}, \iota, M^{\bullet}_\lambda)$, d'où

$$\underline{G\Phi}_m = \underline{G_\lambda}\underline{\Phi}_m = \underline{\Phi}_m,$$

et

$$G(Lim^{\nu}\Phi_m) = Lim^{\hat{\nu}}(G.\Phi_m) = Lim^{\hat{\nu}}(\hat{C}^{\bullet}, \underline{\Phi}_m, I^{\bullet}_m)$$

pour $m = 1$ et 2. Mais on a d'une part

$$Lim^{\hat{\nu}}(\hat{C}^{\bullet}, \underline{\Phi}_1, I^{\bullet}_1) = E \quad \text{et} \quad Lim^{\hat{\nu}}(\hat{C}^{\bullet}, \underline{\Phi}_2, I^{\bullet}_2) = E'$$

par définition de $\hat{\nu}$, d'autre part

$$G(Lim^{\nu}\Phi_1) = G(Lim^{\nu}\Phi_2).$$

Ces relations étant incompatibles, on obtient une contradiction. Donc $\Phi_1 = \Phi_2$ et Lim^{ν} est injectif.

- Comme ν vérifie les hypothèses du théorème 5, $M^{\cdot}$ est une sous-catégorie pleine de $C^{\cdot}$. Si de plus $p\mathcal{F}(\mathcal{G})$ est contenu dans l'univers $\mathfrak{U}$ et si $H^{\cdot}$ est une $\mathfrak{U}$-catégorie, la catégorie $M^{\cdot}$ est une $\mathfrak{U}$-catégorie et, d'après le théorème 5, $C^{\cdot}$ est une $\mathfrak{U}$-catégorie. ■

COROLLAIRE. *Si $p\mathcal{F}(\mathcal{G})$ est contenu dans l'univers $\mathfrak{U}$, soit $\mathcal{F}^{\mathcal{G}}_{\mathfrak{U}}$ (resp. $\mathcal{F}_{\mathfrak{U}}$) la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}^{\mathcal{G}}$ (resp. de $\mathcal{F}$) ayant pour unités les $(H^{\cdot}, \nu) \in \mathcal{F}^{\mathcal{G}}_0$ (resp. les $H^{\cdot} \in \mathcal{F}_0$) tels que $H^{\cdot}$ soit une $\mathfrak{U}$-catégorie. Le foncteur $p^{\mathcal{G}}_{\mathfrak{U}} = (\mathcal{F}_{\mathfrak{U}}, \underline{p}^{\mathcal{G}}\iota, \mathcal{F}^{\mathcal{G}}_{\mathfrak{U}})$ admet un adjoint.*

En effet, la $p^{\mathcal{G}}$-structure libre engendrée par $H^{\cdot} \in \mathcal{F}_{\mathfrak{U}}$ appartient à $\mathcal{F}^{\mathcal{G}}_{\mathfrak{U}}$ d'après le théorème 6, et par suite est aussi une $p^{\mathcal{G}}_{\mathfrak{U}}$-structure libre engendrée par $H^{\cdot}$. ■

2. Construction de complétions projectives.

A. $p^{\mathcal{G}}$-STRUCTURES LIBRES.

THEOREME 7. *Soit $H^{\cdot} \in \mathcal{F}_0$; on peut construire explicitement par récurrence transfinie une $p^{\mathcal{G}}$-structure libre engendrée par $H^{\cdot}$.*

DEMONSTRATION. La construction que nous allons donner est suggérée par la démonstration du théorème 5. Posons $\hat{M}^{\cdot}_1 = H^{\cdot}$. Soit $\hat{\lambda}$ l'ordinal initial $\omega_{\lambda_{\mathcal{G}}+1}$, où $\lambda_{\mathcal{G}} = \sup_{I^{\cdot} \in \mathcal{G}} \overline{I}$. Soit $1 < \lambda \leq \hat{\lambda}$ et supposons définie une catégorie $\hat{M}^{\cdot}_{\xi}$ pour tout $\xi < \lambda$, de sorte que $\hat{M}^{\cdot}_{\xi'}$ soit une sous-catégorie de $\hat{M}^{\cdot}_{\xi}$ si $\xi' < \xi$. Pour tout foncteur Y, notons $\underline{Y}^{\cdot}$ le couple (Y, κ) tel que $Y = (\beta(Y), \underline{Y}, N^{\cdot})$, où $N^{\cdot} = (\alpha(Y), \kappa)$. On peut supposer $\underline{Y}^{\cdot} \notin H$.

1°) Supposons $\lambda = \lambda' + 1$. Soient K_{λ} la classe des $\underline{\Phi}^{\cdot}$, et H_{λ} la classe des $(i, \underline{\Phi}^{\cdot})$, tels que

$$\alpha(\underline{\Phi}) = I, \quad \Phi = (\hat{M}^{\cdot}_{\lambda'}, \underline{\Phi}, I^{\cdot}) \in \mathcal{F}.\mathcal{G} \quad \text{et} \quad i \in I^{\cdot}_0.$$

Soit H'_{λ} la classe formée des $\underline{\Psi}^{\cdot}$ tels que

$$\Psi = (\boxminus \hat{M}^{\cdot}_{\lambda'}, \underline{\Psi}, I^{\cdot}) \in \mathfrak{N}(\hat{M}^{\cdot}_{\lambda'}, I^{\cdot}) \quad \text{et} \quad \alpha^{\boxplus}(\Psi) \in \overleftarrow{M}^{\cdot I^{\cdot}}_{\lambda'}.$$

Soit $[G_\lambda] = (G_\lambda, \beta_\lambda, \alpha_\lambda)$ le graphe défini comme suit :

$$G_\lambda = \hat{M}_{\lambda'} \cup K_\lambda \cup H_\lambda \cup H'_\lambda ;$$

$$\begin{cases} \alpha_\lambda(h) = \alpha(h) \quad \text{et} \quad \beta_\lambda(h) = \hat{\beta}(h) \quad \text{dans} \quad \hat{M}^{\bullet}_{\lambda'}, \quad \text{si } h \in \hat{M}_{\lambda'} ; \\ \alpha_\lambda(\underline{\Phi}^{\bullet}) = \underline{\Phi}^{\bullet} = \beta_\lambda(\underline{\Phi}^{\bullet}), \quad \text{si} \quad \underline{\Phi}^{\bullet} \in K_\lambda ; \\ \alpha_\lambda(i, \underline{\Phi}^{\bullet}) = \underline{\Phi}^{\bullet} \quad \text{et} \quad \beta_\lambda(i, \underline{\Phi}^{\bullet}) = \underline{\Phi}(i), \quad \text{si} \quad (i, \underline{\Phi}^{\bullet}) \in H_\lambda ; \\ \alpha_\lambda(\underline{\Psi}^{\bullet}) = e \quad \text{et} \quad \beta_\lambda(\underline{\Psi}^{\bullet}) = \underline{\Phi}^{\bullet}, \quad \text{si } \underline{\Psi}^{\bullet} \in H'_\lambda \text{ et si le triplet} \\ \quad \text{définissant } (\boxminus \hat{M}^{\bullet}_{\lambda'}, \underline{\Psi}, \alpha(\underline{\Psi})^{\bullet}) \text{ est } (\Phi, \tau, \hat{e}), \text{ où } \Phi = (\hat{M}^{\bullet}_{\lambda'}, \underline{\Phi}, I^{\bullet}). \end{cases}$$

Soit $L[G_\lambda]^{\bullet}$ la catégorie libre des chemins associée à $[G_\lambda]$ (chap. III, C.S.) et soit $r_\lambda = (L[G_\lambda], D_\lambda, L[G_\lambda])$ la relation telle que D_λ soit la classe des couples suivants, où $\Psi = (\boxminus \hat{M}^{\bullet}_{\lambda'}, \underline{\Psi}, I^{\bullet})$:

$$\begin{cases} (((i, \underline{\Phi}^{\bullet}), \underline{\Psi}^{\bullet}), \tau(i)), \quad \text{si } \underline{\Psi}^{\bullet} \in H'_\lambda \text{ et si la transformation naturelle } \Psi \\ \quad \text{est définie par le triplet } (\Phi, \tau, \hat{e}), \text{ où } \Phi = (\hat{M}^{\bullet}_{\lambda'}, \underline{\Phi}, \alpha(\underline{\Phi})^{\bullet}) ; \\ ((b', b), b'.b) \quad \text{si } b \in \hat{M}_{\lambda'}, \ b' \in \hat{M}_{\lambda'} \text{ et } (b', b) \in \hat{M}_{\lambda'} * \hat{M}^{\bullet}_{\lambda'} ; \\ ((\underline{\Psi}^{\bullet}, b), \underline{\Psi}'^{\bullet}) \quad \text{si } \underline{\Psi}^{\bullet} \in H'_\lambda, \ \underline{\Psi}'^{\bullet} \in H'_\lambda, \ b \in \hat{M}_{\lambda'}, \ \Psi' = \Psi \, \square\!\square \, (\widehat{b^{\boxminus}}) \\ ((\Psi^{\bullet}, \underline{\Psi}^{\bullet}_1), \underline{\Psi}'^{\bullet}) \in H'^{2}_\lambda \times H'_\lambda \text{ si, pour } i \in I, \text{ il existe } i' \in I_1 \text{ et} \\ \quad b_i \in \hat{M}_{\lambda'} \text{ avec } b_i^{\boxminus} \, \square\!\square \, \underline{\Psi}_1(i') = \underline{\Psi}'(i), \ (b_i.(i', \underline{\Phi}_1))^{\boxminus} = \underline{\Psi}(i). \end{cases}$$

Comme deux unités de $L[G_\lambda]^{\bullet}$ ne sont pas équivalentes pour la relation d'équivalence $\hat{r}_\lambda$ bicompatible sur $L[G_\lambda]^{\bullet}$ engendrée par r_λ, il existe une catégorie quotient strict de $L[G_\lambda]^{\bullet}$ par $\hat{r}_\lambda$, notée $\hat{M}^{\bullet}_\lambda$. D'après le corollaire, proposition 8 (appendice), on voit que G_λ s'identifie à une sous-classe de $\hat{M}_\lambda$ et $\hat{M}^{\bullet}_{\lambda'}$ à une sous-catégorie de $\hat{M}^{\bullet}_\lambda$. De plus tout élément $g \in \hat{M}_\lambda - G_\lambda$ est déterminé par la donnée du seul chemin propre de G_λ appartenant à g et qui est irréductible (i.e. de longueur inférieure à celle de tout chemin équivalent). Ce chemin irréductible est de l'une des formes suivantes, où seul b appartient à $\hat{M}_{\lambda'}$:

a) $(b, (i, \underline{\Phi}^{\bullet})) \in \hat{M}_{\lambda'} \times H_\lambda$; $(b, f_n, \dots, f_1) \in \hat{M}_{\lambda'} \times (H'_\lambda)^n$;

b) $(f_n, \dots, f_1) \in H'^{n}_\lambda$; $(f_n, \dots, f_1, (i, \underline{\Phi}^{\bullet})) \in (H'_\lambda)^n \times H_\lambda$

c) $(b, f_n, \dots, f_1, (i, \underline{\Phi}^{\bullet})) \in \hat{M}_{\lambda'} \times H'^{n}_\lambda \times H_\lambda$.

2) Si λ est de seconde espèce, $\hat{M}_\lambda = \bigcup_{\xi < \lambda} \hat{M}_\xi$ admet une unique structure de catégorie $\hat{M}^{\bullet}_\lambda$ telle que $\hat{M}^{\bullet}_\xi$ soit une sous-catégorie de $\hat{M}^{\bullet}_\lambda$ pour tout $\xi < \lambda$.

- Ainsi par récurrence transfinie, nous obtenons une catégorie $\hat{M}^{\bullet}_{\hat{\lambda}}$, qui admet $H^{\bullet}$ pour sous-catégorie. La construction de $\hat{M}^{\bullet}_{\hat{\lambda}}$ implique évidemment que $\hat{M}^{\bullet}_{\hat{\lambda}} \in \mathfrak{M}_o$. Nous poserons $\hat{H}^{\bullet} = \hat{M}^{\bullet}_{\hat{\lambda}}$.

- Montrons que $\hat{H}^{\bullet}$ est à $\mathcal{J}$-limites projectives. En effet, soit $\Phi \in \hat{H}^{\bullet}.\mathcal{F}.I^{\bullet}$. Une démonstration analogue à celle du théorème 5 prouve qu'il existe un plus petit ordinal $\lambda < \hat{\lambda}$ tel que $\Phi(I) \subset \hat{M}_\lambda$. Montrons que $\underline{\Phi}^{\bullet} \in \hat{M}_{\lambda+1}$ est une limite projective de Φ, la projection canonique vers $\Phi(i)$ étant $(i, \underline{\Phi}^{\bullet})$, pour tout $i \in I^{\bullet}_o$. Pour cela, soit Ψ une transformation naturelle définie par un triplet $(\Phi, \tau, \hat{e})$. On voit comme dans le théorème 5 qu'il existe un ordinal $\xi < \hat{\lambda}$ tel que $\lambda \leq \xi$ et que $\Psi(I) \subset \square \hat{M}^{\bullet}_\xi$. Par construction, $\underline{\Psi}^{\bullet} \in \hat{M}_{\xi+1}$ et

$$(i, \underline{\Phi}^{\bullet}).\underline{\Psi}^{\bullet} = \tau(i) \quad \text{pour tout} \quad i \in I^{\bullet}_o.$$

Soient $g \in \hat{H}$ et $g' \in \hat{H}$ tels que

$$(i, \underline{\Phi}^{\bullet}).g = (i, \underline{\Phi}^{\bullet}).g' \quad \text{pour tout} \quad i \in I^{\bullet}_o.$$

Il nous faut montrer qu'alors $g = g'$. La démonstration se fait en deux étapes :

1°) Supposons $g \in \hat{M}_{\lambda+1}$ et $g' \in \hat{M}_{\lambda+1}$. Il existe deux chemins irréductibles $(g_n, \ldots, g_1)$ et $(g'_{n'}, \ldots, g'_1)$ caractérisant g et g' respectivement, et on a

$$((i, \underline{\Phi}^{\bullet}), g_n, \ldots, g_1) \sim ((i, \underline{\Phi}^{\bullet}), g'_{n'}, \ldots, g'_1) \bmod \hat{r}_\lambda$$

pour tout $i \in I^{\bullet}_o$. Comme $\underline{\Phi}^{\bullet} \notin \hat{M}_\lambda$, on a nécessairement $g_n \in H'_\lambda$ et $g'_{n'} \in H'_\lambda$, d'où

$$\hat{g}_n = (i, \underline{\Phi}^{\bullet}).g_n \in \hat{M}_\lambda \quad \text{et} \quad \hat{g}'_{n'} = (i, \underline{\Phi}^{\bullet}).g'_{n'} \in \hat{M}_\lambda.$$

Puisque $\hat{M}_\lambda . H'_\lambda \subset \hat{M}_\lambda \cup H'_\lambda$, on peut se ramener au cas où

$$(\hat{g}_n, g_{n-1}, \ldots, g_1) \quad \text{et} \quad (\hat{g}'_{n'}, g'_{n'-1}, \ldots, g'_1)$$

sont tous deux irréductibles. Il s'ensuit

$$n = n', \quad g_j = g'_j \quad \text{pour} \quad 1 \leq j < n \quad \text{et} \quad \hat{g}_n = \hat{g}'_{n'}.$$

Comme g_n et $g'_{n'}$ sont de la forme $\underline{\Psi}^{\cdot}$ et $\underline{\Psi}'^{\cdot}$ (prop. 8, app.), l'égalité

$$(i, \underline{\Phi}^{\cdot}).\underline{\Psi}^{\cdot} = (i, \underline{\Phi}^{\cdot}).\underline{\Psi}'^{\cdot} \quad \text{pour tout} \quad i \in I^{\cdot}_{o}$$

entraîne $\underline{\Psi}^{\cdot} = \underline{\Psi}'^{\cdot}$. Par suite $g_n = g'_{n'}$ et $g = g'$.

2°) Soit $\lambda + 1 < \xi \leq \hat{\lambda}$. Supposons montré que $f = f'$ lorsque

$$(i, \underline{\Phi}^{\cdot}).f = (i, \underline{\Phi}^{\cdot}).f' \quad \text{pour tout} \quad i \in I^{\cdot}_{o}$$

et qu'il existe $\xi' < \xi$ tel que $f \in \hat{M}_{\xi'}$ et $f' \in \hat{M}_{\xi'}$; supposons $g \in \hat{M}_{\xi}$ et $g' \in \hat{M}_{\xi}$.

a) Si ξ est de seconde espèce, il existe $\xi' < \xi$ tel que $g \in M_{\xi'}$ et $g' \in M_{\xi'}$, de sorte que l'on a $g = g'$, d'après l'hypothèse de récurrence.

b) Soit $\xi = \xi' + 1$; désignons par $(g_n, \ldots, g_1)$ et $(g'_{n'}, \ldots, g'_1)$ les chemins irréductibles caractérisant g et g'. On a

$$((i, \underline{\Phi}^{\cdot}), g_n, \ldots, g_1) \sim ((i, \underline{\Phi}^{\cdot}), g'_{n'}, \ldots, g'_1) \mod \hat{r}_{\lambda}.$$

1) Si g_n et $g'_{n'} \in H_{\xi} - \hat{M}_{\xi'}$, les deux chemins sont irréductibles, et $g = g'$.

2) Si $g_n \in H_{\xi} - \hat{M}_{\xi'}$, $g'_{n'} \in \hat{M}_{\xi'} \cup H'_{\xi}$, on se ramène au cas où

$$((i, \underline{\Phi}^{\cdot}), g_n, \ldots, g_1) \quad \text{et} \quad ((i, \underline{\Phi}^{\cdot}).g'_{n'}, g'_{n'-1}, \ldots, g'_1)$$

sont irréductibles, de sorte que l'on obtient $n' = n+1$, $g'_j = g_j$, $1 \leq j \leq n$ et $(i, \underline{\Phi}^{\cdot}) = (i, \underline{\Phi}^{\cdot}).g'_{n'}$. Cette dernière égalité a pour conséquence $g'_{n'} = \overline{\Phi}^{\cdot}$ (en vertu de l'hypothèse de récurrence si $g'_{n'} \in \hat{M}_{\xi'}$). Ainsi $g = g'$.

3) Si $g_n \in \hat{M}_{\xi'} \cup H'_{\xi}$ et $g'_{n'} \in \hat{M}_{\xi'} \cup H'_{\xi}$, on peut supposer que

$$((i, \underline{\Phi}^{\cdot}).g_n, g_{n-1}, \ldots, g_1) \quad \text{et} \quad ((i, \underline{\Phi}^{\cdot}).g'_{n'}, g'_{n'-1}, \ldots, g'_1)$$

sont irréductibles et équivalents; il s'ensuit $n = n'$,

$$g_j = g'_j \quad \text{pour} \quad 1 \leq j < n \quad \text{et} \quad (i, \underline{\Phi}^{\cdot}).g_n = (i, \underline{\Phi}^{\cdot}).g'_{n'}$$

c'est-à-dire, par hypothèse, $g_n = g'_{n'}$. Donc $g = g'$.

Par récurrence transfinie, il en résulte que $g = g'$ lorsque $g \in \hat{H}$, $g' \in \hat{H}$ et

$$(i, \underline{\Phi}^{\cdot}).g = (i, \underline{\Phi}^{\cdot}).g' \quad \text{pour tout} \quad i \in I_o^{\cdot}.$$

Ceci montre que $\underline{\Phi}^{\cdot}$ est la limite projective de Φ.

- Soit $\hat{\nu}$ l'application $\mathcal{I}$-limite projective sur $\hat{H}^{\cdot}$ telle que

$$p_i^{\hat{\nu}}(\hat{H}^{\cdot}, \underline{\Phi}, I^{\cdot}) = (i, \underline{\Phi}^{\cdot}) \quad \text{pour tout} \quad i \in I_o^{\cdot}.$$

Supposons $(C^{\cdot}, \nu) \in \mathcal{F}_o^{\mathcal{I}}$ et $F = (C^{\cdot}, \underline{F}, \hat{H}^{\cdot}) \in \mathcal{F}$. Nous allons étendre F en un foncteur F' de $\hat{H}^{\cdot}$ vers $C^{\cdot}$. A cette fin, posons $\tilde{F}'_1 = F$ et soit $\lambda \leq \hat{\lambda}$. Supposons défini un foncteur $\tilde{F}'_\xi = (C^{\cdot}, \underline{\tilde{F}'_\xi}, \hat{M}^{\cdot}_\xi)$ pour tout $\xi < \lambda$, de sorte que $\tilde{F}'_{\xi'}$ soit une restriction de $\tilde{F}'_\xi$ si $\xi' < \xi$. Si λ est de seconde espèce, il existe un unique foncteur $\tilde{F}'_\lambda$ de $\hat{M}^{\cdot}_\lambda$ vers $C^{\cdot}$ admettant $\tilde{F}'_\xi$ pour restriction pour tout $\xi < \lambda$. Examinons le cas où $\lambda = \lambda' + 1$. Si $\underline{\Phi}^{\cdot} \in K_\lambda$ et $\underline{\Psi}^{\cdot} \in H'_\lambda$, posons

$$\hat{\Phi}^{\cdot} = \tilde{F}'_{\lambda'}.(\hat{M}^{\cdot}_{\lambda'}, \underline{\Phi}, I^{\cdot}) \quad \text{et} \quad \hat{\Psi}^{\cdot} = \tilde{F}'_{\lambda'}.(\boxminus \hat{M}^{\cdot}_{\lambda'}, \underline{\Psi}, I^{\cdot}),$$
$$\text{si} \quad I^{\cdot} = \alpha(\underline{\Phi})^{\cdot} = \alpha(\underline{\Psi})^{\cdot}.$$

Soit $\underline{F'_\lambda} : k \to F'_\lambda(k)$ la surjection de G_λ dans C telle que

$$\begin{cases} F'_\lambda(b) = \tilde{F}'_{\lambda'}(b) \quad \text{si } b \in \hat{M}_{\lambda'}, \\ F'_\lambda(\underline{\Phi}^{\cdot}) = Lim^\nu(\hat{\Phi}^{\cdot}) \text{ et } F'_\lambda(i, \underline{\Phi}^{\cdot}) = p_i^\nu(\hat{\Phi}^{\cdot}) \quad \text{si } (i, \underline{\Phi}^{\cdot}) \in H_\lambda \\ F'_\lambda(\underline{\Psi}^{\cdot}) = lim^\nu \hat{\Psi}^{\cdot} \quad \text{si } \underline{\Psi}^{\cdot} \in H'_\lambda. \end{cases}$$

La surjection $\underline{F'_\lambda}$ définit un homomorphisme F'_λ du graphe $[G_\lambda]$ vers le graphe $[C^{\cdot}]$ sous-jacent à la catégorie $C^{\cdot}$. Soit $\bar{F}'_\lambda = L(C^{\cdot}, \underline{F'_\lambda}, [G_\lambda])$ le foncteur de $L[G_\lambda]^{\cdot}$ vers $C^{\cdot}$ correspondant. Ce foncteur est compatible avec r_λ, car :

a) Si $(((i, \underline{\Phi}^{\cdot}), \underline{\Psi}^{\cdot}), \tau(i)) \in D_\lambda$, on a

$$\bar{F}'_\lambda((i, \underline{\Phi}^{\cdot}), \underline{\Psi}^{\cdot}) = F'_\lambda(i, \underline{\Phi}^{\cdot}).F'_\lambda(\underline{\Psi}^{\cdot}) = p_i^\nu(\hat{\Phi}^{\cdot}).lim^\nu \hat{\Psi}^{\cdot} = \bar{F}'_\lambda(\tau(i));$$

b) Si $((b', b), b'.b) \in D_\lambda$, où $(b', b) \in \hat{M}^{\cdot}_{\lambda'} * \hat{M}^{\cdot}_{\lambda'}$, on trouve

$$\bar{F}'_\lambda(b', b) = \tilde{F}'_{\lambda'}(b').\tilde{F}'_{\lambda'}(b) = \tilde{F}'_{\lambda'}(b'.b) = \bar{F}'_\lambda(b'.b);$$

c) Si $((\underline{\Psi}^{\cdot}, b), \underline{\Psi}'^{\cdot}) \in D_\lambda$, où $b = \underline{\Psi}^{\cdot}_1$ (resp. $b \in \hat{M}_{\lambda'}$), alors

$$p_i^\nu(\hat{\Phi}^{\cdot}).\bar{F}'_\lambda(\underline{\Psi}^{\cdot}, \underline{\Psi}^{\cdot}_1) = p_i^\nu(\hat{\Phi}^{\cdot}).\bar{F}'_\lambda(\underline{\Psi}'^{\cdot}) \quad \text{pour tout } i \in \alpha(\underline{\Psi})$$

$$(\text{resp.} \overline{F}'_\lambda(\underline{\Psi}^\bullet, b) = \lim^\nu \hat{\Psi}^\bullet . F'_\lambda(b) = \lim^\nu \hat{\Psi}'^\bullet = \overline{F}'_\lambda(\underline{\Psi}'^\bullet)) .$$

Il est a fortiori compatible avec $\hat{r}_\lambda$ étant donné que $\hat{r}_\lambda$ est la relation d'équivalence bicompatible sur $\alpha(\overline{F}'_\lambda)$ engendrée par r_λ. Comme $\hat{M}^\bullet_\lambda$ est une catégorie quotient de $L[G_\lambda]^\bullet$ par $\hat{r}_\lambda$, il existe un et un seul $\tilde{F}'_\lambda \in \mathcal{F}$ tel que $\tilde{F}'_\lambda . \tilde{r}_\lambda = \overline{F}'_\lambda$, en notant $\tilde{r}_\lambda$ le $p\mathcal{F}$-épimorphisme de $L[G_\lambda]^\bullet$ sur $\hat{M}^\bullet_\lambda$. Evidemment $\tilde{F}'_\lambda(b) = F'_\lambda(b)$ si ce dernier est défini. Par récurrence transfinie, on construit de cette manière un foncteur $F' = \tilde{F}'_{\hat{\lambda}}$ de $\hat{H}^\bullet$ vers $C^\bullet$ tel que

$$\underline{F}' = ((C^\bullet, \nu), F', (\hat{H}^\bullet, \hat{\nu})) \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}} \quad \text{et} \quad F'.(\hat{H}^\bullet, \iota, H^\bullet) = F.$$

- Supposons que l'on ait

$$\hat{F}'' = ((C^\bullet, \nu), \underline{F}'', (\hat{H}^\bullet, \hat{\nu})) \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}}, \quad F'' = p^{\mathcal{I}}(\hat{F}''),$$

et que F'' admette F pour restriction à $H^\bullet$. Soit $\lambda \leq \hat{\lambda}$ et supposons prouvé que F'' et F' ont la même restriction à $\hat{M}^\bullet_\xi$ pour tout $\xi < \lambda$. Montrons qu'ils ont aussi la même restriction à $\hat{M}^\bullet_\lambda$. En effet, ceci est évident si λ est de seconde espèce. Soit $\lambda = \lambda' + 1$; on a $F'(b) = F''(b)$ si $b \in \hat{M}_{\lambda'}$. Supposons

$$\underline{\Phi}^\bullet \in K_\lambda, \quad I^\bullet = \alpha(\underline{\Phi})^\bullet \quad \text{et} \quad \Phi = (\hat{H}^\bullet, \underline{\Phi}, I^\bullet).$$

Puisque $\underline{\Phi}(I) \subset \hat{M}_{\lambda'}$, on a $F'.\Phi = F''.\Phi$, et par suite, pour tout $i \in I^\bullet_0$,

$$F''(i, \underline{\Phi}^\bullet) = F''(p^{\hat{\nu}}_i(\Phi)) = p^\nu_i(F''.\Phi) = F'(i, \underline{\Phi}^\bullet),$$
$$F''(\underline{\Phi}^\bullet) = F'(\underline{\Phi}^\bullet).$$

Si $\underline{\Psi}^\bullet \in H'_\lambda$, on obtient de même $\boxminus F''.\Psi = \boxminus F'.\Psi$, où $\Psi = (\boxminus \hat{H}^\bullet, \underline{\Psi}, \alpha(\Psi)^\bullet)$, et

$$F''(\underline{\Psi}^\bullet) = F''(\lim^{\hat{\nu}} \Psi) = \lim^\nu(\boxminus F''.\Psi) = \lim^\nu(\boxminus F'.\Psi) = F'(\underline{\Psi}^\bullet).$$

Par conséquent F' et F'' ont même restriction $\underline{F}'_\lambda$ à G_λ, de sorte que

$$(C^\bullet, \underline{F}''\iota, \hat{M}^\bullet_\lambda).\tilde{r}_\lambda = L(C^\bullet, \underline{F}''\iota, [G_\lambda]) = \overline{F}'_\lambda = \tilde{F}'_\lambda . \tilde{r}_\lambda .$$

Comme $\tilde{r}_\lambda$ est une $p\mathcal{F}$-surjection, on en conclut que F' et F'' admettent $\tilde{F}'_\lambda$ pour restriction à $\hat{M}^\bullet_\lambda$. - Par récurrence transfinie, on obtient $F' = F''$.

Ceci signifie que $(\hat{H}^\cdot, \hat{\nu})$ est une $p^{\mathcal{J}}$ - structure libre engendrée par $H^\cdot$. ■

B. *COMPLETION PROJECTIVE LIBRE.*

Soit $\mathcal{F}_\sim$ la catégorie quotient de $\mathcal{F}$ par la relation d'équivalence r :

$F \sim F'$ si, et seulement si, il existe une équivalence naturelle de F sur F'.

Nous identifions $\mathcal{F}_0$ à la classe des unités de $\mathcal{F}_\sim$. Deux catégories sont isomorphes dans $\mathcal{F}_\sim$ si, et seulement si, elles sont équivalentes. En particulier, toute catégorie est isomorphe dans $\mathcal{F}_\sim$ à chacun de ses élargissements. Si $F \sim F'$ et si F est compatible avec les $\mathcal{J}$- limites projectives, F' est aussi compatible avec les $\mathcal{J}$- limites projectives. Soit $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}_\sim$ la sous-catégorie de $\mathcal{F}_\sim$ formée des classes $F \bmod r$, où F est un foncteur à $\mathcal{J}$- limites projectives.

THEOREME 8. *Supposons $\mathcal{J} \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$, $H^\cdot \in \mathcal{F}_0$ et soit $(C^\cdot, \nu)$ une $p^{\mathcal{J}}$- structure libre engendrée par $H^\cdot$. Alors $C^\cdot$ est une $(\mathcal{F}^{\mathcal{J}}_\sim, \mathcal{F}_\sim)$- projection de $H^\cdot$.*

DEMONSTRATION. D'après le théorème 6, nous pouvons supposer que le $(\mathcal{F}^{\mathcal{J}}, p^{\mathcal{J}})$- projecteur $((C^\cdot, \nu), J)$ est de la forme $J = (C^\cdot, \iota, H^\cdot)$, où $H^\cdot$ est une sous-catégorie pleine de $C^\cdot$. Soit $F = (K^\cdot, \underline{F}, H^\cdot)$ un foncteur tel que $K^\cdot$ soit une catégorie à $\mathcal{J}$- limites projectives. Choisissons une application $\mathcal{J}$- limite projective ν' sur $K^\cdot$. Les relations

$$(K^\cdot, \nu') \in \mathcal{F}^{\mathcal{J}}_0 \quad \text{et} \quad F \in K^\cdot . \mathcal{F} . H^\cdot$$

assurent l'existence d'un et d'un seul

$$\hat{F}' = ((K^\cdot, \nu'), \underline{F}', (C^\cdot, \nu)) \in \mathcal{F}^{\mathcal{J}}$$

tel que $F' . (C^\cdot, \iota, H^\cdot) = F$, où $F' = p^{\mathcal{J}}(\hat{F}')$. Dans la catégorie $\mathcal{F}_\sim$, on a $\tilde{F}' . \tilde{J} = \tilde{F}$, où

$$\tilde{F}' = F' \bmod r, \quad \tilde{J} = (C^\cdot, \iota, H^\cdot) \bmod r \quad \text{et} \quad \tilde{F} = F \bmod r.$$

Supposons que l'on ait aussi

$$\tilde{F}'' . \tilde{J} = \tilde{F}, \quad \text{où} \quad \tilde{F}'' \in \mathcal{F}^{\mathcal{J}}_\sim .$$

Il reste à montrer que $\tilde{F}'' = \tilde{F}'$. En effet, soit $F'' \in \tilde{F}''$. Nous savons (théorème 6) que $C^\bullet$ est la complétion $\mathcal{J}$-projective de $M = H$ dans $(C^\bullet, \nu)$ et que, en reprenant les notations de la démonstration du théorème 5, on a $C = \bigcup_{\lambda < \hat{\lambda}} M_\lambda$. Pour tout ordinal $\lambda \leq \hat{\lambda}$, soient F'_λ et F''_λ les restrictions de F' et de F'' à $\dot{M}_\lambda$. Comme $\tilde{F}''.\tilde{J} = \tilde{F}'.\tilde{J}$, il existe une équivalence Γ_1 définie par le triplet (F''_1, γ_1, F'_1). Soit $1 < \lambda \leq \hat{\lambda}$ et supposons obtenue, pour tout $\xi < \lambda$, une équivalence Γ_ξ définie par le triplet

$$(F''_\xi, \gamma_\xi, F'_\xi),$$

de sorte que Γ_ξ admette $\Gamma_{\xi'}$ pour restriction si $\xi' < \xi$. Si λ est de seconde espèce, il existe une équivalence Γ_λ admettant Γ_ξ pour restriction pour tout $\xi < \lambda$. Soit $\lambda = \lambda' + 1$. Soit $E \in (M_\lambda)^\bullet_0$ et posons

$$\gamma_\lambda(E) = \gamma_\xi(E) \text{ s'il existe } \xi < \lambda \text{ tel que } E \in M_\xi ;$$

sinon, il existe un et un seul $\Phi \in \mathcal{S}^{I^\bullet}_{M_{\lambda'}}$ tel que $E = Lim^\nu \Phi$, car Lim^ν est injectif d'après le théorème 6; comme F' et F'' sont compatibles avec les limites projectives, $F'(E)$ et $F''(E)$ sont des limites projectives de $F'.\Phi$ et de $F''.\Phi$ respectivement, et $F''(p^\nu_i(\Phi))$ est la projection canonique $p'_i(F''.\Phi)$ de $F''(E)$ sur $F''.\Phi(i)$ pour tout $i \in I^\bullet_0$. Puisque $\Phi(I) \subset M_{\lambda'}$, le triplet $(F''.\Phi, \varphi, F'.\Phi)$, où

$$\varphi(i) = \gamma_{\lambda'}(\Phi(i)) \quad \text{pour tout} \quad i \in I^\bullet_0,$$

définit une équivalence; deux foncteurs équivalents ayant des limites projectives isomorphes, il existe un et un seul

$$h \in F''(E).\, K^\bullet_\gamma\, .F'(E) \quad \text{tel que} \quad p'_i(F''.\Phi).h = \varphi(i).p^{\nu'}_i(F'.\Phi)$$

pour tout $i \in I^\bullet_0$; posons $\gamma_\lambda(E) = h$. Montrons que le triplet $(F_\lambda, \gamma_\lambda, F'_\lambda)$ définit une équivalence Γ_λ. Pour cela, soit $m \in \sigma^\nu(M_{\lambda'}) - M_{\lambda'}$.

1°) Si $m = p^\nu_i(\Phi)$, on a :

$$\Gamma_\lambda(m) = (F''(p^\nu_i(\Phi)), \gamma_\lambda(\Phi(i)), \gamma_\lambda(E), F'(p^\nu_i(\Phi))) \in \square K^\bullet;$$

2°) Soit $m = lim^\nu \Psi$, où $\Psi \in \Delta^{I^\bullet}_{M_{\lambda'}}$ est la transformation naturelle définie par le triplet $(\Phi, \tau, \hat{e})$; posons

$$E = Lim^\nu \Phi \text{ et } \Gamma_\lambda(m) = (F''(lim^\nu \Psi), \gamma_\lambda(E), \gamma_\lambda(e), F'(lim^\nu \Psi)).$$

On a $h' = F'(lim^{\nu}\Psi) = lim^{\nu'}(\boxminus F'.\Psi)$ et $F''(lim^{\nu}\Psi)$ est l'unique $h'' \in K$ tel que

$$p'_i(F''.\Phi).h'' = F''(\tau(i)) \quad \text{pour tout} \quad i \in I_0^{\bullet}.$$

Les égalités

$$p'_i(F''.\Phi).h''.\gamma_\lambda(e) = F''_{\lambda'}(\tau(i)).\gamma_{\lambda'}(e) = \gamma_{\lambda'}(\Phi(i)).F'_{\lambda'}(\tau(i)) =$$
$$= \varphi(i).p_i^{\nu'}(F'.\Phi).h' = p'_i(F''.\Phi).\gamma_\lambda(E).h'$$

pour tout $i \in I_0^{\bullet}$ entraînent $h''.\gamma_\lambda(e) = \gamma_\lambda(E).h'$, d'où $\Gamma_\lambda(m) \in \square K^{\bullet}$.

Ainsi la surjection

$$\begin{cases} m \to \Gamma_{\lambda'}(m) & \text{si} \quad m \in M_{\lambda'} \\ E \to \gamma_\lambda(E)^{\boxminus} & \text{si} \quad E \in (M_\lambda)_0^{\bullet} \\ m \to \Gamma_\lambda(m) & \text{si} \quad m \in \sigma^{\nu}(M_{\lambda'}) - M_{\lambda'} \end{cases}$$

définit une équivalence $\Gamma'_\lambda = (\boxminus C^{\bullet}, \underline{\Gamma}_\lambda, L^{\bullet}_\lambda)$, où $L^{\bullet}_\lambda$ est le sous-graphe multiplicatif de $C^{\bullet}$ engendré par $\sigma^{\nu}(M_{\lambda'})$, prolongeant $\Gamma_{\lambda'}$. Puisque $M^{\bullet}_\lambda$ est la sous-catégorie de $C^{\bullet}$ engendrée par L_λ et que les néofoncteurs source et but de l'équivalence Γ'_λ sont les restrictions à $L^{\bullet}_\lambda$ des foncteurs F'_λ et F_λ, il en résulte que le triplet $(F''_\lambda, \gamma_\lambda, F'_\lambda)$ définit une équivalence Γ_λ prolongeant $\Gamma_{\lambda'}$.

- Par récurrence transfinie, on construit ainsi une équivalence $\Gamma_{\hat\lambda}$ de $F'_{\hat\lambda} = F'$ sur $F''_{\hat\lambda} = F''$. Donc $F' \sim F''$ *mod r* et $\tilde{F}' = \tilde{F}''$. ∎

COROLLAIRE. *Si $p_{\mathcal{F}}(\mathcal{J})$ est contenu dans $\mathfrak{U}$, soit $\mathcal{F}_\sim(\mathfrak{U})$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}_\sim$ ayant pour unités les $\mathfrak{U}$-catégories et soit $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}_\sim(\mathfrak{U}) = \mathcal{F}_\sim(\mathfrak{U}) \cap \mathcal{F}^{\mathcal{J}}$. Alors $\mathcal{F}_\sim(\mathfrak{U})$ est une catégorie à $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}_\sim(\mathfrak{U})$-projections.*

En effet, si $H^{\bullet} \in \mathcal{F}_0$ est une $\mathfrak{U}$-catégorie, une $p^{\mathcal{J}}$-structure libre $(C^{\bullet}, \nu)$ engendrée par $H^{\bullet}$ est telle que $C^{\bullet}$ soit une $\mathfrak{U}$-catégorie, en vertu du théorème 6. Le corollaire résulte donc du théorème 8. ∎

DEFINITION. *Une $(\mathcal{F}^{\mathcal{J}}_\sim, \mathcal{F}_\sim)$-projection de $H^{\bullet} \in \mathcal{F}_0$ est appelée* complétion $\mathcal{J}$-projective libre de $H^{\bullet}$.

D'après le théorème 8, si $(C^{\bullet}, \nu)$ est une $p^{\mathcal{J}}$-structure libre engendrée par $H^\cdot \in \mathcal{F}_0$, les complétions $\mathcal{J}$-projectives libres de $H^\cdot$ sont les catégories équivalentes à $C^\cdot$.

THEOREME 9. *Supposons que $\mathfrak{U} \in \bar{\mathfrak{M}}_0$ soit un univers et que $\mathcal{J}$ soit la classe de toutes les catégories triviales $I^\cdot$ telles que $I \in \mathfrak{U}$. Soit $H^\cdot \in \mathcal{F}_0$ on peut construire explicitement une complétion $\mathcal{J}$-projective libre $N^\cdot$ de $H^\cdot$ sans utiliser de récurrence transfinie. Pour que $N^\cdot$ soit isomorphe à une sous-catégorie de $\mathfrak{A}(H^\cdot)$ (démonstration du théorème 6), il faut et il suffit que, si $h \in H$ et $h' \in \beta(h).H$, il existe $k \in H$ et $k' \in H.\alpha(k)$ tels que $h.k \neq h'.k'$.*

DEMONSTRATION. Soit $(\hat{H}^\cdot, \hat{\nu})$ la $(\mathcal{F}^{\mathcal{J}}, p^{\mathcal{J}})$-structure libre engendrée par $H^\cdot$ construite dans la démonstration du théorème 7, dont nous reprenons les notations. Toutes les catégories $I^\cdot \in \mathcal{J}$ étant triviales (i.e. telles que $I = I_0^\cdot$), un élément $\underline{\Phi}^\cdot \in K_\lambda$ ou $\underline{\Psi}^\cdot \in H'_\lambda$ est entièrement déterminé par $\underline{\Phi}$ ou $\underline{\Psi}$, car . est la loi de composition triviale sur $\alpha(\underline{\Phi})$ ou $\alpha(\underline{\Psi})$; nous pouvons donc écrire Φ ou Ψ au lieu de $\underline{\Phi}^\cdot$ ou $\underline{\Psi}^\cdot$. Soit $N^\cdot$ la sous-catégorie pleine de $\hat{H}^\cdot$ admettant $(\hat{M}_2)_0^\cdot$ pour classe de ses unités. Soit $E \in \hat{H}_0^\cdot - H_0^\cdot$. Par construction, on a $E = \underline{\Phi}$ et, d'après la démonstration du théorème 7,

$$E = Lim^{\hat{\nu}}\,\Phi, \quad \text{où} \quad \Phi = (\hat{H}^\cdot, \underline{\Phi}, I^\cdot) \in \mathcal{F} \quad \text{et} \quad I = \alpha(\underline{\Phi}).$$

Puisque $I^\cdot$ est triviale, E est donc un produit $\prod_{i \in I} \Phi(i)$. Si $E \in \hat{M}_2 - H_0^\cdot$, on a $\Phi(i) \in H$ pour tout $i \in I$. Soit $\lambda \leq \hat{\lambda}$ et supposons montré que, pour tout $\xi < \lambda$, toute unité de $\hat{M}_\xi - \hat{M}_2$ est un produit de $(e_j)_{j \in J}$, où $e_j \in H_0^\cdot$, pour tout $j \in J \in \mathfrak{U}$. Si λ est de seconde espèce, toute unité de $\hat{M}_\lambda$ appartient à un $\hat{M}_\xi$, et par suite a la même propriété. Si $\lambda = \lambda' + 1$ et $E \in \hat{M}_\lambda - \hat{M}_{\lambda'}$, alors

$$E = \prod_{i \in I} \Phi(i), \quad \text{où} \quad \Phi(i) \in \hat{M}_{\lambda'} \quad \text{pour tout} \quad i \in I_0^\cdot.$$

Par hypothèse de récurrence, il existe $J_i \in \mathfrak{U}$ tel que

$$\Phi(i) = \prod_{j \in J_i} e_j^i, \quad \text{où} \quad e_j^i \in H_0^\cdot.$$

Puisque $\mathfrak{U}$ est un univers,

$$J = \sum_{i \in I} J_i \in \mathfrak{U}, \text{ d'où } \quad J^{\cdot} \in \mathcal{J} ,$$

en désignant par $J^{\cdot}$ la catégorie triviale sur J. D'après l'associativité du produit, E est un produit de la famille $u = (e^i_j)_{(i,j) \in J}$. Si $\underline{\Phi}'$ désigne la surjection

$$(i, j) \rightarrow e^i_j \text{ de } J \text{ dans } H,$$

on a $E' = \underline{\Phi}' \in \hat{M}_2$, et E' est aussi un produit de u dans $\hat{H}^{\cdot}$. Par conséquent, E' est isomorphe à E dans $\hat{H}^{\cdot}$.

-Par récurrence transfinie, on en déduit que toute unité de $\hat{H}^{\cdot}$ est isomorphe à une unité de $N^{\cdot}$ dans $\hat{H}^{\cdot}$. Donc $\hat{H}^{\cdot}$ est un élargissement de $N^{\cdot}$, et a fortiori $\hat{H}^{\cdot}$ est une catégorie équivalente à $N^{\cdot}$. D'après le théorème 8 , $H^{\cdot}$ admet pour $(\underset{\sim}{\mathcal{F}^{\mathcal{J}}}, \underset{\sim}{\mathcal{F}})$-projection toute catégorie équivalente à $\hat{H}^{\cdot}$, de sorte que $N^{\cdot}$ est une complétion $\mathcal{J}$-projective libre de $H^{\cdot}$.

-D'après la démonstration du théorème 5 , $H^{\cdot}$ est une sous-catégorie pleine de $\hat{H}^{\cdot}$, et on a $H^{\cdot}_o . \hat{M}_2 = H^{\cdot}_o . \hat{H} . (\hat{M}_2)^{\cdot}_o$. Soit $f \in N$.

a) Si $\beta(f) \in H$, alors $f \in \hat{M}_2$;

b) Si $\beta(f) = \underline{\Phi} \notin H$, on a $f = \lim^{\hat{\nu}} \Psi$, en désignant par Ψ la transformation naturelle définie par le triplet $(\Phi, \tau, \hat{e})$, où $\Phi = (\hat{H}^{\cdot}, \underline{\Phi}, \alpha(\underline{\Phi})^{\cdot})$ et

$$\tau(i) = (i, \underline{\Phi}).f \quad \text{pour tout} \quad i \in \alpha(\underline{\Phi}).$$

Or $\tau(i) \in \hat{M}_2$, car $\tau(i) \in \Phi(i) . \hat{H} . (\hat{M}_2)^{\cdot}_o \subset H^{\cdot}_o . \hat{H} . (\hat{M}_2)^{\cdot}_o$.

Il s'ensuit $f = \underline{\Psi} \in \hat{M}_3$.

Ceci montre que $N^{\cdot}$ est la sous-catégorie pleine de $\hat{M}^{\cdot}_3$ admettant $(\hat{M}_2)^{\cdot}_o$ pour classe de ses unités. Autrement dit, pour construire $N^{\cdot}$, il suffit de construire $\hat{M}^{\cdot}_2$ et $\hat{M}^{\cdot}_3$.

-D'après la démonstration du théorème 6 dont nous reprenons les notations, il existe

$$\hat{\Gamma} = ((\mathfrak{A}(H^{\cdot}), \nu^{\mathcal{J}}_{H^{\cdot}}), \Gamma, (\hat{H}^{\cdot}, \hat{\nu})) \in \hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}}$$

tel que

$$\eta_{H^{\cdot}} = \Gamma . (\hat{H}^{\cdot}, \iota, H^{\cdot}), \quad \text{où} \quad \Gamma = p^{\mathcal{J}}(\hat{\Gamma}).$$

Pour qu'une sous-catégorie de $\mathfrak{A}(H^\cdot)$ soit une $(\underset{\sim}{\mathcal{F}}^{\mathcal{I}}, \underset{\sim}{\mathcal{F}})$- projection de $H^\cdot$, il faut et il suffit que la restriction Γ' de Γ à $N^\cdot$ soit un foncteur injectif. La restriction de Γ à $H^\cdot$ est injective et, puisque $Lim^{\nu} H^\cdot$ est injectif, la restriction de $\underline{\Gamma}$ à $N_o^\cdot$ est aussi injective. Soient

$$h_1 \in H, \quad h_2 \in H \quad \text{et} \quad \beta(h_1) = \beta(h_2) = e.$$

Désignons par Φ un foncteur de $I^\cdot \in \mathcal{I}$ vers $H^\cdot$ tel que $\{1, 2\} = I$ et

$$\Phi(i) = \alpha(h_i) = e_i \quad \text{pour} \quad i = 1 \text{ et } 2.$$

Dans $N^\cdot$, on a $h_1.(1, \underline{\Phi}) \neq h_2.(2, \underline{\Phi})$. Calculons la transformation naturelle

$$\Psi_j = \Gamma(h_j.(j, \underline{\Phi})) = \eta_H.(h_j).p_j(\eta_H. .\Phi), \quad \text{où} \quad j = 1 \text{ ou } 2,$$

qui est définie par le triplet $(\eta_H.(e), \tau_j, Lim\ \eta_H. .\Phi)$. Si $e' \in H_o^\cdot$, l'application $\tau_j(e')$ est l'application

$$((k_i)_{i \in I}, \hat{\Phi}) \to h_j.k_j, \text{où } \hat{\Phi} = \eta_H. .\Phi, \text{ de } (\prod_{i \in I} \Phi(i).H.e') \times \{\hat{\Phi}\}$$
$$\text{dans } e.H.e'.$$

On a $\Psi_1 \neq \Psi_2$ si, et seulement si, il existe $k_1 \in H$ et $k_2 \in H$ tels que

$$\alpha(k_1) = \alpha(k_2) \quad \text{et} \quad h_1.k_1 \neq h_2.k_2,$$

de sorte que cette condition est nécessaire pour que Γ' soit injectif. - Inversement supposons cette condition vérifiée pour tout couple $(h_1, h_2) \in \in H \times H$ tel que $\beta(h_1) = \beta(h_2)$, et montrons que Γ' est injectif. En effet, d'après la démonstration du théorème 7, tout élément de $H_o^\cdot.N$ est de la forme $h_i.(i, \underline{\Phi})$, où $h_i \in H$, et, d'après ce qui précède, la restriction de $\underline{\Gamma}$ à $H_o^\cdot.N$ est injective. Soient

$$f_1 \in N \quad \text{et} \quad f_2 \in N \quad \text{tels que} \quad \Gamma'(f_1) = \Gamma'(f_2).$$

On a $\beta(f_1) = \beta(f_2) = \underline{\Phi}$ et, comme nous avons vu dans la première partie de la démonstration,

$$f_j = \underline{\Psi}'_j = \hat{lim}^{\nu}\, \Psi'_j, \quad \text{où} \quad \Psi'_j = (\square \hat{H}^\cdot, \underline{\Psi}'_j, I^\cdot),$$

pour $j = 1$ et 2, est la transformation naturelle définie par un triplet $(\Phi, \tau_j, \hat{e})$ tel que $\tau_j(I) \subset H_o^\cdot.N$. Les relations

$$lim \boxminus \Gamma . \Psi'_1 = \Gamma'(f_1) = lim \boxminus \Gamma . \Psi'_2$$

entraînent $\boxminus \Gamma . \Psi'_1 = \boxminus \Gamma . \Psi'_2$; puisque la restriction de $\underline{\Gamma}$ à $H_0^{\bullet}.N$ est injective, on en déduit $\underline{\Psi}'_1 = \underline{\Psi}'_2$, et par conséquent $f_1 = f_2$. Donc Γ' est injectif. ■

PROPOSITION 21. *Soit $\mathfrak{F}'$ la sous-catégorie de $\mathfrak{F}$ formée des foncteurs à $\mathfrak{I}$-limites projectives. Pour que $H^{\bullet} \in \mathfrak{F}_0$ admette une $(\mathfrak{F}', \mathfrak{F})$-projection, il faut et il suffit que $H^{\bullet}$ soit une catégorie à $\mathfrak{I}$-limites projectives et que l'on ait $F \in \mathfrak{F}'$ si $F \in \mathfrak{F}'.\mathfrak{F}.H^{\bullet}$.*

DEMONSTRATION. Soit $H^{\bullet} \in \mathfrak{F}_0$; selon le théorème 6, il existe un $(\mathfrak{F}^{\mathfrak{I}}, p^{\mathfrak{I}})$-projecteur $((C^{\bullet}, \nu), J)$ tel que $J = (C^{\bullet}, \iota, H^{\bullet})$. Supposons qu'il existe un $(\mathfrak{F}', \mathfrak{F})$-projecteur $J' = (K^{\bullet}, \underline{J}', H^{\bullet})$. Puisque $J \in \mathfrak{F}$, il existe un et un seul $F' \in \mathfrak{F}'$ tel que $F'.J' = \overline{J}$. Par ailleurs, soit μ une application $\mathfrak{I}$-limite projective sur $K^{\bullet}$. Les relations

$$(K^{\bullet}, \mu) \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{I}} \quad \text{et} \quad J' \in K^{\bullet}.\mathfrak{F}.H^{\bullet}$$

assurent l'existence d'un et d'un seul $\hat{F} \in (K^{\bullet}, \mu).\mathfrak{F}^{\mathfrak{I}}.(C^{\bullet}, \nu)$ tel que

$$J' = F.J, \quad \text{où} \quad F = p^{\mathfrak{I}}(\hat{F}).$$

Il en résulte

$$F.F'.J' = F.J = J' \quad \text{et} \quad F'.F.J = F'.J' = J.$$

Comme J' est un $(\mathfrak{F}', \mathfrak{F})$-projecteur, la première relation entraîne $F.F' = K^{\bullet}$. D'après le théorème 8, $\tilde{J} = J \bmod r$ est un $(\mathfrak{F}^{\mathfrak{I}}_{\sim}, \mathfrak{F}_{\sim})$-projecteur ; donc de l'égalité

$$\tilde{G}.\tilde{J} = \tilde{J}, \quad \text{où} \quad \tilde{G} = (F'.F) \bmod r,$$

il suit que $F'.F$ est équivalent au foncteur identique de $C^{\bullet}$. Ceci montre que les catégories $K^{\bullet}$ et $C^{\bullet}$ sont équivalentes, i.e. $K^{\bullet}$ est aussi une complétion $\mathfrak{I}$-projective libre de $H^{\bullet}$. Posons $\hat{H} = F'(K)$. Puisque $K^{\bullet}$ et $\hat{H}^{\bullet}$ sont des catégories isomorphes, $J'' = (\hat{H}^{\bullet}, \iota, H^{\bullet})$ est un $(\mathfrak{F}', \mathfrak{F})$-projecteur et $C^{\bullet}$ est un élargissement de $\hat{H}^{\bullet}$. Deux cas se présentent :

1°) Pour que $H = \hat{H}$, il faut et il suffit que l'on ait

$$H^{\cdot} \in \mathcal{F}' \quad \text{et} \quad \mathcal{F}'_0 . \mathcal{F} . H^{\cdot} = \mathcal{F}' . H^{\cdot}$$

(condition qui n'est généralement pas satisfaite).

2°) Supposons $H \neq \hat{H}$. Comme $H^{\cdot}$ est une sous-catégorie pleine de $C^{\cdot}$; on a $H^{\cdot}_0 \neq \hat{H}^{\cdot}_0$. et il existe $E \in \hat{H}^{\cdot}_0 - H^{\cdot}_0$. Soit $\hat{C}^{\cdot}$ un élargissement de $C^{\cdot}$ tel que $\hat{C}^{\cdot}_0 = C^{\cdot}_0 \cup \{E'\}$, où $E' \notin C$, et qu'il existe $g \in E'.\hat{C}^{\cdot}_{\gamma}.E$ (il a été construit au cours de la démonstration du théorème 6). On trouve

$$G = (\hat{C}^{\cdot}, \iota, C^{\cdot}) \in \mathcal{F}', \quad \text{d'où} \quad G' = G.(C^{\cdot}, \iota, \hat{H}^{\cdot}) \in \mathcal{F}'.$$

Il existe une équivalence définie par un triplet (G'', τ, G'), dans lequel τ est la surjection

$$\tau(E) = g \quad \text{et} \quad \tau(e) = e \quad \text{si} \quad E \neq e \in \hat{H}^{\cdot}_0.$$

Les foncteurs G' et G'' ayant même restriction à $H^{\cdot}$, on obtient

$$G'' \in \mathcal{F}' \quad \text{et} \quad G''.J'' = G'.J''.$$

Comme $G''(E) = E' \neq E = G'(E)$, l'élément J'' ne peut pas être un $(\mathcal{F}', \mathcal{F})$-projecteur.

On obtient donc une impossibilité dans les 2 cas. Ceci achève la démonstration. Remarquons que ce résultat n'est pas en contradiction avec les critères d'existence d'adjoint, car le foncteur $(\mathcal{F}, \iota, \mathcal{F}')$ est bien à $\mathfrak{M}_0$-limites projectives, mais la restriction de $P\hat{\mathcal{F}}$ à $\mathcal{F}'$ n'est pas un foncteur ρ-engendrant pour $\mathfrak{M}$. ■

REMARQUES. 1°) Si les conditions du théorème 9 sont vérifiées et si $H^{\cdot}$ est à $\mathfrak{U}$-produits, $N^{\cdot}$ n'est généralement pas un élargissement de $H^{\cdot}$, de sorte que $H^{\cdot}$ n'est pas sa propre complétion $\mathcal{J}$-projective libre.

2°) La proposition 21 montre que le problème universel du plongement d'une catégorie $H^{\cdot}$ dans une catégorie à $\mathcal{J}$-limites projectives n'admet généralement pas de solution (contrairement à ce qui est affirmé dans [17]). Ainsi les résultats des théorèmes 6 et 8 sont «les meilleurs possibles». En d'autres termes, le théorème 8 signifie que le problème universel du plongement à une *équivalence* près (et non à un *isomorphisme* près) d'une catégorie $H^{\cdot}$ dans une catégorie à $\mathcal{J}$-limites projectives admet pour solution une complétion $\mathcal{I}$-projective libre de $H^\cdot$. Certains auteurs ont cherché à résoudre ce problème universel en associant à $H^\cdot$ une sous-catégorie de $\mathcal{A}(H^\cdot)$; ainsi que le prouve le théorème 9, il n'existe pas toujours une solution de cette forme. Si $\mathcal{I}$ est la classe des catégories triviales ayant un nombre fini d'éléments, la catégorie *Virt* $H^\cdot$ définie dans [9] est isomorphe à la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}(H^\cdot)$ ayant $\Gamma(H)^\cdot_0$ pour classe de ses unités (notations du théorème 9). Même si la condition du théorème 9 est vérifiée, de sorte que $\Gamma(N)^\cdot$ soit une solution du problème universel en question, $\Gamma(N)^\cdot$ peut ne pas être une sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}(H^\cdot)$; par suite *Virt* $H^\cdot$ n'est pas une solution du problème universel voulu. C'est pourquoi est introduite dans [9] la notion de «foncteur compatible avec les produits virtuels» (i.e. un foncteur s'étendant aux catégories *Virt* associées à sa source et à son but), afin d'obtenir un problème universel dont *Virt* $H^\cdot$ soit une solution.

3°) Avec les hypothèses du théorème 9, la complétion $\mathcal{I}$-projective libre $N^\cdot$ de $H^\cdot$ est isomorphe à la «complétion libre canonique» de $H^\cdot$ construite directement dans [18]. D'après la remarque précédente, cette «complétion libre canonique» est donc solution du problème universel du plongement, à une équivalence près, de $H^\cdot$ dans une catégorie à produits.

THEOREME 10. *Supposons* $(H^\cdot, \mu) \in \mathcal{F}'^{\mathcal{I}}_0$. *Il existe une complétion $\mathcal{I}$-projective* $(\bar{H}^\cdot, \tilde{\mu})$ *de* $(H^\cdot, \mu)$, *et elle possède les propriétés suivantes :*

1°) $H^\cdot$ *est isomorphe à une sous-catégorie de* $\bar{H}^\cdot$;

2°) $(\bar{H}^\cdot, \tilde{\mu})$ *est une* $q^{\mathcal{I}}$-*structure quasi-quotient d'une* $p^{\mathcal{I}}$-*structure libre engendrée par* $H^\cdot$.

DEMONSTRATION. D'après le corollaire du théorème 5, $(H^\cdot, \mu)$ admet une $(\mathcal{F}^{\mathcal{I}}, \bar{\mathcal{F}}'^{\mathcal{I}})$-projection, i.e. une complétion $\mathcal{I}$-projective. Soit $\hat{J}'$ un $(\mathcal{F}^{\mathcal{I}}, \mathcal{F}'^{\mathcal{I}})$-projecteur de source $(H^\cdot, \mu)$. Soit $\mathcal{A}(H^\cdot)$ la catégorie construite dans la démonstration du théorème 6 dont nous reprenons les notations; soit ν_μ l'application $\mathcal{I}$-limite projective sur $\mathcal{A}(H^\cdot)$ telle que

$$\nu_\mu(\hat{\Phi}) = \mu(H^\cdot, \underline{\Phi}, I^\cdot) \text{ si } \hat{\Phi} = (\mathcal{A}(H^\cdot), \underline{\Phi}, I^\cdot), \text{ si } \hat{\Phi}(I) \subset H$$
$$\text{et si } \mu(H^\cdot, \underline{\Phi}, I^\cdot) \text{ est défini,}$$

$$\nu_\mu(\hat{\Phi}) = \nu_H^{\mathcal{J}}.(\hat{\Phi}) \quad \text{autrement.}$$

La sous-catégorie $\eta_H.(H)^\bullet$ admet une complétion $\mathcal{J}$-projective $(\hat{K}^\bullet, \hat{\nu})$ dans $(\mathfrak{A}(H^\bullet), \nu_\mu)$ et, comme $\hat{K} \in \bar{\mathfrak{M}}_0$ (théorème 5), il existe une bijection $\underline{G}$ et un

$$\hat{G} = ((\bar{K}^\bullet, \bar{\nu}), \underline{G}\, \underline{\eta}_{H^\bullet}, (H^\bullet, \mu)) \in \mathcal{F}'^{\mathcal{J}}.$$

Par définition de $\hat{J}'$, il existe un et un seul $\hat{G}' \in \mathcal{F}^{\mathcal{J}}$ tel que $\hat{G}'.\hat{J}' = \hat{G}$. Cette égalité entraîne que $p^{\mathcal{J}}(\hat{J}')$ est injectif, puisque $p^{\mathcal{J}}(\hat{G})$ l'est. Ainsi $p^{\mathcal{J}}(\hat{J}')(H)^\bullet$ est une catégorie isomorphe à $H^\bullet$.

-Soit $(C^\bullet, \nu)$ une $p^{\mathcal{J}}$-structure libre engendrée par $H^\bullet$; nous pouvons supposer (théorème 6) que le $(\mathcal{F}^{\mathcal{J}}, p^{\mathcal{J}})$-projecteur correspondant est

$$((C^\bullet, \nu), (C^\bullet, \iota, H^\bullet)).$$

Si $\Phi = (H^\bullet, \underline{\Phi}, I^\bullet) \in \mathcal{F}$ et si $\mu(\Phi)$ est défini, posons

$$\hat{\Phi} = (C^\bullet, \underline{\Phi}, I^\bullet) \quad \text{et} \quad a(\Phi) = \lim{}^{\nu}(\boxminus C^\bullet, \underline{\mu(\Phi)}, I^\bullet).$$

Soit A la classe des éléments $a(\Phi)$ tels que $\mu(\Phi)$ soit défini. Soit ρ la relation d'équivalence sur $C^\bullet$ engendrée par la relation (C, V, C), dans laquelle V est la classe des couples

$$(a(\Phi), \alpha(a(\Phi))), \quad \text{où} \quad a(\Phi) \in A.$$

Puisque le foncteur $q^{\mathcal{J}}$ vérifie les conditions du théorème 2, il existe une $q^{\mathcal{J}}$-structure quasi-quotient $(\bar{H}^\bullet, \tilde{\mu})$ de $(C^\bullet, \nu)$ par ρ. Soit

$$\hat{D} = ((\bar{H}^\bullet, \tilde{\mu}), \underline{D}, (C^\bullet, \nu)) \in \mathcal{F}^{\mathcal{J}}$$

la $q^{\mathcal{J}}$-quasi-surjection associée. Posons

$$\hat{J} = ((\bar{H}^\bullet, \tilde{\mu}), \underline{D\iota}, (H^\bullet, \mu)) \quad \text{et} \quad J = p^{\mathcal{J}}(\hat{J}).$$

Nous allons montrer que $\hat{J}$ est un $(\mathcal{F}^{\mathcal{J}}, \mathcal{F}'^{\mathcal{J}})$-projecteur. En effet, si $\Phi = (H^\bullet, \underline{\Phi}, I^\bullet) \in \mathcal{F}$ et si $\mu(\Phi)$ est défini, on a, pour tout $i \in I_0^\bullet$,

$$p_i^\mu(\Phi) = p_i^\nu(\hat{\Phi}).a(\Phi) \quad \text{et} \quad \underline{D}(a(\Phi)) \in \bar{H}_0^\bullet,$$

d'où

$$J(p_i^\mu(\Phi)) = \underline{D}(p_i^\nu(\hat{\Phi})).\underline{D}(a(\Phi)) = \underline{D}(p_i^\nu(\hat{\Phi})) = p_i^{\tilde{\mu}}(J.\Phi).$$

Ceci signifie que $\hat{J}$ appartient à $\mathcal{F}'^{\mathcal{J}}$. Supposons

$$\hat{F} = ((S^{\cdot}, \nu'), \underline{F}, (H^{\cdot}, \mu)) \in \mathcal{F}^{\cdot \mathcal{I}} \quad \text{et} \quad F = p^{\mathcal{I}}(\hat{F}).$$

Puisque $(C^{\cdot}, \nu)$ est une $p^{\mathcal{I}}$- structure libre engendrée par $H^{\cdot}$, il existe un et un seul

$$\hat{F}' = ((S^{\cdot}, \nu'), \underline{F}', (C^{\cdot}, \nu)) \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}} \text{ tel que } F'.(C^{\cdot}, \iota, H^{\cdot}) = F,$$

où $F' = p^{\mathcal{I}}(\hat{F}')$. Si $\Phi = (H^{\cdot}, \underline{\Phi}, I^{\cdot}) \in \mathcal{F}$ et si $\mu(\Phi)$ est défini, des relations $F'.\hat{\Phi} = F.\Phi$ et

$$p_i^{\nu'}(F.\Phi) = F(p_i^{\mu}(\Phi)) = F'(p_i^{\mu}(\Phi)) = F'(p_i^{\nu}(\hat{\Phi})).F'(a(\Phi))$$
$$= p_i^{\nu'}(F'.\hat{\Phi}).F'(a(\Phi)) = p_i^{\nu'}(F.\Phi).F'(a(\Phi)),$$

pour tout $i \in I_0^{\cdot}$, on déduit $F'(a(\Phi)) \in S_0^{\cdot}$, de sorte que F' est compatible avec ρ. Par définition d'une $q^{\mathcal{I}}$- structure quasi-quotient, il existe un et un seul $\hat{F}'' \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}}$ tel que $\hat{F}''.\hat{D} = \hat{F}'$, ce qui entraîne $\hat{F}''.\hat{J} = \hat{F}$. Si $\hat{F}_1''.\hat{J} = \hat{F}$, on a

$$\hat{F}_1''.\hat{D} \in (S^{\cdot}, \nu').\mathcal{F}^{\mathcal{I}}.(C^{\cdot}, \nu) \quad \text{et} \quad p^{\mathcal{I}}(\hat{F}_1''.\hat{D}).(C^{\cdot}, \iota, H^{\cdot}) = F.$$

Par construction de $\hat{F}'$, il s'ensuit $\hat{F}_1''.\hat{D} = \hat{F}'$; on en conclut $\hat{F}_1'' = \hat{F}''$, ce qui achève la démonstration. Tout $(H^{\cdot}, \mu) \in \mathcal{F}_0^{\cdot \mathcal{I}}$ est évidemment sa propre complétion. ∎

Jusqu'ici, nous avons supposé que $\mathcal{I}$ ne contient pas la catégorie vide $\emptyset^{\cdot}$. En réalité, *les résultats de ce § sont encore vrais si l'on y supprime l'hypothèse* $\emptyset^{\cdot} \notin \mathcal{I}$. En effet, toutes les démonstrations précédentes sont valables lorsque $I^{\cdot} = \emptyset^{\cdot} \in \mathcal{I}$, à condition d'adopter les conventions suivantes : Soit $H^{\cdot}$ une catégorie; $\overleftarrow{H}^{\cdot \emptyset^{\cdot}}$ désigne une catégorie isomorphe à $H^{\cdot}$, dont l'élément isomorphe à $h \in H$ est noté $\hat{h}$. Soit $\mathfrak{N}(H^{\cdot}, \emptyset^{\cdot})^{\square}$ la catégorie admettant $\overleftarrow{H}^{\cdot \emptyset^{\cdot}}$ pour sous-catégorie pleine, ayant une unité

$$\emptyset_H = (H^{\cdot}, \emptyset, \emptyset^{\cdot}) \in \mathcal{F},$$

et dont les autres éléments sont les triplets

$$\Psi_e = (\emptyset^{\cdot}, \emptyset, \hat{e}), \quad \text{où} \quad e \in H_0^{\cdot},$$

et dont la loi de composition est telle que

$$\beta(\Psi_e) = \emptyset_H,$$
$$\Psi_e \,\square\, \hat{h} = \Psi_{e'}, \text{ si } h \in H,\ e' = \alpha(h),\ e = \beta(h).$$

(Cette catégorie est la catégorie $H^{\bullet}(\{\emptyset^{\bullet}\})$ associée à $H^{\bullet}$ au début du chapitre IV, C.S.). Nous dirons que 0 *est une limite projective de* $\emptyset_H$ si Ψ_0 est un $(\mathfrak{N}(H^{\bullet},\emptyset^{\bullet})^{\square}, \overleftarrow{H}^{\bullet\,\emptyset^{\bullet}})$-éjecteur, i.e. si 0 est un élément final de $H^{\bullet}$; dans ce cas, Ψ_0 (qui est entièrement déterminé par 0) est la limite projective naturalisée associée. Avec ces conventions, il résulte par exemple du théorème 10 :

COROLLAIRE. *Supposons* $\emptyset^{\bullet} \in \mathcal{I} \subset \mathcal{F}_0$ *et* $\mathcal{I} \in \widetilde{\mathfrak{M}}_0$. *Si* $H^{\bullet} \in \mathcal{F}_0$ *admet un élément final* 0 *et si* μ *est une application* $\mathcal{I}$*-limite projective partielle sur* $H^{\bullet}$ *telle que* $\mu(\emptyset_H) = \Psi_0$, *il existe une complétion* $\mathcal{I}$*-projective* $(\widetilde{H}^{\bullet}, \widetilde{\mu})$ *de* $(H^{\bullet}, \mu)$ *dans laquelle* $H^{\bullet}$ *est une sous-catégorie de* $\widetilde{H}^{\bullet}$ *et* 0 *un élément final de* $\widetilde{H}^{\bullet}$.

CAS PARTICULIER. Supposons dans le corollaire précédent que $\mathcal{I}$ soit la classe de toutes les catégories triviales correspondant à l'univers $\mathcal{U} \in \widetilde{\mathfrak{M}}_0$ et que $\mu(\emptyset_H)$ soit seul défini. Reprenons les notations des démonstrations des théorèmes 9 et 10, ce dernier étant appliqué au cas où l'on choisit pour $(C^{\bullet}, \nu)$ la complétion $\mathcal{I}$-projective libre $(\hat{H}^{\bullet}, \hat{\nu})$ canonique de $H^{\bullet}$. ρ est la relation associée à une sous-catégorie propre de $\underline{N}^{\bullet}$; par suite $\underline{D(N)}^{\bullet}$ est une sous-catégorie $\overline{H}^{\bullet}$ de $\widetilde{H}^{\bullet}$ admettant $\widetilde{H}^{\bullet}$ pour élargissement. En identifiant $H^{\bullet}$ à une sous-catégorie de $\overline{H}^{\bullet}$, on obtient une catégorie à $\mathcal{I}$-limites projectives dont 0 est un élément final. Cette catégorie est construite directement dans [18].

3. Adjonction de limites inductives et limites projectives.

Nous reprenons les notations du § 1 et nous désignons par $\mathcal{J}$ une partie de $\mathcal{F}_0$, par $\mathcal{J}^*$ la classe des catégories J^* duales des catégories $J^{\bullet} \in \mathcal{J}$. Le dual d'un foncteur Φ est noté Φ^*.

Soit $H^{\bullet}$ une catégorie. Nous appelons application $\mathcal{J}$*-limite inductive* (resp. inductive *partielle*) sur $H^{\bullet}$ une application μ qui associe à tout (resp. à certains) foncteur Φ de $J^{\bullet} \in \mathcal{J}$ vers $H^{\bullet}$ un $(\overleftarrow{H}^{\bullet\,J^{\bullet}}, \mathfrak{N}(H^{\bullet}, J^{\bullet})^{\square})$-projecteur $\mu(\Phi)$; alors $\underrightarrow{Lim}^{\mu}\,\Phi$ désigne la limite inductive de Φ (resp. $\underrightarrow{Lim}^{\mu}$ est le foncteur $\mathcal{J}$-limite inductive de $\sum_{J^{\bullet} \in \mathcal{J}} \mathfrak{N}(H^{\bullet}, J^{\bullet})^{\square}$ vers $H^{\bullet}$) correspondant et $s_j^{\mu}(\Phi)$ désigne l'injection canonique de $\Phi(j)$ vers

$\underrightarrow{Lim}^{\mu}\Phi$ pour tout $j \in J_0^{\bullet}$. Si Ψ est une transformation naturelle définie par le triplet $(\hat{e}, \tau, \Phi)$, où $\hat{e} \in \overleftarrow{H}^{\bullet} \cdot J^{\bullet}$, l'unique élément h tel que

$$h \cdot s_j^{\mu}(\Phi) = \tau(j), \quad \text{pour tout} \quad j \in J_0^{\bullet},$$

est noté $\underrightarrow{lim}^{\mu}\Psi$. Si $J^{\bullet}$ est la catégorie vide, les conventions sont celles introduites à la fin du § 2. Pour que μ soit une application $\mathcal{J}$-limite inductive (resp. inductive partielle) sur $H^{\bullet}$, il faut et il suffit que l'application $\mu^*: \Phi^* \to \varepsilon.(\mu(\Phi)^*)$ si $\mu(\Phi)$ est défini, soit une application $\mathcal{J}^*$-limite projective (resp. projective partielle) sur la duale H^* de $H^{\bullet}$, où ε est l'isomorphisme de $(\boxminus H^{\bullet})^*$ vers $\boxminus H^*$ tel que $\varepsilon(f', h', h, f) =$ $= (f, h, h', f')$.

Soit $^{\mathcal{J}}\mathcal{F}'$ (resp. $^{\mathcal{J}}\mathcal{F}$) la catégorie isomorphe à $\mathcal{F}'^{\mathcal{J}^*}$ (resp. à $\mathcal{F}^{\mathcal{J}^*}$) ayant pour éléments les triplets $\hat{F} = ((\hat{C}^{\bullet}, \hat{\mu}), \overline{F}, (C^{\bullet}, \mu))$ tels que

$$((\hat{C}^*, \hat{\mu}^*), \underline{F}, (C^*, \mu^*)) \in \mathcal{F}'^{\mathcal{J}^*} \text{ (resp. } \in \mathcal{F}^{\mathcal{J}^*}).$$

Soient $^{\mathcal{J}}p$ et $^{\mathcal{J}}q$ les foncteurs projections canoniques de $^{\mathcal{J}}\mathcal{F}$ vers $\mathcal{F}$ et $\mathfrak{M}$ respectivement, $^{\mathcal{J}}Q$ le foncteur associé de même à $\hat{\mathfrak{M}}_0$. Soit $^{\mathcal{J}}\mathcal{F}_{\sim}$ la sous-catégorie de $\mathcal{F}_{\sim}$ formée des classes $F \bmod r$, où F est un foncteur à $\mathcal{J}$-limites inductives. De tout résultat des § 1-2, nous déduisons par dualité un résultat analogue concernant les limites inductives. En particulier :

THEOREME 11. *Soit* $\mathcal{J} \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$. *Alors* $^{\mathcal{J}}Q$ *est un foncteur à* $\hat{\mathfrak{M}}_0$*-limites projectives et* $\rightharpoondown$*-engendrant pour* $\mathfrak{M}$. *Tout* $H^{\bullet} \in \mathcal{F}_0$ *admet une* $^{\mathcal{J}}p$*-structure libre* $(\hat{H}^{\bullet}, \hat{\mu})$ *telle que* $H^{\bullet}$ *soit une sous-catégorie pleine de* $\hat{H}^{\bullet}$, *que* $\hat{\mu}$ *soit injectif et que* $\hat{H}^{\bullet}$ *soit une* $\mathfrak{U}$*-catégorie si* $p_{\mathcal{F}}(\mathcal{J}) \subset \mathfrak{U}$ *et si* $H^{\bullet}$ *est une* $\mathfrak{U}$*-catégorie; de plus* $\hat{H}^{\bullet}$ *est une* $({}^{\mathcal{J}}\mathcal{F}_{\sim}, \mathcal{F}_{\sim})$*-projection de* $H^{\bullet}$. *La catégorie* $^{\mathcal{J}}\mathcal{F}'$ *est une catégorie à* $^{\mathcal{J}}\mathcal{F}$*-projections.*

DEFINITION. Si $(C^{\bullet}, \mu) \in {}^{\mathcal{J}}\hat{\mathcal{F}}$ et si $M \subset C$, la $^{\mathcal{J}}Q$-sous-structure de $(\bar{C}^{\bullet}, \mu)$ engendrée par M est appelée *complétion* $\mathcal{J}$*-inductive de* M *dans* $(C^{\bullet}, \mu)$. Une $({}^{\mathcal{J}}\mathcal{F}_{\sim}, \mathcal{F}_{\sim})$-projection de $H^{\bullet} \in \mathcal{F}_0$ est dite *complétion* $\mathcal{J}$*-inductive libre de* $H^{\bullet}$. Une $({}^{\mathcal{J}}\mathcal{F}, {}^{\mathcal{J}}\mathcal{F}')$-projection de $(H^{\bullet}, \mu) \in {}^{\mathcal{J}}\mathcal{F}'_0$ est appelée *complétion* $\mathcal{J}$*-inductive de* $(H^{\bullet}, \mu)$.

Soient $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ deux parties de $\mathcal{F}_0$. Désignons par $\mathcal{F}'^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$ la catégorie formée des triplets $\hat{F} = ((\hat{C}^\cdot, \hat{\nu}, \hat{\mu}), \underline{F}, (C^\cdot, \nu, \mu))$ tels que

$$((\hat{C}^\cdot, \hat{\nu}), \underline{F}, (C^\cdot, \nu)) \in \mathcal{F}'^{\mathcal{J}} \quad \text{et} \quad ((\hat{C}^\cdot, \hat{\mu}), \underline{F}, (C^\cdot, \mu)) \in {}^{\mathcal{J}}\mathcal{F}',$$

munie de la loi de composition

$$(w'_1, \underline{F}_1, w_1).(w', \underline{F}, w) = (w'_1, \underline{F}_1 \, \underline{F}, w)$$

si, et seulement si, $w_1 = w'$. Nous identifions la classe des unités de $\mathcal{F}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ à la classe des triplets $(C^\cdot, \nu, \mu)$ tels que ν et μ soient respectivement une application $\mathcal{J}$-limite projective partielle et une application $\mathcal{J}$-limite inductive partielle sur $C^\cdot \in \mathcal{F}_0$. Soit $\mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ ayant pour unités les $(C^\cdot, \nu, \mu)$ tels que $(C^\cdot, \nu) \in \mathcal{F}^{\mathcal{J}}$ et $(C^\cdot, \mu) \in {}^{\mathcal{J}}\mathcal{F}$. Soit $p'^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ le foncteur de $\mathcal{F}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ vers $\mathcal{F}$ associant $(\hat{C}^\cdot, \underline{F}, C^\cdot)$ à $\hat{F}$, et soit $p^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ sa restriction à $\mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$. Posons

$$q^{\mathcal{J}\mathcal{J}} = p_{\mathcal{F}} . p^{\mathcal{J}\mathcal{J}} \quad \text{et} \quad q'^{\mathcal{J}\mathcal{J}} = p_{\mathcal{F}} . p'^{\mathcal{J}\mathcal{J}}.$$

Soient $\hat{\mathcal{F}}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ et $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ les catégories associées de même à l'univers $\hat{\mathcal{M}}_0$, les foncteurs canoniques de $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ vers $\hat{\mathcal{M}}$ et $\hat{\mathcal{F}}$ étant respectivement $Q^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ et $P^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$.

PROPOSITION 22. *$p^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ et $(\mathcal{F}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}}, \iota, \mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}})$ sont des foncteurs à $\mathcal{M}_0$-limites projectives. $Q^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ est un foncteur $\leftharpoondown$-engendrant pour $\mathcal{M}$.*

DEMONSTRATION. Supposons $K \in \mathcal{M}_0$ et

$$E_k = (C^\cdot_k, \nu_k, \mu_k) \in \mathcal{F}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}}_0 \quad \text{pour tout} \quad k \in K.$$

D'après la proposition 20 et sa duale, il existe des produits $(C^\cdot, \nu)$ et $(C^\cdot, \mu)$ de $(C^\cdot_k, \nu_k)_{k \in K}$ et de $(C^\cdot_k, \mu_k)_{k \in K}$ dans $p'^{\mathcal{J}}$ et dans ${}^{\mathcal{J}}p'$ respectivement, les projections canoniques étant

$$((C^\cdot_k, \nu_k), \underline{p}_k, (C^\cdot, \nu)) \quad \text{et} \quad ((C^\cdot_k, \mu_k), \underline{p}_k, (C^\cdot, \mu)),$$

si $(C^\cdot_k, \underline{p}_k, C^\cdot)$ est la projection canonique de la catégorie produit $C^\cdot = \prod_{k \in K} C^\cdot_k$ sur $C^\cdot_k$. Comme $\mathcal{F}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ est un produit fibré de $(p'^{\mathcal{J}}, {}^{\mathcal{J}}p')$, il en résulte que $(C^\cdot, \nu, \mu)$ est un produit de $(E_k)_{k \in K}$ dans $\mathcal{F}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$, la k-ème projection étant $(E_k, \underline{p}_k, (C^\cdot, \nu, \mu))$. Si de plus $E_k \in \mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}}_0$ pour tout $k \in K$, on trouve $(C^\cdot, \nu, \mu) \in \mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}}_0$, de sorte que $(\mathcal{F}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}}, \iota, \mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}})$ est un foncteur à $\mathcal{M}_0$-produits.

- Soient

$$\hat{F} = ((\hat{C}^{\bullet}, \hat{\nu}, \hat{\mu})), \underline{F}, (C^{\bullet}, \nu, \mu)) \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$$
$$\hat{F} = ((\hat{C}^{\bullet}, \hat{\nu}, \hat{\mu}), \underline{F'}, (C^{\bullet}, \nu, \mu)) \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}.$$

Si N est le noyau de $(p^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(\hat{F}), p^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(\hat{F}'))$ dans $\mathcal{F}$, la proposition 20 et sa duale montrent qu'il existe une $q^{\mathcal{I}}$- sous-structure $(N^{\bullet}, \nu')$ de $(C^{\bullet}, \nu)$ et une $^{\mathcal{J}}q$-sous-structure $(N^{\bullet}, \mu')$ de $(C^{\bullet}, \mu)$. Il s'ensuit que $(N^{\bullet}, \nu', \mu')$ est un noyau de $(\hat{F}, \hat{F}')$ dans $p^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$. Donc (prop. 1), $p^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$ et $(\mathcal{F}^{\bullet\mathcal{I}\mathcal{J}}, \iota, \mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}})$ sont des foncteurs à $\mathfrak{M}_0$- limites projectives.

-Soient $(C^{\bullet}, \nu, \mu) \in \hat{\mathcal{F}}_0^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$ et $M \subset C$. L'intersection $\hat{H}^{\bullet}$ des sous-catégories $H^{\bullet}$ de $C^{\bullet}$ stables pour ν et pour μ et telles que $M \subset H$ a les mêmes propriétés; par suite $\hat{H}^{\bullet}$ détermine une $Q^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$- sous-structure $(\hat{H}^{\bullet}, \hat{\nu}, \hat{\mu})$ de $(C^{\bullet}, \nu, \mu)$, qui est évidemment la $Q^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$- sous-structure de $(C^{\bullet}, \nu, \mu)$ engendrée par M. ■

COROLLAIRE. *Tout* $H^{\bullet} \in \mathcal{F}^{\bullet\mathcal{I}\mathcal{J}}$ *admet une* $(\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}, \hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}, \hat{\mathcal{F}}^{\bullet\mathcal{I}\mathcal{J}})$*-projection.*

En effet, la démonstration est analogue à celle du corollaire de la proposition 20. ■

DEFINITION. *Si* $(C^{\bullet}, \nu, \mu) \in \hat{\mathcal{F}}_0^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$ *et si* $M \subset C$, *la* $Q^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$*- sous-structure de* $(C^{\bullet}, \nu, \mu)$ *engendrée par* M *est appelée* $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ - complétion de M dans $(C^{\bullet}, \nu, \mu)$.

Nous supposons désormais que $\mathcal{I}$ *et* $\mathcal{J}$ *sont des parties de* $\mathcal{F}_0$ *telles que* $\mathcal{I} \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$ *et* $\mathcal{J} \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$.

A. CONSTRUCTION D'UNE $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$*-COMPLETION.*

THEOREME 12. *Soit* $(C^{\bullet}, \nu, \mu) \in \hat{\mathcal{F}}_0^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$ *et désignons par* $(\hat{M}^{\bullet}, \hat{\nu}, \hat{\mu})$ *la* $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$*-complétion de* $M \subset C$ *dans* $(C^{\bullet}, \nu, \mu)$. *Si* $M \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$, *on a* $\hat{M} \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$. *Si* $M^{\bullet}$ *est une sous-catégorie de* $C^{\bullet}$, *si le foncteur* Z *est injectif et si* $Lim^{\nu}\Phi \notin M$ *(resp.* $\underrightarrow{Lim}^{\mu}\Phi \notin M$*) pour tout* $\Phi \in \hat{M}^{\bullet}.\mathcal{F}.\mathcal{I}$ *(resp.* $\in \hat{M}^{\bullet}.\hat{\mathcal{F}}.\mathcal{J}$*), alors* $M^{\bullet}$ *est une sous-catégorie pleine de* $\hat{M}^{\bullet}$*; ici* Z *désigne le foncteur vers* $C^{\bullet}$*, somme de* Lim^{ν} *et de* $\underrightarrow{Lim}^{\mu}$.

DEMONSTRATION. Soient $\lambda_{\mathcal{I}}$ et $\lambda_{\mathcal{J}}$ les ordinaux tels que

$$\lambda_{\mathcal{I}} = \sup_{I^{\bullet} \in \mathcal{I}} \overline{I} \quad \text{et} \quad \lambda_{\mathcal{J}} = \sup_{J^{\bullet} \in \mathcal{J}} \overline{J}.$$

On a $\lambda_{\mathcal{I}} < \Lambda$ et $\lambda_{\mathcal{J}} < \Lambda$, où Λ désigne l'ordinal inaccessible associé à l'univers $\mathfrak{M}_0$ (démonstration du théoreme 5). Notons $\hat{\lambda}'$ l'ordinal initial régulier d'indice $(sup(\lambda_{\mathcal{I}}, \lambda_{\mathcal{J}}) + 1)$; on a $\hat{\lambda}' < \Lambda$.

- Supposons $M \subset C$ et soit $\hat{M}^{\bullet}_1$ la sous-catégorie de $C^{\bullet}$ engendrée par M. Soit $1 < \lambda \leq \hat{\lambda}'$ et supposons définie, pour tout ordinal $\xi < \lambda$, une sous-catégorie $\hat{M}^{\bullet}_{\xi}$ de $C^{\bullet}$. Nous définissons alors une sous-catégorie $\hat{M}^{\bullet}_{\lambda}$ de $C^{\bullet}$ comme suit :

1°) Si λ est de seconde espèce, $\hat{M}_{\lambda} = \bigcup_{\xi < \lambda} \hat{M}_{\xi}$.

2°) Soit $\lambda = \lambda' + 1$; soit $(M'^{\bullet}_{\lambda}, \nu_{\lambda})$ la complétion $\mathcal{I}$-projective de $\hat{M}_{\lambda'}$ dans $(C^{\bullet}, \nu)$; alors $\hat{M}^{\bullet}_{\lambda}$ est la sous-catégorie telle que $(\hat{M}^{\bullet}_{\lambda}, \mu_{\lambda})$ soit la complétion $\mathcal{J}$-inductive de $M'^{\bullet}_{\lambda}$ dans $(C^{\bullet}, \mu)$.

Par récurrence transfinie, nous obtenons ainsi une sous-catégorie $\hat{M}^{\bullet}_{\hat{\lambda}'}$ de $C^{\bullet}$. Montrons que $\hat{M}^{\bullet}_{\hat{\lambda}'}$ est stable pour ν et μ. En effet, si

$$\Phi = (C^{\bullet}, \underline{\Phi}, I^{\bullet}) \in \mathcal{F}.\mathcal{I},$$

on voit comme dans la démonstration du théorème 5 qu'il existe un $\xi < \hat{\lambda}$ tel que $\Phi(I) \subset \hat{M}_{\xi}$; puisque $M'_{\xi+1}$ est stable pour ν, on a

$$Lim^{\nu} \Phi \in M'_{\xi+1} \subset \hat{M}_{\xi+1}.$$

De même, si Ψ est la transformation naturelle définie par un triplet $(\Phi, \tau, \hat{e})$, où $e \in C^{\bullet}_0$, il existe un $\xi' < \hat{\lambda}'$ tel que $\Psi(I) \subset \square \hat{M}^{\bullet}_{\xi'}$, et par suite

$$lim^{\nu} \Psi \in M'_{\xi+1} \subset \hat{M}_{\xi+1}.$$

Donc $\hat{M}_{\hat{\lambda}'}$ est stable pour ν et, par un raisonnement analogue, on voit qu'il est stable pour μ. On en conclut que $\hat{M}_{\hat{\lambda}'}$ définit une $Q^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$-sous-structure $(\hat{M}^{\bullet}_{\hat{\lambda}'}, \hat{\nu}, \hat{\mu})$ de $(C^{\bullet}, \nu, \mu)$.

- Soit $(\hat{M}^{\bullet}, \hat{\nu}', \hat{\mu}')$ la $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-complétion de M dans $(C^{\bullet}, \nu, \mu)$. De l'affirmation précédente, on déduit $\hat{M} \subset \hat{M}_{\hat{\lambda}'}$. Par ailleurs, on a $\hat{M}_1 \subset \hat{M}$. Supposons montré que $\hat{M}_{\xi} \subset \hat{M}$ pour tout $\xi < \lambda$, où $1 < \lambda \leq \hat{\lambda}'$. Alors $\hat{M}_{\lambda} \subset \hat{M}$, si λ est de seconde espèce. Si $\lambda = \lambda' + 1$, on a $M'_{\lambda} \subset \hat{M}$, car M'_{λ} est la plus petite sous-catégorie de $C^{\bullet}$ stable pour ν et contenant $\hat{M}_{\lambda'} \subset \hat{M}$, et que $\hat{M}^\bullet$ est stable pour ν ; de même $\hat{M}_\lambda \subset \hat{M}$, puisque $\hat{M}^\bullet_\lambda$ est la plus petite sous-catégorie de $C^\bullet$ stable pour μ et contenant M'_λ. Ainsi, par récurrence transfinie, on obtient $\hat{M}_{\hat{\lambda}'} \subset \hat{M}$. D'où

$$\hat{M}_{\hat{\lambda}'} = \hat{M} \quad \text{et} \quad (\hat{M}^\bullet, \hat{\nu}', \hat{\mu}') = (\hat{M}^\bullet_{\hat{\lambda}'}, \hat{\nu}, \hat{\mu}).$$

- Supposons $M \in \bar{\mathfrak{M}}_o$. On a $\hat{M}_1 \in \bar{\mathfrak{M}}_o$. Soit $\lambda \leq \hat{\lambda}'$ et supposons prouvée la relation $\hat{M}_\xi \in \bar{\mathfrak{M}}_o$ pour tout $\xi < \lambda$. Si λ est de seconde espèce, il s'ensuit $\hat{M}_\lambda \in \bar{\mathfrak{M}}_o$, car $\lambda \leq \hat{\lambda}' < \Lambda$ et que $\bar{\mathfrak{M}}_o$ est un univers admettant Λ pour ordinal associé. Si $\lambda = \lambda' + 1$, alors $M'_\lambda \in \bar{\mathfrak{M}}_o$ en vertu du théorème 5, et $\hat{M}_\lambda \in \bar{\mathfrak{M}}_o$, d'après le théorème 11. Par récurrence transfinie, on trouve $\hat{M} \in \bar{\mathfrak{M}}_o$.

- Supposons vérifiées les conditions de la deuxième affirmation du théorème. On a $\hat{M}_1 = M$. Soit $1 < \lambda \leq \hat{\lambda}'$ et supposons montré que $M^\bullet$ est une sous-catégorie pleine de $\hat{M}^\bullet_\xi$ pour tout $\xi < \lambda$.

1°) Si λ est de seconde espèce et si $f \in M^\bullet_o . \hat{M}_\lambda . M^\bullet_o$, il existe un $\xi < \lambda$ tel que $f \in M^\bullet_o . \hat{M}_\xi . M^\bullet_o \subset M$, de sorte que $M^\bullet$ est pleine dans $\hat{M}^\bullet_\lambda$.

2°) Soit $\lambda = \lambda' + 1$. $M'^\bullet_\lambda$ définit la complétion $\mathcal{J}$-projective de $\hat{M}_{\lambda'}$ dans $(C^\bullet, \nu)$ et l'on montre (voir démonstration dans l'appendice, corollaire du lemme 7) que la condition A du lemme 6 (appendice) est vérifiée. Ce lemme affirme que $\hat{M}^\bullet_{\lambda'}$ est pleine dans $M'^\bullet_\lambda$ et (dualement) que $M'^\bullet_\lambda$ est pleine dans $\hat{M}^\bullet_\lambda$. Comme $M^\bullet$ est pleine dans $\hat{M}^\bullet_{\lambda'}$ par hypothèse de récurrence, elle est a fortiori pleine dans $\hat{M}^\bullet_\lambda$.

On voit donc, par récurrence transfinie, que $M^\bullet$ est pleine dans $\hat{M}^\bullet_{\hat{\lambda}'} = \hat{M}^\bullet$.

- Nous allons maintenant donner une autre construction de $\hat{M}^\bullet$ qui nous sera utile pour la démonstration des théorèmes suivants. Pour cela, définissons au préalable l'opérateur $\sigma^{\nu\mu}$ qui associe à toute sous-catégorie $B^\bullet$ de $C^\bullet$ la partie $\sigma^{\nu\mu}(B)$ telle que

$$\sigma^{\nu\mu}(B) = \sigma^\nu(B) \cup \sigma_\mu(B),$$

où $\sigma^\nu(B)$ est la classe associée à B relativement à $(C^\bullet, \nu)$ dans la démonstration du théorème 5 et où $\sigma_\mu(B)$ est la classe $\sigma^{\mu^*}(B)$ associée d'une manière analogue à B relativement à $(C^*, \mu^*) \in \mathfrak{F}_0^{\hat{\mathfrak{I}}*}$ .Nous définissons par récurrence transfinie une suite transfinie $(\bar{M}^\bullet_\lambda)_{\lambda \leq \hat{\lambda}'}$ de sous-catégories de $C^\bullet$ en posant :

1°) $\bar{M}_1 = \hat{M}_1$;

2°) $\bar{M}_\lambda = \bigcup_{\xi < \lambda} \bar{M}_\xi$, si λ est de seconde espèce;

3°) $\bar{M}^\bullet_\lambda$ = sous-catégorie de $C^\bullet$ engendrée par $\sigma^{\nu\mu}(\bar{M}_{\lambda'})$, si $\lambda = \lambda' + 1$.

On obtient ainsi une sous-catégorie $\bar{M}^\bullet_{\hat{\lambda}'}$ de $C^\bullet$. Un raisonnement semblable à celui utilisé pour prouver le théorème 5 montre que $\bar{M}^\bullet_{\hat{\lambda}'}$ est une sous-catégorie de $C^\bullet$ stable pour ν et pour μ, et par suite $\hat{M} \subset \bar{M}_{\hat{\lambda}'}$. Inversement, il est évident que $\bar{M}_1 \subset \hat{M}$ et que, si $\bar{M}_\xi \subset \hat{M}$, on a aussi $\bar{M}_{\xi+1} \subset \hat{M}$; d'où, par récurrence transfinie, $\bar{M}_{\hat{\lambda}'} \subset \hat{M}$. Donc $\hat{M}^\bullet = \bar{M}^\bullet_{\hat{\lambda}'}$. ∎

COROLLAIRE. *$Q^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}}$ est un foncteur $\rightarrow$-engendrant pour $\mathfrak{M}$. Les foncteurs $p^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}}$ et $(\mathfrak{F}'^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}}, \iota, \mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}})$ admettent des adjoints.*

En effet, la démonstration est analogue à celle du corollaire du théorème 5. ∎

B. $p^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}}$-STRUCTURES LIBRES.

THEOREME 13. *Tout $H^\bullet \in \mathfrak{F}_0$ engendre une $p^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}}$-structure libre $(C^\bullet, \nu, \mu)$ ayant les propriétés suivantes :*

$H^\bullet$ est une sous-catégorie pleine de $C^\bullet$ et le foncteur somme de Lim^ν et de $\underrightarrow{\mathrm{Lim}}^\mu$ est injectif.

DEMONSTRATION. Soit $((C^\bullet, \nu, \mu), J)$ un $(\mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}}, p^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}})$-projecteur. Il en existe d'après le corollaire du théorème 12. Soit $\bar{\mathfrak{A}}(H^\bullet)$ la catégorie $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, H^*_+)^{\square}$, où $H^\bullet_+$ est la catégorie obtenue en ajoutant à $H^\bullet$ un élément initial 0, et soit $\bar{\eta}_{H^\bullet}$ le foncteur canonique

$$(\bar{\mathfrak{A}}(H^\bullet), \iota, \mathfrak{A}(H^\bullet)).\eta_{H^\bullet} \in \hat{\mathfrak{F}}$$

de $H^\bullet$ vers $\bar{\mathfrak{A}}(H^\bullet)$ (nous reprenons les notations de la démonstration du théorème 6). Puisque $\mathfrak{M}$ est une catégorie à $\mathfrak{M}_0$-limites projectives et à $\mathfrak{M}_0$-limites inductives, $\bar{\mathfrak{A}}(H^\bullet)$ est une catégorie à $\mathfrak{I}$-limites projectives

(à suivre)