

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

CHARLES EHRESMANN

Propriétés infinitésimales des catégories différentiables

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 9, n° 1 (1967), p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1967__9_1_1_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PROPRIETES INFINITESIMALES DES CATEGORIES DIFFERENTIABLES

par Charles EHRESMANN

Le texte suivant est extrait d'une conférence donnée à la «Tagung über Differentialgeometrie» de Berlin (12-17 Septembre 1966). La conférence débutait par un rappel sur les catégories structurées (à l'aide de la méthode des «Esquisses» [6]), sur le prolongement local d'une catégorie topologique [1] et sur les catégories différentiables. Nous ne publions ici que les résultats de cette conférence ne figurant pas déjà dans l'article [2] supposé connu.

NOTATIONS. Toutes les variétés r -différentiables considérées sont supposées banachiques. Soit $\tilde{\mathcal{C}}^r$ la catégorie des applications r -différentiables relative à l'univers \mathbb{M}_0 et soit δ^r son foncteur projection canonique vers la catégorie pleine d'applications \mathbb{M} associée à \mathbb{M}_0 . Soit $S(\tilde{\mathcal{C}}^r)$ la sous-catégorie de $\tilde{\mathcal{C}}^r$ formée des submersions. Si A est une r -variété, nous désignons par \hat{A} la classe de tous les r -germes de A , par \hat{x} le r -germe de A en $x \in \delta^r(A)$, par $T(A)$ l'espace des vecteurs tangents à A ; désignons par A/U la sous-variété de A définie par $U \subset \delta^r(A)$. Nous notons k un entier inférieur à r .

Soient $(J^{k,r}, A^{k,r})$ et $(\tilde{J}^{k,r}, \tilde{A}^{k,r})$ respectivement les catégories $(r-k)$ -différentiables des k -jets et des k -jets non holonomes relatives à $\tilde{\mathcal{C}}^r$ [2], et α^r et β^r leurs applications source et but. Si X est un k -jet d'une application constante et si $\beta^r(X) = \hat{x}$, on posera $X = \bar{x}$ sans préciser la source de X , qui résultera du contexte.

Nous désignerons par (C^*, A) une catégorie r -différentiable, par $\tau(A)$ la topologie sous-jacente à A , par

$$a = (A_0, \alpha, A), \quad b = (A_0, \beta, A) \quad \text{et} \quad K = (A, \kappa, A * A)$$

les applications r -différentiables définies par les applications source, but

et loi de composition de C^* .

1. Espèces de structures r -différentiables.

Soit p un foncteur fidèle d'une catégorie \mathcal{K} vers \mathfrak{M} et soit \mathcal{H}' une sous-catégorie de \mathcal{K} . On appelle *espèce de structures $p(\mathcal{H}')$ -structurée* [3] un triplet $\eta = ((C^*, s), s', \kappa')$ tel que :

- 1) (C^*, s) est une catégorie $p((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{K})$ -structurée et $s' \in \mathcal{H}_0$;
- 2) $\underline{\eta} = (C^*, E, \kappa')$ est une espèce de structures [0], où $E = p(s')$; soit q la projection canonique de E dans C_0^* ;
- 3) Il existe $\bar{q} \in s_0 \cdot \mathcal{H}' \cdot s'$, un produit fibré $s * s'$ de (a, \bar{q}) dans p (chap. IV [0]) et un $K' \in s' \cdot \mathcal{H}' \cdot s * s'$ tels que $p(K') = \kappa'$, où $a \in s_0 \cdot \mathcal{H}' \cdot s$ et $p(a) = (C_0^*, \alpha, C)$. (Il en résulte $p(\bar{q}) = q$).

On appelle *application covariante $p(\mathcal{H}')$ -structurée* un quadruplet $(\eta_2, \Phi, \varphi, \eta_1)$ tel que [3] :

- 1) $\eta_i = ((C_i^*, s_i), s'_i, \kappa'_i)$ est une espèce de structures $p(\mathcal{H}')$ -structurée, pour $i = 1$ et 2 .
- 2) $\Phi = ((C_2^*, s_2), \underline{\Phi}, (C_1^*, s_1))$ est un foncteur p -structuré;
- 3) $\varphi \in s'_2 \cdot \mathcal{H}' \cdot s'_1$ et $(\eta_2, \underline{\Phi}, C_1^*, p(\varphi), \underline{\eta}_1)$ est une application covariante (Chap. II [0]).

Une espèce de structures $\delta^r(S(\tilde{\mathcal{C}}^r))$ -structurée est appelée *espèce de structures r -différentiable*, une application covariante $\delta^r(S(\tilde{\mathcal{C}}^r))$ -structurée, *application covariante r -différentiable* [2].

Soit $(\eta_2, \Phi, \varphi, \eta_1)$ une application covariante r -différentiable. Supposons que Φ soit une restriction du foncteur r -différentiable canonique [2] $j^{k', k}$ de $(J^{k, r+k}, A^{k, r+k})$ vers la catégorie r -différentiable sous-jacente à $(J^{k', r+k}, A^{k', r+k})$, où $k' < k$. Une structure z de $\underline{\eta}_1$ est appelé élément infinitésimal (ou objet géométrique) d'ordre k et $\varphi(z)$ est dit φ -covariant différentiel de z (voir [4]).

2. Catégories prolongées.

Soit $(C^*, \tau(A))$ la catégorie topologique sous-jacente à (C^*, A) . Nous désignons par $S(C^*, \tau(A))$ la catégorie de ses sections locales [1], par $J^\lambda(C^*, \tau(A))$ son prolongement local [1]. Soit $S^r(C^*, A)$

la sous-catégorie de $S(C^\bullet, \tau(A))$ formée des sections r -différentiables (i. e. des sections locales (u', s, u) telles que $(A, s, A_0/u)$ soit r -différentiable) et $J^{\lambda, r}(C^\bullet, A)$ la sous-catégorie de $J^\lambda(C^\bullet, \tau(A))$ correspondante. Soit $(C^{k\bullet}, A^k)$ la catégorie $(r-k)$ -différentiable prolongement d'ordre k de (C^\bullet, A) [2].

THEOREME. $C^{k\bullet}$ est isomorphe à la catégorie quotient de $J^{\lambda, r}(C^\bullet, A)$ par la relation d'équivalence :

$$j_x^\lambda s \sim j_x^\lambda s' \quad \text{si, et seulement si,} \quad j_x^k s = j_x^k s'.$$

THEOREME. $((\hat{A}.J^{k, r})^0, A^{k, r}/\hat{A}.J^{k, r})$ est une catégorie $(r-k)$ -différentiable J_A^k , la loi de composition étant :

$$(Y, X) \rightarrow Y \circ X = K \langle Y, X \rangle$$

$$\text{si, et seulement si, } \alpha^r(X) = \alpha^r(Y) \quad \text{et} \quad aY = bX.$$

En effet, comme a et b sont des submersions, il existe un produit fibré naturalisé $((j_y^k a, v'), (j_x^k b, v))$ dans $J^{k, r}$ si $\alpha(y) = \beta(x)$. Si $\alpha^r(X) = \alpha^r(Y)$, $aY = bX$,

$$\beta^r(X) = \hat{x} \quad \text{et} \quad \beta^r(Y) = \hat{y},$$

alors $\langle Y, X \rangle$ est l'unique élément tel que

$$v.\langle Y, X \rangle = X \quad \text{et} \quad v'.\langle Y, X \rangle = Y.$$

La catégorie $(r-k)$ -différentiable J_A^k a déjà été considérée dans [2]. Par suite, dans $C^{k\bullet}$, on a $Y \bullet X = (YbX) \circ X$.

Soit $V(A_0)$ la sous-variété de $T(A)$ formée des vecteurs verticaux attachés à A_0 , i. e. des $X \in T(A)$ tels que $\beta^r(X) = \hat{e}$ où $e \in C_0$ et $aX = \bar{e}$.

THEOREME. $((C_\gamma^{1\bullet}, A^1/C_\gamma^{1\bullet}), V(A_0), \kappa')$ est une espèce de structures $(r-1)$ -différentiable pour la loi de composition κ' :

$$(Z, X) \rightarrow (ZbX \circ X) \circ \bar{f}^{-1}, \quad \text{où} \quad \hat{f} = \beta^r(Z),$$

$$\text{si, et seulement si,} \quad \beta^r(X) = aZ.$$

Soit $f \in C$, $e = \alpha(f)$ et $e' = \beta(f)$. On appelle k -élément purement

horizontal en f un $X \in \widehat{f} \cdot \widetilde{J}^{k,r} \cdot \widehat{e}$ tel que $aX = \widehat{e}$ et $bX = \overline{e'}$ (en désignant par $\overline{e'}$ le jet constant sur e'). Un k -élément purement horizontal en f de (C^*, A) , où C^* est la catégorie duale de C^\bullet , est appelé k -élément purement vertical en f de (C^\bullet, A) . Un k -élément purement vertical de (C^\bullet, A) en $e \in C_0^\bullet$ est [5] un élément de k -connexion sur (C^\bullet, A) .

Soit V^k la sous-variété de $A^{k,r}$ formée des k -éléments purement verticaux de (C^\bullet, A) . Soit $C^{k,r}$ la classe des $Z \in C^k$ tels que bZ soit inversible.

THEOREME. $((C^*, A), V^k, \kappa_V^*)$ est une espèce de structures $(r-k)$ -différentiable pour la loi de composition κ_V^* :

$$(X, g) \rightarrow X \circ \overline{g} \quad \text{si, et seulement si,} \quad \beta^r(aX) = \widehat{\beta(g)}.$$

$((C^{k,\bullet}, A^k/C^{k,\bullet}), V^k, \kappa^V)$ est une espèce de structures $(r-k)$ -différentiable pour la loi de composition κ^V :

$$(Z, X) \rightarrow (Z \circ X)(bZ)^{-1} \quad \text{si, et seulement si,} \quad \alpha^r(Z) = \alpha^r(X).$$

De plus $(C^{k,\bullet}, C^\bullet)$ est un couple de catégories d'opérateurs [0] sur $\delta^{r-k}(V^k)$ relativement à (κ^V, κ_V^*) .

Soit Q^k la classe des éléments de k -connexion sur (C^\bullet, A) .

THEOREME. On a $Q^k \subset (J_A^k)_\gamma$ et $((C_\gamma^{k,\bullet}, A^k/C_\gamma^{k,\bullet}), A^{k,r}/Q^k, \kappa')$ est une espèce de structures $(r-k)$ -différentiable pour la loi de composition κ' définie par :

$$(Z, X) \rightarrow (ZX)z^{-1} = \kappa_V^*(\kappa^V(Z, X), z^{-1})$$

$$\text{si, et seulement si,} \quad \alpha^r(Z) = \alpha^r(X) \quad \text{et} \quad \beta^r(Z) = \widehat{z}.$$

On a alors $(ZX)z^{-1} = (Z \circ X \circ \overline{z^{-1}})(bZ)^{-1}$.

3. Germes infinitésimaux de catégorie différentiable.

Si $f \in C$, la classe $\{\beta(f), f, \alpha(f)\}$ admet une base de voisinages dans $\tau(A)$ formée de sous-noyaux [1] r -différentiables de (C^\bullet, A) . Un tel sous-noyau est entièrement déterminé par la donnée de la restriction K/U de K à une sous-variété ouverte U de $A * A$ contenant

$$[f] = \{(e, e), (e', e'), (f, e), (e', f)\},$$

où $e = \alpha(f)$ et $e' = \beta(f)$. Nous appelons *germe local de* (C^\bullet, A) en f , noté $j_f^\wedge(C^\bullet, A)$, le jet local $[4] j_{[f]}^\wedge K/U$ de K/U autour de $[f]$. Le k -germe de $(C^\bullet; A)$ en f sera par définition l'élément

$$j_f^k(C^\bullet, A) = (j_{(e, e)}^k K, j_{(e', e')}^k K, j_{(f, e)}^k K, j_{(e', f)}^k K) \in (J^{k, r})^4.$$

Soit $\mathcal{F}_p(\delta^r)$ la catégorie des foncteurs r -différentiables pointés, dont les éléments sont les triplets $\hat{F}_i = (F_i, (f'_i, f_i))$ tels que

$$f_i \in C_i, \quad f'_i = F_i(f_i) \quad \text{et} \quad F_i = ((\hat{C}_i, \hat{A}_i), \underline{F}_i, (C_i, A_i))$$

est un foncteur r -différentiable. Il existe une catégorie quotient $J^k \mathcal{F}(\delta^r)$ de la catégorie $\mathcal{F}_p(\delta^r)$ par la relation d'équivalence r_k :

$$\begin{aligned} \hat{F}_1 \sim \hat{F}_2 \quad &\text{si, et seulement si,} \quad f_1 = f_2 = f, \quad f'_1 = f'_2 = f', \\ j_f^k(C_1, A_1) = j_f^k(C_2, A_2), \quad &j_{f'}^k(\hat{C}_1, \hat{A}_1) = j_{f'}^k(\hat{C}_2, \hat{A}_2), \\ j_x^k \bar{F}_1 = j_x^k \bar{F}_2, \quad &\text{pour } x = f, \alpha(f) \text{ et } \beta(f), \quad \text{où } \bar{F}_i = (\hat{A}_i, \underline{F}_i, A_i). \end{aligned}$$

La classe de ses unités est identifiée à la classe des k -germes de catégories r -différentiables. L'élément $\hat{F}_i \text{ mod } r_k \in J^k \mathcal{F}(\delta^r)$ est identifié à l'élément de $(J^{k, r})^{11}$ qui le détermine, et appelé k -germe de F_i en f , noté $j_f^k F_i$.

THEOREME. $(J^k \mathcal{F}(\delta^r), (A^{k, r})^{11} / J^k \mathcal{F}(\delta^r))$ est une catégorie $(r-k)$ -différentiable.

THEOREME. $T(A)$ définit une sous-catégorie $(r-1)$ -différentiable $T(C^\bullet, A)$ de J_A^1 et $(T(C^\bullet, A), T(A)^\dagger)$ est une catégorie double $(r-1)$ -différentiable, où $+$ est la loi de composition :

$$(Y', Y) \rightarrow Y' + Y \quad \text{si, et seulement si,} \quad \beta^r(Y) = \beta^r(Y').$$

L'étude du 1-germe de (C^\bullet, A) en f est ramenée à celle de la sous-catégorie double $(r-1)$ -différentiable de $(T(C^\bullet, A), T(A)^\dagger)$ définie par $T_e(A) \cup T_{e'}(A) \cup T_f(A)$.

Par récurrence, ce résultat se généralise en définissant sur la classe $\tilde{T}^k(A)$ des k -vitesses non holonomes de A une structure de catégorie 2^k -uple $(r-k)$ -différentiable.

Soit $f \in C$, $e = \alpha(f)$, $e' = \beta(f)$. Supposons donné un élément de

k -connexion X de (C^*, A) en e et un élément de k -connexion X' de (C^*, A) en e' . Pour tout $Z \in \tilde{T}_f^k(A)$, on a

$$Z' = (X'bZ) \circ Z \circ (XaZ) \in \tilde{T}_f^k(e'Ae),$$

où $e'Ae = A/e'.C.e$. Dans ce cas, l'étude du k -germe de (C^*, A) en f est ramenée à celle du k -germe en f de $(C_f^*, A/C_f)$, où

$$C_f = e.C.e \cup e'.C.e' \cup e'.C.e.$$

Supposons $k=1$. Par restriction de la loi de composition de $T(C^*, A)$, on voit que $P = T_e(e'Ae') \times T_e(eAe)$ opère sur $T_f(e'Ae)$ relativement à la loi

$$((Z', Z), Y) \rightarrow Z' \circ Y \circ Z = Z' \circ \bar{f} + Y + \bar{f} \circ Z.$$

THEOREME. $T_f(e'Ae)$ admet pour facteurs topologiques T_1 et T_2 , où T_1 est formé des $\bar{f} \circ Z$ tels que $Z \in T_e(eAe)$ et T_2 des $Z' \circ \bar{f}$ où $Z' \in T_e(e'Ae')$, et le sous-espace engendré par T_1 et T_2 admet un supplémentaire topologique T_3 . L'espace P admet pour facteur topologique l'espace P_1 formé des (Z', Z) tels que $(Z', Z)\bar{f} = \bar{f}$.

En particulier, l'étude de $T_f(e'Ae)$ revient à celle de $T_e(eAe)$ et de T_3 lorsque f vérifie la condition :

(0) Pour tout $Z' \in T_e(e'Ae')$, il existe $Z \in T_e(eAe)$ tel que $Z' \circ \bar{f} = \bar{f} \circ Z$.

En effet, on a alors $T_1 = T_2$. Si f est inversible, f vérifie (0) et $T_3 = \{\bar{f}\}$.

4. Prolongements d'espèces de structures différentiables.

Soit $\eta = ((C^*, A), A', \kappa')$ une espèce de structures r -différentiable. Soit $G^k(\eta)$ la sous-variété de $A^{k,r}$ formée des $S \in \hat{A}' \cdot J^{k,r} \cdot \hat{A}_0$ tels que $qS = \alpha^r(S)$, où q désigne la projection canonique r -différentiable de A' dans A_0 . Nous notons K' l'application r -différentiable de $A * A'$ dans A définie par κ' .

THEOREME. $\eta^k = (J_A^k, A^{k,r}/\hat{A}', J^{k,r}, \kappa^k)$ est une espèce de structures $(r-k)$ -différentiable pour la loi de composition κ^k :

$$(X, Z) \rightarrow X \circ Z = K' \langle X, Z \rangle$$

si, et seulement si, $qZ = aX$ et $\alpha^r(X) = \alpha^r(Z)$.

La catégorie des hypermorphisms associée est isomorphe à $J_{A * A'}^k$.

$\langle X, Z \rangle$ est l'unique $Y \in \widehat{A * A'}$, $J^{k,r}$ tel que $v.Y = X$ et $v'.Y = Z$, où $((j_x^k a, v), (j_z^k q, v'))$ est le produit fibré naturalisé canonique dans $J^{k,r}$, et $\hat{x} = \beta^r(X)$, $\hat{z} = \beta^r(Z)$.

THEOREME. $\eta^{k,r} = ((C^{k,\bullet}, A^k/C^{k,\bullet}), G^k(\eta), \kappa^{k,r})$ est une espèce de structures $(r-k)$ -différentiable pour la loi de composition $\kappa^{k,r}$:

$$(X, S) \rightarrow XS = (X \circ S)(bX)^{-1}$$

si, et seulement si, $\alpha^r(X) = \alpha^r(S)$.

L'espèce de structures $(r-1)$ -différentiable η^1 admet une sous-espèce de structures $(r-1)$ -différentiable

$$(T(C^\bullet, A), T(A'), \kappa^n),$$

notée $T(\eta)$.

THEOREME. $\eta^{n,k} = ((C^{k,\bullet}, A^k/C^{k,\bullet}), A^{k,r}/\hat{A}', J^{k,r}, \kappa^{n,k})$ est une espèce de structures $(r-k)$ -différentiable pour la loi de composition $\kappa^{n,k}$:

$$(X, S) \rightarrow XqS \circ S$$

si, et seulement si, $\alpha^r(X) = q\beta^r(S)$.

Ces théorèmes, ainsi que ceux du n° 2, se généralisent en remplaçant partout les prolongements holonomes par des prolongements non-holonomes.

Supposons $f \in C$, $e = \alpha(f)$ et $e' = \beta(f)$. Soit

$$M = j_f^1 m \in \widehat{T(\hat{A})} \cdot J^{1,r-1} \cdot j^{r-1,r}(\hat{A})$$

un germe d'ordre 1 en f de champ de vecteurs vertical sur A , i.e. tel que

$$aM = j_f^1 \bar{a}, \quad \text{où } \bar{a}(f') = \overline{a(f')} \in T(A_o).$$

Soit $\Sigma = j_e^1 \sigma \in \hat{A} \cdot J^{1,r} \cdot \hat{A}_o$ tel que $\beta^r(\Sigma) = \hat{f}$ et $b\Sigma = \hat{e}'$.

THEOREME. Au couple (M, Σ) est canoniquement associé un élément $v(M, \Sigma)$ de $T_f(A)$ tel que $bv(M, \Sigma) = \bar{e}'$.

En effet, pour $t > 0$ assez petit, soit $\exp tm$ l'automorphisme local de A , défini au voisinage de f par

$$\exp tm(f') = G_{f'}(t),$$

où $G_{f'}$ est l'unique courbe intégrale du champ m d'origine f' . Posons $\sigma_t = (\exp tm)\sigma$; comme $b\sigma_0 = \alpha(\sigma)$, l'application $b\sigma_t$ est un automorphisme local de A_0 , de sorte qu'il existe un et un seul $x_t \in C_0$ tel que $b\sigma_t(x_t) = e'$. Le 1-jet en 0 de l'application $t \rightarrow \sigma_t(x_t)$ dépend seulement de M et de Σ , et c'est le vecteur $v(M, \Sigma)$ cherché.

Soit $S = j_e^1 s \in G^1(\eta)$. Soit $v_S = Sav(M, \Sigma) \in T_{s(e)}A'$. Le composé $v(M, \Sigma) \circ v_S$ est défini dans $T(\eta)$; c'est un vecteur $\mathcal{L}(M, \Sigma)S$ d'origine $fs(e)$ tel que $q\mathcal{L}(M, \Sigma)S = \bar{e}'$. Ce vecteur sera appelé *dérivée de Lie de S relativement à (M, Σ)* et l'application

$$S \rightarrow \mathcal{L}(M, \Sigma)S, \quad \text{où } S \in G^1(\eta) \quad \text{et} \quad \alpha^r(S) = \hat{e},$$

est dite *dérivée de Lie relativement à (M, Σ)* , notée $\mathcal{L}(M, \Sigma)$.

M pourra par exemple être le 1-germe de champ vertical en f déduit d'un 1-germe $N = j_e^1 n$ en e' de champ de vecteurs vertical le long de A_0 (i.e. $N \in \widehat{T(A)} \cdot j^{1, r-1} \cdot j^{r-1, r}(\hat{A}_0)$, $an(e'') = \bar{e}''$ où $e'' \in \alpha(n)$). Ceci signifie que

$$M = j_f^1 m \quad \text{où} \quad m(f') = n(\beta(f')) \circ \bar{f}'.$$

Si $f = e$ et si $\Sigma = j_e^1(A, \iota, A_0)$, on posera $\mathcal{L}(M, \Sigma) = \mathcal{L}(M)$.

EXEMPLE. Soit V une variété r -différentiable et X un 1-germe de champ de vecteurs sur V en x . Soit (C^*, A) le groupoïde $(r-1)$ -différentiable des 1-jets d'automorphismes locaux de V (ce groupoïde est le prolongement d'ordre 1 de $((V \times V)^\perp, V \times V)$, où $(V \times V)^\perp$ est le groupoïde des couples associé à $\delta^r(V)$). Au germe de champ X est canoniquement associé un 1-germe M de champ de vecteurs vertical en \hat{x} sur A . Soit $\eta = ((C^*, A), A', \kappa')$ l'espace de structures $(r-1)$ -différentiable canonique telle que A' soit une variété de tenseurs sur V . Un 1-germe en x de champ de tenseurs sur V s'identifie à un élément S de $G^1(\eta)$. La dérivée de Lie $\mathcal{L}(M)(S)$ de S relativement à M est la dérivée de Lie au sens usuel de S relativement à X .

Index bibliographique.

- [0] Catégories et structures, Dunod, Paris, 1965 .
- [1] Catégories topologiques, I, II, III, Proc. Nederlands Ak. van Wetenschappen, 69, 2, 1966, 133 - 175 .
- [2] Prolongements de catégories différentiables, Cahiers de Topologie et Géométrie différentielle, VI, 1964 .
- [3] Sous-structures et applications K- covariantes, C.R.A.S. 256, 1963.
- [4] Catégories inductives et pseudogroupes, Ann. Inst. Fourier, X, 1960 .
- [5] Sur les connexions d'ordre supérieur, Atti V Cong. Un. Mat. Italiana, 1956 .
- [6] Introduction to structured categories, Univ. of Kansas, Dep. of Math., Technical Report 10, 1966, 95 pages .