CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

GÉRARD JOUBERT

Contribution à l'étude des catégories ordonnées. Application aux structures feuilletées

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 8 (1966), exp. n^o 5, p. I-117

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1966__8__A5_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE *Vol. VIII*
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
Janvier 1966

CONTRIBUTION A L'ETUDE DES CATEGORIES ORDONNEES APPLICATION AUX STRUCTURES FEUILLETEES

par Gérard JOUBERT

INTRODUCTION

La théorie des variétés feuilletées, créée par C. Ehresmann et G. Reeb puis étudiée de façon approfondie par G. Reeb et A. Haefliger, a été étendue par C. Ehresmann au cas topologique général , dans le cadre de la théorie des structures locales. Presque tous les résultats connus dans le cas des variétés (voir par exemple [1]) peuvent être généralisés au cas des feuilletages topologiques localement simples (voir [9]).

En particulier, la notion fondamentale qui domine toute la théorie, celle d'holonomie, peut être définie dans cette théorie générale. Cette notion, qui était bien connue dans le cas particulier des systèmes dynamiques, permet d'étudier avec précision la situation au voisinage d'une feuille. Nous donnerons au début du chapitre V les éléments de la théorie qui permettent une définition précise de cette notion. Disons brièvement ici que si (T, T') est un feuilletage topologique localement simple et ω un ouvert simple, l'holonomie de (T, T') relativement à ω est donnée par le groupoïde des jets (voir [10]), appelé groupoïde transverse d'holonomie, d'un pseudogroupe γ_ω d'homéomorphismes locaux de l'espace transverse $\breve{\omega}$. On construit ce pseudogroupe au moyen de chaînes d'ouverts simples reliant deux ouverts de ω saturés vis-à-vis de la relation d'équivalence canonique associée au feuilletage $(T, T')_\omega$ induit par (T, T') sur ω. L'ensemble des points d'une trajectoire de γ_ω correspond à l'ensemble des plaques de $(T, T')_\omega$ appartenant à une même feuille de (T, T').

L'origine de ce travail est alors la question suivante qui m'a été posée par Monsieur Ehresmann :

Est-il possible de construire un feuilletage topologique localement simple (T, T') admettant une holonomie donnée ?

Plus précisément, étant donné un pseudogroupe γ d'homéomorphismes locaux d'un espace topologique E, existe-t-il un feuilletage localement simple (T, T') admettant un ouvert simple ω tel que le groupoïde transverse d'holonomie de (T, T') relativement à ω soit identique au groupoïde des jets de γ ?

On connait déjà une réponse affirmative à cette question dans le cas particulier où le pseudogroupe γ est obtenu par localisation d'un groupe H d'homéomorphismes de E (voir [11]) :

Si G est le groupe d'automorphismes du revêtement universel $\tilde{X}$ d'un espace topologique X connexe et localement connexe et si π est un homomorphisme de G sur H, alors à tout $s \in G$ on peut associer un homéomorphisme s^* de $E \times \tilde{X} = F$ en posant

$$s^*(x, y) = (\pi(s)(x), s(y))$$

si $x \in E$ et $y \in \tilde{X}$. Ces homéomorphismes constituent un groupe G' isomorphe à G.

Soit F' l'ensemble quotient de F par l'action de G'. F est muni de deux topologies, la topologie $\mathcal{T}$ produit de celle de E par celle de $\tilde{X}$ et la topologie $\mathcal{T}'$ somme de celle des sous-espaces $\{x\} \times \tilde{X}$; les deux topologies sur F' quotient de celles de F déterminent sur F' un feuilletage topologique localement simple ayant les propriétés requises.

Pour étudier le cas général, il était naturel d'essayer d'étendre la construction précédente, c'est-à-dire de chercher à construire un pseudogroupe Γ d'homéomorphismes locaux de F dont les éléments seraient de la forme (f, s) où $f \in \gamma$ et $s \in G$ et tels que

$$(f, s)(x, y) = (f(x), s(y)) \text{ si } x \in \alpha(f) \text{ et } y \in \tilde{X},$$

et de considérer l'ensemble F' quotient de F par l'action de Γ muni de la topologie T et T' quotient de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ respectivement.

Pour que (T, T') déterminent sur F' un feuilletage topologique localement simple ayant les propriétés exigées il faut que, pour tout $f \in \gamma$, l'ensemble des $s \in G^{\bullet}$ tels que $(f, s) \in \Gamma$ soit convenablement associé à f. On obtient une telle association si, $(\mathcal{A}^{o}(G^{\bullet}), <)$ étant le groupoïde inductif des atlas de $G^{\bullet}$ (voir [2]) et $\varphi = ((\mathcal{A}^{o}(G^{\bullet}), <), \underline{\varphi}, (\gamma^{\bullet}, <))$ un foncteur ordonné bien fidèle, s appartient à $\underline{\varphi}(f)$.

Si, dans le cas particulier précédemment envisagé, on suppose que $G = H$ et que π est l'identité, on constate que si, $\underline{\varphi}(f)$ désigne l'ensemble des $s \in G$ qui majore l'élément f de $\gamma^{\bullet}$, on définit une application de γ dans $\mathcal{A}(G^{\bullet})$ sous-jacente à un foncteur φ ordonné et bien fidèle et que ce foncteur, qu'on appellera foncteur majorant associé à $\gamma^{\bullet}$, est, de plus, un foncteur d'hypermorphismes saturé (voir (E)).

Ce dernier résultat incite à penser que, $(\gamma^{\bullet}, <)$ étant plus généralement un groupoïde fonctoriellement ordonné et $G^{\bullet}$ un groupe, la connaissance d'un foncteur $\varphi = ((\mathcal{A}^{o}(G^{\bullet}), <), \underline{\varphi}, (\gamma^{\bullet}, <))$ ordonné et bien fidèle serait une première étape dans la résolution du problème suivant :

Construire un groupoïde fonctoriellement ordonné $(\hat{\gamma}^{\bullet}, <)$ obtenu par localisation du groupe $G^{\bullet}$ et contenant un sous-groupoïde régulier équivalent à $(\gamma^{\bullet}, <)$.

On conçoit, en effet, que le foncteur majorant $\hat{\varphi} = ((\mathcal{A}^{o}(G^{\bullet}), <, \underline{\hat{\varphi}}, (\hat{\gamma}, <)$ associé à $\hat{\gamma}^{\bullet}$ soit une extension du foncteur φ. Or précisément, il résulte des travaux de C. Ehresmann sur les extensions et les élargissements de foncteurs que, dans le cas particulier où $p = (K^{\bullet}, \underline{p}, H^{\bullet})$ est un foncteur bien fidèle et $H^{\bullet}$ et $K^{\bullet}$ des groupoïdes, il est toujours possible de construire un foncteur d'hypermorphismes saturé $\tilde{p} = (K^{\bullet}, \underline{\tilde{p}}, \tilde{H}^{\bullet})$ et une équivalence $\sigma = (\bar{H}^{\bullet}, \underline{\sigma}, H^{\bullet})$, $\bar{H}^{\bullet}$ étant un sous-groupoïde de $\tilde{H}^{\bullet}$, tels que $p = \tilde{p} . \sigma$.

C'est donc vers l'étude de ces extensions, lorsque $H^{\bullet}$ et $K^{\bullet}$ sont plus généralement des catégories structurées par un ordre et p un foncteur structuré, qu'il fallait orienter les recherches.

Dans le chapitre 0 de ce travail, nous avons rappelé les notions générales de la théorie des catégories structurées par des ordres (voir [8]) et des foncteurs structurés correspondants.

Dans le chapitre I nous avons étudié le passage au quotient (strict) dans ces catégories. Les résultats de ce chapitre sont indispensables pour le suivant qui traite de l'extension d'un foncteur structuré.

Le chapitre III, qui utilise certains résultats de II, est consacré à l'étude des propriétés des groupoïdes $(F.0)$ obtenus par localisation d'un groupe G et plus particulièrement du problème du plongement d'un groupoïde $(F.0)$ dans un tel groupoïde.

Dans le chapitre IV, on donne une méthode pour construire un foncteur ordonné bien fidèle d'un groupoïde $(F.0)$ vers le groupoïde des atlas d'un groupe. On utilise, ensuite, cette construction pour résoudre plus complètement le problème abordé dans II et pour déterminer explicitement une projection dans une catégorie de foncteurs ordonnés.

Le chapitre V est indépendant du chapitre III. Les résultats de IV servent à la résolution du problème initial dont on a parlé ci-dessus : un feuilletage topologique localement simple admettant une holonomie donnée est construit effectivement.

Chaque chapitre est précédé d'un bref résumé destiné à mettre en évidence les notions et les propriétés les plus importantes qu'il contient.

Les notations employées, qui sont brièvement rappelées ci-après, sont celles du livre de M. Ehresmann «Catégories et structures» dont, par ailleurs,de nombreux théorèmes et notions sont utilisés dans ce travail.

Je suis très heureux d'exprimer ici ma profonde et sincère gratitude à M. C. Ehresmann qui, m'ayant proposé le sujet de cette thèse, m'a constamment aidé dans mes recherches avec beaucoup de bienveillance et de sollicitude. C'est grâce aux directives qu'il m'a données, aux excellents conseils qu'il m'a prodigués, au cours de nombreux et enrichissants entretiens, que j'ai pu mener ce travail à son terme. Qu'il trouve également ici le témoignage de mon admiration.

Je tiens à exprimer aussi toute ma reconnaissance à M. Jean Arbault qui, après avoir contribué efficacement à ma formation mathématique,m'a constamment soutenu dans mon travail de recherche et m'a accordé toutes les facilités possibles pour l'exécuter.

Ma reconnaissance va également à M. René Lagrange qui m'a enseigné la rigueur mathématique et me fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

A M. Pierre Pigeaud qui a accepté de me proposer le sujet de la 2ème thèse et m'a amicalement aidé dans son élaboration, ainsi qu'à M. Bernard d'Orgeval Dubouchet qui a bien voulu être parmi mes juges, j'exprime mes très vifs remerciements.

Je n'oublie pas tous les professeurs du Lycée de Dijon, MM. Pelletier, Euvrard, Paty, Sauser et Semah dont l'excellent enseignement a déterminé ma vocation mathématique. Qu'il me soit permis de leur exprimer mon affectueux souvenir.

INDEX DES NOTATIONS

- $C^{\cdot}$ (C^{o}, etc...) désigne une classe C munie d'une loi de composition interne partiellement définie K; le composé $K(g,f)$ de deux éléments de C étant noté $g.f$ ($g \circ f$, etc...).

- $C^{\cdot} * C^{\cdot}$ dédigne la classe des éléments composables de $C^{\cdot}$.

- Si $C^{\cdot}$ est un graphe multiplicatif, ou une catégorie, la classe des unités est notée $C^{\cdot}_{o}$ et les applications source et but α, β (si $C^{\cdot}$ est surmonté d'un signe ($\hat{}$, $\bar{}$, etc...) α et β sont surmontés du même signe).

- Le groupoïde des éléments inversibles d'une catégorie $C^{\cdot}$ est noté $C^{\cdot}_{\gamma}$.

- Soit $M^{\cdot}$ une classe multiplicative, $K^{\cdot}$ et $L^{\cdot}$ des sous-classes multiplicatives de $M^{\cdot}$:

Si (h', f', f, h) est un quatuor (c'est-à-dire si $h'.f$ et $f'.h$ sont définis et égaux) et si $f, f' \in K$ et $h, h' \in L$, on écrira $(h', f', f, h) \in \square(M^{\cdot}; K, L)$.

- Si $L = M$ on posera $\square(M^{\cdot}; K) = \square(M^{\cdot}; K, M)$.

- Si $K = L = M$ on posera $\square M^{\cdot} = \square(M^{\cdot}; M, M)$.

- Les multiplications longitudinales et latérales sur $\square(M^{\cdot}; K, L)$ seront notées respectivement $\boxbar$, $\boxminus$ et on posera

$$(\square(M^{\cdot}; K, L))^{\boxbar} = \boxbar(M^{\cdot}; K, L) \text{ et } (\square(M^{\cdot}; K, L))^{\boxminus} = \boxminus(M^{\cdot}; K, L).$$

- Si M et M' sont deux classes, une surjection de M sur M' sera désignée par une seule lettre f, une application de M dans M' par un triplet (M', f, M) où f est une surjection de M sur une sous-classe de M'.
Lorsqu'il n'y aura aucun risque de confusion, l'application (M', f, M) sera notée par la seule lettre f.

- Si $M^{\cdot}$ et $M'^{\cdot}$ sont des graphes multiplicatifs (resp. des catégories) un néofoncteur (resp. un foncteur) de $M^{\cdot}$ dans $M'^{\cdot}$ sera désigné par un triplet $(M'^{\cdot}, f, M^{\cdot})$ où f est la surjection (ou l'application) de M dans M' définissant le foncteur (voir E déf. 22, chap. I, p. 15). Si F est un néo-foncteur de $M^{\cdot}$ dans $M'^{\cdot}$, la surjection définissant F sera notée $\underline{F}$ de sorte que

$$F = (M'^{\cdot}, \underline{F}, M^{\cdot}).$$

- Si $p = (M'^{\cdot}, \underline{p}, M^{\cdot})$ est un foncteur, la restriction de p à $M^{\cdot}_{\gamma}$ sera notée p_γ et, si $C^\bullet$ est une sous-catégorie de M, l'image de cette sous-catégorie par $\underline{p}$ sera notée $p(C^\bullet)$.

-Si $\bar{M}^\bullet$ est une catégorie et C une sous-classe de M, la sous-catégorie engendrée par C sera notée $C^\bullet$.

-Si ρ est une relation d'équivalence sur une classe M, on désignera par $\underline{\tilde{\rho}}$ l'application canonique de M sur M/ρ.

CHAPITRE 0

RAPPELS CONCERNANT LA THEORIE DES CATEGORIES ORDONNEES

1. Définitions générales.

Dans toute la suite on désignera par :

1) $\mathfrak{M}_o$: une classe de classes vérifiant les deux conditions :

a) si $M \in \mathfrak{M}_o$, alors on a $M' \in \mathfrak{M}_o$ pour toute sous-classe M' de M.

b) si $M \in \mathfrak{M}_o$ et $M' \in \mathfrak{M}_o$, alors on a $M \times M' \in \mathfrak{M}_o$.

$\mathfrak{M}$: la catégorie des applications (M', f, M) où $M, M' \in \mathfrak{M}_o$ ($\mathfrak{M}_o$ est identifiée à la classe des unités de $\mathfrak{M}$).

2) $\mathfrak{N}'_o$: la classe des graphes multiplicatifs $C^\cdot$ tels que $C \in \mathfrak{M}_o$.

$\mathfrak{N}'$: la catégorie des néo-foncteurs $(C'^\cdot, f, C^\cdot)$ tels que $C^\cdot, C'^\cdot \in \mathfrak{N}'_o$.

3) $\mathfrak{F}_o$: la sous-classe de $\mathfrak{N}'_o$ formée par les catégories.

$\mathfrak{F}$: la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{N}'$ formée par les foncteurs.

($\mathfrak{N}'_o$ et $\mathfrak{F}_o$ sont identifiés aux classes d'unités de $\mathfrak{N}'$ et de $\mathfrak{F}'$ respectivement).

4) $P_{\mathfrak{N}'}$: le foncteur défini par l'application $\underline{P}_{\mathfrak{N}'} : (C'^\cdot, f, C^\cdot) \to (C', f, C)$ de $\mathfrak{N}'$ sur $\mathfrak{M}$; alors $P_{\mathfrak{N}'} = (\mathfrak{M}, \underline{P}_{\mathfrak{N}'}, \overline{\mathfrak{N}'})$.

5) $P_{\mathfrak{F}}$: la restriction de ce foncteur à $\mathfrak{F}$, c'est-à-dire

$$P_{\mathfrak{F}} = (\mathfrak{M}, \underline{P}_{\mathfrak{F}}, \mathfrak{F}) = (\mathfrak{M}, \underline{P}_{\mathfrak{N}'}\iota, \mathfrak{F}),$$

si $(\mathfrak{N}', \iota, \mathfrak{F})$ est l'injection canonique.

6) Ω^p_o : la classe des classes préordonnées $(M, <)$ où $M \in \mathfrak{M}_o$ et où $<$ est une relation de préordre sur M.

Ω^p : la catégorie des applications préordonnées c'est-à-dire la catégorie des triplets $((M', <), f, (M, <)) = \overline{f}$ tels que

$$(M, <) \in \Omega^p_o,\ (M', <) \in \Omega^p_o,\ (M', f, M) \in \mathfrak{M}$$

et que, si $x \in M$, $x' \in M$ vérifient $x' < x$, on ait $f(x') < f(x)$.

7) Ω_o : la sous-classe de Ω^p_o formée par les classes ordonnées.

Ω : la sous-catégorie pleine de Ω^p formée par les applications ordonnées.

8) $P_{\Omega}p$: le foncteur défini par l'application

$$\underline{P}_{\Omega}p : ((M', <), f, (M, <)) \to (M', f, M)$$

de Ω^p sur $\mathfrak{M}$; alors $P_{\Omega}p = (\mathfrak{M}, \underline{P}_{\Omega}p, \Omega^P)$.

9) P_{Ω} : la restriction de ce foncteur à Ω.

2. Sous-catégories de Ω utilisées dans la suite (voir [6] appendice).

Pour les définitions des notions suivantes : classes inductives, sous-inductives, préinductives, sous-préinductives, on peut se reporter à [4].

1) Ω' = catégorie des applications ordonnées strictes : $\overline{f} \in \Omega'$ si et seulement si les conditions $x' < x$ et $f(x) = f(x')$ entraînent $x = x'$.

2 Ω'_1 = catégorie des applications s-ordonnées : $\overline{f} \in \Omega'_1$ si et seulement si les conditions $x' < x$, $x'' < x$ et $f(x') = f(x'')$ entraînent $x' = x''$.

Ω'' = catégorie des applications ordonnées étalées : $\overline{f} \in \Omega''$ si et seulement si, pour tout $x \in M$ et tout $y < f(x)$, il existe $x' < x$ tel que $f(x') = y$.

Ω_2 = catégorie des applications ordonnées régulières $\subset \Omega''$: $\overline{f} \in \Omega_2$ si et seulement si, pour tout $x \in M$ et tout $y \in f(x)$, la classe des $x' < x$ tels que $f(x') < y$ admet un plus grand élément $\overline{x}$ tel que $f(\overline{x}) = y$.

$\Omega^{\cup}$ = sous-catégorie de Ω dont les éléments sont les $\overline{f} \in \Omega$ tels que pour toute sous-classe C de M on ait :

$$f(\underline{\bigcup}\, C) \subset \underline{\bigcup}\, f(C)$$

où $\underline{\bigcup}\, C$ est la congrégation de C (voir [2]).

2) Ω^S = sous-catégorie pleine de Ω ayant pour unités les classes sous-inductives $(M, <) \in \Omega_o$.

$\mathfrak{I}^{\cup}$ = catégorie des applications quasi-inductives $= \Omega^{\cup} \cap \Omega^S$.

$\mathfrak{I}^{PS}$ = catégorie des applications sous-préinductives : $\overline{f} \in \mathfrak{I}^{PS}$ si et seulement si $(M, <)$ et $(M', <)$ sont des classes sous-préinductives et si les conditions $x' < x$, $x'' < x$ dans $(M, <)$ entraînent

$$f(x' \cap x'') = f(x') \cap f(x'').$$

$\mathcal{J}^S$ = catégorie des applications sous-inductives = $\mathcal{J}^{\cup} \cap \mathcal{J}^{PS}$.

$\mathcal{J}$ = catégorie des applications inductives = sous-catégorie pleine de $\mathcal{J}^S$ ayant pour unités les classes inductives $(M, <) \in \Omega_o$.

3) Si $\mathcal{H}$ est l'une des catégories $\mathcal{J}^{\cup}, \mathcal{J}^{PS}, \mathcal{J}^S$ ou $\mathcal{J}$ on pose

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} \cap \Omega', \ \mathcal{H}'' = \mathcal{H} \cap \Omega''.$$

3. Rappels concernant les catégories structurées (voir [8]).

On sait que $(\mathfrak{M}, P_{\mathcal{F}}, \mathcal{F}, \mathcal{F}_\gamma)$ est une catégorie d'homomorphismes (saturée) et $(\mathfrak{M}, P_\Omega, \Omega, \Omega_\gamma)$ une catégorie d'homomorphismes à produits finis (voir [8], II, déf. 1).

Soit $s = (M, <) \in \Omega_o$, alors $s' = (M', \propto) \in \Omega_o$ est une sous-structure de s dans $(\mathfrak{M}, P_\Omega, \Omega, \Omega_\gamma)$ si et seulement si $M' \subset M$ et $\propto$ est l'ordre induit par $<$ sur M' (voir [8], I, déf. 7).

Sauf indication contraire, on désignera une telle structure par la notation $s' = (M', <)$.

Soient $s_i = (M_i, <) \in \Omega_o$, $i = 1, 2$. Le produit $s_1 \times s_2$ au sens de ([8], II, déf. 1) est la classe ordonnée $(M_1 \times M_2, <)$ dont l'ordre est le produit des ordres de M_1 et M_2.

Soient $\mathcal{H}, \mathcal{H}', \mathcal{H}''$, trois sous-catégories de Ω (ou de Ω^P) telles que $\mathcal{H}', \mathcal{H}''$ contiennent $\mathcal{H}_\gamma$ et soient contenues dans $\mathcal{H}$.

DEFINITION (voir [8], II, déf. 3). *Une catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{H}'; \mathcal{H}'')$-structurée (resp. $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')$-structurée) est un couple $(C^\bullet, s)$, où $C^\bullet \in \mathcal{F}_o$, $s \in \mathcal{H}_o$ et $s = (C, <)$, vérifiant les conditions suivantes :*

1) si $s_o = (C_o^\bullet, <)$ (sous-structure de s définie par $C_o^\bullet$), alors $(s_o \times s_o, [\beta, \alpha], s) \in \mathcal{H}'$ (resp. $(s_o, \alpha, s) \in \mathcal{H}', (s_o, \beta, s) \in \mathcal{H}'$).

2) si $s' = (C^\bullet * C^\bullet, <)$ (sous-structure de $s \times s$ définie par $C^\bullet * C^\bullet$) alors $(s, K, s') \in \mathcal{H}''$,

K étant l'application de $C^\bullet * C^\bullet$ dans C qui définit la loi de composition de $C^\bullet$. Si $C^\bullet$ est un groupoïde, on a la condition supplémentaire suivante :

3) $(s, j, s) \in \mathcal{H}$ où $j(g) = g^{-1}$, pour tout $g \in C^\bullet$; il en résulte que $(s, j, s) \in \mathcal{H}_\gamma$.

DEFINITION. *On appelle foncteur $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-structuré [resp. $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')$-structuré] un triplet $((C_1^\bullet, s_1), p, (C^\bullet, s))$ vérifiant les conditions suivantes :*

1) $(C^\bullet, s)$ et $(C_1^\bullet, s_1)$ sont des catégories $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-structurées [resp. $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')$-structurées].

2) $(C_1^\bullet, p, C^\bullet) \in \mathcal{F}$ et $(s_1, p, s) \in \mathcal{H}$.

4. Catégories structurées par des relations de (pré)ordres utilisées dans la suite (voir [6], appendice).

a) Catégorie quasi-pré-ordonnée = Ω^P - structurée
   catégorie quasi-ordonnée = Ω- structurée (2)
   catégorie ordonnée = $\Omega(\Omega', \Omega)$- structurée (2)
   catégorie s-ordonnée = $\Omega(\Omega'_1, \Omega)$- structurée (2)
   catégorie assez régulière = $\Omega((\Omega_2, \Omega_2), \Omega)$- structurée (2)
   catégorie régulière = $\Omega((\Omega_2, \Omega_2), \Omega'')$- structurée (2)

b) Catégorie sous-préinductive = $\mathcal{J}^{PS}(\mathcal{J}^{PS}, \mathcal{J}^{PS})$- structurée (7)
   catégorie sous-inductive = $\mathcal{J}^{S}(\mathcal{J}^{S'}, \mathcal{J}^{S})$- structurée
   catégorie inductive = $\mathcal{J}(\mathcal{J}', \mathcal{J})$- structurée (8)

c) Groupoïde ordonné = groupoïde $\Omega((\Omega', \Omega'), \Omega)$- structuré (8)
   Groupoïde fonctoriellement ordonné = groupoïde $\Omega((\Omega' \cap \Omega'', \Omega' \cap \Omega''), \Omega)$ structuré (8 et 4)
   Groupoïde inductif = groupoïde fonctoriellement ordonné qui est une catégorie inductive.

d) Les foncteurs structurés correspondants à chacun des cas précédents sont appelés du même nom que la catégorie correspondante.

REMARQUE. Dans la suite on notera, en général, une catégorie structurée par une relation d'ordre $(C^\bullet, <)$ au lieu de $(C^\bullet, s)$ avec $s = (C, <)$.

CHAPITRE I

GENERALITES SUR LES «CATEGORIES ORDONNEES» QUOTIENT

Soient $s=(C,<)\in\mathcal{H}_o$, $(C^\bullet,s)$ une catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{H}',\mathcal{H}'')$- structurée et ρ une relation d'équivalence bicompatible sur $C^\bullet$ telle que $C^\bullet/\rho=\tilde{C}^\bullet$ soit une catégorie quotient strict de $C^\bullet$ (voir E déf. 13, III p. 133). Condition supposée toujours vérifiée dans ce chapitre.

Nous allons, dans ce chapitre, chercher des conditions suffisantes sur ρ pour que:

1) $s/\rho=(\tilde{C},\propto)\in\mathcal{H}_o$, $\propto$ étant la relation quotient de la relation $<$ par ρ.

2) $(\tilde{C}^\bullet,\propto)$ soit une catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{H}',\mathcal{H}'')$- structurée.

Le cas des catégories (quasi-) (pré-) ordonnées est d'abord envisagé :

- si ρ vérifie deux conditions appelées Q_1 et Q_4^d (resp. Q_4^g), alors $(\tilde{C}^\bullet,\propto)$ est une catégorie quasi-pré-ordonnée; si $(C^\bullet,<)$ est une catégorie ordonnée et si ρ vérifie deux autres conditions, soient Q_2^o et Q_3, alors $(\tilde{C}^\bullet,\propto)$ est une catégorie ordonnée. On dit dans ce cas que ρ est compatible à droite (resp. à gauche) sur $(C^\bullet,<)$.

- si $(C^\bullet,<)$ est une catégorie ordonnée assez régulière à droite et si ρ ne vérifie que Q_1 et Q_4^d, alors $(\tilde{C}^\bullet,\propto)$ est évidemment quasi-pré-ordonnée. Mais dans ce cas on a le résultat supplémentaire suivant : si η est la relation d'équivalence canonique associée au préordre $\propto$ et si $\prec$ est l'ordre quotient, alors $\tilde{C}^\bullet/\eta$ est une catégorie quotient stricte de $\tilde{C}^\bullet$ et $(\tilde{C}^\bullet/\eta,\prec)$ est une catégorie assez régulière à droite.

Ces résultats entraînent alors que, si $(C^\bullet,<)$ est une catégorie régulière et si ρ est compatible à droite et à gauche sur $(C^\bullet,<)$, alors $(\tilde{C}^\bullet,\propto)$ est une catégorie régulière.

Enfin dans le cas où $(C^\bullet,<)$ est une catégorie sous-préinductive, sous-inductive ou un groupoïde inductif, $(\tilde{C}^\bullet,\propto)$ est encore une catégorie ou un groupoïde du même type de structure, si ρ est compatible et vérifie une condition supplémentaire adaptée à chacun des cas cités.

Une partie des résultats de ce chapitre a été résumée dans [14] .

1. Cas ordonné.

LEMME 1. *Soit* $s = (C, <) \in \Omega_0$ *et* ρ *une relation d'équivalence sur* C ; *alors* $s/\rho = (C/\rho, \propto) \in \Omega_0$ *et* $\overline{\rho} = (s/\rho, \tilde{\rho}, s) \in \Omega''$ *si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

Q_1) *Soient* $f, g, g' \in C$ *tels que* $f < g$ *et* $g \sim g' \bmod \rho$, *alors il existe* $f' \in C$ *tel que* $f' < g'$ *et* $f' \sim f \bmod \rho$.

Q_2) *Soient* $f, g, g' \in C$ *tels que* $g < f < g'$ *et* $g \sim g' \bmod \rho$, *alors on a* $f \sim g \bmod \rho$.

a) Condition nécessaire :

Soient $g, g' \in C$ tels que $g \sim g' \bmod \rho$ et soit $f \in C$. Posons $x = \underline{\tilde{\rho}}(f)$, $y = \underline{\tilde{\rho}}(g) = \underline{\tilde{\rho}}(g')$.

Si $g < f < g'$, alors par définition de $\propto$, on a $y \propto x \propto y$ et, comme la relation $\propto$ est un ordre, $y = x$; par suite Q_2 est vérifié.

Si $f < g$, alors on a $x \propto y = \underline{\tilde{\rho}}(g')$. Puisque $\overline{\rho} \in \Omega''$, il existe $f' \in C$ tel que $f' < g'$ et $\underline{\tilde{\rho}}(f') = x$; par suite Q_1 est vérifié.

b) Condition suffisante :

Evidemment, on a $x \propto x$. Soient $x, y, z \in C/\rho$ tels que $x \propto y$ et $y \propto z$; par définition de $\propto$, il existe $f \in x$, $g \in y$, $g' \in y$, $h \in z$ tels que $f < g$ et $g' < h$. D'après Q_1, il existe $f' \in x$ tels que $f' < g'$, d'où $f' < h$ et $x \propto z$.

Soient $x, y \in C/\rho$ tels que $x \propto y$ et $y \propto x$. Il existe, d'après ce qui précède, $f \in x$, $g', g \in y$ tels que $g' < f < g$. D'après Q_2 on a $y = x$, et par suite la relation $\propto$ est un ordre; $\overline{\rho} \in \Omega''$ résulte alors de Q_1.

REMARQUE. Si la relation $<$ est seulement un préordre et si seule la condition Q_1 est vérifiée alors la relation $\propto$ est encore un préordre.

PROPOSITION 1. *Si* $(C^\bullet, <)$ *est quasi-préordonnée et si les conditions* Q_1 *et* Q_4^d *(resp.* Q_4^g*) suivantes sont vérifiées, alors* $(\tilde{C}^\bullet, \propto)$ *est une catégorie quasi-préordonnée.*

Q_4^d) *(resp.* Q_4^g*)) Soient* $f, f' \in C^\bullet$ *tels que* $f' < f$; *si* $e'' \in C_0^\bullet$ *est tel que* $e'' < \alpha(f)$, $e'' \sim \alpha(f') \bmod \rho$ *(resp.* $e'' < \beta(f)$, $e'' \sim \beta(f') \bmod \rho$*),* *alors il existe* $f'' \in C^\bullet$ *tel que* $f'' < f$, $f'' \sim f' \bmod \rho$ *et* $\alpha(f'') = e''$ *(resp.* $\beta(f'') = e''$*).*

En raison du lemme 1 (remarque), $\propto$ est un préordre.

- Soient $x, y \in \tilde{C}^\bullet$ tels que $x \propto y$; alors il existe $f \in x$, $g \in y$ tels que $f < g$, d'où $\alpha(f) < \alpha(g)$, puisque O_2 est vérifié dans $(C^\bullet, <)$ (voir (2) p. 212). Les relations $\tilde{\alpha}(x) = \underline{\tilde{\rho}}[\alpha(f)]$ et $\tilde{\alpha}(y) = \underline{\tilde{\rho}}[\alpha(y)]$ entraînent alors $\tilde{\alpha}(x) \propto \tilde{\alpha}(y)$; de même on a $\tilde{\beta}(x) \propto \tilde{\beta}(y)$, et O_2 est vérifié dans $(\tilde{C}^\bullet, \propto)$.

- Soient $(y, x), (y', x') \in \tilde{C}^\bullet * \tilde{C}^\bullet$ tels que $x' \propto x$ et $y' \propto y$. $\tilde{C}^\bullet$ étant une catégorie quotient stricte de $C^\bullet$, il existe $(g, f) \in C^\bullet * C^\bullet$ tel que $\underline{\tilde{\rho}}(f) = x$, $\underline{\tilde{\rho}}(g) = y$ (voir *E*, prop. 13, III, p. 133). D'après Q_1, il existe $f' \in x'$, $g' \in y'$ tels que $f' < f$ et $g' < g$ et on a :

$$\beta(f') < \alpha(g) \text{ et } \beta(f') \sim \alpha(g') \bmod \rho.$$

D'après Q_4^d, il existe $g'' \in C^\bullet$ tel que $g'' < g$, $\alpha(g'') = \beta(f')$ et $\underline{\tilde{\rho}}(g'') = y'$. O_3 étant vérifié dans C, on a $g''.f' < g.f$ et par suite $y'.x' \propto y.x$ puisque $\underline{\tilde{\rho}}(g'.f') = y'.x'$ et $\tilde{\rho}(g.f) = y.x$; il en résulte que O_3 est vérifié dans $\tilde{C}^\bullet$.

DEFINITION 1. *Soit* $(C^\bullet, <)$ *une catégorie (quasi-)ordonnée. Soit* Q_2^o *la condition* Q_2 *restreinte à* $(C_o^\bullet, <)$ *et* Q_3 *la condition suivante :*

Q_3) *Si* $f, g \in C^\bullet$ *sont tels que :* $f < g$, $\alpha(f) \sim \alpha(g) \bmod \rho$, $\beta(f) \sim \beta(g) \bmod \rho$, *alors on a* $f \sim g \bmod \rho$.

On dira que ρ *est compatible à droite (resp. à gauche) sur* $(C^\bullet, <)$ *si les conditions* Q_1, Q_2^o, Q_3 *et* Q_4^d *(resp.* Q_4^g*) sont vérifiées. On dira que* ρ *est compatible sur* $(C^\bullet, <)$ *s'il est compatible à droite ou à gauche.*

THEOREME 1. *Si* $(C^\bullet, <)$ *est une catégorie (quasi-)ordonnée et si* ρ *est compatible sur* $(C^\bullet, <)$*, alors* $(\tilde{C}^\bullet, \propto)$ *est une catégorie ordonnée et* $((\tilde{C}^\bullet, \propto), \underline{\tilde{\rho}}, (C^\bullet, <))$ *est un foncteur ordonné.*

Montrons déjà que Q_2^o et Q_3 entraînent Q_2 :

Soient $f, g, g' \in C$ tels que $g < f < g'$ et $g \sim g' \bmod \rho$; comme ρ est bicompatible, on a $\alpha(g) \sim \alpha(g') \bmod \rho$ et $\beta(g) \sim \beta(g') \bmod \rho$. D'autre part on a $\alpha(g) < \alpha(f) < \alpha(g')$ et $\beta(g) < \beta(f) < \beta(g')$. Q_2^o entraîne

$\alpha(f) \sim \alpha(g') \bmod \rho$ et $\beta(f) \sim \beta(g') \bmod \rho$ et O_3 entraîne alors $f \sim g' \bmod \rho$; par suite Q_2 est vérifiée. Il résulte alors du lemme 1 que $\propto$ est un ordre sur $\tilde{C}^\bullet$ et de la proposition 1 que $(\tilde{C}^\bullet, \propto)$ est une catégorie quasi-ordonnée; il reste à vérifier O_4 qui résulte immédiatement de Q_3. La dernière affirmation du théorème résulte de la définition de $\propto$ et des propriétés de ρ.

REMARQUES.

1) La condition O_4 n'a pas été utilisée; mais si elle est vérifiée elle est compatible avec Q_3.

2) Les conditions Q_4^d ou Q_4^g entraînent l'existence pour certains couples $(y, x) \in \tilde{C}^\bullet * \tilde{C}^\bullet$ d'un couple $(g, f) \in C^\bullet * C^\bullet$ particulier tel que $f \in x$ et $g \in y$. Ces conditions sont donc compatibles avec la condition nécessaire et suffisante de la proposition 23 de *(3)* pour que $\tilde{C}^\bullet$ soit une catégorie quotient stricte.

3) Si $(C^\bullet, <)$ est un groupoïde ordonné, $(\tilde{C}^\bullet, \propto)$ est un groupoide ordonné.

CAS PARTICULIER. Supposons que ρ soit la relation d'équivalence associée à un sous-groupoïde $D^\bullet$ de $C^\bullet$ vérifiant la condition *(O)* de la prop. 45, III de *E*; alors on a les deux propositions suivantes :

PROPOSITION 2. *La condition Q_4^d est équivalente à la suivante :*

$Q_4^{d,s}$) *Soient $f, f' \in C^\bullet$ tels que $f' < f$; s'il existe $g \in D^\bullet$ tel que $\alpha(g) = \alpha(f')$ et $\beta(g) < \alpha(f)$, alors il existe $g' \in D^\bullet$ tel que $\alpha(g') = \beta(f')$ et $f'' < f$, avec $f'' = g' . f' . g^{-1}$.*

$Q_4^{d,s}$ entraîne évidemment Q_4^d par définition de ρ.

Réciproquement, si Q_4^d est vérifié, il existe $g_1, g'_1 \in D^\bullet$ tels que $\alpha(g_1) = \alpha(g)$, $\beta(g_1) = \beta(g)$, $\alpha(g'_1) = \beta(f')$ et $f'' < f$, avec $f'' = g'_1 . f' . g_1^{-1}$. Mais, comme $h = g_1^{-1} . g \in \alpha(f') . D^\bullet . \alpha(f')$, il existe, d'après la condition (O), $h' \in D^\bullet$ tel que $f' . h = h' . f'$, d'où $f'' = g'_1 . f' . g_1^{-1} . g . g^{-1} = g'_1 . f' . h . g^{-1} = g'_1 . h' . f' . g^{-1}$ ou encore $f'' = g' . f' . g^{-1}$ en posant $g' = g'_1 . h'$.

PROPOSITION 3. *Si $(D^\bullet, <)$ est un groupoïde ordonné semi-régulier, alors la condition Q_1 est vérifiée.*

En effet, soient $f, g, g' \in C^{\bullet}$ tels que $f < g$ et $g \sim g' \; mod \; \rho$. Alors il existe $h, h' \in D^{\bullet}$ tels que $(h', g', g, h) \in \square(C^{\bullet}; C, D)$. Par hypothèse, il existe $h_1, h'_1 \in D^{\bullet}$ tels que $h_1 < h$, $h'_1 < h'$, $\alpha(h'_1) = \beta(f)$ et $\alpha(h_1) = \alpha(f)$.

Posons $f' = h'_1 . f . h_1^{-1}$; alors on a $f' < g'$ et $f' \sim f \; mod \; \rho$.

2. Cas régulier.

LEMME 2. *Soit* $(C^{\bullet}, <)$ *une catégorie ordonnée et soient* $f \in C^{\bullet}$ *et* $e \in C^{\bullet}_o$ *tels que* $e < \alpha(f)$.

Si la classe F *des* $g \in C^{\bullet}$ *tels que* $g < f$, $\alpha(g) < e$, *admet un plus grand élément* h *tel que* $\alpha(h) = e$, *alors on a* $h = fe$ *(pseudoproduit).*

Soit $\langle f; e \rangle$ la classe des couples $(g, g') \in C^{\bullet} * C^{\bullet}$ tels que $g < f$ et $g' < e$. Soit $(g, g') \in \langle f, e \rangle$; alors on a

$$g < f \text{ et } \alpha(g) = \beta(g') < e,$$

d'où $g \in F$ et par suite $g < h$.

Il en résulte que $(g, g') < (h, e)$ dans $(C^{\bullet} * C^{\bullet}, <)$ et, comme d'autre part on a $(h, e) \in \langle f, e \rangle$, $h . e = h$ est égal au pseudoproduit fe (voir *(2)* def. 3 p. 214).

PROPOSITION 4. *Supposons que* $(C^{\bullet}, <)$ *soit une catégorie quasi-ordonnée assez régulière à droite (voir (2)) et que les conditions* Q_1 *et* Q_4^d *soient vérifiées pour* ρ. *Soit* $(\tilde{C}^{\bullet}, \propto)$ *la catégorie quasi-préordonnée quotient (voir prop. 1). Soit* η *la relation d'équivalence canonique associé au préordre* $\propto$.

Alors η *est bicompatible,* $\hat{C}^{\bullet} = \tilde{C}^{\bullet}/\eta$ *est une catégorie quotient stricte de* $\tilde{C}^{\bullet}$ *et* $(\hat{C}^{\bullet}, \prec)$ *est une catégorie quasi-ordonnée assez régulière à droite* ($\prec$ *désignant l'ordre quotient de* $\propto$ *par* η). *De plus, si* $\underline{q} = \underline{\tilde{\eta}} \circ \underline{\tilde{\rho}}$, *alors* $q = ((\hat{C}^{\bullet}, \prec), \underline{q}, (C^{\bullet}, <))$ *est un foncteur ordonné assez régulier à droite (c'est-à-dire si* $f \in C^{\bullet}$ *et* $e \in C^{\bullet}$ *sont tels que* $e < \alpha(f)$ *alors on a* $q(fe) = q(f)q(e)$ *).*

On a $x \sim y \bmod \eta$, $x, y \in \tilde{C}^{\bullet}$, si et seulement si $x \propto y$ et $y \propto x$.

Soient $x, y \in \tilde{C}^{\bullet}$ tels que $x \sim y \; mod \, \eta$; O_2 étant vérifié dans $\tilde{C}^{\bullet}$, on a $\tilde{\alpha}(x) \propto \tilde{\alpha}(y)$ et $\tilde{\alpha}(y) \propto \tilde{\alpha}(x)$, donc $\tilde{\alpha}(x) \sim \tilde{\alpha}(y) \; mod \; \eta$; de même, on a $\tilde{\beta}(x) \sim \tilde{\beta}(y) \bmod \eta$ et η est compatible avec $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$.

Soient $x, y, x', y' \in \tilde{C}^{\bullet}$ tel que $x \sim x' \bmod \eta$, $y \sim y' \bmod \eta$ et $(y, x), (y', x') \in \tilde{C}^{\bullet} * \tilde{C}^{\bullet}$; O_3 étant vérifié dans $\tilde{C}^{\bullet}$, on a $y'.x' \propto y.x$ et $y.x \propto y'.x'$ donc $y.x \sim y'.x' \bmod \eta$ et par suite η est bicompatible.

Soient $x \in \tilde{C}^{\bullet}$ et $u \in \tilde{C}^{\bullet}_0$ tels que $u \sim \alpha(x) \bmod \eta$; alors on a $u \propto \tilde{\alpha}(x)$ et $\tilde{\alpha}(x) \propto u$.

Soit $f \in C^{\bullet}$ tel que $f \in x$; il existe, d'après Q_1, $e, e' \in C^{\bullet}_0$ tels que

$$e \in u,\ e' \sim \alpha(f) \bmod \rho \text{ et } e' < e < \alpha(f).$$

Puisque $(C^{\bullet}, <)$ est assez régulière à droite, le pseudoproduit $g = fe$ existe.

D'autre part, d'après Q_4^d, il existe $f' \in C^{\bullet}$ tel que

$$f' < f,\ f' \sim f \bmod \rho \text{ et } \alpha(f') = e'.$$

D'après la proposition 4 de (2), on a $g > f'$, d'où $f > g > f'$. Il résulte, en posant $y = \underline{\tilde{\rho}}(g)$, que l'on a :

$$y \propto x \text{ et } x \propto y, \text{d'où } x \sim y \bmod \eta .$$

Comme $\alpha(g) = e$, on a $\tilde{\alpha}(g) = u$; il résulte alors du cor. 3 de la prop. 13, III de E, que $\hat{C}^{\bullet}$ est une catégorie quotient stricte de $\tilde{C}^{\bullet}$.

Montrons maintenant que $(\hat{C}^{\bullet}, \prec)$ est quasi-ordonnée.

Il est déjà immédiat que O_2 est vérifié. Remarquons ensuite que si $X, Y \in \hat{C}^{\bullet}$ sont tels que $X \prec Y$, alors pour tout $x \in X$ et tout $y \in Y$ on a $x \propto y$.

Soient alors $X, X', Y, Y' \in \hat{C}^{\bullet}$ tels que :

$$(Y, X), (Y', X') \in \hat{C}^{\bullet} * \hat{C}^{\bullet}, \text{ et } X \prec X',\ Y \prec Y'.$$

Puisque $\hat{C}^{\bullet}$ est une catégorie quotient stricte, il existe $x \in X$, $x' \in X'$, $y \in Y$, $y' \in Y'$ tels que $(y, x), (y', x') \in \tilde{C}^{\bullet} * \tilde{C}^{\bullet}$.

D'après la remarque précédente, on a

$$x \propto x' \text{ et } y \propto y' \text{ d'où } y.x \propto y'.x',$$

puisque O_3 est vérifié dans $\tilde{C}^{\bullet}$. Il en résulte que $Y.X \prec Y'.X'$ et O_3 est vérifié dans $\hat{C}^{\bullet}$.

Montrons que $(\hat{C}^{\bullet}, \prec)$ est assez régulière à droite :

Soient $X \in \hat{C}^{\bullet}$, $U \in \hat{C}_0^{\bullet}$ tels que $U \prec \hat{\alpha}(X)$, et soient $x \in X$, $u \in U$; alors on a $u \propto \tilde{\alpha}(x)$. Soit $f \in x$ et $e \in u$ tels que $e < \alpha(f)$ et soit $g = fe$; posons $y = \underline{\tilde{\rho}}(g)$ et $Y = \bar{\tilde{\eta}}(y)$; alors on a $Y \prec X$ et $\hat{\alpha}(Y) = U$. Soit $Z \in \hat{C}^{\bullet}$ tel que $Z \prec X$ et $\bar{\hat{\alpha}}(Z) \prec U$ et soit $z \in Z$; alors on a $z \propto x$ et $\tilde{\alpha}(z) \propto u$.

Il existe, d'après Q_1, $h \in z$ et $e' \in C_0^{\bullet}$ tels que

$$h < f,\ e' < e \text{ et } e' \sim \alpha(h) \bmod \rho$$

et, d'après Q_4^d, $h' \in C^{\bullet}$ tel que

$$\alpha(h') = e',\ h' < f \text{ et } h' \sim h \bmod \rho \cdot$$

Les relations $\alpha(h') < e$ et $h' < f$ entraînent $h' < g$, et par suite on a $z \propto y$ d'où $Z \prec Y$.

Le lemme 2 entraîne alors que $Y = XU$.

Il résulte immédiatement de ce qui précède que q est assez régulier à droite.

COROLLAIRE. *Si $(C^{\bullet}, <)$ est une catégorie (quasi-)ordonnée assez régulière à droite et si ρ est compatible à droite sur $(C^{\bullet}, <)$, alors $(\tilde{C}^{\bullet}, \propto)$ est une catégorie ordonnée assez régulière à droite et le foncteur*

$$((\tilde{C}^{\bullet}, \propto), \underline{\tilde{\rho}}, (C^{\bullet}, <))$$

est assez régulier à droite.

REMARQUE. Dans la proposition 4 on peut remplacer à droite par à gauche.

THEOREME 2. *Si $(C^{\bullet}, <)$ est une catégorie (quasi-) ordonnée régulière et si ρ est compatible à droite et à gauche sur $(C^{\bullet}, <)$, alors $(C^{\bullet}, \propto)$ est une catégorie ordonnée régulière.*

La proposition 4 et son corollaire montre déjà que $(C^{\bullet}, \propto)$ est une catégorie assez régulière, il ne reste donc à vérifier que l'axiome R_p (voir *(2)*) :

Soient $x, y, z, z' \in \tilde{C}^{\bullet}$ tels que $z = y.x$ et $z' \propto z$; alors il existe $(g, f) \in C^{\bullet} * C^{\bullet}$ tel que $g \in y$ et $f \in x$.

Si $h = g.f$, on a $h \in z$ et, en raison de Q_1, il existe $h' \in z'$ tel que $h' < h$. R_p étant vérifié dans $(C^{\bullet}, <)$, il existe $g', f' \in C$ tels que

$$g' < g,\ f' < f \text{ et } h' = g'.f'.$$

Soient $y' = \underline{\tilde{\rho}}\,(g')$ et $x' = \underline{\tilde{\rho}}\,(f')$; alors on a $y'.x' = \underline{\tilde{\rho}}\,(h') = z'$ et $y' \propto y$, $x' \propto x$.

COROLLAIRE. *Si $(C^{\bullet}, <)$ est un groupoïde fonctoriellement ordonné il est de même de $(\tilde{C}^{\bullet}, \propto)$.*

$(C^{\bullet}, <)$ étant régulier, $(\tilde{C}^{\bullet}, \propto)$ l'est aussi; il suffit donc de vérifier que tout élément de $\tilde{C}^{\bullet}$ plus petit qu'une unité est une unité.

Soit donc $u \in \tilde{C}^{\bullet}_{o}$ et $x \in \tilde{C}^{\bullet}$ tels que $x \propto u$. Soit $e \in C^{\bullet}_{o}$ tel que $e \in u$; il existe $f \in x$ tel que $f < e$; par suite f est une unité et x est aussi une unité.

3. Cas sous-préinductif.

PROPOSITION 5. *Soient $s = (C, <)$ une classe ordonnée sous-préinductive (voir (7)) et ρ une relation d'équivalence sur C telle que les conditions Q_1 et Q_2 soient vérifiées; alors, si la condition (PS) suivante est réalisée, $s/\rho = (C/\rho, \propto)$ est une classe ordonnée sous-préinductive et $\overline{\rho} \in \mathcal{G}'' PS$.*

PS) Soient $f, f', f'' \in C$ tels que $f' < f$, $f'' < f$ et $f' \sim f'' \bmod \rho$; alors on a $f' \cap f'' \sim f' \bmod \rho$.

On sait d'après le lemme 1 que $(C/\rho, \propto)$ est une classe ordonnée et que $\overline{\rho} \in \Omega''$.

Soient $x, x', y \in C/\rho$ tels que $x \propto y$ et $x' \propto y$.

Il existe, en raison de Q_1, $f \in x$, $f' \in x'$, $g \in y$ tels que $f < g$ et $f' < g$ et par suite $f \cap f'$ existe dans C.

Soit $t = \underline{\tilde{\rho}}\,(f \cap f')$; alors on a $t \propto x$ et $t \propto x'$.

Soit $z \in C/\rho$ tel que $z \propto x$ et $z \propto x'$. Toujours en raison de Q_1, il existe $h, h' \in z$ tels que $h < f$, $h' < f'$. h et h' étant majorés par g, $h \cap h'$ existe dans C et, compte tenu de (PS), on a $h \cap h' \in z$; les relations $h \cap h' < f$ et $h \cap h' < f'$ entraînent alors $h \cap h' < f \cap f'$, d'où $z \propto t$.

Il en résulte que $t = x \cap x'$ et, par suite, que $(C/\rho, \propto)$ est une classe sous-préinductive.

Montrons maintenant que $\overline{\rho} \in \mathcal{G}^{PS}$:

Soient $f, f', g \in C$ tels que $f < g$, $f' < g$ et soient $x = \underline{\tilde{\rho}}(f)$, $x' = \underline{\tilde{\rho}}(f')$, $y = \underline{\tilde{\rho}}(g)$, $t = \underline{\tilde{\rho}}(f \cap f')$.

Evidemment on a $x \propto y$ et $x' \propto y$; la démonstration précédente appliquée à f, f', g montre alors que

$$\underline{\tilde{\rho}}(f \cap f') = \underline{\tilde{\rho}}(f) \cap \underline{\tilde{\rho}}(f').$$

REMARQUE. Soit $(C^{\bullet}, <)$ une catégorie sous-préinductive; alors $(C_0^{\bullet}, <)$ est une classe sous-préinductive.

En effet, soient $e, e', e'' \in C_0^{\bullet}$ tels que $e' < e$ et $e'' < e$; alors $e' \cap e''$ existe dans $C^{\bullet}$ et, d'après la proposition 10 de (7), on a

$$e' \cap e'' \in C_0^{\bullet},$$

donc $e' \cap e''$ est aussi l'intersection de e et e' dans $(C_0^{\bullet}, <)$.

THEOREME 3. *Soit $(C^{\bullet}, <)$ une catégorie sous-préinductive (voir (7)) et ρ une relation d'équivalence compatible sur $(C^{\bullet}, <)$. Alors, si la condition (PS) est vérifiée dans $(C_0^{\bullet}, <)$, $(\tilde{C}^{\bullet}, \propto)$ est une catégorie sous-préinductive et $((\tilde{C}^{\bullet}, \propto), \underline{\tilde{\rho}}, (C^{\bullet}, <))$ est un foncteur sous-préinductif.*

On sait déjà (th. 1) que $(\tilde{C}^{\bullet}, \propto)$ est une catégorie ordonnée.

Montrons que (PS) est vérifiée dans $(C^{\bullet}, <)$:

Soient $f, f', f'' \in C$ tels que

$$f' < f,\ f'' < f \text{ et } f' \sim f'' \mod \rho;$$

alors on a $\alpha(f') < \alpha(f)$, $\alpha(f'') < \alpha(f)$ et $\alpha(f') \sim \alpha(f'') \mod \rho$, d'où, par hypothèse,

$\alpha(f') \cap \alpha(f'') \sim \alpha(f') \mod \rho$ et de même $\beta(f') \cap \beta(f'') \sim \beta(f') \mod \rho$.

Mais $f' \cap f''$ existe dans $(C^{\bullet}, <)$ et on a, en vertu du théorème 4 de (7),

$$\alpha(f' \cap f'') = \alpha(f') \cap \alpha(f'') \text{ et } \beta(f' \cap f'') = \beta(f') \cap \beta(f'').$$

Les conditions :

$$\alpha(f' \cap f'') \sim \alpha(f'), \beta(f' \cap f'') \sim \beta(f') \text{ et } f' \cap f'' < f'$$

entraînent alors, d'après Q_3, $f' \cap f'' \sim f'$ et par suite (PS) est vérifié dans $(C^\bullet, <)$.

Il résulte alors de la proposition précédente que $(C\ \ , <)$ est une classe sous-préinductive et que $\overline{\rho} \in \mathcal{G}''^{PS}$.

Soient $x, x', x'' \in \tilde{C}^\bullet$ tels que $x' \propto x$, $x'' \propto x$, et soient $f \in x$, $f' \in x'$, $f'' \in x''$ tels que $f' < f$ et $f'' < f$; il vient, en tenant compte du théorème 4 de (7),

$$\tilde{\alpha}(x'' \cap x') = \tilde{\underline{\rho}}(\alpha(f'' \cap f')) = \tilde{\underline{\rho}}(\alpha(f'') \cap \alpha(f')) = \tilde{\underline{\rho}}(\alpha(f'')) \cap \tilde{\underline{\rho}}((\alpha(f'))=$$
$$= \tilde{\alpha}(x'') \cap \tilde{\alpha}(x');$$

il résulte alors de ce même théorème que $(\tilde{C}^\bullet, \propto)$ est une catégorie sous-préinductive; et évidemment le foncteur $((\tilde{C}^\bullet, \propto), \tilde{\underline{\rho}}, (C^\bullet, <))$ est sous-préinductif.

4. Cas sous-inductif.

NOTATION. Si $(C, <)$ est une classe sous-inductive (voir (7)), et $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de C indexée par la classe I et majorée par g, on désignera par $\overset{g}{\bigcup} f_i$ le g-agrégat de la famille.

PROPOSITION 6. *Soient $s = (C, <)$ une classe ordonnée sous-inductive et ρ une relation d'équivalence sur C telle que les conditions Q_1 et Q_2 soient vérifiées. Alors, si la condition (SI) suivante est vérifiée, $s/\rho = (C/\rho, \propto)$ est une classe ordonnée sous-inductive et $\overline{\rho} \in \mathcal{G}''^{\cup}$.*

SI) Soient $g \in C$ et $(f_i)_{i \in I}$, $(f'_i)_{i \in I}$ deux familles d'éléments de C ayant la même classe d'indices et telles que $f_i < g$, $f'_i < g$ et

$$f_i \sim f'_i \bmod \rho \qquad (\forall\, i \in I),$$

alors on a $\overset{g}{\bigcup} f_i \sim \overset{g}{\bigcup} f'_i \bmod \rho$.

D'après le lemme 1 on sait que $(C/\rho, \propto)$ est une classe ordonnée et que $\overline{\rho} \in \Omega''$.

Soit $y \in C/\rho$ et $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de C/ρ telle que $x_i \propto y$ $(\forall\, i \in I)$; compte tenu de Q_1, il existe $g \in y$ et, pour tout i, $f_i \in x_i$ tel que $f_i < g$; donc $f = \overset{g}{\bigcup} f_i$ existe dans C.

Soit $x = \tilde{\underline{\rho}}(f)$; alors on a $x_i \propto x$ $(\forall\, i \in I)$.

Soit $z \in C/\rho$ tel que $z \propto y$ et $x_i \propto z$ $(\forall i \in I)$; toujours en raison de Q_1, il existe $h \in z$ et, pour tout i, $f'_i \in x_i$ tels que $h < g$ et $f'_i < h$ $(\forall i \in I)$; par suite $f' = \overset{g}{\bigcup} f'_i$ existe, et d'après (SI), on a $f' \sim f \bmod \rho$.

La relation $f' < h$ entraîne alors $x \propto z$ et par suite on a $x = \overset{y}{\bigcup} x_i$.

Enfin, si e_o est le plus petit élément de C, $\underline{\tilde{\rho}}\,(e_o)$ est le plus petit élément de C/ρ et $(C/\rho, \propto)$ est alors une classe sous-inductive.

Un raisonnement analogue à celui effectué dans le cas sous-pré-inductif montrerait que $\overline{\rho} \in \mathcal{J}^{\cup}$.

REMARQUE. Soit $(C^{\bullet}, <)$ une catégorie sous-inductive; alors $(C^{\bullet}_o, <)$ est une classe sous-inductive puisque, si $e \in C^{\bullet}_o$ et si $(e_i)_{i \in I}$ est une famille d'unités tels que $e_i < e$ $(\forall i \in I)$, on a $\overset{e}{\bigcup} e_i = \alpha(\overset{e}{\bigcup} e_i) \in C^{\bullet}_o$; d'autre part le plus petit élément de $(C, <)$ est toujours une unité.

THEOREME 4. *Soient $(C^{\bullet}, <)$ une catégorie sous-inductive (voir (7)) et ρ une relation d'équivalence compatible sur $(C^{\bullet}, <)$. Si la condition (PS) et la condition (SI) sont vérifiées dans $(C^{\bullet}_o, <)$, alors $(\tilde{C}^{\bullet}, \propto)$ est une catégorie sous-inductive et $((\tilde{C}^{\bullet}, \propto), \underline{\tilde{\rho}}, (C^{\bullet}, <))$ un foncteur sous-inductif.*

On sait déjà que $(\tilde{C}^{\bullet}, \propto)$ est une catégorie sous-préinductive (théorème 3).

Montrons que (SI) est vérifié dans $(C^{\bullet}, <)$:

Soient $(f_i)_{i \in I}, (f'_i)_{i \in I}$ deux familles d'éléments de $C^{\bullet}$ ayant la classe d'indices I et telles que

$$f_i < g, \; f'_i < g \text{ et } f_i \sim f'_i \bmod \rho \qquad (\forall i \in I).$$

Alors on a

$$\alpha(f_i) < \alpha(g), \; \alpha(f'_i) < \alpha(g) \text{ et } \alpha(f_i) \sim \alpha(f'_i) \bmod \rho \quad (\forall i \in I).$$

Par hypothèse sur $C^{\bullet}_o$, on a

$$\overset{\alpha(g)}{\bigcup} \alpha(f_i) \sim \overset{\alpha(g)}{\bigcup} \alpha(f'_i) \bmod \rho$$

et, par suite, en utilisant le théorème 5 de (7), on a :

$$\alpha(\overset{g}{\bigcup} f_i) \sim \alpha(\overset{g}{\bigcup} f'_i) \bmod \rho \text{ et de même } \beta(\overset{g}{\bigcup} f_i) \sim \beta(\overset{g}{\bigcup} f'_i).$$

Posons $x = \underline{\tilde{\rho}}\,(\overset{g}{\bigcup} f_i),\ x' = \underline{\tilde{\rho}}\,(\overset{g}{\bigcup} f'_i)$ et $y = \underline{\tilde{\rho}}\,(g)$; alors on a

$$x \propto y,\ x' \propto y,\ \tilde{\alpha}(x) = \tilde{\alpha}(x') \text{ et } \tilde{\beta}(x) = \tilde{\beta}(x').$$

Comme $(\tilde{C}^{\bullet}, \propto)$ est sous-préinductive, elle est s-ordonnée et par suite on a $x = x'$, donc (SI) est vérifiée dans $(C^{\bullet}, <)$.

Il en résulte que $(C, \propto)$ est une classe sous-inductive et que $\overline{\rho} \in \mathfrak{J}''S$.

Soient alors $y \in \tilde{C}^{\bullet}$, $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\tilde{C}^{\bullet}$ telle que $x_i \propto y$ $(\forall i \in I)$ et soient $g \in y$, $f_i \in x_i$ tels que $f_i < g$ $(\forall i \in I)$. En tenant compte du théorème 5 de (7), il vient :

$$\tilde{\alpha}(\overset{y}{\bigcup} x_i) = \underline{\tilde{\rho}}\,(\alpha(\overset{g}{\bigcup} f_i)) = \underline{\tilde{\rho}}\,(\overset{\alpha(g)}{\bigcup} \alpha(f_i)) = \overset{\underline{\tilde{\rho}}(\alpha(g))}{\bigcup} \underline{\tilde{\rho}}\,(\alpha(f_i)) = \overset{\tilde{\alpha}(y)}{\bigcup} \tilde{\alpha}(x_i).$$

Ce même théorème entraîne alors que $(\tilde{C}^{\bullet}, \propto)$ est une catégorie sous-inductive, et évidemment le foncteur $((\tilde{C}^{\bullet}, \propto), \underline{\tilde{\rho}}, (C^{\bullet}, <))$ est sous-inductif.

5. Cas inductif.

PROPOSITION 7. *Soient $s = (C, <)$ une classe ordonnée inductive et ρ une relation d'équivalence sur $(C, <)$ telle que les conditions Q_1 et Q_2 soient vérifiées; alors, si la condition I suivante est vérifiée, $s/\rho = (C/\rho, \propto)$ est une classe inductive et $\overline{\rho} \in \mathfrak{J}^U$.*

I) Soient $g, g' \in C$ et $(f_i)_{i \in I}, (f'_i)_{i \in I}$ deux familles d'éléments de C ayant même classe d'indices et telles que :

$$f_i < g,\ f'_i < g' \ \text{ et } f_i \sim f'_i \bmod \rho\ (\forall i \in I);$$

alors on a $\cup f_i \sim \cup f'_i \bmod \rho\ (\forall i \in I)$.

La démonstration est analogue à celle faite dans le cas sous-inductif.

REMARQUE. Il n'est pas possible de démontrer dans ce cas un théorème analogue au théorème 4 ; on a cependant le résultat suivant :

THEOREME 5. *Soient $(C^{\bullet}, <)$ un groupoïde inductif et ρ une relation d'équivalence compatible sur $(C^{\bullet}, <)$; si la condition I_S suivante est vérifiée, alors $(\tilde{C}^{\bullet}, \propto)$ est un groupoïde inductif et $\overline{\rho}$ est quasi-inductif.*

I_S) *s'énonce comme I) mais en prenant* $f_i \in C^{\bullet}$ *et* $f'_i \in C^{\bullet}_o$ ($\forall i \in I$).

On sait déjà que $(\tilde{C}^{\bullet}, \propto)$ est fonctoriellement ordonné (corollaire du th. 2). Pour la suite de la démonstration nous avons besoin du lemme suivant :

LEMME 3. *Pour qu'un groupoïde* $(C^{\bullet}, <)$ *soit un groupoïde inductif, il faut et il suffit qu'il soit fonctoriellement ordonné, que* $C^{\bullet}_o$ *soit une classe inductive pour l'ordre induit et que toute sous-classe de* $C^{\bullet}_o$ *majorée dans* $C^{\bullet}_o$ *admette un agrégat dans* $C^{\bullet}$ *(ce lemme est démontré dans (4)).*

Remarquons maintenant que si ρ_o est la relation d'équivalence induite par ρ sur $C^{\bullet}_o$, alors $C^{\bullet}_o/\rho_o$ s'identifie à $\tilde{C}^{\bullet}_o$, et que les conditions Q_1 et Q_2 sont vérifiées pour ρ_o dans $(C^{\bullet}_o, \dot{<})$ ($\dot{<}$ désignant l'ordre sur $C^{\bullet}_o$ induit par $<$). Il existe donc un ordre $\dot{\propto}$, quotient de $\dot{<}$ par ρ_o, et il est facile de voir que $\dot{\propto}$ est l'ordre induit par $\propto$ sur $\tilde{C}^{\bullet}_o$.

D'après le lemme 3, $(C^{\bullet}_o, \dot{<})$ est une classe inductive et I_S entraîne que I est vérifiée dans $(C^{\bullet}_o, \dot{<})$; il résulte alors de la proposition 7 que $(\tilde{C}^{\bullet}_o, \dot{\propto})$ est une classe inductive.

Soient $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\tilde{C}^{\bullet}_o$ majorée dans $\tilde{C}^{\bullet}_o$, alors $u = \cup u_i$ existe dans $\tilde{C}^{\bullet}_o$. Soit $x \in \tilde{C}^{\bullet}$ tel que $u_i \propto x$ ($\forall i \in I$) et soit $f \in x$; il existe, pour tout i, $f_i \in u_i$ tel que $f_i < f$ ($\forall i \in I$).

Evidemment on a :

$$f_i \sim \alpha(f_i) \text{ et } \alpha(f_i) < \alpha(f) \quad (\forall i \in I);$$

I_S) entraîne alors que $\cup f_i \sim \cup \alpha(f_i)$ et la proposition 7 que

$$\underline{\tilde{\rho}}(\cup f_i) = \underline{\tilde{\rho}}(\cup \alpha(f_i)) = u.$$

La relation $\cup f_i < f$ entraîne alors $u \propto x$, donc u est l'agrégat des u_i dans $(\tilde{C}^{\bullet}, \propto)$; le lemme 3 entraîne alors que $(\tilde{C}^{\bullet}, \propto)$ est un groupoïde inductif.

Montrons que $\overline{\rho} \in \mathcal{J}^U$:

Soient $f \in C^{\bullet}$ et $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $C^{\bullet}$ telle que $f_i < f$ ($\forall i \in I$). $\cup f_i$ existe dans $C^{\bullet}$ et on a $\alpha(\cup f_i) = \cup \alpha(f_i)$; par suite, en posant $x_i = \underline{\tilde{\rho}}(f_i)$, $x = \underline{\rho}(f)$, on a

$$\tilde{\alpha}(\underline{\tilde{\rho}}(\cup f_i)) = \underline{\tilde{\rho}}(\alpha(\cup f_i)) = \underline{\tilde{\rho}}[\cup \alpha(f_i)] = \cup \underline{\tilde{\rho}}(\alpha(f_i)) = \cup \tilde{\alpha}(x_i) =$$

$$= \tilde{\alpha}(\cup x_i).$$

Les relations $\underline{\tilde{\rho}}(\cup f_i) \propto x$ et $\cup x_i \propto x$ entraînent alors $\underline{\tilde{\rho}}(\cup f_i) = \cup \underline{\tilde{\rho}}(f_i)$ et $\overline{\rho} \in \mathcal{J}^{\cup}$.

CHAPITRE II

EXTENSIONS ET ELARGISSEMENTS DE FONCTEURS ORDONNES

Ce chapitre débute par quelques rappels sur la théorie des extensions et des élargissements de foncteurs :

Si $H^\bullet$ et $K^\bullet$ sont des catégories, $p=(K^\bullet, \underline{p}, H^\bullet)$ un foncteur tel que p_γ soit bien fidèle et F une sous-classe p-admissible de $K^\bullet$, on définit l'extension canonique $(F, \overline{H}^\bullet, \tilde{p})$ du couple (F,p), où $\tilde{p} = (K^\bullet, \underline{\tilde{p}}, \tilde{H}^\bullet)$ est un foncteur et $\overline{H}^\bullet$ une sous-catégorie de $\tilde{H}^\bullet$ équivalente à $H^\bullet$, ainsi que l'élargissement $\check{p} = (K^\bullet, \underline{\check{p}}, \check{H}^\bullet)$ dans le cas où $F \subset K^\bullet_\gamma$. Si $F = K^\bullet_\gamma . p(H^\bullet_o)$ (resp. $F = \overline{\underline{p}(H^\bullet_\gamma)}$), alors l'élargissement $\check{p}$ de (F,p) est appelé élargissement maximal (resp. minimal). Ces élargissements sont canoniques vis à vis d'une catégorie de quatuors (théorème 1).

Dans la suite de ce chapitre, on propose de chercher des conditions suffisantes sur (F,p) pour que, si $(H^\bullet, <)$ et $(K^\bullet, <)$ sont des catégories $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-structurées et $p=((K^\bullet, <), \underline{p}, (H^\bullet, <))$ un foncteur structuré, il existe un ordre $\propto$ sur $\tilde{H}^\bullet$ tel que $(\tilde{H}^\bullet, \propto)$ soit une catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-structurée, $\tilde{p}$ un foncteur structuré, et l'équivalence entre $(H^\bullet, <)$ et $(\overline{H}^\bullet, \propto)$ une équivalence structurée.

Dans les paragraphes 2) (resp. 3)), on étudie le cas où $(H^\bullet, <)$ et $(K^\bullet, <)$ sont des catégories ordonnées (resp. régulières) et où p est un foncteur ordonné.

Dans 4) on utilise certains résultats de 3) pour approfondir le cas des élargissements ordonnés déjà étudiés dans 3); on montre alors que, moyennant quelques hypothèses supplémentaires, l'élargissement maximal ordonné de p est canonique vis à vis d'une catégorie de quatuors de foncteurs ordonnés. Le théorème 1 est utilisé pour la démonstration de ce résultat.

Les paragraphes 5, 6, 7, 8 sont consacrés à l'étude des cas où $(H^\bullet, <)$ et $(K^\bullet, <)$ sont des groupoïdes ordonnés réguliers, des catégories sous-préinductives et sous-inductives, des groupoïdes inductifs et p un foncteur structuré correspondant.

Dans chacun des paragraphes, deux théorèmes, un pour les extensions, un pour les élargissements, résument les résultats obtenus.

Une partie des résultats de ce chapitre a été résumée dans [15] et une première rédaction concernant le cas des extensions a été faite dans [17].

1. Rappels concernant les extensions et les élargissements de foncteurs.
(voir E, chap. V, paragraphe 3) et ((5) paragraphe 4).

Soit $\mathfrak{F}'$ la sous-classe de $\mathfrak{F}$ formée des foncteurs p tels que p_γ soit bien fidèle.

Soit $\mathfrak{F}''$ (resp. $\mathfrak{F}''_s$) la sous-classe de $\mathfrak{F}'$ formée des foncteurs p tels que p_γ soit un foncteur d'hypermorphismes (resp. un foncteur d'hypermorphismes saturé) (voir déf. 5 et déf. 20 chap. II de E).

A. EXTENSIONS.

Soit (F, p) un couple, où $p = (K^\bullet, \underline{p}, H^\bullet)$ est un foncteur et F une sous-classe de K, tel que les *hypothèses* (H_X) suivantes soient satisfaites :

1) $p \in \mathfrak{F}'$,

2) F est p-admissible, c'est-à-dire F vérifie les deux propriétés suivantes :

a) $\alpha(F) = p(H^\bullet_o) \subset F$ et $F.p(H^\bullet_\gamma) \subset F$;

b) si $f \in F$, la condition $f.g_1 = f.g_2$ où $g_i \in p(H^\cdot)$ entraîne $g_1 = g_2$;

alors il existe un foncteur $\tilde{p} = (K^\bullet, \underline{\tilde{p}}, H^\bullet)$ ayant les propriétés suivantes :

1) $\tilde{p} \in \mathfrak{F}'$,

2) il existe une équivalence $\sigma = (\overline{H}^\bullet, \underline{\sigma}, H^\bullet)$, où $\overline{H}^\bullet$ est une sous-catégorie pleine de $\tilde{H}^\bullet$, et $p = \tilde{p}.\sigma$,

3) $\tilde{H}^\bullet$ est une catégorie à $\overline{H}^\bullet$-éjections,

4) si $\overline{F}$ est la sous-classe des $(\tilde{H}^\bullet, \overline{H}^\bullet)$-éjecteurs et si $s \in H^\bullet_o$ alors la restriction de $\underline{\tilde{p}}$ à $\overline{F}.s$ est une bijection sur $F.\underline{\tilde{p}}(s)$,

5) si p est fidèle, alors $\tilde{p}$ est aussi fidèle.

Le triplet $(F, \overline{H}^\bullet, \tilde{p})$ s'appelle l'extension canonique du couple (F, p) et se note $X(F, p)$.

(Pour le caractère canonique de $X(F, p)$ voir les articles cités).

REMARQUE. On appellera propriétés (P) de $X(F, p)$ les propriétés 1), 2), 3) et 4).

B. ELARGISSEMENTS.

Supposons que $F \subset K^{\bullet}_{\gamma}$; alors la condition b) sur F est toujours vérifiée et toute classe F p-admissible contient $F_1 = p(H^{\bullet}_{\gamma})$ et est contenue dans $F_2 = K^{\bullet}_{\gamma} . p(H^{\bullet}_{o})$.

Soit $\check{H}^{\bullet}$ la catégorie image de $\tilde{H}^{\bullet}$ par la bijection $\underline{\chi}$:

- si $x \in \overline{H}^{\bullet}$, alors $x = \underline{\sigma}(h)$ avec $h \in H^{\bullet}$ et $\underline{\chi}(x) = h$,
- si $x \in \tilde{H}^{\bullet}$ et $x \notin \overline{H}^{\bullet}$, alors $\underline{\chi}(x) = x$.

Soit

$$\check{p} = \tilde{p} . \underline{\chi}^{-1} ,$$

alors $\check{p}$ *est appelé un élargissement de* (F, p).

Soit $m(p)$ et $M(p)$ les élargissements $(K^{\bullet}, \underline{\check{p}}_1, \check{H}^{\bullet}_1)$ et $(K^{\bullet}, \underline{\check{p}}_2, \check{H}^{\bullet}_2)$ de (F_1, p) et (F_2, p) respectivement; alors $m(p)$ et $M(p)$ *sont appelés respectivement élargissement minimal et maximal de* p, *et on a*

$$m(p) \in \mathfrak{F}'' \text{ et } M(p) \in \mathfrak{F}''_{S} .$$

Rappelons le théorème suivant : (voir E, th. 17, V p. 318)

THEOREME 1. $\square\square(\mathfrak{F};\mathfrak{F},\mathfrak{F}')$ *est une catégorie à* $\square(\mathfrak{F};\mathfrak{F},\mathfrak{F}'')$*-projections et à* $\square(\mathfrak{F};\mathfrak{F},\mathfrak{F}''_{S})$*-projections.*

($\mathfrak{F}'$ étant identifié à la classe des unités de $\square\square(\mathfrak{F};\mathfrak{F},\mathfrak{F}')$.

Si on pose, pour tout $p \in \mathfrak{F}'$,

$$\mu_m(p) = (m(p), K^{\bullet}, (\check{H}_1, \iota_1, H^{\bullet}), p),$$
$$\mu_M(p) = (M(p), K^{\bullet}, (\check{H}_2, \iota_2, H^{\bullet}), p),$$

alors μ_m est une $(\square(\mathfrak{F};\mathfrak{F},\mathfrak{F}''), \square\square(\mathfrak{F};\mathfrak{F},\mathfrak{F}'))$-projection naturalisée et μ_M une $(\square(\mathfrak{F};\mathfrak{F},\mathfrak{F}_S), \square\square(\mathfrak{F};\mathfrak{F},\mathfrak{F}'))$-projection naturalisée (voir E, déf. 18, III, p. 144).

REMARQUE. On appellera *hypothèse* (H_L) *sur* (F, p) les hypothèses (H_X) avec en plus $F \subset K^{\bullet}_{\gamma}$.

C. CONSTRUCTION DE $X(F, p)$.

Soit $\boxminus(F, p)$ la classe des couples (Q, h) où $h \in H^{\bullet}$ et

$$Q = (k, f', f, \underline{p}(h)) \in \square(K^{\bullet}; F).$$

NOTATION. Dans toute la suite, sauf indication contraire, la lettre Q désignera le quatuor $(k, f', f, p(h))$ et, si Q et h sont affectés d'un indice, alors k, f, f' seront affectés du même indice.

$\boxminus(F, p)$ est une catégorie pour la loi de composition $\boxminus$ définie par :

$$(Q_2, h_2) \boxminus (Q_1, h_1) = (Q, h)$$

si, et seulement si, $f'_1 = f_2$ et $\alpha(h_2) = \beta(h_1)$, et on a

$$h = h_2 . h_1,\ k = k_2 . k_1,\ f' = f'_2,\ f = f_1.$$

NOTATION. Dans $\boxminus(F, p)$ les applications source et but seront notées $\alpha^{\boxminus}, \beta^{\boxminus}$ et $k^{\boxminus}$ désignera le quatuor $(\beta(k), k, k, \alpha(k))$. On a

$$\alpha^{\boxminus}(Q, h) = (f^{\boxminus}, \alpha(h)),\ \beta(Q, h) = (f^{\boxminus}, \beta(h)).$$

Dans la suite on posera généralement $\boxminus(F, p) = \mathcal{L}^{\boxminus}$.

Soit $\mathcal{T}$ la sous-classe de $\mathcal{L}$ formée des éléments (Q, h) tels que $h \in H^{\bullet}_{\gamma}$ et $k \in K^{\bullet}_{o}$. Alors $\mathcal{T}$ définit un sous-groupoïde $\mathcal{T}^{\boxminus}$ de $\mathcal{L}^{\boxminus}$ qui contient toutes les unités et qui vérifie la condition (O) de la proposition 45, II de E.

Soit ρ la relation d'équivalence associée à $\mathcal{T}$ (voir E, th. 12, III); alors $\tilde{H}^{\bullet} = \mathcal{L}^{\boxminus}/\rho$.

Rappelons que ρ est défini de la manière suivante :

$$(Q, h) \sim (Q_1, h_1) \bmod \rho \text{ si, et seulement si, } k_1 = k$$

et il existe $g, g' \in H^{\bullet}_{\gamma}$ tels que :

$$1)\ (h, g', g, h_1) \in \square(H^{\bullet}; H^{\bullet}_{\gamma}),\ 2)\ f'_1 = f' . \underline{p}(g'),\ 3)\ f_1 = f . \underline{p}(g).$$

$\underline{\tilde{p}}$ est défini par $\underline{\tilde{p}}((Q, h) \bmod \rho) = k$ et $\underline{\sigma}$ par $\underline{\sigma}(h) = (p(h)^{\square}, h) \bmod \rho$.

La classe $\bar{F}$ est la classe des éléments $(R, e) \bmod \rho \in \tilde{H}^{\bullet}$ où

$$R = (f, f, p(e), p(e)),\ e \in H^{\bullet}_{o} \text{ et } f \in F.$$

D. ETUDE DE $\mathcal{L}^{\boxminus}_{\gamma}$.

PROPOSITION 1. *Le groupoïde* $\mathcal{L}^{\boxminus}_{\gamma}$ *est formé par les éléments* $(Q, h) \in \mathcal{L}^{\boxminus}$ *tels que* $h \in H^{\bullet}_{\gamma}$ *et* $k \in K^{\bullet}_{\gamma}$ *; il est saturé pour* ρ *et on a* $\tilde{\rho}(\mathcal{L}^{\boxminus}_{\gamma}) = \tilde{H}^{\bullet}_{\gamma}$.

Les deux premières affirmations sont évidentes et on a

$$\tilde{\rho}(\mathcal{L}^{\boxminus}_{\gamma}) \subset \tilde{H}^{\bullet}_{\gamma}\,.$$

Soit $x \in \tilde{H}^{\bullet}_{\gamma}$ et soit $t \in x$; alors il existe $t' \in x$ tel que $\alpha(t') = \beta(t)$ et $\beta(t') = \alpha(t)$; il en résulte que $t \boxminus t'$ et $t' \boxminus t$ sont des éléments de $\mathcal{L}^{\boxminus}$ qui ont mêmes unités à droite et à gauche et qui sont équivalents $mod\ \rho$ à cette unité.

Soit (Q, h) un tel élément; nécessairement on a $f' = f$, $k = \beta(f)$ et $f.\underline{p}(h) = f$, d'où $\underline{p}(h) = \alpha(f)$. D'autre part il existe $g, g' \in H^{\bullet}_{\gamma}$ tels que $\bar{h}.g = g'$; donc $\bar{h} \in H^{\bullet}_{\gamma}$, et par suite on a $h \in H^{\bullet}_{o}$, puisque p_{γ} est bien fidèle. Il en résulte que $(Q, h) \in \mathcal{L}^{\boxminus}_{o}$, donc t est inversible et on a :

$$\tilde{\rho}(\mathcal{L}^{\boxminus}_{\gamma}) = \tilde{H}^{\bullet}_{\gamma}\,.$$

REMARQUE. Si $F \subset K^{\bullet}_{\gamma}$ alors $(Q, h) \in \mathcal{L}^{\boxminus}_{\gamma}$ si et seulement si $h \in H^{\bullet}_{\gamma}$.

Soit $(Q, e) \in \mathcal{L}^{\boxminus}$ tel que $e \in H^{\bullet}_{o}$ et $k \in K^{\bullet}_{\gamma}$, alors (Q, e) est complètement déterminé par le triplet (k, f, e) où $k \in K^{\bullet}_{\gamma}$, $e \in H^{\bullet}_{o}$, $k, k.f \in F$, $\beta(f) = \alpha(k)$ et $\underline{p}(e) = \alpha(f)$.

Soit $\mathfrak{N}$ *la classe de ces éléments.*

Dans la suite on identifiera tout élément de $\mathfrak{N}$ différent d'une unité avec le triplet qui le détermine.

$\mathfrak{N}$ définit un sous-groupoïde $\mathfrak{N}^{\boxminus}$ de $\mathcal{L}^{\boxminus}_{\gamma}$ contenant $\mathcal{L}^{\boxminus}_{o}$; la restriction de la loi $\boxminus$ à $\mathfrak{N}^{\boxminus}$ s'écrit avec cette nouvelle notation :

$$(k_1, f_1, e_1) \boxminus (k, f, e) = (k_1.k, f, e),$$

si et seulement si $e = e_1$ et $f_1 = k.f$.

PROPOSITION 2. *Soit* $\tilde{\rho}'$ *la restriction* $\tilde{\rho}$ *à* $\mathfrak{N}^{\boxminus}$. *Alors on a* $\tilde{\rho}'(\mathfrak{N}^{\boxminus}) = \tilde{H}^{\bullet}_{\gamma}$ *et* $\tilde{\rho}'$ *définit* $\tilde{H}^{\bullet}_{\gamma}$ *comme quotient strict de* $\mathfrak{N}^{\boxminus}$.

Montrons que tout élément de $\mathcal{L}^{\boxminus}_{\gamma}$ est équivalent $mod\ \rho$ à un élément de $\mathfrak{N}^{\boxminus}$:

En effet, soit $(Q, h) \in \mathcal{L}^{\boxminus}_{\gamma}$; alors $h \in H^{\bullet}_{\gamma}$ et $k \in K^{\bullet}_{\gamma}$. Soit

$$R = (k, f'.\underline{p}(h), f, \underline{p}(\alpha(h))).$$

Puisque $f'.\underline{p}(h) = k.f$, $R \in \square K^{\bullet}$ et, comme $f'.\underline{p}(h) \in F$, on a

$$(R,\ \alpha(h)) \in \mathcal{L}^{\ominus};$$

mais $(R, \alpha(h)) = (k, f, \alpha(h))$ et $(R, \alpha(h)) \sim (Q, h) \bmod \rho$; il en résulte que $\tilde{\rho}'(\mathcal{N}^{\ominus}) = \tilde{H}^{\bullet}_{\gamma}$.

Soit $(k, f, e) \in \mathcal{N}^{\ominus}$ et $(f_1^{\ominus}, e_1) \in \mathcal{L}_o$ tels que $(f_1^{\ominus}, e_1) \sim (f^{\ominus}, e) \bmod \rho$; alors on a $(k, f_1, e_1) \in \mathcal{N}$, puisque $k.f_1 = (k.f).\underline{p}(g) \in F$, et il est clair que

$$(k, f_1, e_1) \sim (k, f, e) \bmod \rho.$$

Donc $\tilde{\rho}'$ définit $\tilde{H}^{\bullet}_{\gamma}$ comme quotient strict de $\mathcal{N}^{\ominus}$ (voir *(3)* prop. 23).

REMARQUE.

1) Si ρ' est la relation d'équivalence induite par ρ sur $\mathcal{N}^{\ominus}$, alors $\mathcal{N}^{\ominus}/\rho'$ est un groupoïde quotient strict de $\mathcal{N}^{\ominus}$ qui s'identifie à $\tilde{H}^{\bullet}_{\gamma}$. On pourra donc, dans le cas où $H^{\bullet}$ et $K^{\bullet}$ sont des groupoïdes, utiliser $\mathcal{N}^{\ominus}$ au lieu de $\mathcal{L}^{\ominus}$ pour construire $\tilde{H}^{\bullet}$; $\underline{\tilde{p}}$ et $\underline{\sigma}$ sont alors définis respectivement par :

$$\underline{\tilde{p}}((k,\ f,\ e) \bmod \rho) = k$$

et

$$\underline{\sigma}(h) = (\underline{p}(h), \underline{p}(\alpha(h)), \alpha(h)) \bmod \rho.$$

2) Dans la suite on appellera :

$$(R, \alpha(h)) = (k, f, \alpha(h)).$$

l'équivalent naturel de $(Q,\ h) \in \mathcal{L}^{\ominus}_{\gamma}$.

Dans toute la suite de ce chapitre nous supposons donné un couple (F, p) *vérifiant les hypothèses* H_X *dans le cas des extensions et* H_L *dans le cas des élargissements, et nous utiliserons les notations de ce paragraphe 1.*

2. Cas ordonné.

Dans toute la suite de ce paragraphe nous supposons que $(H^{\bullet}, <)$ *et* $(K^{\bullet}, <)$ *sont des catégories ordonnées et que* $p = ((K^{\bullet}, <), \underline{p}, (H^{\bullet}, <))$ *est un foncteur ordonné.*

A. EXTENSIONS.

PROPOSITION 3. *Soit* $<$ *la relation suivante dans* $\mathcal{L}$:

$$(Q_1, h_1) < (Q, h) \text{ si, et seulement si,}$$

$$h_1 < h,\ k_1 < k,\ f_1 < f,\ f'_1 < f'.$$

Alors $(\mathcal{L}^{\boxminus}, <)$ *est une catégorie ordonnée.*

La vérification des axiomes est immédiate.

PROPOSITION 4. *Si le groupoïde* $(H^{\bullet}_{\gamma}, <)$ *est un groupoïde semi-régulier la condition* Q_1 *est vérifiée pour* ρ *dans* $(\mathcal{L}^{\boxminus}, <)$.

Il suffit de montrer, compte tenu de la proposition 3. I, que $\mathcal{T}$ est un groupoïde semi-régulier :

Soit $(Q, g) \in \mathcal{T}$ avec $Q = (e, f', f, \underline{p}(g))$, $e \in K^{\bullet}_o$ et $g \in H^{\bullet}_{\gamma}$, et soit $(f'_1, e_1) \in \mathcal{L}_o$ tel que $(f'_1, e_1) < (f', \beta(g))$. Il existe, par hypothèse, $g_1 \in H^{\bullet}_{\gamma}$ tel que $\beta(g_1) = e_1$ et $g_1 < g$. Soit $f_1 = f'_1 . \underline{p}(g_1)$; alors $f_1 \in F$ et par suite $(Q_1, g_1) \in \mathcal{T}$ avec $Q_1 = (\beta(f_1), f'_1, f_1, \underline{p}(g_1))$. Comme p est ordonné, on a $\underline{p}(g_1) < \underline{p}(g)$, d'où $f'_1 . \underline{p}(g_1) < f' . \underline{p}(g)$ et, comme $f' . p(g) = f$, on a $f_1 < f$. Par suite $(Q_1, g_1) < (Q, g)$ et, puisque $\beta^{\boxminus}(Q_1, g_1) = (f'^{\boxminus}_1, e_1)$, $\mathcal{T}$ est semi-régulier.

PROPOSITION 5. *Si* p *est fidèle, la condition* Q_3 *est vérifiée pour* ρ *dans* $(\mathcal{L}, <)$.

Soient $(Q_i, h_i) \in \mathcal{L}^{\boxminus}$, $i = 1, 2$, tels que :

$$(Q_1, h_1) < (Q_2, h_2),\ \alpha^{\boxminus}(Q_1, h_1) \sim \alpha^{\boxminus}(Q_2, h_2) \bmod \rho$$

$$\text{et } \beta^{\boxminus}(Q_1, h_1) \sim \beta^{\boxminus}(Q_2, h_2) \bmod \rho.$$

Alors il existe $g, g' \in H^{\bullet}_{\gamma}$ tels que :

$$\alpha(g') = \beta(h_1),\ \beta(g') = \beta(h_2),\ \alpha(g) = \alpha(h_1),\ \beta(g) = \alpha(h_2)$$

$$(1) \qquad f'_1 = f'_2 . \underline{p}(g'),\ f_1 = f_2 . \underline{p}(g).$$

D'autre part, les relations

$$k_1 < k_2,\ \alpha(k_1) = \alpha(k_2) \text{ et } \beta(k_1) = \beta(k_2)$$

entraînent $k_1 = k_2$.

Calculons

$$f'_2 . \underline{p}(g' . h_1) = f'_2 . \underline{p}(g') . \underline{p}(h_1) = f'_1 . \underline{p}(h_1) = k_1 . f_1$$
$$= k_1 . f_2 . \underline{p}(g) = f'_2 . \underline{p}(h_2) . \underline{p}(g) = f'_2 . \underline{p}(h_2 . g).$$

Compte tenu de la propriété 2) de F, on a $\underline{p}(g'.h_1) = \underline{p}(h_2.g)$ et, p étant fidèle, on a $g'.h_1 = h_2.g$, donc $(h_2, g', g, h_1) \in \square(H^\bullet, H^\bullet_\gamma)$; les égalités *(1)* entraînent alors :

$$(Q_1, h_1) \sim (Q_2, h_2) \, mod \, \rho .$$

DEFINITION 1. *Une sous-classe F p-admissible de K sera dite p-ordonnée-admissible à droite (en abrégé p.o.a.d.) si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*

$\mathcal{F}_2$) Soient $f, f', f'' \in F$, $g \in H^\bullet_\gamma$ et $e'' \in H^\bullet_o$ tels que

$\underline{p}(e'') = \alpha(f''), f' = f.p(g), f' < f'' < f$ et $\alpha(g) < e'' < \beta(g)$;

alors il existe $g' \in H^\bullet_\gamma$ tel que

$$\alpha(g') = e'', \ \beta(g') = \beta(g) \text{ et } f'' = f.\underline{p}(g').$$

$\mathcal{F}^d_4$) Soient $(Q_i, h_i) \in \mathcal{L}^{\boxminus}$, $i = 1, 2$, tels que $(Q_1, h_1) < (Q_2, h_2)$. Si $g \in H^\bullet_\gamma$ est tel que $\beta(g) = \alpha(h_1), f_1.\underline{p}(g) < f_2$, $\alpha(g) < \alpha(h_2)$, il existe $g' \in H^\bullet_\gamma$ tel que

$$\beta(g') = \beta(h_1), \ f'_1.\underline{p}(g') < f'_2 \text{ et } g'^{-1}.h_1.g < h_2 .$$

On définirait de même la notion de classe *p-ordonnée-admissible à gauche* (p.o.a.g.) en intervertissant dans la définition précédente g et g', et de classe *p-ordonnée-admissible* par p.o.a.d. *ou* p.o.a.g.

PROPOSITION 6. *Si F est p.o.a.d. (resp. p.o.a.g.), alors les conditions Q^o_2 et Q^d_4 (resp. Q^g_4) sont vérifiées pour ρ dans $(\mathcal{L}, <)$.*

$\mathcal{F}_2$ entraîne immédiatement Q^o_2, et il est clair, en utilisant la définition de ρ à l'aide de $\mathcal{F}$, que $\mathcal{F}^d_4$ entraîne Q^d_4 .

PROPOSITION 7. *Si F est p.o.a., $(H^\bullet_\gamma, <)$ semi-régulier et p fidèle, alors ρ est compatible sur $(\mathcal{L}^{\boxminus}, <)$.*

Cette proposition résulte immédiatement des prop. 4, 5, 6 et de la définition 1.1. I.

CONSEQUENCE. Le théorème 1.I entraîne alors que $(\tilde{H}^\bullet, \propto)$ est une catégorie ordonnée.

PROPOSITION 8. *Supposons que* ρ *soit compatible sur* $(\mathcal{L}^{\boxminus}, <)$; *alors si* p_γ *vérifie la condition suivante :*

$\mathcal{P}$) *Si* $g \in H^{\bullet}_{\gamma}$, $e \in H^{\bullet}_{o}$ *sont tels que* $\alpha(g) < e$ *et* $\underline{p}(g) < \underline{p}(e)$, *on a* $g < e$,

$\sigma = ((\overline{H}^{\bullet}, \propto), \sigma, (H^{\bullet}, <))$ *est une équivalence de classes ordonnées.*

En effet, si $h < h'$, alors $\underline{p}(h) < \underline{p}(h')$ et par suite

$$(\underline{p}(h)^{\boxminus}, h) < (\underline{p}(h')^{\boxminus}, h'), \text{d'où } \underline{\sigma}(h) \propto \underline{\sigma}(h').$$

Réciproquement, si $\underline{\sigma}(h) \propto \underline{\sigma}(h')$, il existe, en tenant compte de la condition Q_1, $(Q_1, h_1) \in \mathcal{L}^{\boxminus}$ tel que :

$$(Q_1, h_1) \sim (\underline{p}(h)^{\boxminus}, h) \bmod \rho \text{ et } (Q_1, h_1) < (\underline{p}(h')^{\boxminus}, h').$$

Il existe donc $g, g' \in H^{\bullet}_{\gamma}$ tels que :

$$(h, g', g, h_1) \in \square(H^{\bullet}; H^{\bullet}_{\gamma}), f'_1 = \underline{p}(g), f_1 = \underline{p}(g),$$
$$\underline{p}(g') < \underline{p}(\beta(h')), \underline{p}(g) < \underline{p}(\alpha(h')).$$

On a aussi

$$h_1 < h', \alpha(g') = \beta(h_1) < \beta(h'), \alpha(g) = \alpha(h_1) < \alpha(h').$$

Par suite $\mathcal{P}$ entraîne :

$$g' < \beta(h') \text{ et } g < \alpha(h'), \text{d'où } h = g'.h_1.g^{-1} < h'.$$

En conclusion, on a le théorème suivant :

THEOREME 2.

- *Si* $(H^{\bullet}, <)$ *et* $(K^{\bullet}, <)$ *sont des catégories ordonnées*
- *Si* $(H^{\bullet}_{\gamma}, <)$ *est semi-régulier*
- *Si* p *est ordonné fidèle et si* p_γ *vérifie* $\mathcal{P}$.
- *Si* F *est p.o.a.*

alors

- $(\tilde{H}^{\bullet}, \propto)$ *est une catégorie ordonnée*
- $\tilde{p}$ *est ordonné fidèle et* $\tilde{p}_\gamma$ *vérifie* $\mathcal{P}$
- σ *est une équivalence de catégories ordonnées.*

La 1re et la 3ème affirmation résultent des propositions 7 et 8 et il est clair que $\tilde{p}$ est ordonné.

Il reste à montrer que $\tilde{p}_\gamma$ vérifie $\mathcal{P}$:

Soit $x \in \tilde{H}^\bullet_\gamma$ et $u \in \tilde{H}^\bullet_o$ tels que :

$$\tilde{\alpha}(x) \propto u \text{ et } \underline{\tilde{p}}(x) \propto \underline{\tilde{p}}(u).$$

Soit $(f_1^\boxminus, e_1) \in u$; alors il existe $(f^\boxminus, e) \in \tilde{\alpha}(x)$ tel que $(f^\boxminus, e) < (f_1^\boxminus, e_1)$ et, d'après la proposition 2, il existe $k \in K^\bullet$ tel que

$$(k, f, e) \in \mathfrak{N}^\boxminus \text{ et } (k, f, e) \in x.$$

Mais $\underline{\tilde{p}}(x) = k$ et $\underline{\tilde{p}}(u) = \beta(f_1)$, d'où $k < \beta(f_1)$ et $(k, f, e) < (f_1^\boxminus, e_1)$.

Cette relation entraîne $x \propto u$ et par suite $\tilde{p}_\gamma$ vérifie $\mathcal{P}$.

B. ELARGISSEMENT.

LEMME 1. *Soit $(C^\bullet, <)$ un groupoïde ordonné régulier et soient*

$$e, e', e'' \in C^\bullet_o, \ g \in C^\bullet$$

tels que

$$e < e'' < e', \ \alpha(g) = e, \ \beta(g) = e' \text{ et } g < e' ;$$

alors il existe $g' \in C^\bullet$ tel que $\alpha(g') = e''$, $\beta(g') = e'$ et $g' < e'$.

En effet, puisque $e'' < e'$, le pseudoproduit $g' = e' \breve{e}''$ existe et on a $\alpha(g') = e''$, $g' < e'$; d'autre part les relations $\alpha(g) = e < e''$ et $g < e'$ entraînent $g < g'$, d'où $\beta(g) = e' < \beta(g')$ et, comme $\beta(g') < e'$, on a $e' = \beta(g')$.

THEOREME 3.

- Si $(H^\bullet, <)$ et $(K^\bullet, <)$ sont des catégories ordonnées

- Si $(H^\bullet_\gamma, <)$ est un groupoïde régulier et $(K^\bullet_\gamma, <)$ un groupoïde ordonné

- Si p est ordonné et si p_γ vérifie $\mathcal{P}$

alors

- $(\tilde{H}^\bullet, \propto)$ est une catégorie ordonnée

- $\tilde{p}$ est ordonné et $\tilde{p}_\gamma$ vérifie $\mathcal{P}$

- σ est une équivalence de catégories ordonnées.

REMARQUE PRELIMINAIRE . Considérons la situation suivante :

Soient $f, f_i \in K^\bullet_\gamma$, $i = 1, 2$, $g \in H^\bullet_\gamma$ et $e \in H^\bullet_o$ tels que

$$f_i < f,\ \underline{p}(e) = \alpha(f),\ \beta(g) < e \text{ et } f_1 = f_2 . \underline{p}(g);$$

alors on a $g < e$.

En effet, on a $\underline{p}(g) = f_2^{-1} . f_1$, et les relations $f_2^{-1} < f^{-1}, f_1 < f$ entraînent $\underline{p}(g) < \alpha(f) = \underline{p}(e)$; comme $\beta(g) < e$, la condition $\mathcal{P}$ entraîne $g < e$.

Montrons que la condition Q_3 est vérifiée par ρ dans $(\mathcal{L}^{\mathrm{B}}, <)$:

En effet, avec les notations et les hypothèses de la proposition 5, on a :

$$f'_1 = f'_2 . \underline{p}(g'),\ f_1 = f_2 . \underline{p}(g),\ f'_1 < f'_2,\ f_1 < f_2,$$
$$\beta(g') = \beta(h_2),\ \beta(g) = \alpha(h_2)$$

et $$\underline{p}[\beta(h_2)] = \alpha(f'_2),\ \underline{p}[\alpha(h_2)] = \alpha(f_2).$$

Il résulte alors de la remarque préliminaire que $g' < \beta(h_2)$ et $g < \alpha(h_2)$, d'où $h'_1 = g' . h_1 . g^{-1} < h_2$, puisque $h_1 < h_2$.

Les relations

$$\alpha(h'_1) = \alpha(h_2),\ \beta(h'_1) = \beta(h_2),\ h'_1 < h_2$$

entraînent alors $h'_1 = h_2$, et par suite $(h_2, g', g, h_1) \in \square(H^{\bullet}; H^{\bullet}_{\gamma})$. Comme par ailleurs $k_2 = k_1$, on a $(Q_2, h_2) \sim (Q_1, h_1) \bmod \rho$ et la condition Q_3 est vérifiée.

Reprenons les hypothèses de la condition $\mathcal{F}_4^d$ avec les mêmes notations; alors, en vertu de la remarque préliminaire, on a $g < \alpha(h_1)$ et par suite $h_1 . g < h_2$.

Il suffit alors de prendre $g' = \beta(h_1)$ pour que la condition soit vérifiée.

Reprenons les hypothèses de la condition $\mathcal{F}_2$ avec les mêmes notations et posons $\beta(g) = e'$, $\alpha(g) = e$; alors on a $e < e'' < e'$ et, toujours en raison de la remarque préliminaire, $g < e'$. Le lemme 1 entraîne alors l'existence de $g' \in H^{\bullet}_{\gamma}$ tel que :

$$\alpha(g') = e'',\ \beta(g') = e' \text{ et } g' < e'.$$

Soit $f_1 = f'' . p(g'^{-1})$. Les relations $g'^{-1} < e'$ et $f'' < f$ entraînent $f_1 < f$ et par suite $f_1 = f$, puisque $\alpha(f_1) = \alpha(f)$ et $\beta(f_1) = \beta(f)$.

Il en résulte que $f'' = f.p(g')$ et la condition $\mathcal{F}_2$ est vérifiée.

Par conséquent toute classe F p-admissible est p.o.a.d. et aussi p.o.a.g.

Il résulte alors des propositions 4 et 6 et du fait que Q_3 est vérifiée que ρ est compatible sur $(\mathcal{L}^{\mathcal{H}}, <)$. Le théorème 1.I entraîne alors que $(\tilde{H}^\bullet, \propto)$ est ordonné et la proposition 8 montre que σ est une équivalence ordonnée. Le fait que $\tilde{p}$ soit ordonné et que $\tilde{p}_\gamma$ vérifie $\mathcal{P}$ se démontre comme dans le théorème 2.

3. Cas régulier.

DEFINITION 2. *Soit $(C^\bullet, <)$ une catégorie régulière et soient*

$$\lambda, f, k, \lambda_1 \in C^\bullet \textit{ tels que } \lambda_1 < \lambda \textit{ et } \lambda = k.f.$$

On dira que f_1 et k_1 sont obtenus par le procédé (r) si

$$k_1 = \beta(\lambda_1)(ke_1)$$

où $e_1 = \beta(f\alpha(\lambda_1))$, $f_1 = \alpha(k_1)(f\alpha(\lambda_1))$.

On sait d'après la démonstration du théorème 1 de (2) que

$$\lambda_1 = k_1.f_1.$$

LEMME 2. *Soit $(C^\bullet, <)$ une catégorie ordonnée régulière; si $f, f_1, f_2 \in C^\bullet$ sont tels que*

$$f_1 < f,\ f_2 < f \textit{ et } \alpha(f_2) < \alpha(f_1) = e,\ \beta(f_2) < \beta(f_1) = e',$$

alors $f_2 < f_1$.

On sait d'après la démonstration de la proposition 10 de (2) que $f_1 = e'(fe)$; or les relations $\alpha(f_2) < e$ et $f_2 < f$ entraînent $f_2 < fe$, puis la relation $\beta(f_2) < e'$ entraîne $f_2 < e'(fe) = f_1$.

Dans toute la suite de ce paragraphe, *nous supposons que $(H^\bullet, <)$ et $(K^\bullet, <)$ sont des catégories régulières et que p est ordonné.*

a. EXTENSIONS.

Soient $\mathcal{F}_r, \mathcal{H}_d, \mathcal{H}_g$ les conditions suivantes sur F :

$\mathcal{F}_r$) Si $f \in F$ et $e \in p(H_0^\bullet)$ sont tels que $e < \alpha(f)$, alors il existe $f_1 \in F$ tel que $\alpha(f_1) = e$ et f_1 est le plus grand élément de la classe des $f' \in F$ tels que $f' < f$ et $\alpha(f') < e$; on notera cet élément $\overline{fe}$.

Supposons que $\mathcal{F}_r$ soit réalisée.

$\mathcal{H}_d$ (resp. $\mathcal{H}_g$)) Soit $(Q, h) \in \mathcal{L}^{\boxminus}$, $(f_1^{\boxminus}, e_1)$ (resp. $(f_1'^{\boxminus}, e_1')$) tels que

$$(f_1^{\boxminus}, e_1) < (f^{\boxminus}, \alpha(h)) \text{ (resp. } (f_1'^{\boxminus}, e_1') < (f', \beta(h)).$$

Si $h_1 = he_1$, $f_1' = \overline{f' \underline{p}(\beta(h_1))}$ (resp. si $h_1 = e_1' h$, $f_1 = \overline{f \underline{p}(\alpha(h_1))}$) il existe $k_1 \in K$ tel que

$$(k_1, f_1', f_1, \underline{p}(h_1)) \in \square K^{\cdot} \text{ et } k_1 < k.$$

PROPOSITION 9. *Si F vérifie $\mathcal{F}_r$, $\mathcal{H}_g$ et $\mathcal{H}_d$, alors $(\mathcal{L}^{\boxminus}, <)$ est une catégorie régulière.*

Montrons que l'axiome R_d est vérifiée dans $(\mathcal{L}^{\boxminus}, <)$:

Soit $(Q, h) \in \mathcal{L}^{\boxminus}$ et $(f_1^{\boxminus}, e_1) \in \mathcal{L}$ tel que $(f_1^{\boxminus}, e_1) < (f^{\boxminus}, \alpha(h))$.

Soit $h_1 = he_1$ et $\overline{f_1' = f' \underline{p}(\beta(h_1))}$; f_1' existe et appartient à F en raison de $\mathcal{F}_r$.

Compte tenu de $\mathcal{H}_d$, il existe $k_1 \in K^{\cdot}$ tel que

$$Q_1 = (k_1, f_1', f_1, \underline{p}(h_1)) \in \square K^{\cdot} \text{ et } k_1 < k,$$

et on a $(Q_1, h_1) \in \mathcal{L}^{\boxminus}$, $(Q_1, h_1) < (Q, h)$ et $\alpha^{\boxminus}(Q_1, h_1) = (f_1^{\boxminus}, e_1)$.

Soit $(Q_2, h_2) \in \mathcal{L}^{\boxminus}$ tel que :

$$(Q_2, h_2) < (Q, h) \text{ et } \alpha^{\boxminus}(Q_2, h_2) < (f_1^{\boxminus}, e_1);$$

alors on a :

(1) $$f_2 < f_1$$

et $\alpha(h_2) < e_1$. Cette relation et la relation $h_2 < h$ entraînent

(2) $$h_2 < h_1,$$

et par suite $\alpha(f_2') = \underline{p}(\beta(h_2)) < \underline{p}(\beta(h_1)) = \alpha(f_1')$. Cette relation et la relation $f_2' < f'$ entraînent

(3) $$f_2' < f_1'.$$

Les relations $\beta(k_2) < \beta(k_1)$, $\alpha(k_2) < \alpha(k_1)$ qui résultent de (1) et de (3) et les relations $k_2 < k$, $k_1 < k$ entraînent

(4) $$k_2 < k_1$$

en vertu du lemme 2.

Les relations $(1), (2), (3), (4)$ montrent que

$$(Q_2, h_2) < (Q_1, h_1)$$

et, par suite, en vertu du lemme 2. I on a :

$$(Q_1, h_1) = (Q, h)(f_1^{\boxminus}, e_1).$$

On montrerait par une démonstration analogue, en utilisant $\mathcal{H}_g$ que l'axiome R_g est vérifié dans $(\mathcal{L}^{\boxminus}, <)$.

Montrons que l'axiome R_p est vérifié dans $(\mathcal{L}^{\boxminus}, <)$:

(Nous abandonnons dans cette démonstration les notations habituelles).

Soient $(Q, k), (R, 1), (S, m) \in \mathcal{L}^{\boxminus}$ tels que

$$(S, m) = (R, 1) \boxminus (Q, k)$$

avec $Q = (k', f', f, p(k))$, $R = (1', g', g, \underline{p}(1))$, $S = (m', h', h, \underline{p}(m))$; alors on a : $h = f$, $f' = g$, $g' = h'$, $m = 1 . k$ et $m' = 1' . k'$ (si dans la suite Q, R, S sont affectés d'un indice, les lettres qui les composent sont affectées du même indice).

Soit $(S_1, m_1) \in \mathcal{L}^{\boxminus}$ tel que $(S_1, m_1) < (S, m)$; les relations $h_1 < f$, $\alpha(m_1) < \alpha(m)$ entraînent l'existence de

$$(\check{Q}_1, \check{k}_1) = (Q, k)(h_1^{\boxminus}, \alpha(m_1))$$

et on a :

$$(1) \qquad \check{k}_1 = k\,\alpha(m_1), \check{f}'_1 = \overline{f'\beta(\underline{p}(\check{k}_1))}, \check{f}_1 = h_1, \check{k}'_1 < k',$$

d'où :

$$\beta(\check{k}_1) < \beta(k) = \alpha(1) \text{ et } \check{f}'_1 < f';$$

ces relations entraînent l'existence de

$$(\check{R}_1, \check{1}_1) = (R, 1)(\check{f}'_1, \beta(\check{k}_1))$$

et on a :

$$(2) \qquad \check{1}_1 = 1\,\beta(\check{k}_1), \check{g}'_1 = \overline{g'\beta(\underline{p}(\check{1}_1))}, \check{g}_1 = \check{f}'_1, \check{1}'_1 < 1',$$

d'où

$$\check{1}_1 . \check{k}_1 = (1 . k)\,\alpha(m_1) = m\,\alpha(m_1).$$

Comme $m\alpha(m_1) > m_1$, on a $\beta(\check{1}_1) > \beta(m_1)$ et par suite

$$\alpha(h'_1) < \alpha(\check{g}'_1).$$

Cette relation et la relation $h'_1 < g'$ entraînent $h'_1 < \check{g}'_1$, et par suite l'existence de

$$(R_1, 1_1) = (h'^{\boxminus}_1, \beta(m_1))(\check{R}_1, \check{1}_1)$$

et on a :

$$(3) \qquad 1_1 = \beta(m_1)\check{1}_1,\ g'_1 = h'_1,\ \underline{g_1 =} \overline{\check{g}_1\alpha(\underline{p}(1_1))},\ 1'_1 < \check{1}'_1,$$

d'où :

$$\alpha(1_1) < \alpha(\check{1}_1) = \beta(\check{k}_1) \text{ et } g_1 < \check{g}_1 = \check{f}'_1.$$

Ces relations entraînent l'existence de

$$(Q_1, k_1) = (g^{\boxminus}_1, \alpha(1_1))(\check{Q}_1, \check{k}_1)$$

et on a

$$(4) \qquad k_1 = \alpha(1_1)\check{k}_1,\ \underline{f'_1 = g_1},\ f_1 = \overline{\check{f}_1\alpha(\underline{p}(k_1))},\ k'_1 < \check{k}'_1.$$

Il résulte des 4 premières relations de $(1), (2), (3), (4)$ que k_1, 1_1 ont été obtenus par le procédé (r) à partir de m_1 et de $m = k.1$, donc

$$\alpha(k_1) = \alpha(m_1) \text{ et } \underline{m_1 = k_1.1_1}.$$

Il en résulte $\underline{p}(\alpha(k_1)) = \alpha(h_1)$; comme $\check{f}_1 = h_1$, on a

$$f_1 = \overline{h_1\alpha(h_1)},$$

et par suite $\underline{f_1 = h_1}$ d'où $\alpha(k'_1) = \alpha(m'_1)$.

Il résulte des 4 dernières relations de $(1), (2), (3), (4)$ que

$$1'_1 < 1' \text{ et } k'_1 < k' \text{ d'où } 1'_1.k'_1 < 1'.k' = m'.$$

Cette relation et les relations

$$m'_1 < m',\ \beta(m'_1) = \beta(1'_1.k'_1),\ \alpha(m'_1) = \alpha(1'_1.k'_1)$$

entraînent $\underline{m'_1 = 1'_1.k'_1}$ puisque $(K^{\bullet}, <)$ est s-ordonné en vertu de la proposition 10 de (2).

Il résulte alors de toutes les relations soulignées que

$$(S_1, m_1) = (R_1, 1_1) \boxminus (Q_1, k_1)$$

et il est clair que, par construction de $(R_1, 1_1)$ et de (Q_1, h_1), on a

$$(R_1, 1_1) < (R, 1) \text{ et } (Q_1, k_1) < (Q, k).$$

Donc R_p est vérifié.

R_d, R_g, R_p étant vérifiés, $(\mathcal{L}^{\boxminus}, <)$ est régulière.

DEFINITION 3. *On dira qu'une sous-classe F de K est p-ordonnée-admissible-régulière (abrév. p.o.a.r.) si elle est p.o.a.d. et p.o.a.g. et si les conditions $\mathcal{F}_r$, $\mathcal{H}_d$ et $\mathcal{H}_g$ sont vérifiées.*

THEOREME 4.

- *Si $(H^\bullet, <)$ et $(K^\bullet, <)$ sont des catégories régulières*
- *Si $(H^\bullet_\gamma, <)$ est semi-régulier*
- *Si p est ordonné fidèle et si p_γ vérifie $\mathcal{P}$*
- *Si F est p.o.a.r.*

alors

- *$(\tilde{H}^\bullet, \propto)$ est une catégorie régulière*
- *$\tilde{p}$ est ordonné fidèle et $\tilde{p}_\gamma$ vérifie $\mathcal{P}$*
- *σ est une équivalence de catégories ordonnées.*

Il résulte de la proposition 9 que $(\mathcal{L}^{\boxminus}, <)$ est une catégorie ordonnée régulière et de la proposition 7 que ρ est compatible à droite et à gauche sur $(\mathcal{L}, <)$; le théorème 2.I entraîne alors que $(\tilde{H}^\bullet, \propto)$ est une catégorie régulière.

Les deux autres affirmations résultent du théorème 2.

b. ELARGISSEMENTS.

THEOREME 5.

- *Si $(H^\bullet, <)$ et $(K^\bullet, <)$ sont des catégories régulières*
- *Si $(H^\bullet_\gamma, <)$ est un groupoïde régulier et $(K^\bullet_\gamma, <)$ un groupoïde ordonné*
- *Si p est ordonné et si p_γ vérifie $\mathcal{P}$*
- *Si F vérifie $\mathcal{F}_r$*

alors

- *$(\tilde{H}^\bullet, \propto)$ est une catégorie régulière*
- *$(\tilde{H}^\bullet_\gamma, \propto)$ est un groupoïde régulier*

- *$\tilde{p}$ est ordonné et $\tilde{p}_\gamma$ vérifie $\mathcal{P}$.*

- *σ est une équivalence de catégories ordonnées.*

Puisque $F \subset K^{\bullet}_{\gamma}$ les conditions $\mathcal{H}_g$ et $\mathcal{H}_d$ sont vérifiées pour tout F vérifiant $\mathcal{F}_r$, donc $(\mathcal{L}^{\boxminus}, <)$ est régulière.

D'autre part, les conditions du théorème 3 étant réalisées, ρ est compatible à droite et à gauche sur $(\mathcal{L}^{\boxminus}, <)$ et par suite $(\tilde{H}^{\bullet}, \propto)$ est une catégorie régulière.

Le même théorème entraîne alors les deux dernières affirmations.

Montrons que $(\tilde{H}^{\bullet}_{\gamma}, \propto)$ est régulier :

Soit $(Q, h) \in \mathcal{L}^{\boxminus}_{\gamma}$ et $(f^{\boxminus}_1, e_1) \in \mathcal{L}_o$ tels que $(f^{\boxminus}_1, e_1) < (f^{\boxminus}, e)$. Soit (Q_1, h_1) construit comme dans la proposition 9, mais avec $h_1 = he$ dans $(H^{\bullet}_{\gamma}, <)$; le même raisonnement montre alors que

$$(Q_1, h_1) = (Q, h)(f^{\boxminus}_1, e_1) \text{ dans } \mathcal{L}^{\boxminus}_{\gamma};$$

puisque $\mathcal{L}^{\boxminus}_{\gamma}$ est saturé pour ρ et tel que $\tilde{\rho}(\mathcal{L}^{\boxminus}_{\gamma}) = \tilde{H}^{\bullet}_{\gamma}$, $(\tilde{H}^{\bullet}_{\gamma}, \propto)$ est régulier.

4. Retour au cas des élargissements ordonnés.

LEMME 3. *Supposons les conditions du théorème 2 réalisées et soient $s, s' \in \tilde{H}^{\bullet}_o$ tels que $s' \propto s$; alors il existe $x, x' \in \overline{F}$ tels que*

$$\beta(x) = s,\ \beta(x') = s' \text{ et } x' \propto x.$$

En effet, il existe $(f^{\boxminus}, e) \in s$ et $(f'^{\boxminus}, e') \in s'$ tels que

$$(f'^{\boxminus}, e') < (f^{\boxminus}, e);$$

il en résulte

$$(R, e) < (R', e'),$$

où $R = (f, f, \underline{p}(e), \underline{p}(e))$ et $R' = (f', f', \underline{p}(e'), \underline{p}(e'))$, d'où

$$x = \underline{\tilde{\rho}}\,(R, e) \propto x' = \underline{\tilde{\rho}}\,(R', e');$$

comme on a $x, x' \in \overline{F}$, le lemme est démontré.

LEMME 4. *Soit $(C^{\bullet}, <)$ un groupoïde ordonné semi-régulier, $(C'^{\bullet}, <)$ un groupoïde ordonné, $p = ((C'^{\bullet}, <), \underline{p}, (C^{\bullet}, <))$ un foncteur ordonné vérifiant la condition $\mathcal{P}$. Si $h, h' \in C^{\bullet}$ sont tels que $\alpha(h') < \alpha(h)$ et $p(h') < p(h)$, alors on a $h' < h$.*

En effet, $(C^{\bullet}, <)$ étant semi-régulier, il existe $h_1 \in H^{\bullet}$ tel que $\alpha(h_1) = \alpha(h')$ et $h_1 < h$; les relations $\underline{p}(h') < \underline{p}(h)$ et $\underline{p}(h_1) < \underline{p}(h)$ entraînent $\underline{p}(h'.h_1^{-1}) < \underline{p}(\beta(h))$. Comme on a

$$\alpha(h'.h_1^{-1}) = \beta(h_1) < \beta(h),$$

la condition $\mathcal{P}$ entraîne $h'.h_1^{-1} < \beta(h)$, d'où

$$h' = h'.h_1^{-1}.h_1 < \beta(h).h = h.$$

Soit $\mathfrak{U} = \overline{\Omega}(\Omega', \Omega)$ *la catégorie des foncteurs ordonnés entre catégories ordonnées.*

(Si $p = ((K^{\bullet}, <), \underline{p}\ (H^{\bullet}, <)) \in \mathfrak{U}$, on notera $p^* = (K^{\bullet}, \underline{p}\ , H^{\bullet}) \in \mathfrak{F}$).

Soit $\mathfrak{U}'$ la sous-classe de $\mathfrak{U}$ formée par les $p = ((K^{\bullet}, <), \underline{p}, (H^{\bullet}, <))$ tels que :

1) $(H^{\bullet}_{\gamma}, <), (K^{\bullet}_{\gamma}, <)$ sont des groupoïdes ordonnés réguliers.

2) p_{γ} vérifie $\mathcal{P}$.

3) $p^* \in \mathfrak{F}'$.

Soit $\mathfrak{U}''_S$ la sous-classe de $\mathfrak{U}'$ formée par les $p \in \mathfrak{U}'$ tels que

$$p^* \in \mathfrak{F}''_S.$$

Soient $\check{p} = ((\check{K}^{\bullet}, <), \underline{p}, (H^{\bullet}, <)) \in \mathfrak{U}'$, $F = K^{\bullet}_{\gamma}.p(H^{\bullet}_{o})$ et $M(p^*) = (K^{\bullet}, \underline{p}, H^{\bullet})$ l'élargissement maximal de $(F, \check{p}^*)$.

Les conditions du théorème 3 étant réalisées, $(\check{H}^{\bullet}, <)$ est une catégorie ordonnée ($<$ étant l'ordre image par χ de $\propto$),

$$\check{p} = ((K^{\bullet}, <), \check{\underline{p}}, (\check{H}^{\bullet}, <)) \in \mathfrak{U}$$

et $\check{p}_{\gamma}$ vérifie $\mathcal{P}$. Montrons que $(\tilde{H}^{\bullet}_{\gamma}, \propto)$ est régulier :

En effet $(\overline{H}^{\bullet}_{\gamma}, <)$ est régulier, et F vérifie $\mathfrak{F}_r$ puisque $(K^{\bullet}_{\gamma}, <)$ est régulier (on a $\overline{fe} = fe$ dans $K^{\bullet}_{\gamma}$). Les conditions de la proposition 9 sont réalisées et $(\mathcal{L}^{\boxminus}_{\gamma}, <)$ est un groupoïde ordonné régulier.

Il en résulte, pour les mêmes raisons que dans le théorème 5, que $(\tilde{\check{H}}^{\bullet}_{\gamma}, \propto)$ et par suite $(\check{H}^{\bullet}_{\gamma}, <)$ sont réguliers; donc $\check{p} \in \mathfrak{U}'$; et comme $\check{p}^* \in \mathfrak{F}''_S$, on a $\check{p} \in \mathfrak{U}''_S$.

THEOREME 6. *$\boxed{}(\mathfrak{U}; \mathfrak{U}, \mathfrak{U}')$ est une catégorie à $\square(\mathfrak{U}; \mathfrak{U}, \mathfrak{U}''_S)$-projections.*

Soit

$$\nu(p) = (\check{p}, (K^\bullet, <), ((\check{H}^\bullet, <), \underline{\iota}, (H^\bullet, <)), p)$$

et

$$\mu(p^*) = (M(p^*), K^\bullet, (\check{H}^\bullet, \underline{\iota}, H^\bullet), p^*).$$

On sait que $\mu(p^*) \in \square\mathfrak{F}$ donc $\nu(p) \in \square\mathfrak{U}$. Soit $U = (q, \psi', \psi, p) \in \square\mathfrak{U}$ où $q = ((K_1^\bullet, <), \underline{q}, (C^\bullet, <)) \in \mathfrak{U}_S''$; alors on a :

$$U^* = (q^*, \psi'^*, \psi^*, p^*) \in \square\mathfrak{F} \text{ et } q^* \in \mathfrak{F}_S''.$$

Il existe, en vertu du théorème 1, $\psi_1^* = (C^\bullet, \underline{\psi}_1, \check{H}^\bullet)$ unique tel que :

$$U'^* = (q^*, \psi'^*, \psi_1^*, M(p^*)) \in \square(\mathfrak{F}; \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_S'') \text{ et } U^* = U'^* \boxed{\square}\, \mu(p^*).$$

Montrons que $\underline{\psi}_1$ définit un foncteur ordonné :

$$\psi_1 = ((C^\bullet, <), \underline{\psi}_1, (\check{H}^\bullet, <)).$$

Soit $\check{F} = \chi(\overline{F})$ et soit $x \in \check{F}$, $\beta(x) = s$, $\alpha(x) = e \in H_o^\bullet$; alors on sait que (voir théorème 17,5, de E) $\underline{\psi}_1(x) = f$, f étant l'unique élément de $C_\gamma^\bullet$ tel que :

$$\alpha(f) = \underline{\psi}(e) \text{ et } \underline{q}(f) = \underline{\psi}'.\underline{\check{p}}(x).$$

Soient $x_i \in \check{F}$, $i = 1, 2$, tels que $x_2 < x_1$; alors on a :

$$\underline{\psi}'.\underline{\check{p}}(x_2) < \underline{\psi}'.\underline{\check{p}}(x_1) \text{ et } \alpha(x_2) = e_2 < \alpha(x_1) = e_1,$$

d'où $\underline{\psi}(e_2) < \underline{\psi}(e_1)$ et $\underline{\psi}_1(x_2) < \underline{\psi}_1(x_1)$, en vertu du lemme 4. Soient $\hat{h}_i \in \check{H}^\bullet$, $i = 1, 2$, tels que $\hat{h}_2 < \hat{h}_1$; alors on a :

$$\alpha(\hat{h}_2) < \alpha(\hat{h}_1), \beta(\hat{h}_2) < \beta(\hat{h}_1);$$

il existe, en vertu du lemme 3, $x_i, y_i \in \check{F}$, $i = 1, 2$ tels que

$$\beta(x_i) = \alpha(\hat{h}_i), \beta(y_i) = \beta(\hat{h}_i) \text{ et } x_2 < x_1, y_2 < y_1;$$

soit $h_i = y_i^{-1}.\hat{h}_i.x_i$; alors on a $h_i \in H^\bullet$ et $h_2 < h_1$.
La relation :

$$\underline{\psi}_1(\hat{h}_i) = \underline{\psi}_1(y_i).\underline{\psi}(h_i).\underline{\psi}_1(x_i^{-1})$$

et les relations :

$$\underline{\psi}_1(y_2) < \underline{\psi}_1(y_1), \underline{\psi}_1(x_2^{-1}) < \underline{\psi}_1(x^{-1}) \text{ et } \underline{\psi}(h_2) < \underline{\psi}(h_1)$$

entraînent alors $\underline{\psi}_1(\hat{h}_2) < \underline{\psi}_1(\hat{h}_1)$ et, par suite,

$$\breve{\psi} = ((C^\bullet, <), \underline{\psi}_1, (H^\bullet, <)) \in \mathcal{U};$$

donc $U' = (q, \psi', \breve{\psi}, p) \in \square(\mathcal{U}; \mathcal{U}, \mathcal{U}_S'')$.

5. Cas des groupoïdes.

Supposons que $(H^\bullet, <)$ et $(K^\bullet, <)$ soient des groupoïdes ordonnés réguliers, que p soit ordonné et vérifie $\mathcal{P}$, que F vérifie $\mathcal{F}_r$.

PROPOSITION 10. *Soit* $\dot{<}$ *l'ordre induit par l'ordre* $<$ *de* $\mathcal{P}^{\ominus}$ *sur* $\mathcal{N}^{\ominus}$; *alors* $(\mathcal{N}^{\ominus}, \dot{<})$ *est un groupoïde ordonné régulier,* ρ' *est compatible sur* $(\mathcal{N}^{\ominus}, \dot{<})$ *et la relation d'ordre* $\dot{\propto}$, *quotient de la relation* $\dot{<}$ *par* ρ', *est identique à la relation d'ordre* $\propto$.

Si $(k_i, f_i, e_i) \in \mathcal{N}^{\ominus}$, $i = 1, 2$, alors on a :

$$(k_1, f_1, e_1) \dot{<} (k_2, f_2, e_2)$$

si, et seulement si,

$$k_1 < k_2, \ f_1 < f_2 \ \text{et} \ e_1 < e_2,$$

et $(\mathcal{N}^{\ominus}, \dot{<})$ est un groupoïde ordonné.

Montrons qu'il est assez régulier à droite :

Soit $(k, f, e) \in \mathcal{N}^{\ominus}$ et $(f_1^{\ominus}, e_1) \in \mathcal{P}_o^{\ominus}$ tels que $(f_1^{\ominus}, e_1) < (f^{\ominus}, e)$, alors on a $\alpha(f_1) < \alpha(f)$. Soit $\lambda = k.f$ et $\lambda_1 = \overline{\lambda\, \alpha(f_1)}$ qui existe en vertu de $\mathcal{F}_r$; comme $\lambda_1 \in F$, on a $(k_1, f_1, e_1) \in \mathcal{N}^{\ominus}$, avec $k_1 = \lambda_1 . f_1^{-1}$.

Il est facile de vérifier que

$$(k_1, f_1, e_1) = (k, f, e)(f_1^{\ominus}, e_1).$$

Donc $(\mathcal{N}^{\ominus}, \dot{<})$ est assez régulier à droite, et par suite il est régulier (voir cor. de la prop. 7 de *(2)*).

Les conditions Q_2^o et Q_3 sont vérifiées pour ρ' dans $(\mathcal{N}^{\ominus}, \dot{<})$ puisqu'elles le sont pour ρ dans $(\mathcal{P}^{\ominus}, <)$ (voir démonstration du théorème 3). D'autre part, il est facile de montrer que Q_1 et Q_4^d le sont aussi; donc ρ' est compatible dans $(\mathcal{N}^{\ominus}, \dot{<})$, et par suite $\dot{\propto}$ est un ordre sur $\tilde{H}^\bullet$.

Soient $x_i \in \tilde{H}^\bullet$, $i = 1, 2$, tel que $x_1 \propto x_2$; alors il existe

$$(Q_i, h_i) \in x_i \ \text{tels que} \ (Q_1, h_1) < (Q_2, h_2).$$

Mais les équivalents naturels $(k_i, f_i, \alpha(h_i))$ de (Q_i, h_i) sont tels que $(k_1, f_1, \alpha(h_1)) \dot{<} (k_2, f_2, \alpha(h_2))$, et par suite on a $x_1 \dot{\propto} x_2$.

Comme évidemment la relation $x_1 \dot{\propto} x_2$ entraîne $x_1 \propto x_2$, les deux ordres $\propto$ et $\dot{\propto}$ sont identiques.

REMARQUE.

1) Cette proposition entraîne que la construction de $(\tilde{H}^{\bullet}, \propto)$ et la démonstration du théorème 5 peuvent se faire, dans le cas des groupoides, en utilisant $(\mathcal{N}^{\boxminus}, \dot{<})$ au lieu de $(\mathcal{L}^{\boxminus}, <)$.

2) $(\mathcal{N}^{\boxminus}, \dot{<})$ est un groupoïde régulier mais n'est pas en général un sous-groupoïde régulier de $(\mathcal{L}^{\boxminus}, <)$.

On a cependant la propriété suivante :

Soient $(Q, h) \in \mathcal{L}^{\boxminus}$ et $(f_1^{\boxminus}, e_1) \in \mathcal{L}_o^{\boxminus}$ tels que

$$(f_1^{\boxminus}, e_1) < (f^{\boxminus}, \alpha(h));$$

soit $(Q_1, h_1) = (Q, h)(f_1^{\boxminus}, e_1)$ dans $(\mathcal{L}^{\boxminus}, <)$; alors les équivalents naturels $(k, f, \alpha(h))$ et $(k_1, f_1, \alpha(h_1))$ de (Q, h) et (Q_1, h_1) respectivement sont tels que

$$(k_1, f_1, \alpha(h_1)) = (k, f, \alpha(h))(f_1^{\boxminus}, e_1) \text{ dans } (\mathcal{N}^{\boxminus}, <).$$

PROPOSITION 11.

Si $(H^{\bullet}, <)$ *et* $(K^{\bullet}, <)$ *sont fonctoriellement ordonnées*

Si p *est ordonné*

Si F *vérifie* $\mathcal{F}_r$

alors

- $(\tilde{H}^{\bullet}, \propto)$ *est un groupoïde fonctoriellement ordonné*
- $\tilde{p}$ *est ordonné*
- σ *une équivalence ordonnée*
- $\overline{H}^{\bullet}$ *un sous-groupoïde régulier de* $(\tilde{H}^{\bullet}, \propto)$.

Montrons que $(\mathcal{N}^{\boxminus}, <)$ est fonctoriellement ordonné :

Soit $(k, f, e) \in \mathcal{N}^{\boxminus}$ et $(f_1^{\boxminus}, e_1) \in \mathcal{N}_o^{\boxminus}$ tels que :

$$(k, f, e) < (f_1^{\boxminus}, e_1);$$

alors on a $k < \beta(f_1)$ et par suite $k \in K_o^{\bullet}$, donc $(k, f, e) = (f^{\boxminus}, e)$, le corollaire du théorème 2. I entraîne le résultat.

La condition $\mathcal{P}$ étant, dans ce cas, toujours vérifiée le théorème 5 entraîne les trois premières affirmations de la proposition ; quant à la quatrième, elle se vérifie facilement.

6. Cas sous-préinductif.

Dans toute la suite de ce paragraphe nous supposons que $(H^\bullet, <)$ et $(K^\bullet, <)$ sont des catégories sous-préinductives, et que p est un foncteur sous-préinductif $(p \in \mathcal{G}^{PS})$.

a) EXTENSIONS.

Soit $\mathcal{F}_{PS}$ la condition suivante sur F :

$\mathcal{F}_{PS}$) Si $f, f', f'' \in F$ sont tels que $f' < f$ et $f'' < f$ et si

$$\alpha(f' \cap f'') \in p(H_o^\bullet),$$

alors on a $f' \cap f'' \in F$.

PROPOSITION 12. *Si F vérifie $\mathcal{F}_{PS}$, alors $(\mathcal{L}^{\mathcal{H}}, <)$ est une catégorie sous-préinductive.*

Soient $(Q_i, h_i) \in \mathcal{L}^{\mathcal{H}}$, $i = 0, 1, 2$, tels que $(Q_1, h_1) < (Q_o, h_o)$ et $(Q_2, h_2) < (Q_o, h_o)$; alors $h_1 \cap h_2$ existe dans $H^\bullet$ et $f'_1 \cap f'_2$, $f_1 \cap f_2$, $k_1 \cap k_2$ existent dans $K^\bullet$.

En tenant compte du théorème 4 de (7) et de $\overline{p} \in \mathcal{G}^{PS}$ on a :

$$\begin{aligned}\beta(\underline{p}(h_1 \cap h_2)) &= \underline{p}(\beta(h_1 \cap h_2)) = \underline{p}(\beta(h_1) \cap \beta(h_2)) = \\ &= \underline{p}(\beta(h_1)) \cap \underline{p}(\beta(h_2)) \\ &= \beta(\underline{p}(h_1)) \cap \beta(\underline{p}(h_2)) = \alpha(f'_1) \cap \alpha(f'_2) = \\ &= \alpha(f'_1 \cap f'_2).\end{aligned}$$

On a de même :

$$\alpha(\underline{p}(h_1 \cap h_2)) = \alpha(f_1 \cap f_2), \ \beta(f_1 \cap f_2) = \alpha(k_1 \cap k_2)$$

et
$$\beta(f'_1 \cap f'_2) = \beta(k_1 \cap k_2).$$

Les relations $h_1 \cap h_2 < h_o$, $f_1 \cap f_2 < f_o$, $f'_1 \cap f'_2 < f'_o$, $k_1 \cap k_2 < k_o$ entraînent alors :

$$(f'_1 \cap f'_2) . \underline{p}(h_1 \cap h_2) < f'_o . \underline{p}(h_o); \ (k_1 \cap k_2) . (f_1 \cap f_2) < k_o . f_o .$$

Comme $f'_o \cdot \underline{p}(h_o) = k_o \cdot f_o$ et comme $K^{\bullet}$ est s-ordonnée, on a

$$(k_1 \cap k_2,\ f'_1 \cap f'_2,\ f_1 \cap f_2,\ \underline{p}(h_1 \cap h_2)) \in \sqsubset K^{\bullet};$$

nous noterons ce quatuor $Q_1 \cap Q_2$.

Mais $\alpha(f'_1 \cap f'_2),\ \alpha(f_1 \cap f_2) \in p(H^{\bullet}_o)$, donc, d'après $\mathcal{F}_{PS}$, on a

$$f'_1 \cap f'_2,\ f_1 \cap f_2 \in F,$$

et par suite on a :

$$(Q_1 \cap Q_2,\ h_1 \cap h_2) \in \wp^{\boxminus}.$$

Il est clair que $(Q_1 \cap Q_2,\ h_1 \cap h_2) = (Q_1, h_1) \cap (Q_2, h_2)$, que

$$\alpha^{\boxminus}(Q_1 \cap Q_2,\ h_1 \cap h_2) = \alpha^{\boxminus}(Q_1, h_1) \cap \alpha^{\boxminus}(Q_2, h_2)$$

et qu'il en est de même pour les unités à droite.

Le théorème 4 de (7) entraîne alors que $(\wp^{\boxminus}, <)$ est une catégorie sous-préinductive.

DEFINITION 4. *On dira qu'une sous-classe* F *p. o. a. de* $K^{\bullet}$ est sous-préinductive (abrév. p.o.a.s.p.) *si la propriété* $\mathcal{F}_{PS}$ *ainsi que la propriété* $\mathcal{H}_{PS}$ *suivante sont vérifiées dans* F :

$\mathcal{H}_{PS}$) Soient $(f^{\boxminus}_i, e_i) \in \wp^{\boxminus}_o$, $i = 0, 1, 2$, tels que

$(f^{\boxminus}_1, e_1) < (f^{\boxminus}_o, e_o)$, $(f_2, e_2) < (f^{\boxminus}_o, e_o)$ et $(f_1, e_1) \sim (f_2, e_2) \bmod \rho$;

alors il existe $g' \in H_{\gamma}$ tel que

$$\alpha(g') = e_1 \cap e_2,\ \beta(g') = e_1 \text{ et } f_1 \cap f_2 = f_1 \cdot \underline{p}(g').$$

DEFINITION 5. *Soit* $(C^{\bullet}, <)$ *une classe sous-préinductive; une sous-classe* C' *de* C *est appelée* partie sous-préinductive *de* C *si les conditions* $f, f', f'' \in C'$, $f' < f$, $f'' < f$ *entraînent* $f' \cap f'' \in C'$.

THEOREME 7.

- *Si* $(H^{\bullet}, <)$ *et* $(K^{\bullet}, <)$ *sont des catégories sous-préinductives*
- *Si* $(H^{\bullet}_{\gamma}, <)$ *est semi-régulier*
- *Si* p *est fidèle et sous-préinductif et si* p_{γ} *vérifie* $\mathcal{P}$
- *Si* F *est p. o. a. s.p.*

alors

- $(\tilde{H}^{\bullet}, \propto)$ *est une catégorie sous-préinductive*

- $\tilde{p}$ *est fidèle et sous-préinductif et* $\tilde{p}_{\tilde{\gamma}}$ *vérifie* $\mathcal{P}$

- $\overline{H}^{\bullet}$ *une partie sous-préinductive de* $(\tilde{H}^{\bullet}, \propto)$

- σ *est une équivalence de catégories sous-préinductives.*

Les conditions du théorème 2 étant réalisées, les conclusions de ce théorème subsistent.

De plus la condition $\mathcal{H}_{P\tilde{S}}$ et la proposition 7 permettent d'appliquer le théorème 3.I, par suite $(\tilde{H}^{\bullet}, \propto)$ est une catégorie sous-préinductive; il est clair que $\tilde{p}$ est sous-préinductif.

Il reste à montrer que $\overline{H}^{\bullet}$ est une partie sous-préinductive de $(\tilde{H}^{\bullet}, \propto)$:

Soient $x_i \in \overline{H}^{\bullet}$, $i = 0, 1, 2$, tels que $x_1 \propto x_0$ et $x_2 \propto x_0$; alors il existe $h_i \in H^{\bullet}$ tels que $\underline{\sigma}(h_i) = x_i$. σ étant un isomorphisme de classes ordonnées, on a $h_2 < h_0$ et $h_1 < h_0$ et par suite :

$$(\underline{p}(h_1)^{\boxminus}, h_1) < (\underline{p}(h_0)^{\boxminus}, h_0) \text{ et } (\underline{p}(h_2)^{\boxminus}, h_2) < (\underline{p}(h_0)^{\boxminus}, h_0).$$

Il en résulte que

$$(p(h_1)^{\boxminus}, h_1) \cap (p(h_2)^{\boxminus}, h_2)$$

existe dans $(\mathcal{P}^{\boxminus}, <)$ et est égal à $(\underline{p}(h_1 \cap h_2)^{\boxminus}, h_1 \cap h_2)$.

D'autre part on a :

$$x_1 \cap x_2 = \underline{\tilde{\rho}}\,(\underline{p}(h_1 \cap h_2)^{\boxminus}, h_1 \cap h_2)$$

donc $x_1 \cap x_2 = \underline{\sigma}(h_1 \cap h_2)$ et $\overline{H}^{\bullet}$ est une partie sous-préinductive de $(\tilde{H}^{\bullet}, \propto)$. En outre σ est sous-préinductif.

b) ELARGISSEMENTS.

LEMME 4. *Soit $(C^{\bullet}, <)$ une catégorie sous-préinductive telle que $(C^{\bullet}_{\gamma}, <)$ soit un groupoïde ordonné. Si $f_i \in C^{\bullet}_{\gamma}$, $i = 0, 1, 2$, sont tels que $f_1 < f_0$, $f_2 < f_0$, alors on a :*

$$g = f_1 \cap f_2 \in C^{\bullet}_{\gamma}.$$

En effet, $(C^{\bullet}_{\gamma}, <)$ étant ordonné, on a $f_1^{-1} < f_0^{-1}$ et $f_2^{-1} < f_0^{-1}$ et, par suite, $g' = f_1^{-1} \cap f_2^{-1}$ existe ; en vertu du théorème 4 de (7) on a :

$$\alpha(g) = \alpha(f_1) \cap \alpha(f_2) = \beta(f_1^{-1}) \cap \beta(f_2^{-1}) = \beta(g').$$

On a de même $\alpha(g') = \beta(g)$; il en résulte que $(g, g') \in C^{\bullet} * C^{\bullet}$ et que $\alpha(g.g') = \beta(g.g') = \beta(g)$; ces relations et les relations $g.g' < \beta(f_o)$, $\beta(g) < \beta(f_o)$ entraînent alors $g.g' = \beta(g)$, puisque $(C^{\bullet}, <)$ est s-ordonnée.

On montrerait de la même manière que $g'.g = \alpha(g)$.

Il en résulte que $g \in C^{\bullet}_{\gamma}$ et que $g' = g^{-1}$.

THEOREME 8.

-Si $(H^{\bullet}, <)$ et $(K^{\bullet}, <)$ sont des catégories sous-préinductives

- Si $(H^{\bullet}_{\gamma}, <)$ est un groupoïde régulier et $(K^{\bullet}_{\gamma}, <)$ un groupoïde ordonné

- Si p est sous-préinductif et si p_{γ} vérifie $\mathcal{P}$

-Si F vérifie $\mathcal{F}_{PS}$

alors

-$(\tilde{H}^{\bullet}, \propto)$ est une catégorie sous-préinductive

- $\tilde{p}$ est sous-préinductif et $\tilde{p}_{\gamma}$ vérifie $\mathcal{P}$

- $\overline{H}^{\bullet}$ une partie sous-préinductive de $(\tilde{H}^{\bullet}, \propto)$

- σ est une équivalence de catégories sous-préinductives.

Montrons que la condition $\mathcal{H}_{PS}$ est vérifiée pour F :

Reprenons les hypothèses de cette condition avec les mêmes notations; alors il existe $g \in H^{\bullet}_{\gamma}$ tel que

$$\alpha(g) = e_2,\ \beta(g) = e_1 \text{ et } f_2 = f_1.\underline{p}(g).$$

La situation du début de la démonstration du théorème 3 est réalisée et par suite on a $g < e_o$.

Les relations $g < e_o$ et $e_1 < e_o$ entraînent l'existence de $g' = g \cap e_1$ et on a :

$$\alpha(g') = \alpha(g) \cap e_1 = e_2 \cap e_1,\ \beta(g') = \beta(g) \cap e_1 = e_1,\ g' < e_o$$

et, en vertu du lemme 4, $g' \in H^{\bullet}_{\gamma}$.

Il en résulte que l'on a :

$$f = f_1.\underline{p}(g') < f_o,\ \alpha(f) = \alpha(f_1 \cap f_2) \text{ et } \beta(f) = \beta(f_1 \cap f_2);$$

donc $f = f_1 \cap f_2$ et la condition $\mathcal{H}_{PS}$ est satisfaite.

Le théorème résulte alors du théorème 3 et de la démonstration du théorème 7 .

7. Cas sous-inductif.

Dans toute la suite de ce paragraphe, nous supposons que $(H^{\cdot}, <)$ et $(K^{\cdot}, <)$ sont des catégories sous-inductives et que p est un foncteur sous-inductif ($p \in \mathcal{J}^S$).

a) EXTENSIONS.

Soit $\mathcal{F}_S$ la condition suivante sur F :

$\mathcal{F}_S$) Soit $f \in F$ et $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de F majorée par f; alors la condition $\alpha(\overset{f}{\bigcup} f_i) \in \underline{p}(H^{\cdot}_o)$ entraîne $\overset{f}{\bigcup} f_i \in F$.

PROPOSITION 13. *Si F vérifie $\mathcal{F}_S$ et $\mathcal{F}_{PS}$ alors $(\mathcal{L}^{\boxminus}, <)$ est une catégorie sous-inductive.*

Soit $(Q, h) \in \mathcal{L}^{\boxminus}$ et $(Q_i, h_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{L}^{\boxminus}$ majorée par (Q, h); alors $\overset{h}{\bigcup} h_i = h_o$ existe dans $H^{\cdot}$ et $\overset{f}{\bigcup} f_i = f$, $\overset{f'}{\bigcup} f'_i = f'_o$, $\overset{k}{\bigcup} k_i = k_o$ existent dans K.

En tenant compte du théorème 5 de (7) et de $p \in \mathcal{J}^S$ on a :

$$\alpha(f'_o) = \overset{\alpha(f')}{\bigcup} \alpha(f'_i) = \overset{\beta(p(h))}{\bigcup} \beta(\underline{p}(h_i)) = \beta(\overset{p(h)}{\bigcup} \underline{p}(h_i))$$
$$= \beta(\underline{p}(\overset{h}{\bigcup} h_i)) = \beta(\underline{p}(h_o)).$$

On montre de même que :

$$\alpha(f_o) = \alpha(\underline{p}(h_o)), \beta(f_o) = \alpha(k_o) \text{ et } \beta(f'_o) = \beta(k_o).$$

Les relations $f_o < f$, $f'_o < f'$, $h_o < h$, $k_o < k$ entraînent alors :

$$f_o \cdot \underline{p}(h_o) < f \cdot p(h) \text{ et } k_o \cdot f_o < k \cdot f.$$

Mais, comme $f \cdot \underline{p}(h) = k \cdot f$ et comme $K^{\cdot}$ est s-ordonnée, on a :

$$Q_o = (k_o, f'_o, f_o, \underline{p}(h_o)) \in \square K^{\cdot}.$$

D'après $\mathcal{F}_S$, on a f_o, $f'_o \in F$, donc $(Q_o, h_o) \in \mathcal{L}^{\boxminus}$, et il est clair que

$$(Q_o, h_o) = \overset{(Q,h)}{\bigcup} (Q_i, h_i), \; \alpha^{\boxminus}(Q_o, h_o) = \overset{\alpha^{\boxminus}(Q,h)}{\bigcup} \alpha^{\boxminus}(Q_i, h_i),$$

et qu'il en est de même pour les unités à droite.

Enfin p, étant sous-inductif, applique le plus petit élément e_o de $(H,<)$ sur le plus petit élément de $(K,<)$, et par suite $(\underline{p}(e_o)^{\boxminus}, e_o)$ est le plus petit élément de $(\mathcal{L},<)$; donc $(\mathcal{L},<)$ est une classe sous-inductive.

D'autre part, d'après la proposition 12, $(\mathcal{L}^{\boxminus},<)$ est une catégorie sous-préinductive.

Les conditions du théorème 5 de *(5)* étant réalisées, $(\mathcal{L}^{\boxminus},<)$ est, en vertu de ce théorème, une catégorie sous-inductive.

DEFINITION 6. *On dira qu'une sous-classe p.o.a. de* K est sous-inductive (abrév. p.o.a.s.i.) *si elle est p.o.a.s.p. et si la propriété* $\mathcal{F}_S$ *et la propriété* $\mathcal{H}_S$ *suivante sont vérifiées dans* F.

$\mathcal{H}_S$) Soient $(f^{\boxminus}, e) \in \mathcal{L}$ et $(f_i^{\boxminus}, e_i)_{i\in I}, (f_i'^{\boxminus}, e_i')_{i\in I}$ deux familles d'éléments de $\mathcal{L}_o^{\boxminus}$, ayant même classe d'indices I, telles que

$$(f_i^{\boxminus}, e_i) < (f^{\boxminus}, e), (f_i'^{\boxminus}, e_i') < (f^{\boxminus}, e) \text{ et } (f_i^{\boxminus}, e_i) \sim (f_i'^{\boxminus}, e_i') \bmod p$$
$$(\forall\, i \in I);$$

alors il existe $g \in H_\gamma^{\bullet}$ tel que :

$$\beta(g) = \overset{e}{\bigcup} e_i, \alpha(g) = \overset{e'}{\bigcup} e_i' \text{ et } \overset{f'}{\bigcup} f_i' = (\overset{f}{\bigcup} f_i).\underline{p}(g).$$

THEOREME 9.

- *Si* $(H^{\bullet},<)$ *et* $(K^{\bullet},<)$ *sont des catégories sous-inductives*
- *Si* $(H_\gamma^{\bullet},<)$ *est semi-régulier*
- *Si* p *est fidèle et sous-inductif et si* p_γ *vérifie* $\mathcal{P}$
- *Si* F *est p.o.a.s.i.*

alors

- $(\tilde{H},\propto)$ *est une catégorie sous-inductive*
- $\underline{\tilde{p}}$ *est fidèle et sous-inductif et* $\tilde{p}_\gamma$ *vérifie* $\mathcal{P}$
- $\overline{H}^{\bullet}$ *une partie sous-inductive faible de* $(\tilde{H}^{\bullet},\propto)$ *(voir (4))*
- σ *est une équivalence de catégories sous-inductives.*

Les conditions du théorème 7 étant réalisées, les conclusions de ce théorème subsistent; de plus la condition $\mathcal{H}_S$ et la proposition 13 permettent d'appliquer le théorème 4.I; donc $(\tilde{H}^{\bullet},\propto)$ est une catégorie sous-inductive, et il est clair que $\tilde{p}$ est sous-inductif.

Il reste à montrer que $\overline{H}^{\bullet}$ est une partie sous-inductive faible de $(\tilde{H}^{\bullet}, \propto)$:

Soient $x_o \in \overline{H}^{\bullet}$ et $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\overline{H}^{\bullet}$ majorée par x_o ; alors on a $x_o = \underline{\sigma}(h_o)$ et $x_i = \underline{\sigma}(h_i)$, avec $h_o, h_i \in H$ ($\forall i \in I$). σ étant un isomorphisme de classes ordonnées, on a $h_i < h_o$ ($\forall i \in I$), d'où $L_i < L$ ($\forall i \in I$), avec $L_i = (\underline{p}(h_i)^{\boxminus}, h_i)$, $L = (\underline{p}(h_o)^{\boxminus}, h_o)$; par suite $\overset{L}{\bigcup} L_i$ existe dans $\mathcal{P}$ et on a :

$$\overset{L}{\bigcup} L_i = ((\overset{p(h_o)}{\bigcup^{o}} \underline{p}(h_i))^{\boxminus}, \overset{h}{\bigcup^{o}} h_i) = ((\underline{p}(\overset{h}{\bigcup^{o}} h_i))^{\boxminus}, \overset{h}{\bigcup^{o}} h_i).$$

D'autre part on a

$$\overset{x}{\bigcup^{o}} x_i = \underline{\tilde{\rho}}(\overset{L}{\bigcup} L_i) \text{ d'où } \overset{x}{\bigcup^{o}} x_i = \underline{\sigma}(\overset{h}{\bigcup^{o}} h_i);$$

donc $\overline{H}^{\bullet}$ est une partie sous-inductive faible de $\tilde{H}^{\bullet}$ et σ est sous-inductif.

b) ELARGISSEMENTS.

LEMME 5. *Soit $(C^{\bullet}, <)$ une catégorie sous-inductive telle que $(C^{\bullet}_{\gamma}, <)$ soit un groupoïde ordonné. Si $f \in C^{\bullet}_{\gamma}$ et si $(f_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $C^{\bullet}_{\gamma}$ telle que $f_i < f$ ($\forall i \in I$), alors on a*

$$\overset{f}{\bigcup} f_i = g \in C^{\bullet}_{\gamma}.$$

En effet, $(C^{\bullet}_{\gamma}, <)$ étant ordonné, on a $f_i^{-1} < f^{-1}$ ($\forall i \in I$) et par suite $g' = \overset{f^{-1}}{\bigcup} f_i^{-1}$ existe; en vertu du théorème 5 de (7) on a

$$\alpha(g) = \overset{\alpha(f)}{\bigcup} \alpha(f_i) = \overset{\beta(f^{-1})}{\bigcup} \beta(f_i^{-1}) = \beta(g')$$

et de même $\beta(g) = \alpha(g')$; la démonstration se termine alors comme celle du lemme 4.

THEOREME 10.

- *Si $(H^{\bullet}, <)$ et $(K^{\bullet}, <)$ sont des catégories sous-inductives*

- *Si $(H^{\bullet}_{\gamma}, <)$ est un groupoïde régulier et si $(K^{\bullet}_{\gamma}, <)$ est un groupoïde ordonné*

- *Si p est sous-inductif et si p_{γ} vérifie $\mathcal{P}$*

- *Si F vérifie $\mathcal{F}_P$ et $\mathcal{F}_S$*

alors

- *$(\tilde{H}^\bullet, \propto)$ est une catégorie sous-inductive*
- *$\tilde{p}$ est sous-inductif et $\tilde{p}_\gamma$ vérifie $\mathcal{P}$*
- *$\overline{H}^\bullet$ est une partie sous-inductive faible de $(\tilde{H}^\bullet, \propto)$*
- *σ est une équivalence de catégories sous-inductives.*

Montrons que la condition $\mathcal{H}_S$ est vérifiée pour F :

Reprenons les hypothèses de cette condition avec les mêmes notations; alors il existe, pour tout $i \in I$, $g_i \in H^\bullet_\gamma$ tel que

$$\alpha(g_i) = e'_i,\ \beta(g_i) = e_i \text{ et } f'_i = f_i . \underline{p}(g_i).$$

Compte tenu de la remarque qui suit l'énoncé du théorème 3, on a $g_i < e$ $(\forall i \in I)$; il en résulte que $g = \overset{e}{\bigcup} g_i$ existe et on a

$$\alpha(g) = \overset{e}{\bigcup} \alpha(g_i) = \overset{e}{\bigcup} e'_i,\ \beta(g) = \overset{e}{\bigcup} e_i,\ g < e.$$

En vertu du lemme 5 on a $g \in H^\bullet_\gamma$.

Il en résulte facilement que l'on a $\overset{f}{\bigcup} f'_i = \overset{f}{\bigcup} f_i . \underline{p}(g)$, et par suite la condition $\mathcal{H}_S$ est satisfaite.

Ce théorème résulte alors du théorème 8 et de la démonstration du théorème 9.

8. Cas inductif.

Nous n'étudierons que le cas de groupoïdes.

THEOREME 11.

- *Si $(H^\bullet, <)$ et $(K^\bullet, <)$ sont des groupoïdes inductifs*
- *Si $(H^\bullet, <)$ est local et complet (voir (4))*
- *Si p est inductif*
- *Si F vérifie les conditions $\mathcal{F}_r$ et $\mathcal{F}_S$*

alors

- *$(\tilde{H}^\bullet, \propto)$ est un groupoïde inductif*
- *$\tilde{p}$ est inductif*
- *$\overline{H}^\bullet$ est une partie sous-inductive faible de $(\tilde{H}^\bullet, \propto)$*
- *σ est une équivalence de groupoïdes inductifs.*

Montrons déjà que $(\mathcal{N}^{\boxminus}, <)$ est une classe inductive :

Soient $(k, f, e) \in \mathcal{N}$ et $(k_i, f_i, e_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de

$\mathcal{H}$ majorée par (k, f, e); alors $\bigcup e_i = e_o$ existe dans $H^\bullet$ et $\bigcup f_i = f_o$, $\bigcup k_i = k_o$ existent dans $K^\bullet$. Il résulte des propriétés des groupoïdes inductifs que

$$\beta(f_o) = \bigcup \beta(f_i) = \bigcup \alpha(k_i) = \alpha(k_o).$$

D'autre part, p étant inductif, on a

$$\alpha(f_o) = \bigcup \alpha(f_i) = \bigcup \underline{p}(e_i) = \underline{p}(\bigcup e_i) = \underline{p}(e_o).$$

En vertu de $\mathcal{F}_S$, on a $f_o \in F$; par suite $(k_o, f_o, e_o) \in \mathcal{H}$ et il est clair que $(k_o, f_o, e_o) = \bigcup (k_i, f_i, e_i)$.

D'autre part p, étant inductif, applique le plus petit élément e_o de $(H, <)$ sur le plus petit élément de $(K, <)$, et par suite $(p(e_o)^{\boxminus}, e_o)$ est le plus petit élément de $(\mathcal{H}, <)$.

Il résulte de ce qui précède que $(\mathcal{H}, <)$ est une classe inductive et, comme $(\mathcal{H}^{\boxminus}, <)$ est $(F.0)$ (voir prop. 11), c'est un groupoïde inductif.

Montrons maintenant que la condition I (voir prop. 7.I) est vérifiée pour ρ' dans $(\mathcal{H}_o^{\boxminus}, <)$:

Soient $(f^{\boxminus}, e), (f'^{\boxminus}, e') \in \mathcal{H}_o^{\boxminus}$ et $(f_i^{\boxminus}, e_i)_{i \in I}, (f_i'^{\boxminus}, e_i')_{i \in I}$ deux familles d'éléments de $\mathcal{H}_o^{\boxminus}$ ayant même classe d'indices et telles que :

$$(f_i^{\boxminus}, e_i) < (f^{\boxminus}, e), (f_i'^{\boxminus}, e_i') < (f'^{\boxminus}, e'), (f_i^{\boxminus}, e_i) \sim (f_i'^{\boxminus}, e_i') \bmod \rho$$
$$(\forall i \in I).$$

Alors pour tout $i \in I$ il existe $g_i \in H_\gamma^\bullet$ tel que :

$$\beta(g_i) = e_i', \ \alpha(g_i) = e_i \text{ et } f_i = f_i' . \underline{p}(g_i),$$

d'où $\underline{p}(g_i) = f_i'^{-1} . f_i$. $\bigcup f_i$ et $\bigcup f_i'^{-1}$ existent dans $K^\bullet$ et on a

$$\alpha(\bigcup f_i'^{-1}) = \bigcup \alpha((f_i'^{-1})) = \bigcup \beta(f_i) = \beta(\bigcup f_i).$$

Donc $(\bigcup f_i'^{-1}).(\bigcup f_i) = A$ existe et on a $A > f_i'^{-1} . f_i$ $(\forall i \in I)$.

Par suite la famille $f_i'^{-1} . f_i$ admet un agrégat et on a

$$\alpha(\bigcup (f_i'^{-1} . f_i)) = \bigcup \alpha(f_i') = \alpha(A),$$

d'où $A = \bigcup (f_i'^{-1} . f_i) = \bigcup \underline{p}(g_i)$.

Les éléments $\underline{p}(g_i)$ forment donc une famille compatible (voir [4]) et il en est de même des éléments g_i; comme $(H^{\bullet}, <)$ est local et complet, $\bigcup g_i$ existe dans $H^{\bullet}$. p étant inductif, on a :

$$\underline{p}(\bigcup g_i) = \bigcup \underline{p}(g_i) = A,$$

d'où $\bigcup f_i = (\bigcup f'_i) \cdot \underline{p}(\bigcup g_i)$, et comme

$$\beta(\bigcup g_i) = \bigcup e'_i \text{ et } \alpha(\bigcup g_i) = \bigcup e_i,$$

alors on a

$$((\bigcup f_i)^{\boxminus}, \bigcup e_i) \sim ((\bigcup f'_i)^{\boxminus}, \bigcup e'_i) \bmod \rho'.$$

Il est clair que tout élément de $\mathfrak{N}^{\boxminus}$ équivalent à une unité est lui-même une unité; par suite la condition I_S du théorème 5.I se ramène à la condition $\underset{\sim}{I}$ pour les unités. On peut donc appliquer ce théorème qui entraîne que $(H^{\bullet}, \propto)$ est un groupoïde inductif.

D'autre part, la condition PS (voir prop. 5 de I) est aussi vérifiée, donc $\tilde{p}$ est inductif. Les autres affirmations du théorème résultent des propositions 10 et 11 et du théorème 10.

CHAPITRE III

GROUPOIDES FONCTORIELLEMENT ORDONNES (F.0) OBTENUS LOCALISATION D'UN GROUPE

Dans le 1er paragraphe, on applique au cas des groupes la notion générale d'atlas dans une catégorie définie dans [2].

Une sous-classe d'un groupe $G^{\bullet}$ est un atlas, si et seulement si, elle est une classe à droite modulo un sous-groupe de $G^{\bullet}$; le groupoïde $\mathfrak{A}^{o}(G^{\bullet})$ des atlas de $G^{\bullet}$ muni de l'ordre $<$ opposé à l'inclusion est un groupoïde inductif. On montre ensuite qu'à tout groupoïde $(F.0)(\gamma^{\bullet},<)$ obtenu par localisation du groupe $G^{\bullet}$, on peut associer un foncteur ordonné d'hypermorphismes saturé $\varphi=((\mathfrak{A}^{o}(G^{\bullet}),<),\underline{\varphi},(\gamma^{\bullet},<))$ appelé foncteur majorant associé à $(\gamma^{\bullet},<)$ (théorème 1).

Dans le 2ème paragraphe la réciproque est envisagée; elle donne lieu à un théorème fondamental (théorème 2) qui peut se résumer de la manière suivante :

Si $(H^{\bullet},<)$ est un groupoïde $(F.0)$, $(K^{\bullet},<)$ un groupoïde $(F.0)$ obtenu par localisation du groupe $G^{\bullet}$ et $p=((K^{\bullet},<),\underline{p},(H^{\bullet},<))$ un foncteur ordonné bien fidèle, on peut plonger $(H^{\bullet},<)$ dans un groupoïde $(F.0)(\hat{H}^{\bullet},\prec)$ obtenu par localisation de $G^{\bullet}$.

Le cas particulier où $(K^{\bullet},<)$ est le groupoïde des atlas de $G^{\bullet}$ est étudié au paragraphe 3; dans ce cas, le groupoïde $(\hat{H}^{\bullet},\prec)$ construit dans le théorème précédent est une projection de p dans une catégorie de quatuors de foncteurs ordonnés (catégorie $\mathcal{H}$).

1. Généralités.

A) ATLAS DANS UN GROUPE.

Soit $G^{\bullet}$ un groupe.

LEMME 1. *Pour qu'une sous-classe X de G soit un atlas dans $G^{\bullet}$ (voir déf. 1 et 2 de [2]), il faut et il suffit que X soit une classe à droite modulo un sous-groupe U de $G^{\bullet}(X=s.U,\ s\in G)$.*

X est alors compatible à droite avec U et à gauche avec le sous-groupe $U' = s.U.s^{-1}$.

Ce lemme résulte immédiatement des définitions.

Soit $\mathfrak{A}(G^\bullet)$ la classe des atlas de $G^\bullet$.

NOTATION. Si X désigne un atlas de $G^\bullet$, alors $\check{X}$ désignera l'élément correspondant de $\mathfrak{A}(G^\bullet)$.

LEMME 2. *$\mathfrak{A}(G^\bullet)$ est un groupoïde pour la loi de composition suivante : Soient $\check{X}, \check{Y} \in \mathfrak{A}(G^\bullet)$ avec $X = s.U$, $Y = t.V$ (U et V sous-groupes de $G^\bullet$ et $s, t \in G$); alors on a :*

$\check{Y} \circ \check{X} = \check{Z}$ *et* $Z = t.s.U$ *si, et seulement si,* $V = s.U.s^{-1}$.

Ce lemme est l'application au cas des groupes du théorème 2 de [2].

REMARQUE. Si α^o et β^o sont les applications source et but dans $\mathfrak{A}^o(G^\bullet)$, on a : $\alpha^o(\check{X}) = \check{U}$, $\beta^o(\check{X}) = \check{U}'$, si $X = s.U$ et $U' = s.U.s^{-1}$; $\check{X}^{-1} = \check{X}'$, si $X' = s^{-1}.U'$.

LEMME 3. *Soit $<$ la relation suivante sur $\mathfrak{A}^o(G^\bullet)$:*

si $\check{X}, \check{Y} \in \mathfrak{A}^o(G^\bullet)$, $\check{X} < \check{Y}$ si et seulement si $X \supset Y$;

alors la relation $<$ est une relation d'ordre et $(\mathfrak{A}^o(G^\bullet), <)$ est un groupoïde inductif.

Posons $\mathfrak{A}^o(G^\bullet) = \mathfrak{A}^o$. Il est clair que la relation $<$ est une relation d'ordre.

Remarquons que si $\check{X}, \check{Y} \in \mathfrak{A}^o$ sont tels que $\check{X} < \check{Y}$ et si $X = s.U$, $Y = t.V$ (U et V sous-groupes de $G^\bullet$), alors on a $X \supset Y$, d'où $t \in X$, et par suite $X = t.U$. Cette remarque permet de vérifier facilement l'axiome I' de [4] ; par suite

(1) $(\mathfrak{A}^o, <)$ *est un groupoïde fonctoriellement ordonné.*

Soient $\check{Y} \in \mathfrak{A}$ et $(\check{X}_i)_{i \in I}$ une famille d'élément de $\mathfrak{A}$ majorée par $\check{Y}$. Il résulte de la remarque précédente que si $Y = t.V$ on peut écrire $X_i = t.U_i$ (V, U_i sous-groupes de $G^\bullet$).

Soit $U = \bigcap_{i \in I} U_i$; alors U est sous-groupe de $G^\bullet$ et soit $X = t.U$; il est facile de montrer de $\check{X} = \bigcap_{i \in I} \check{X}_i$ et que par suite $\check{X}$ est l'agrégat dans $(\mathfrak{A}^o, <)$ de la famille $(\check{X}_i)_{i \in I}$, c'est-à-dire $\check{X} = \bigcup_{i \in I} \check{X}_i$. Enfin $\check{G}$ est le plus petit élément de $(\mathfrak{A}, <)$ donc

(2) $(\mathfrak{A}, <)$ *est une classe inductive;*

il résulte de (1) et de (2) que $(\mathfrak{A}^o, <)$ est un groupoïde inductif (voir [4]).

B) FONCTEUR MAJORANT ASSOCIE A UN GROUPOIDE OBTENU PAR LOCALISATION D'UN GROUPE.

DEFINITION 1. *Un groupoïde fonctoriellement ordonné* $(\gamma^\bullet, <)$ *sera dit* obtenu par localisation du groupe $G^\bullet$ *(en abrégé O.L.G.) si* $G^\bullet$ *est un sous-groupoïde de* $\gamma^\bullet$ *et si la condition* $(\mathfrak{L})$ *suivante est réalisée*

$(\mathfrak{L})$ *Quel que soit* $f \in \gamma^\bullet$, *il existe* $s \in G^\bullet$ *tel que* $s > f$.

REMARQUE.

1) Tous les éléments de $G^\bullet$ sont maximaux dans $(\gamma, <)$ et ε, élément unité de G, est le plus grand élément de $(\gamma_0^\bullet, <)$.

2) $G^\bullet$ est une composante de $C^\bullet$ (voir [1] déf. 13 p. 7).

PROPOSITION 1. *Quel que soit le groupe* $G^\bullet$, *le groupoïde inductif*

$$(\mathfrak{A}^o(G^\bullet), <)$$

est obtenu par localisation d'un groupe G^o *isomorphe à* $G^\bullet$.

En effet, il est clair que la classe des $\check{s} \in \mathfrak{A}^o(G)$ correspondant aux atlas $\{s\}$ de $G^\bullet$, munie de la loi de composition induite par o est un groupe G^o isomorphe à $G^\bullet$; la condition $\mathfrak{L}$ est vérifiée puisque, si $\check{X} \in \mathfrak{A}^o(G^\bullet)$ et si $s \in X$, on a $\check{s} > \check{X}$.

REMARQUE. 1) Si $s \in G$ et si U est un sous-groupe de G, alors le pseudo-produit $\check{s}\check{U}$ est égal à $\widecheck{s.U}$.

PROPOSITION 2. *Soient* $G^\bullet$ *et* $G'^\bullet$ *deux groupes et* $p = (G'^\bullet, \underline{p}, G^\bullet)$ *un homomorphisme; alors* p *induit un foncteur ordonné*

$$p^* = ((\mathfrak{A}^o(G'^\bullet), <), \underline{p}^*, (\mathfrak{A}^o(G^\bullet), <))$$

dont la restriction à G^o *est* p.

Soit $\check{X} \in \mathfrak{A}^o(G^\bullet)$; alors $X = s.U$, U sous-groupe de $G^\bullet$ et $s \in G^\bullet$; posons

$$\underline{p}^*(\breve{X}) = \breve{X}' \text{ si } X' = \underline{p}(X) = \underline{p}(s).\underline{p}(U).$$

Il est facile de vérifier que l'application $\underline{p}^*$ est sous-jacente à un foncteur ordonné p^*.

THEOREME 1. *Soit* $(\gamma^\cdot, <)$ *un groupoïde fonctoriellement ordonné obtenu par localisation du groupe* $G^\cdot$.

Soit, pour tout $f \in \gamma^\cdot$, $\varphi^o(f)$ *la classe des* $s \in G^\cdot$ *tels que* $s > f$; *alors* $\varphi^o(f)$ *est un atlas de* $G^\cdot$, *et l'application* $\underline{\varphi}$ *de* γ *dans* $\mathfrak{A}(G^\cdot)$ *définie par* $\underline{\varphi}(f) = \breve{\varphi^o(f)}$ *est sous-jacente à un foncteur ordonné d'hypermorphismes saturé (voir E, déf. 5 p. 55 et déf. 20 p. 72)*

$$\varphi = ((\mathfrak{A}^o(G^\cdot), <), \underline{\varphi}, (\gamma^\cdot, <))$$

qui est, en outre, compatible avec l'agrégation.

En raison de $(\mathfrak{L})$, $\varphi^o(f)$ n'est jamais vide.

Soit $e \in \gamma^\cdot_o$; alors si $s, s' \in G^\cdot$ sont tels que $s > e$ et $s' > e$, on a $s.s' > e$ et $s^{-1} > e$, et par suite $\varphi^o(e)$ est un sous-groupe de $G^\cdot$.

Soit $f \in \gamma^\cdot$; posons $\alpha(f) = e$, $\beta(f) = e'$. Les relations $s > f$ et $s' > f$ entraînent $s^{-1}.s' > e$ et les relations $s > f$ et $t > e$ entraînent $s.t > f$; il en résulte que :

$$\varphi^o(f) = s.\,\varphi^o(e) \text{ si } s \in \varphi^o(f);$$

on montrerait de même que $\varphi^o(f) = \varphi^o(e').s$; donc $\varphi^o(f)$ est un atlas de $G^\cdot$ et, en outre, on a la relation

$$(1) \qquad \varphi^o(e') = s.\varphi^o(e).s^{-1}.$$

Soit $(g, f) \in \gamma^\cdot * \gamma^\cdot$, $s \in \varphi^o(f)$ et $t \in \varphi^o(g)$; alors on a :

$$\varphi^o(f) = s.\varphi^o[\alpha(f)] \text{ et } \varphi^o(g) = t.\varphi^o[\beta(f)].$$

D'après (1) on a :

$$(\underline{\varphi}(g), \underline{\varphi}(f)) \in \mathfrak{A}^o(G^\cdot) * \mathfrak{A}^o(G^\cdot) \text{ et } \underline{\varphi}(g) \circ \underline{\varphi}(f) = \breve{X}$$

avec $X = t.s.\varphi^o[\alpha(f)]$.

Mais $t.s \in \varphi^o(g.f)$, d'où $\underline{\varphi}(g) \circ \underline{\varphi}(f) = \underline{\varphi}(g.f)$.

D'autre part on a vu que si $e \in \gamma^\cdot_o$, $\underline{\varphi}(e) \in (\mathfrak{A}^o(G^\cdot))_o$, donc $\underline{\varphi}$ est sous-jacente à un foncteur $(\mathfrak{A}^o(G^\cdot), \underline{\varphi}, \gamma^\cdot)$.

Soit $f \in \gamma^{\bullet}$ tel que $\underline{\varphi}(f) \in (\mathfrak{A}^{o}(G^{\bullet}))_o$; alors $\varphi^{o}(f)$ est un sous-groupe de $G^{\bullet}$ et, par suite, on a $f < \varepsilon$; donc f est une unité et par conséquent φ est bien fidèle.

Soient $e \in \gamma_o^{\bullet}$, $\check{U} = \underline{\varphi}(e)$ et $\check{X} \in \mathfrak{A}^{o}(G^{\bullet})$ tel que $\alpha^{o}(\check{X}) = \check{U}$; alors $X = s.U$ où $s \in G^{\bullet}$.

Soit $f = se$ (pseudo-produit); alors $f \in \gamma^{\bullet}$, $\alpha(f) = e$ et $\underline{\varphi}(f) = \check{X}$, donc φ est un foncteur d'hypermorphismes saturé.

Soient $f, f' \in \gamma^{\bullet}$ tels que $f' < f$; alors si $s \in G$ est tel que $s > f$, on a $s > f'$ et par suite $\varphi^{o}(f') \supset \varphi^{o}(f)$, donc

$$\underline{\varphi}(f') < \underline{\varphi}(f)$$

et φ est ordonné.

Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\gamma^{\bullet}$ admettant un agrégat $f = \bigcup_{i \in I} f_i$. Par définition de f, on a $s > f$ si et seulement si $s > f_i, \forall\, i \in I$. Il en résulte que :

$$\varphi^{o}(f) = \bigcap_{i \in I} \varphi^{o}(f_i) \text{ et, par suite, } \underline{\varphi}(f) = \bigcup_{i \in I} \underline{\varphi}(f_i).$$

Donc φ est compatible avec l'agrégation.

COROLLAIRE. *Si* $(\gamma^{\bullet}, <)$ *est un groupoïde inductif,* φ *est quasi-inductif (voir* [2]*).*

REMARQUES.

1) φ n'est pas, en général, compatible avec l'intersection.

2) Soit $C^{o} = \varphi(\gamma^{\bullet})$; alors C^{o} est un groupoïde d'opérateurs sur $\gamma_o^{\bullet}$ et $[C^{o}, \underline{\varphi}_o, \gamma_o^{\bullet}]$ est l'espèce de structures correspondante. Il est facile de vérifier que $[C^{o}, \underline{\varphi}_o, \gamma_o^{\bullet}]$ est une $\tilde{\Omega}$-espèce de structures (voir [2]) mais n'est pas en général une espèce de structure ordonnée.

DEFINITION 2. *Le foncteur* $\varphi = ((\mathfrak{A}^{o}(G^{\bullet}), <), \underline{\varphi}, (\gamma^{\bullet}, <))$ *sera appelé* foncteur majorant associé à $(\gamma^{\bullet}, <)$.

2. Immersion d'un groupoïde fonctoriellement ordonné dans un groupoïde o.l.g.

A) PRELIMINAIRES.

LEMME 4. *Soit* $C^{\bullet}$ *un groupoïde. Soit* D *une sous-classe de* C *telle que :*

1) si $f \in D$, alors $\alpha(f)$, $\beta(f) \in D$,

2) si $e \in D \cap C^{\bullet}_{o}$ et si $f \in C$ est tel que $\alpha(f) = e$, alors $f \in D$.

D définit un sous-groupoïde saturé de $C^{\bullet}$.

Démonstration simple.

LEMME 5. *Soit $C^{\bullet}$ un groupoïde, $D^{\bullet}_{1}$ un sous-groupoïde saturé de $C^{\bullet}$; alors $C - D_1 = D_2$ définit un sous-groupoïde saturé de $C^{\bullet}$ et $C^{\bullet}$ s'identifie au groupoïde somme des deux groupoïdes $D^{\bullet}_{1}$ et $D^{\bullet}_{2}$ ($C^{\bullet} = D^{\bullet}_{1} + D^{\bullet}_{2}$).*

Démonstration simple.

LEMME 6. *Soit $C^{\bullet}$ un groupoïde, $D^{\bullet}$ un sous-groupoïde saturé de $C^{\bullet}$, ρ une relation d'équivalence sur $C^{\bullet}$ telle que*

1) $C^{\bullet}/\rho = \tilde{C}^{\bullet}$ soit un groupoïde quotient strict de $C^{\bullet}$.

2) $D^{\bullet}$ soit aussi saturé pour ρ.

Alors $\underline{\tilde{\rho}}(D) = \tilde{D}$ définit un sous-groupoïde saturé de $\tilde{C}^{\bullet}$.

Soit $x \in \tilde{D}$; il est clair que $\tilde{\alpha}(x)$, $\tilde{\beta}(x) \in \tilde{D}$.

Soit $u \in \tilde{D} \cap \tilde{C}^{\bullet}_{o}$ et $x \in \tilde{C}^{\bullet}$ tel que $\tilde{\alpha}(x) = u$; alors il existe $f \in C^{\bullet}$ tel que :

$$\underline{\tilde{\rho}}(f) = x \text{ et } \underline{\tilde{\rho}}(\alpha(f)) = u.$$

Donc, comme D est saturé pour ρ, on a $\alpha(f) \in D^{\bullet}$ et, comme D est saturé dans $C^{\bullet}$, on a $f \in D$, d'où $x \in \tilde{D}$.

Le lemme résulte alors de l'application du lemme 4.

LEMME 7. *Soit $(C, <)$ une classe ordonnée, ρ une relation d'équivalence sur C telle que la condition suivante soit réalisée :*

Soient $f, f' \in C$ tels que $f \sim f' \bmod \rho$; alors, si f ou f' n'est pas maximal, on a $f = f'$.

Alors $(\tilde{C}, \propto)$ est une classe ordonnée, si $\tilde{C} = C/\rho$ et si $\propto$ est la relation quotient de la relation $<$ par ρ.

En effet, soient $x, y, z \in \tilde{C}$ tels que $x \propto y$ et $y \propto z$; il existe $f \in x$, $g \in y$, $g' \in y$, $h \in z$ tels que $f < g$ et $g' < h$.

1) Si g ou g' n'est pas maximal alors $g = g'$ et $f < h$, d'où $x \propto z$.

2) Si g et g' sont maximaux alors $h = g'$, d'où $x \propto y = z$.

Soient $x, y \in C$ tels que $x \propto y$ et $y \propto x$; alors il existe $f, f' \in x$ et

$g, g' \in y$ tels que $f < g$ et $g' < f'$.

1) Si g ou g' n'est pas maximal, alors $g = g'$ et g n'est pas maximal, d'où $f = f'$, et par suite $f = g$, d'où $x = y$.

2) Si g et g' sont maximaux, alors $f' = g'$, d'où $x = y$.

B) THEOREME FONDAMENTAL.

THEOREME 2. *Soient $(H^\bullet, <)$ et $(K^\bullet, <)$ deux groupoïdes fonctoriellement ordonnés et $p = ((K^\bullet, <), \underline{p}, (H^\bullet, <))$ un foncteur ordonné tels que :*

1) $(H_0^\bullet, <)$ ait un plus grand élément E dont la composante dans $H^\bullet$ est réduite à un sous-groupe $A^\bullet$ de $H^\bullet$.

2) $K^\bullet$ soit obtenu par localisation d'un groupe $G^\bullet$.

3) p soit bien fidèle, et $p(E) = \varepsilon$ (ε = élément unité de $G^\bullet$).

Alors il existe un groupoïde fonctoriellement ordonné $(\hat{H}^\bullet, \prec)$ et un foncteur ordonné $\hat{p} = ((K^\bullet, <), \underline{\hat{p}}, (\hat{H}^\bullet, \prec))$ tels que :

1) $\hat{H}^\bullet$ soit obtenu par localisation d'un groupe $\hat{G}^\bullet$;

2) il existe une équivalence ordonnée $\tau = (\hat{\hat{H}}^\bullet, \underline{\tau}, H^\bullet)$ de $(H^\bullet, <)$ sur un sous-groupoïde régulier $\hat{\hat{H}}^\bullet$ de $\hat{H}^\bullet$;

3) $\hat{p}$ soit bien fidèle et vérifie $p = \hat{p} \circ \tau$; de plus, la restriction de $\hat{p}$ à $\hat{G}^\bullet$ est un isomorphisme de $\hat{G}^\bullet$ sur $G^\bullet$.

Soit $F \doteq K.p(H_0^\bullet)$ et $X(F, p) = (F, \overline{H}^\bullet, \tilde{p})$ l'extension canonique de (F, p), avec $\tilde{p} = (K^\bullet, \underline{\tilde{p}}, \overline{H}^\bullet)$.

Rappelons (voir II.1) que $\overline{H}^\bullet = \mathfrak{N}^{\boxminus}/\rho$, si $\mathfrak{N}^{\boxminus}$ est le groupoïde des triplets (k, f, e) tels que :

$$k, f, e \in K^\bullet,\ e \in H_0^\bullet,\ \beta(f) = \alpha(k),\ \underline{p}(e) = \alpha(f),$$

la loi de composition s'écrivant :

$$(k_1, f_1, e_1) \boxminus (k, f, e) = (k_1.k, f, e)$$
$$\text{si, et seulement si, } e = e_1 \text{ et } f_1 = k.f$$

et ρ étant la relation d'équivalence suivante :

$$(k, f, e) \sim (k_1, f_1, e_1) \bmod \rho$$
$$\text{si, et seulement si, } k = k_1, \text{ et il existe } g \in H \text{ tel que}$$
$$\beta(g) = e,\ \alpha(g) = e_1 \text{ et } f_1 = f.\underline{p}(g);$$

$\tilde{p}$ est défini par $\tilde{p}\,[\,(k,f,e) \bmod \rho\,] = k$ et l'équivalence $(\overline{H}^{\bullet}, \underline{\sigma}, H^{\bullet})$ où $\overline{H}^{\bullet} \subset \tilde{H}^{\bullet}$ par $\underline{\sigma}(h) = (\,\underline{p}(h), \underline{p}(\alpha(h)), \alpha(h)\,) \bmod \rho$, si $h \in H^{\bullet}$.

Si $(H^{\bullet}, <)$ et $(K^{\bullet}, <)$ sont des groupoïdes fonctoriellement ordonnés (voir II, 5) et si $p = ((K^{\bullet}, <), \underline{p}, (H^{\bullet}, <))$ est ordonné, alors $(\tilde{H}^{\bullet}, \propto)$ est fonctoriellement ordonné, $\propto$ désignant la relation d'ordre quotient de la relation d'ordre $<$ définie sur $\mathfrak{N}$ par :

$$(k, f, e) < (k_1, f_1, e_1)$$

si, et seulement si, $k < k_1$, $f < f_1$, $e < e_1$.

$\tilde{p} = ((K^{\bullet}, <), \tilde{\underline{p}}, (\tilde{H}^{\bullet}, \propto))$ est ordonné, $\overline{H}^{\bullet}$ un sous-groupoïde régulier de $(\tilde{H}^{\bullet}, \propto)$ et $\sigma = ((\overline{H}^{\bullet}, \propto), \underline{\sigma}, (H^{\bullet}, <))$ une équivalence ordonnée (voir II, th. 5).

Le théorème résultera alors des lemmes suivants.

LEMME 1. *La sous-classe Δ de $\mathfrak{N}^{\boxminus}$ formé des éléments de la forme (t,s,E)) où $t, s \in G^{\bullet}$, définit un sous-groupoïde saturé de $\mathfrak{N}^{\boxminus}$ qui est en outre saturé pour ρ.*

Remarquons que, compte tenu de $\underline{p}(E) = \varepsilon$ et du choix de F, le triplet $(t, s, E) \in \mathfrak{N}^{\boxminus}$ quels que soient $t, s \in \overline{G}^{\bullet}$.

Soit $(t, s, E) \in \Delta$; alors on a :

$$\alpha(t, s, E) = (\varepsilon, s, E) \in \Delta \,;\; \beta(t, s, E) = (\varepsilon, t.s, E) \in \Delta .$$

D'autre part, soit $(k, f, e) \in \mathfrak{N}^{\boxminus}$ tel que $\alpha(k, f, e) \in \Delta$; nécessairement on a $e = E$ et $f \in G^{\bullet}$, donc $\alpha(k) = \varepsilon$ et, puisque la composante de ε dans $K^{\bullet}$ est $G^{\bullet}$ (voir la remarque 2 qui suit la déf. 1), on a $k \in G^{\bullet}$. Le lemme 4 entraîne alors que Δ définit un sous-groupoïde saturé $\Delta^{\boxminus}$ de $\mathfrak{N}^{\boxminus}$.

Soient $(k, f, e) \in \mathfrak{N}^{\boxminus}$ et $(t, s, E) \in \Delta^{\boxminus}$ tels que :

$$(k, f, e) \sim (t, s, E) \bmod \rho ;$$

alors $k = t$, et il existe $g \in H^{\bullet}$ tel que $\alpha(g) = e$, $\beta(g) = E$ et $f = s.\underline{p}(g)$.

En raison de l'hypothèse sur E, on a

$$g \in A^{\bullet} \text{ et } e = E, \text{d'où } \alpha(f) = \varepsilon \text{ et } f \in G^{\bullet};$$

donc $(k, f, e) \in \Delta^{\boxminus}$ et $\Delta^{\boxminus}$ est saturé pour ρ.

CONSEQUENCES. Les lemmes 6 et 5 entraînent que $\tilde{\Delta} = \underline{\tilde{p}}(\Delta)$ définit un sous-groupoïde saturé de $\tilde{H}^\bullet$ et qu'on peut poser

$$\tilde{H}^\bullet = \tilde{\Delta}^\bullet + \tilde{C}^\bullet,$$

$\tilde{C}^\bullet$ étant un sous-groupoïde saturé de $\tilde{H}^\bullet$.

D'autre part, soit $B^\bullet = p(A^\bullet)$; alors $B^\bullet$ est un sous-groupe de $G^\bullet$ isomorphe à $A^\bullet$; soit G/B l'espace homogène de classes à gauche *mod* B; alors $G^\bullet$ opère sur G/B et on notera $t\theta$ l'élément de G/B obtenu en faisant opérer $t \in G^\bullet$ sur $\theta \in G/B$. Soit $\tilde{b}$ l'application canonique de G sur G/B.

Puisque (t, s, E) et $(t', s', E) \in \Delta^\bullet$ sont équivalents *mod* ρ si et seulement si $t = t'$ et $s^{-1}.s' \in B^\bullet$, on peut identifier l'élément (t,s,E) *mod* ρ de $\tilde{\Delta}$ au couple (t, θ) où $\theta = \tilde{b}(s)$.

Avec cette nouvelle notation la restriction de la loi de composition de $\tilde{H}^\bullet$ à $\tilde{\Delta}^\bullet$ s'écrit : si $t, t' \in G'$ et $\theta, \theta' \in G/B$ on a :

$$(t', \theta').(t, \theta) = (t'.t, \theta)$$

si, et seulement si, $\theta' = t\theta$.

De plus

$$\tilde{\alpha}(t, \theta) = (\varepsilon, \theta) \text{ et } \tilde{\beta}(t, \theta) = (\varepsilon, t\theta).$$

LEMME 2. *Soit R la relation d'équivalence sur $\tilde{\Delta}^\bullet$ associée à la restriction de $\tilde{p}$ à $\tilde{\Delta}^\bullet$ et λ la relation d'équivalence sur $\tilde{H}^\bullet$ obtenue par réunion de R sur $\tilde{\Delta}$ et de l'identité sur $\tilde{C}^\bullet$. Alors $\hat{H}^\bullet = \tilde{H}^\bullet/\lambda$ est un groupoïde quotient strict de $\tilde{H}^\bullet$ et $\tilde{p}$ définit par passage au quotient un foncteur $\hat{p} = (K^\bullet, \underline{\hat{p}}, \hat{H}^\bullet)$ bien fidèle.*

La restriction de $\tilde{p}$ à $\tilde{\Delta}^\bullet$ est un foncteur de $\tilde{\Delta}$ sur $G^\bullet$ définissant $G^\bullet$ comme quotient strict de $\tilde{\Delta}$ puisque $\underline{\tilde{p}}(t, \theta) = t$. Donc $\tilde{\Delta}^\bullet/R$ est un groupe $\hat{G}^\bullet$ isomorphe à $G^\bullet$.

Il résulte alors de la définition de λ et des lemmes 5 et 6 que $\hat{H}^\bullet = \tilde{H}^\bullet/\lambda$ est un quotient strict et que $\hat{H}^\bullet$ s'identifie à la somme $\hat{G}^\bullet + \hat{C}^\bullet$ où $\hat{C}^\bullet$ est isomorphe à $\tilde{C}^\bullet$. On posera

$$\underline{\tilde{\lambda}}(t, \theta) = \hat{t}$$

pour $(t, \theta) \in \tilde{\Delta}^\bullet$ et

$$\underline{\tilde{\lambda}}\,(x) = \hat{x}$$

pour $x \in \tilde{C}^{\cdot}$. Dans ces conditions $\underline{\hat{p}}$ est définie par :

$$\underline{\hat{p}}\,(\hat{t}) = t \text{ pour } \hat{t} \in \hat{G}^{\cdot} \text{ et } \underline{\hat{p}}\,(\hat{x}) = \underline{\tilde{p}}\,(x) \text{ pour } \hat{x} \in \hat{C}^{\cdot}.$$

Il est clair que $\hat{p}$ est bien fidèle.

LEMME 3. *$\tau = \tilde{\lambda} \circ \sigma$ est une équivalence de $H^{\cdot}$ sur un sous-groupoïde $\hat{\bar{H}}^{\cdot}$ de $\hat{H}^{\cdot}$.*

En raison du lemme 5, $H^{\cdot}$ s'identifie au groupoïde somme $A^{\cdot} + L^{\cdot}$ où $L^{\cdot}$ est un sous-groupoïde saturé de $H^{\cdot}$.

Par σ, $A^{\cdot}$ s'identifie au sous-groupe $\bar{A}^{\cdot}$ de $\tilde{\Delta}^{\cdot}$ formé des éléments de la forme (t, θ) où $t \in B$ et $\theta = \tilde{b}(\varepsilon)$, et $L^{\cdot}$ à un sous-groupoïde $\bar{L}^{\cdot}$ de $\tilde{C}^{\cdot}$, et on peut écrire :

$$\bar{H}^{\cdot} = \bar{L}^{\cdot} + \bar{A}^{\cdot}.$$

Par $\tilde{\lambda}$, $\bar{A}^{\cdot}$ s'identifie au sous-groupe $\hat{A}^{\cdot}$ de $\hat{G}^{\cdot}$ formé des éléments $\hat{t}$ tels que $t \in B^{\cdot}$ et $\bar{L}^{\cdot}$ à un sous-groupoïde $\hat{L}^{\cdot}$ de $\hat{C}^{\cdot}$. Si on pose

$$\hat{\bar{H}}^{\cdot} = \hat{A}^{\cdot} + \hat{L}^{\cdot},$$

alors $\tau = \tilde{\lambda} \circ \sigma$ est une équivalence de $H^{\cdot}$ sur $\hat{\bar{H}}^{\cdot}$.

REMARQUE. Les relations $p = \tilde{p} \circ \sigma$ et $\tilde{p} = \hat{p} \circ \tilde{\lambda}$ entraînent $p = \hat{p} \circ \tau$.

LEMME 4. *La relation $\prec$ quotient de la relation $\propto$ par λ est une relation d'ordre; de plus, si $\hat{x} \in \hat{C}^{\cdot}$ et $\hat{t} \in \hat{G}^{\cdot}$, alors on a $\hat{x} \prec \hat{t}$ si et seulement si $\underline{\hat{p}}\,(\hat{x}) < t$.*

Montrons déjà que tous les éléments de $\tilde{\Delta}$ sont maximaux dans $(\tilde{H}, \propto)$:

En effet, soit $(t, \theta) \in \tilde{\Delta}$ et $x \in \tilde{H}^{\cdot}$ tel que $(t, \theta) \propto x$. Il existe $(k, f, e) \in x$ et $s \in \theta$ tel que $(t, s, E) < (k, f, e)$. Tous les éléments de G étant maximaux dans $(K, <)$ et E étant le plus grand élément de $(H_0^{\cdot}, <)$, on a $t = k$, $s = f$ et $e = E$, donc (t, θ) est maximal.

Il résulte alors du lemme 7 que la relation $\prec$ est une relation d'ordre.

Soit $\hat{x} \in \hat{C}^{\cdot}$ et $\hat{t} \in \hat{G}^{\cdot}$ tels que $\hat{x} \prec \hat{t}$; alors il existe $\theta \in G/B$ tel que $x \propto (t, \theta)$; comme $\tilde{p}$ est ordonné on a :

$$\underline{\hat{p}}(\hat{x}) = \underline{\tilde{p}}(x) < \underline{\tilde{p}}(t, \theta) = t.$$

Réciproquement, supposons que $\underline{\hat{p}}(\hat{x}) < t$ et soit $k = \underline{\hat{p}}(\hat{x})$; alors il existe $(k, f, e) \in \mathfrak{N}^{\boxminus}$ tel que $\underline{\tilde{\rho}}(k, f, e) = x$. Soit $s \in G^{\bullet}$ tel que $s > f$; alors on a

$$(k, f, e) < (t, s, E)$$

et par suite $x \propto (t, \theta)$, si $\theta = \tilde{b}(s)$, d'où $\hat{x} \prec \hat{t}$.

LEMME 5. *$(\hat{H}^{\bullet}, \prec)$ est fonctoriellement ordonné et obtenu par localisation de $\hat{G}^{\bullet}$.*

Soient $(\hat{y}, \hat{x}) \in \hat{C}^{\bullet} {}_{*} \hat{C}^{\bullet}$ et $s, t \in G^{\bullet}$ tels que $\hat{y} \prec \hat{t}$, $\hat{x} \prec \hat{s}$; alors, d'après le lemme précédent, on a $\underline{\hat{p}}(\hat{y}) < t$ et $\underline{\hat{p}}(\hat{x}) < s$.

Mais, comme $\underline{\hat{p}}(\hat{y}.\hat{x}) = \underline{\hat{p}}(\hat{y}).\underline{\hat{p}}(\hat{x}) < \underline{t}.\underline{s}$, le même lemme entraîne alors $\hat{y}.\hat{x} \prec \widehat{t.s} = \hat{t}.\hat{s}$.

Soit maintenant $\hat{z} \in \hat{C}^{\bullet}$ et $t, s \in G^{\bullet}$ tels que $\hat{z} \prec \hat{t}.\hat{s} = \widehat{t.s}$; il existe $\theta \in G/B$ tel que $z \propto (t.s, \theta)$.

Comme $(t.s, \theta) = (t, s\theta).(s.\theta)$ et comme $(\hat{H}^{\bullet}, \propto)$ est fonctoriellement ordonné, il existe $(y, x) \in \tilde{H}^{\bullet} {}_{*} \tilde{H}^{\bullet}$ tel que :

$$z = y.x \text{ et } x \propto (s, \theta),\ y \propto (t, s\theta),$$

d'où $\hat{z} = \hat{y}.\hat{x}$ et $\hat{x} \prec \hat{s}$, $\hat{y} \prec \hat{t}$.

Soit $\hat{z} \in \hat{C}$ tel que $\hat{z} \prec \hat{\varepsilon}$; alors il existe $\theta \in G/B$ tel que $z \prec (\varepsilon, \theta)$; mais $(\varepsilon, \theta) \in \tilde{H}^{\bullet}_{0}$ et par suite z, donc aussi $\hat{z}$, sont des unités.

L'axiome I' de [6] est donc vérifié dans un cas particulier; dans les autres cas la vérification de I' est immédiate du fait de l'équivalence ordonnée entre $(\tilde{C}^{\bullet}, \propto)$ et $(\hat{C}^{\bullet}, \prec)$.

Par suite $(\hat{H}^{\bullet}, \prec)$ est fonctoriellement ordonné.

Soit $\hat{z} \in \hat{C}^{\bullet}$; alors il existe $t \in G$ tel que $\underline{\hat{p}}(\hat{z}) < t$; il en résulte $\hat{z} \prec \hat{t}$ et la condition $(\mathfrak{L})$ de la définition 1 est vérifiée; ce qui prouve la deuxième partie du lemme.

LEMME 6. *T est une équivalence ordonnée, $\hat{p}$ est ordonné et $\hat{\hat{H}}^{\bullet}$ est un sous-groupoïde régulier de $\hat{H}^{\bullet}$.*

Soient $h, h' \in H^\bullet$ tels que $h < h'$; alors $\underline{\sigma}(h) \propto \underline{\sigma}(h')$ et par définition de la relation $\prec$ on a $\underline{\tau}(h) \prec \underline{\tau}(h')$.

Réciproquement, supposons que $\underline{\tau}(h) \prec \underline{\tau}(h')$.

Si $h, h' \in L^\bullet$, alors $\underline{\sigma}(h) \propto \underline{\sigma}(h')$ et $h < h'$.

Si $h \in L^\bullet$ et $h' \in A^\bullet$, alors on a $\underline{\tau}(h') = \widehat{\underline{p}(h')}$ et, d'après le lemme 4, $\hat{\underline{p}}(\tau(h)) < \underline{p}(h')$, d'où $\underline{p}(h) < \underline{p}(h')$ puisque $\hat{\underline{p}} \circ \underline{\tau}(h) = \underline{p}(h)$.

Soit $h_1 = h' \alpha(h)$; alors on a

$$\underline{p}(h_1) < \underline{p}(h').$$

La relation $\alpha(\underline{p}(h_1)) = \alpha(\underline{p}(h))$ entraîne $\underline{p}(h_1) = \underline{p}(h)$ et, comme p est bien fidèle, on a :

$$h = h_1 \text{ d'où } h < h'.$$

Les deux dernières affirmations du lemme sont faciles à démontrer.

3. Application au cas où $(K^\bullet, <)$ est le groupoïde des atlas d'un groupe. Interprétation des résultats.

A) APPLICATION DU THEOREME FONDAMENTAL.

Supposons que les hypothèses du théorème 2 soient réalisées et qu'en outre $(K^\bullet, <)$ soit le groupoïde des atlas de $G^\bullet$.

Soit $i = (\hat{G}^\bullet, \underline{i}, G^\bullet)$ l'isomorphisme de $G^\bullet$ sur $\hat{G}^\bullet$ défini par

$$\underline{i}(t) = \hat{t}, \text{ si } t \in G.$$

Soit $i^* = (\mathfrak{A}^o(\hat{G}^\bullet), \underline{i}^*, \mathfrak{A}^o(G^\bullet))$ l'équivalence induite (voir proposition 2).

Soit $\hat{\varphi} = (\mathfrak{A}^o(\hat{G}^\bullet), \hat{\underline{\varphi}}, \hat{H}^\bullet)$ le foncteur majorant associé à $\hat{H}^\bullet$ (voir définition 2).

PROPOSITION 3. $i^* \circ \hat{p} = \hat{\varphi}$.

a) Soit $\hat{t} \in \hat{G}^\bullet$; alors on a :

$$\hat{\underline{\varphi}}(\hat{t}) = \hat{t},\ \hat{\underline{p}}(\hat{t}) = t \text{ et } \underline{i}(t) = \hat{t},$$

d'où $(\underline{i}^* \circ \hat{\underline{p}})(\hat{t}) = \hat{\underline{\varphi}}(\hat{t})$.

b) Soit $\hat{z} \in \hat{\underline{C}}^\bullet$; alors $\hat{\varphi}^o(\hat{z})$ est la classe des $\hat{t} \in \hat{G}$ tels que $\hat{z} \prec \hat{t}$. Mais la relation $\hat{z} \prec \hat{t}$ est équivalente à $\underline{i}^{-1}(\hat{t}) = t > \hat{\underline{p}}(\hat{z})$, et dans

$\mathfrak{A}^o(G^\cdot)$ la classe des $t \in G$ tels que $t > \underline{\hat{p}}(\hat{z})$ est égale à $(\hat{p}(\hat{z}))^{\smile}$, donc

$$i(t) \in \hat{\varphi}^o(\hat{z})$$

si, et seulement si, $t \in (\hat{p}(\hat{z}))^{\smile}$.

Il résulte alors de la définition de i^* que

$$\underline{\hat{\varphi}}(\hat{z}) = i^*(\underline{\hat{p}}(\hat{z})).$$

COROLLAIRE. $(i^*, \hat{\varphi}, p, \tau) \in \sqsubset \mathfrak{F}$.

En effet, les relations $\hat{p} \circ \tau = p$ et $i^* \circ \hat{p} = \hat{\varphi}$ entraînent

$$\hat{\varphi} \circ \tau = i^* \circ p.$$

B) CONSTRUCTION DE LA CATEGORIE $\mathfrak{H}$.

Soit $\mathfrak{H}_o$ la classe des triplets $\hat{p} = (G^\cdot, p, H^\cdot)$ tels que :

1) $H^\cdot$ soit un groupoïde fonctoriellement ordonné tel que $H_o^\cdot$ ait un plus grand élément E dont la composante connexe dans $H^\cdot$ soit réduite à un sous-groupe $A^\cdot$ de $H^\cdot$.

2) $G^\cdot$ soit un groupe.

3) $\hat{p} = ((\mathfrak{A}^o(G^\cdot), <), \underline{p}, (H^\cdot, <))$ soit un foncteur ordonné bien fidèle tel que $\underline{p}(E) = \varepsilon$ (ε, élément unité de $G^\cdot$).

Soit $\mathfrak{H}^-$ la classe des quadruplets de la forme $(\hat{p}_2, \hat{p}_1, q, u)$ tels que :

1) $p_i \in \mathfrak{H}_o$, $i = 1, 2$ avec $\hat{p}_i = (G_i^\cdot, p_i, H_i^\cdot)$.

2) $q = ((H_2^\cdot, <), \underline{q}, (H_1^\cdot, <))$ soit un foncteur ordonné tel que $\underline{q}(E_1) = (E_2)$.

3) u soit un homomorphisme de $G_1^\cdot$ dans $G_2^\cdot$ tel que

$$(u^*, p_2, p_1, q) \in \sqsubset \overline{\Omega}(\Omega', \Omega)$$

PROPOSITION 4. $\mathfrak{H}$ *est une catégorie pour la loi de composition suivante :*

$$(\hat{p}'_2, \hat{p}'_1, q', u')(\hat{p}_2, \hat{p}_1, q, u) = (\hat{p}'_2, \hat{p}_1, q' \circ q, u' \circ u)$$

si, et seulement si, $\hat{p}'_1 = \hat{p}_2$.

$\mathfrak{H}_o$ *est une classe d'objets pour* $\mathfrak{H}$.

Vérification immédiate.

Soit $\mathfrak{L}_o$ la classe des groupoïdes fonctoriellement ordonnés $(H^\cdot, <)$

obtenus par localisation d'un groupe $G^{\bullet}$.

Soit $\mathcal{L}$ la classe de foncteurs ordonnés $q = (H_2, \underline{q}, H_1)$ tels que

1) $H_i \in \mathcal{L}_o$, $i = 1, 2$.

2) $\underline{q}(E_1) = (E_2)$ (E_i élément unité de G_i).

3) quel que soit $f_1 \in H_1$, si $s_2 \in G_2$ est tel que $s_2 > \underline{q}(f_1)$ alors il existe $s_1 \in G_1$ tel que $s_1 > f_1$ et $\underline{q}(s_1) = s_2$.

PROPOSITION 5. *Muni de la loi de composition naturelle entre foncteurs, $\mathcal{L}$ est une catégorie admettant $\mathcal{L}_o$ pour classe d'objets. Elle est en outre isomorphe à une sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}$.*

La 1re affirmation de la proposition se vérifie facilement.

Définissons une application $\underline{\mathcal{T}}$ de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{H}$:

Soit $H^{\bullet} \in \mathcal{L}_o$; posons $\underline{\mathcal{T}}(H^{\bullet}) = (G^{\bullet}, p, H^{\bullet})$ où p est le foncteur majorant associé à $H^{\bullet}$. Il est clair que $\underline{\mathcal{T}}(H^{\bullet}) \in \mathcal{H}_o$.

Soit $q = (H_2, \underline{q}, H_1) \in \mathcal{L}$; posons

$$\underline{\mathcal{T}}(q) = (\underline{\mathcal{T}}(H_2), \underline{\mathcal{T}}(H_1), q, q/G_1)$$

où q/G_1 est la restriction de q à G_1.

Il est facile de vérifier que $\mathcal{T} = (\mathcal{H}, \underline{\mathcal{T}}, \mathcal{L})$ est un foncteur injectif et que $\underline{\mathcal{T}}(\mathcal{L})$ définit une sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}$ que l'on notera $\mathcal{H}^{L}$. Remarque : On identifiera $\mathcal{H}^{L}$ à $\mathcal{L}$.

C) PROJECTIONS DANS LA CATEGORIE $\mathcal{H}$.

THEOREME 3. *$\mathcal{H}$ est une catégorie à $\mathcal{H}^{L}$-projections (voir E déf. 13, III, p. 142).*

Soit $\hat{p} = (G^{\bullet}, p, H^{\bullet}) \in \mathcal{H}$; alors les conditions du théorème 2 sont réalisées et soit $\hat{p} = (\mathfrak{A}^{o}(G^{\bullet}), \underline{\hat{p}}, \hat{H}^{\bullet})$ le foncteur construit dans ce théorème.

Compte tenu de la remarque qui suit la proposition 5, on a $\hat{H}^{\bullet} \in \mathcal{H}^{L}_o$; le corollaire de la proposition 3 entraîne alors que :

$$(\hat{H}^{\bullet}, \hat{p}, \tau, i) \in \mathcal{H}.$$

Nous allons montrer que ce quadruplet est un $(\mathcal{H}^{L}, \mathcal{H})$-projecteur. Soit $(H'^{\bullet}, \hat{p}, q, u) \in \mathcal{H}^{L}_o . \mathcal{H}$ alors on a $H'^{\bullet} \in \mathcal{H}^{L}_o$ et H' est obtenu par localisation du groupe $G'^{\bullet}$.

Soit $\varphi' = (\mathfrak{A}^o(G'^{\bullet}), \underline{\varphi}', H'^{\bullet})$ le foncteur majorant associé et

$$C'^o = \varphi'(H'^{\bullet}).$$

REMARQUE PRELIMINAIRE. Soit $\underline{\varphi}'_o$ la restriction de $\underline{\varphi}'$ à $H'^{\bullet}_o$; on sait que $(C'^o, \underline{\varphi}'_o, H'^{\bullet}_o)$ est une espèce de structures, le foncteur d'hypermorphismes associé étant $(C'^o, \underline{\varphi}', H'^{\bullet})$ (voir la remarque qui suit le th. 1). Il en résulte que C'^o est un groupoïde d'opérateurs sur $H'^{\bullet}_o$ relativement à la loi de composition $K : (A, e) \to Ae$ si et seulement si

$$A \in C'^o \text{ et } e \in H'_o \text{ sont tels que } \alpha^o(A) = \underline{\varphi}'_o(e),$$

et on a :

$$Ae = \beta(f'),$$

f' étant l'élément unique de $H'^{\bullet}$ tel que $\alpha(f') = e$ et $\underline{\varphi}'(f') = A$.

On identifiera dans la suite f' au couple (A, e) qui le détermine.

On a les relations suivantes :

$$(1) \qquad \underline{\varphi}'_o(Ae) = \beta^o(A);$$

$$(2) \qquad (B \circ A)e = B(Ae), \text{ si } (B, A) \in C'^o * C'^o;$$

$$(3) \qquad (B, Ae).(A, e) = (B \circ A, e).$$

Les notations employées dans la suite sont celles du théorème 2, on posera en outre

$$\underline{u}^*(f) = f^* \text{ si } f \in \mathfrak{A}^o(G^{\bullet})$$

et on remplacera $\underline{\rho}$ par ρ et $\underline{q}$ par q.

Définissons une application $\underline{\psi}$ *de* $\mathfrak{N}^{\ominus}$ *dans* $H'^{\bullet}$:

Soit $(k, f, e) \in \mathfrak{N}$; alors $k, f \in \mathfrak{A}^o(G^{\bullet})$ et $e \in H^{\bullet}_o$.

Des relations $\alpha^o(f) = p(e)$ et $\varphi' \circ q = u^* \circ p$ on déduit

$$\alpha^o(f^*) = (\alpha^o(f))^* = (p(e))^* = \varphi'(q(e)),$$

donc $(f^*, q(e)) \in H'^{\bullet}$ et d'après (1) $\underline{\varphi}'(f^* q(e)) = \beta^o(f^*)$; comme $\beta^o(f) = \alpha^o(k)$, on a $\beta^o(f^*) = \alpha^o(k^*)$ et par suite

$$(k^*, f^* q(e)) \in H'^{\bullet};$$

posons alors :

$$\psi(k, f, e) = (k^*, f^* q(e)).$$

Si $(f^{\boxminus}, e) \in \mathfrak{N}_o^{\boxminus}$ on a $\underline{\psi}(f^{\boxminus}, e) = f^* q(e) \in H'^{\bullet}_o$.

Soient $T = (k, f, e)$, $T' = (k', f', e') \in \mathfrak{N}$ tels que $(T', T) \in \mathfrak{N} * \mathfrak{N}$. Alors on a :

$$e' = e, \; f' = k . f \text{ et } T' \boxminus T = (k' . k, f, e).$$

Posons $f^* q(e) = a$; alors on a, par définition de $\underline{\psi}$:

$$\underline{\psi}(T) = (k^*, a), \underline{\psi}(T') = (k'^*, (k \circ f)^* q(e)).$$

Mais d'après (2), on a

$$(k \circ f)^* q(e) = (k^* \circ f^*) q(e) = k^*(f^* q(e)) = k^* a,$$

d'où

$$\underline{\psi}(T') = (k'^*, k^* a).$$

Il résulte alors des expressions de $\underline{\psi}(T)$ et de $\underline{\psi}(T')$ que

$$\alpha(\underline{\psi}(T')) = k^* a = \beta(\underline{\psi}(T)),$$

donc $(\underline{\psi}(T'), \underline{\psi}(T)) \in H'^{\bullet} * H'^{\bullet}$. Et on a, d'après (3) :

$$\underline{\psi}(T') . \underline{\psi}(T) = (k'^*, k^* a).(k^*, a) = (k'^* \circ k^*, a).$$

Mais

$$(k'^* \circ k^*, a) = ((k' \circ k)^*, a) = \underline{\psi}(T' . T);$$

donc l'application $\underline{\psi}$ définit un foncteur

$$\psi = ((H'^{\bullet}, <), \underline{\psi}, (\mathfrak{N}^{\boxminus}, <))$$

et il est facile de montrer que ψ est ordonné.

Montrons que ψ est compatible avec ρ.

Il suffit de vérifier que si $(f_i^{\boxminus}, e_i) \in \mathfrak{N}_o$, $i = 1, 2$ sont tels que $(f_1, e_1) \sim (f_2, e_2) \bmod \rho$, alors on a $\underline{\psi}(f_1, e_1) = \underline{\psi}(f_2, e_2)$, où

$$\underline{\psi}(f_1, e_1) = f_1^* q(e_1) \text{ et } \underline{\psi}(f_2, e_2) = f_2^* q(e_2).$$

Il existe, par hypothèse, $g \in H^{\bullet}$ tel que

$$\alpha(g) = e_1 \text{ et } \beta(g) = e_2 \text{ et } f_1 = f_2 \circ \underline{p}(g),$$

d'où $f_1^* = f_2^* \circ (p(g))^*$ et, en raison de (2),

$$\underline{\psi}(f_1, e_1) = (f_2^* \circ (p(g))^*)\, q(e_1) = f_2^*((p(g))^*\, q(e_1));$$

mais

$$(p(g))^* = \varphi'(q(g)) \text{ et } \varphi'(q(g))\, q(e_1) = q(e_2),$$

d'où

$$\underline{\psi}(f_1, e_1) = f_2^*\, q(e_2) = \underline{\psi}(f_2, e_2).$$

Par suite ψ définit par passage au quotient un foncteur

$$\tilde{\psi} = ((H'^{\cdot}, <), \tilde{\underline{\psi}}, (\tilde{H}^{\cdot}, \propto))$$

qui est encore ordonné.

Montrons que $\tilde{\psi}$ est compatible avec λ:

Soit $(t, s, E) \in \Delta$, où $t, s \in G^{\cdot}$; alors on a

$$\underline{\psi}(t, s, E) = (t^*, s^*\, q(E));$$

comme $q(E) = E'$ et $s^*, t^* \in G'$, on a $s^*\, q(E) = E'$ et $(t^*, E') = t^*$, d'où

$$\underline{\psi}(t, s, E) = t^* \text{ et } \tilde{\underline{\psi}}(t, \theta) = t^*, \text{ si } \theta = \tilde{b}(s);$$

donc $\tilde{\psi}$ est compatible avec λ et définit par passage au quotient un foncteur $\hat{q} = ((H'^{\cdot}, <), \underline{\hat{q}}, (\hat{H}^{\cdot}, \prec))$ qui est encore ordonné.

Soit $\hat{u}$ la restriction de $\hat{q}$ à $\hat{G}^{\cdot}$; il résulte de ce qui précède que $\hat{u}(\hat{t}) = t^*$, donc $\hat{u}$ est un homomorphisme de $\hat{G}^{\cdot}$ dans $G'^{\cdot}$ et, puisque $\hat{t} = \underline{i}(t)$ et $t^* = u(t)$, on a

$$\hat{u} \circ i = u.$$

$$\begin{tikzcd}
H^{\cdot} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "r"'] & \mathfrak{A}^o(G^{\cdot}) \arrow[d, "i^*"] \arrow[ddr, "u^*"] & \\
\hat{H}^{\cdot} \arrow[r, "\hat{\varphi}"] \arrow[dr, "\hat{q}"] & \mathfrak{A}^o(\hat{G}^{\cdot}) \arrow[dr, "\hat{u}^*"] & \\
 & H'^{\cdot} \arrow[r, "\varphi'"] & \mathfrak{A}^o(G'^{\cdot})
\end{tikzcd}$$

Montrons que $\hat{q} \in \mathcal{H}^{L}$.

Soit $\hat{z} \in \hat{C}^{\cdot}$ et $(k, f, e) \in z$; on sait que $\underline{\hat{\varphi}}(\hat{z}) = i^*(k)$, d'où

$$\underline{\hat{u}}^*(\underline{\hat{\varphi}}(\hat{z})) = \underline{\hat{u}}^* \circ \underline{i}^*(k) = \underline{u}^*(k) = k^* .$$

D'autre part, on a

$$\underline{\hat{q}}(\hat{z}) = \underline{\psi}(k, f, e) = (k^*, f^* q(e)),$$

d'où

$$\underline{\varphi}'(\hat{q}(\hat{z})) = k^*,$$

et par suite

$$\hat{u}^* \circ \hat{\varphi} = \varphi \circ \hat{q} .$$

Il en résulte que $\hat{q} \in \mathcal{H}^{L}$.

Montrons que $\hat{q} \circ \tau = q$.

Soit $g \in L^{\cdot}$; alors on a :

$$\underline{\sigma}(g) = (p(g), p(e), e) \bmod \rho = z,$$

si $e = \alpha(g)$, et $\underline{\tau}(g) = \hat{z}$.

Par définition de $\hat{q}$ on a

$$\underline{\hat{q}}(\hat{z}) = \underline{\psi}(p(g), p(e), e) = ((p(g))^*, (p(e))^* q(e)).$$

Or on sait que, d'une part,

$$(p(g))^* = \underline{\varphi}'(q(g)), \quad (p(e))^* = \underline{\varphi}'(q(e))$$

et que, d'autre part,

$$\underline{\varphi}'(q(e))q(e) = q(e) \text{ et } (\underline{\varphi}'(q(g)), q(e)) = q(g).$$

Il en résulte que :

$$\underline{\hat{q}}(\hat{z}) = q(g),$$

et par suite

$$\hat{q} \circ \tau = q.$$

En résumé, on a construit un foncteur $\hat{q} = ((H'^{\cdot}, <), \underline{\hat{q}}, (\hat{H}^{\cdot}, \prec)) \in \mathcal{H}^{L}$ tel que

$$(H'^{\cdot}, \underline{\hat{q}}, \hat{H}^{\cdot})(\hat{H}^{\cdot}, \hat{p}, \tau, i) = (H', \hat{p}, q, u).$$

Il reste à vérifier que, si $\hat{q}' = ((H^{\cdot}, <), \underline{\hat{q}}', (\hat{H}^{\cdot}, \prec)) \in \mathcal{H}^{L}$ et vérifie l'égalité précédente, alors on a $\hat{q}' = \hat{q}$.

Soit $\hat{u}'$ la restriction de $\hat{q}'$ à $\hat{G}$; alors $\hat{u}'$ est un homomorphisme et vérifie $\hat{u}' \circ i = u$,d'où $\hat{u}' = u \circ i^{-1} = \hat{u}$.

Soit $\hat{a} \in \hat{C}_o^{\bullet}$, alors, $a \in \tilde{C}_o^{\bullet}$. Il existe $z \in \tilde{C}$ et $e \in L_o^{\bullet}$ tel que

$$\tilde{\beta}(z) = a \text{ et } \alpha(z) = \underline{\sigma}(e)$$

d'où

$$\hat{\beta}(\hat{z}) = \hat{a} \text{ et } \hat{\alpha}(\hat{z}) = \underline{\tau}(e);$$

et on a

$$\hat{q}'(\hat{\alpha}(\hat{z})) = \hat{q}' \circ \underline{\tau}(e) = q(e) = \hat{q}(\hat{\alpha}(\hat{z})).$$

D'autre part, soit $\hat{v} \in \hat{G}^{\bullet}$ tel que $\hat{z} \prec \hat{v}$, alors on a :

$$\hat{u}'(\hat{v}) > \hat{q}'(\hat{z}) \text{ et } \hat{u}(\hat{v}) > \hat{q}(\hat{z}).$$

Mais $\hat{u}'(\hat{v}) = \hat{u}(\hat{v})$ et, compte tenu de l'égalité précédente, on a

$$\hat{q}'(\hat{z}) = \hat{q}(\hat{z}), \text{d'où } \hat{q}'(\hat{a}) = \hat{q}(\hat{a}).$$

Soit $\hat{z} \in \hat{C}$; d'après ce qui précède on a

$$\hat{q}'(\hat{\alpha}(\hat{z})) = \hat{q}(\hat{\alpha}(\hat{z}))$$

et le même raisonnement entraîne alors que

$$\hat{q}'(\hat{z}) = \hat{q}(\hat{z}).$$

CHAPITRE IV

CONSTRUCTION D'UN FONCTEUR ORDONNE D'UN GROUPOIDE FONCTORIELLEMENT ORDONNE DANS LE GROUPOIDE INDUCTIF DES ATLAS D'UN GROUPE ET APPLICATIONS

Dans le 1er paragraphe, on montre que la catégorie $\mathcal{F}_g$ des groupoïdes est une catégorie à $\mathcal{G}$-projections, $\mathcal{G}$ désignant la sous- catégorie de $\mathcal{F}_g$ formée par les groupes, et on donne diverses méthodes pour déterminer une $(\mathcal{G}, \mathcal{F}_g)$- projection d'un groupoïde donné.

Les résultats de ce paragraphe sont utilisés dans le suivant pour la construction d'un foncteur ordonné bien fidèle d'un groupoïde $F.O\ (\mathcal{Y}^{\bullet}, <)$ dans le groupoïde inductif des atlas d'un groupe $G^{\bullet}$, le groupe $G^{\bullet}$ étant précisément une $(\mathcal{G}, \mathcal{F}_g)$-projection d'un sous-groupoïde majorant $M^{\bullet}$ de $(\mathcal{Y}^{\bullet}, <)$.

Dans le paragraphe 3, on introduit la notion de foncteur spécialement ordonné entre couples $(\mathcal{Y}, M)$ formés par un groupoïde $F.O\ (\mathcal{Y}^{\bullet}, <)$ et un sous-groupoïde majorant $M^{\bullet}$ de $(\mathcal{Y}^{\bullet}, <)$, et on montre, en utilisant les résultats du paragraphe précédent, que la catégorie $\mathfrak{D}$ de ces foncteurs est isomorphe à une sous-catégoriede la catégorie $\mathcal{H}$ du chap.III.

Le paragraphe 4 est consacré à l'étude de la catégorie $\mathcal{F}_g^o$ des foncteurs ordonnés entre groupoïdes ordonnés :

Cette catégorie est à $\mathcal{G}$-projections, si $\mathcal{G}$ désigne la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}_g^o$ définie par les groupes munis de l'ordre trivial. Les résultats du paragraphe 2 sont, ensuite utilisés pour la détermination explicite d'une $(\mathcal{G}, \mathcal{F}_g^o)$-projection d'un groupoïde $F.O$ donné.

Dans le paragraphe 5, on étudie dans un groupoïde inductif une relation d'équivalence associée à un sous-groupoïde majorant régulier et on montre que, dans ce cas, le foncteur construit dans 2 est compatible avec cette relation.

1. $(\mathcal{G}, \mathcal{F}_g)$-projection d'un groupoïde.

Soient $\mathcal{F}_g$ et $\mathcal{G}$ les sous-catégories pleines de $\mathcal{F}$ ayant pour unités respectivement les groupoïdes et les groupes.

1re définition.

Soit $M^{\bullet} \in \mathcal{F}_g$ et soit r la relation d'équivalence bicompatible engendrée par la relation r_o suivante :

$$(e_1, e_2) \in r_o$$
$$\text{si, et seulement si, } e_i \in M^{\bullet}_o;\ i = 1, 2.$$

Il est clair que, si $f_i \in M^{\bullet}$ $(i = 1, 2)$ sont tels que $(f_1, f_2) \in r$ et si f_1 ou $f_2 \notin M^{\bullet}_o$, alors $f_1 = f_2$.

Il en résulte que $\tilde{M}^{\bullet} = M^{\bullet}/r$ est un graphe multiplicatif associatif dont tous les éléments sont inversibles (prégroupoïde) et ne possédant qu'une seule unité, soit $\tilde{e}$, et que la restriction de $\underline{\tilde{r}}$ à $M^{\bullet} - M^{\bullet}_o$ est une bijection sur $\tilde{M}^{\bullet} - \tilde{e}$.

On posera $\tilde{r}(f) = \tilde{f}$ si $f \in M^{\bullet}$.

Soit $N(\tilde{M}^{\bullet})$ la $\mathfrak{F}$-projection de $\tilde{M}^{\bullet}$ construite par la méthode du théorème 10 de E, page 157 :

$N(\tilde{M}^{\bullet})$ est le groupe quotient du monoïde libre $L(\tilde{M})$, construit sur $\tilde{M} - \tilde{e}$ et auquel on a ajouté l'élément unité $\tilde{e}$, par la relation d'équivalence bicompatible ρ engendrée par la relation ρ_o :

$$((\tilde{f}_2, \tilde{f}_1), \widetilde{f_2 \cdot f_1}) \in \rho_o$$
$$\text{si, et seulement si, } (f_2, f_1) \in M^{\bullet} * M^{\bullet}.$$

Soit $\nu(\tilde{M}^{\bullet}) = (N(\tilde{M}^{\bullet}), \underline{\nu(\tilde{M}^{\bullet})}, \tilde{M}^{\bullet})$ le projecteur correspondant et soit $\pi(M^{\bullet}) = \nu(\tilde{M}^{\bullet}) \circ \tilde{\rho}$. On a alors

$$\pi(M^{\bullet}) \in \mathfrak{F}.$$

THEOREME 1. *$\mathfrak{F}_g$ est une catégorie à $\mathfrak{G}$-projections, une $(\mathfrak{G}, \mathfrak{F}_g)$-projection de $M^{\bullet} \in \mathfrak{F}_g$ étant le groupe $N(\tilde{M}^{\bullet})$ construit ci-dessus.*

$$\begin{tikzcd}
M^{\bullet} \arrow[d, "\tilde{r}"'] \arrow[ddr, "p"] & \\
\tilde{M}^{\bullet} \arrow[d, "\nu(\tilde{M}^{\bullet})"'] \arrow[dr, "\tilde{p}"] & \\
N(\tilde{M}^{\bullet}) \arrow[r, "p'"'] & G^{\bullet}
\end{tikzcd}$$

Soient $M^{\bullet} \in \mathfrak{F}_g$, $G^{\bullet} \in \mathfrak{G}$ et $p = (G^{\bullet}, \underline{p}, M^{\bullet}) \in \mathfrak{F}$. Alors, si $e, e' \in M^{\bullet}_o$, on a $\underline{p}(e) = \underline{p}(e')$; donc p est compatible avec r et définit par passage au quotient un néofoncteur

$$\tilde{p} = (G^{\bullet}, \underline{\tilde{p}}, \tilde{M}^{\bullet}),$$

et on a $\tilde{p} \circ \tilde{r} = p$.

$N(\tilde{M}^{\bullet})$ étant une $\mathfrak{F}$-projection de $\tilde{M}^{\bullet}$, il existe un homomorphisme (unique)

$$\underline{p}' = (G^{\bullet}, p', N(\tilde{M}^{\bullet})) \text{ tel que } \underline{p}'.\nu(\tilde{M}^{\bullet}) = \tilde{p} .$$

Il en résulte la relation

$$(1) \qquad \underline{p}'.\pi(M^{\bullet}) = \underline{p}.$$

Soit $\underline{p}'' = (G^{\bullet}, p'', N(\tilde{M}^{\bullet})) \in \mathfrak{F}$ tel que $\underline{p}''.\pi(M^{\bullet}) = \underline{p}$, alors on a

$$\underline{p}'' . \nu(M^{\bullet}) . \tilde{r} = \tilde{p} . \tilde{r};$$

$\tilde{r}$ étant un épimorphisme, on a $\underline{p}''.\nu(M^{\bullet}) = \tilde{p}$ et par suite $\underline{p}'' = \underline{p}'$; ce qui démontre le théorème.

2ème définition.

Soit $M^{\bullet} \in \mathfrak{F}_g$ et B un système de générateurs de $M^{\bullet}$; alors B définit un sous-graphe $[B]$ de $[M^{\bullet}]$ (voir déf. 24 p. 153 de E).

Soit $B' = B - [B]_0$ et φ une bijection de B' sur une classe B^* telle que $B^* \cap B' = \emptyset$; on posera $\varphi(f) = f^*$ pour $f \in B'$.

Soit $\hat{B} = B \cup B^*$ et $[\hat{B}]$ le graphe construit par la méthode du théorème 9, p. 157, de E.

Soit $\hat{B}' = B' \cup B^*$.

Soit h l'application de $\hat{B}'$ dans $M^{\bullet}$ définie par

$$h(f) = f \text{ et } h(f^*) = f^{-1} \text{ si } f \in B'.$$

PROPOSITION 1. *Soit $G'_{M^{\bullet}}$ le groupe admettant la classe de générateurs B' et le système de relations D suivant :*

$$f_n \dots f_1 \in D,\ f_i \in \hat{B}' \textit{ si, et seulement si, } h(f_n) \dots\dots h(f_1) = e,$$

où $e \in M^{\bullet}_0$; alors $G'_{M^{\bullet}}$ est une $(\mathcal{G}, \mathfrak{F}_g)$-projection de $M^{\bullet}$.

Soit $\Gamma(B)^{\bullet}$ le groupoïde construit sur $[B]$ (voir E th. 9, 3).

Tout morphisme de $\Gamma(B)^{\bullet}$ est un chemin propre du graphe $[\hat{B}]$ tel que deux éléments consécutifs ne soient pas associés par φ. Les unités de $\Gamma(B)^{\bullet}$ sont les sommets de $[B]$ c'est-à-dire les unités de $M^{\bullet}$.

Soit $\underline{k}$ l'application de $\Gamma(B)^{\bullet}$ sur $M^{\bullet}$ définie par :

$$\underline{k}(f_n, \dots, f_1) = h(f_n) . \dots . h(f), \text{ si } f_i \in \hat{B}';$$

$\underline{k}(e) = e$ si $e \in [B]_0$. Alors l'application $\underline{k}$ est sous-jacente à un foncteur

$k = (M^{\cdot}, \underline{k}, \Gamma(B)^{\cdot})$ qui définit $M^{\cdot}$ comme groupoïde quotient strict de $\Gamma(B)^{\cdot}$.

Soit $GL(B)$ le groupe libre construit sur B' et ε son élément unité; tout élément de $GL(B)$ différent de ε est un produit formel $f_n \dots f_1$ tel que $f_i \in \hat{B}'$ et tel que deux éléments consécutifs ne soient pas associés par φ.

Soit $k' = (G'_{M^{\cdot}}, \underline{k}', GL(B))$ l'homomorphisme canonique.

Soit $\underline{\pi}$ l'application de $\Gamma(B)^{\cdot}$ dans $GL(B)$ définie par:

$$\underline{\pi}(f_n, \dots, f_1) = f_n \dots f_1$$

si $f_i \in \hat{B}'$; $\underline{\pi}(e) = \varepsilon$ si $e \in [B]_o$. Il est clair, compte tenu des définitions similaires du produit dans $\Gamma(B)^{\cdot}$ et dans $GL(B)$, que $\underline{\pi}$ est sous-jacente à un foncteur $\pi = (GL(B), \underline{\pi}, \Gamma(B)^{\cdot})$, et il est facile de vérifier que π est un $(\mathcal{G}, \mathcal{F}_g)$-projecteur.

Soient $(f_n, \dots, f_1) = (f)$ et $(g_p, \dots, g_1) = (g) \in \Gamma(B)^{\cdot}$ tels que

$$\underline{k}((f)) = \underline{k}((g)).$$

Alors on a

$$h(f_n) \dots . h(f_1) = h(g_p) \dots . h(g_1).$$

Il en résulte, compte tenu de la définition de $G'_{M^{\cdot}}$, que :

$$k'(f_n \dots f_1) = k'(g_n \dots g_1);$$

donc $\underline{\pi}$ est compatible avec les relations d'équivalences associées à k et k' respectivement; il existe donc une application $\underline{\pi}'$ tel que

$$(\underline{\pi}', \underline{k}', \underline{k}, \underline{\pi}) \in \square\mathfrak{M}.$$

k et k' étant des $p\mathcal{F}$-épimorphismes, l'application $\underline{\pi}'$ est sous-jacente à un foncteur $\pi' = (G'_{M^{\cdot}}, \underline{\pi}', M^{\cdot})$ tel que

$$(\pi', k', k, \pi) \in \square\mathcal{F}.$$

(voir [1] prop. 4, p. 116)

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(B)^{\cdot} \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\pi"'] & M^{\cdot} \arrow[d, "\pi'"] \arrow[dr, "p"] & \\
GL(B) \arrow[r, "k'"] \arrow[drr, "q"'] & G'_{M^{\cdot}} \arrow[dr, "q'"] & \\
 & & G'
\end{tikzcd}$$

Soit $G' \in \mathcal{G}$ et $p = (G', \underline{p}, M^{\cdot}) \in \mathcal{F}$; $GL(B)$ étant une $(\mathcal{G}, \overline{\mathcal{F}}_g)$-projection de $\Gamma(B)^{\cdot}$ il existe

$$q = (G', \underline{q}, GL(B)) \in \mathcal{F}$$

tel que :

$$q \circ \pi = p \circ k.$$

Soit $f_n \ldots f_1 \in D$, alors $h(f_n) \ldots . h(f_1) = e \in M_o^{\bullet}$ et

$$\underline{q}(f_n \ldots f_1) = (\underline{q} \circ \underline{\pi})(f_n, \ldots, f_1) = (\underline{p} \circ \underline{k})(f_n, \ldots, f_1).$$

Mais comme

$$k(f_n, \ldots, f_1) = h(f_n) \ldots . h(f_1),$$

$\underline{q}(f_n \ldots f_1)$ est l'élément unité de G' ; il existe donc $q' = (G', \underline{q}', G'_M)$ tel que

$$q' \circ k' = q$$

et on a

$$q' \circ \pi' \circ k = q' \circ k' \circ \pi = q \circ \pi = p \circ k$$

k étant un épimorphisme, on a :

$$q' \circ \pi' = p.$$

Soit $q'_1 = (G', \underline{q}'_1, G'_M) \in \mathfrak{F}$ tel que

$$q'_1 \circ \pi' = p$$

alors on a :

$$q'_1 \circ k' \circ \pi = q'_1 \circ \pi' \circ k = p \circ k.$$

Puisque $GL(B)$ est une $(\mathfrak{G}, \mathfrak{F}_g)$-projection on a

$$q'_1 \circ k' = q' \circ k',$$

et k' étant un épimorphisme on a

$$q'_1 = q'.$$

Donc G'_M. est une $(\mathfrak{G}, \mathfrak{F}_g)$-projection de $M^{\bullet}$.

3ème définition.

Soit $M^{\bullet} \in \mathfrak{F}_g$.

Soit G_M la classe des produits formels $m_n \ldots m_1$ tels que $M_i \in M^{\bullet} - M_o^{\bullet}$ et $(m_{i+1}, m_i) \notin M^{\bullet} * M^{\bullet}$, $i = 1, 2 \ldots n-1$.

On peut définir dans G_M une loi de composition interne qu'on appelera multiplication et qu'on notera . , de la manière suivante :

Le produit de deux produits formels de $G_M^{\bullet}$ s'obtient par juxtaposition, calcul dans M lorsque c'est possible et suppression des unités pouvant en résulter.

PROPOSITION 2. *$G^{\bullet}_M$ est un groupe et une $(\mathcal{G}, \mathcal{F}_g)$-projection.*

La démonstration est dans [12] .

REMARQUES.

1) dans $G^{\bullet}_M$ l'élément unité ε est défini par le produit vide, l'inverse de $m_n \ldots m_1$ est $m_1^{-1} \ldots m_n^{-1}$.

2) soit $\underline{\pi}(M^{\bullet})$ l'application qui à $m \in M^{\bullet} - M^{\bullet}_o$ associe le produit formel à un élément $m \in G^{\bullet}_M$ et à $e \in M^{\bullet}_o$ associe ε , alors $\underline{\pi}$ est sous-jacent à un foncteur $\pi(M^{\bullet}) = (G^{\bullet}_M, \underline{\pi(M^{\bullet})}, M^{\bullet})$ qui est $(\mathcal{G}, \mathcal{F}_g)$-projecteur. De plus la restriction de $\underline{\pi}(M^{\bullet})$ à $M^{\bullet} - M^{\bullet}_o$ est injective.

Dans la suite, pour éviter des confusions, on notera $\dot{m}$ l'image de m par $\underline{\pi}(M^{\bullet})$.

3) si $M^{\bullet}$ et $M'^{\bullet}$ sont deux sous-groupoïdes d'un même groupoïde γ et si $G^{\bullet}_M = G^{\bullet}_{M'}$, alors $M^{\bullet} = M'$.

2. Construction d'un foncteur ordonné d'un groupoïde ordonné vers le groupoïde des atlas d'un groupe.

A. PRELIMINAIRES.

DEFINITION 1. *Un sous-groupoïde $M^{\bullet}$ d'un groupoïde ordonné $(\gamma^{\bullet}, <)$ est dit* majorant *si la propriété suivante est vérifiée :*

$$f \in \gamma^{\bullet}, \text{ il existe } m \in M^{\bullet} \text{ tel que } m > f.$$

REMARQUES.

1) M est une partie cofinale de $(\gamma, <)$.

2) Il existe toujours au moins un sous-groupoïde majorant d'un groupoïde ordonné donné, à savoir le groupoïde lui-même.

PROPOSITION 3. *Si γ est un ensemble et si $(\gamma^{\bullet}, <)$ est un groupoïde local complet (voir [4]), alors le sous-groupoïde $M^{\bullet}$ engendré par les éléments maximaux de $(\gamma, <)$ est un sous-groupoïde majorant de $(\gamma^{\bullet}, <)$.*

Montrons que tout élément de γ est inférieur à au moins un élément maximal de $(\gamma, <)$:

Soit $f \in \gamma^{\bullet}$ et soit $f^{<}$ l'ensemble des $g \in \gamma^{\bullet}$ tels que $g > f$.

Soit B un sous-ensemble de $f^{<}$ totalement ordonné; alors B est un ensemble compatible (voir [4]) et admet par conséquent un agrégat h dans $(\gamma, <)$; évidemment, on a $h \in f^{<}$.

Par suite l'ensemble ordonné $(f^{<}, <)$ muni de l'ordre induit est inductif au sens de Bourbaki.

Le théorème de Zorn entraîne alors l'existence d'au moins un élément maximal f_M dans $(f^{<}, <)$.

Soit $f' \in \gamma^{\bullet}$ tel que $f' > f_M$; alors $f' \in f^{<}$ et par suite $f' = f_M$; donc f_M est maximal dans $(\gamma^{\bullet}, <)$ et la proposition est démontrée.

Dans la suite de ce chapitre $(\gamma^{\bullet}, <)$ *désignera un groupoïde ordonné régulier (voir* [2]*),* $M^{\bullet}$ *un sous-groupoïde majorant de* $(\gamma^{\bullet}, <)$*,* $G^{\bullet}_{M} = G^{\bullet}$ *la* $(\mathcal{G}, \mathcal{F}_g)$*- projection de* $M^{\bullet}$ *et* $\pi = (G^{\bullet}, \underline{\pi}, M^{\bullet})$ *le projecteur définis dans* (1, 3°) .

DEFINITION 2. *Une suite finie non vide* $F = (f_n, \dots, f_1)$ *d'éléments de* $\gamma^{\bullet}$ sera dite de base $f \in \gamma^{\bullet}$ *si les conditions suivantes sont réalisées :*

1) $(f_{i+1}, f_i) \in \gamma * \gamma$; $i = 1, 2 \dots n$.

2) $f_n . f_{n-1} . \dots . f_1 = f$.

On notera $B(f)$ la classe des suites de base f.

($B(f)$ n'est pas vide car elle contient au moins la suite (f)).

DEFINITION 3. *Une suite finie non vide* $S = (m_n, \dots, m_1)$ *d'éléments de* $M^{\bullet}$ sera dite majorant la suite $F = (f_n, \dots f_1) \in B(f)$ *si* $m_i > f_i, \forall i \in (1, 2, .., n)$. *On écrira* $S \succ F$ *et on notera* $\mathcal{S}$ *la classe des suites finies non vides d'éléments de* $M^{\bullet}$.

DEFINITION 4. *Soit* $s \in G^{\bullet}$; *on dira que* s est associé à $f \in \gamma^{\bullet}$ *s'il existe* $F = (f_n, \dots, f_1) \in B(f)$ *et* $S = (m_n, \dots, m_1) \in \mathcal{S}$ *tels que*

$$S \succ F \quad \text{et} \quad s = \dot{m}_n . \dots . \dot{m}_1 .$$

On dira alors que s *est associé à* f par l'intermédiaire de F et de S *et on écrira*

$$f \xrightarrow{F, S} s .$$

LEMME 1. *Si $s \in G^{\bullet}$ est associé à $f \in \gamma^{\bullet}$ et si $f' \in \gamma^{\bullet}$ est tel que $f' < f$, alors s est associé à f'.*

En effet, il existe $F = (f_n, \ldots, f_1) \in B(f)$ et $S = (m_n, \ldots, m_1) \in \mathcal{S}$ tels que $f \xrightarrow{F,S} s$. On sait que, si $\alpha(f) = e$ et $\beta(f') = e'$, on a

$$f' = e'(fe). \qquad \text{(voir [2])}.$$

Dans un groupoïde ordonné régulier le pseudo-produit étant associatif, on a

$$(1) \qquad f' = (e'f_n) f_{n-1} \cdots f_2 (f_1 e).$$

D'autre part, par définition du pseudo-produit, le deuxième membre de (1) est égal à $f'_n . f'_{n-1} \cdots f'_2 . f'_1$ et on a

$$f'_1 < f_1 e, \; f'_i < f_i, \qquad \forall\, i \in (2, \ldots, n-1), \; f'_n < e f_n.$$

Par suite on a

$$(2) \qquad f'_i < m_i, \qquad \forall i \in (1, 2, \ldots, n).$$

Posons $F' = (f'_n, \ldots, f'_1)$; d'après (1) on a $F' \in B(f')$ et d'après (2) on a $S \succ F'$ d'où $f' \xrightarrow{F',S} s$.

PROPOSITION 4. *Si $(\gamma^{\bullet}, <)$ est muni en outre d'une structure de catégorie préinductive, alors $s \in G^{\bullet}$ est associé à $f \in \gamma^{\bullet}$ si et seulement si il existe $S = (m_n, \ldots, m_1) \in \mathcal{S}$ tel que*

$$1)\; s = \dot{m}_n \ldots . \dot{m}_1 \quad \text{et} \quad 2)\; m_n \ldots m_1 > f$$

$m_n \ldots m_1$ étant le pseudoproduit des m_i.

En effet, si s est associé à f, il existe $F = (f_n, \ldots, f_1) \in B(f)$ et $S = (m_n, \ldots, m_1) \in \mathcal{S}$ tel que $f \xrightarrow{F,S} s$.

Par hypothèse sur $(\gamma^{\bullet}, <)$ le pseudoproduit $m_n \ldots m_1$ existe et par définition on a :

$$f = f_n . \ldots . f_1 < m_n \ldots m_1.$$

Réciproquement, supposons qu'il existe $S = (m_n, \ldots, m_1) \in \mathcal{S}$ tel que $s = \dot{m}_n \ldots . \dot{m}_1$ et $m_n \ldots m_1 > f$; alors par définition du pseudo-produit on a :

$$m_n \ldots m_1 = f'_n . \ldots . f'_1 = f'$$

et on a

$$f'_i < m_i, \qquad \forall i \in (1,2,\dots,n).$$

Il résulte que $F' = (f'_n, \dots, f'_1) \in B(f')$ et par suite que $f' \xrightarrow{F',S} s$.

Comme on a $f < f'$ le lemme 1 entraîne alors que s est associé à f.

LEMME 2. *Supposons que* $(\gamma^\bullet, <)$ *soit fonctoriellement ordonné et soit* $s \in G^\bullet$ *associé à* $f \in \gamma^\bullet$.

a) Si $s \neq \varepsilon$, *soient* $n_i \in M^\bullet - M_o^\bullet$, $i = 1, 2, \dots, p$, *tels que* $\dot{n}_p \dots \dot{n}_1$ *soit le produit formel qui définit* s *dans* $G^\bullet$.

Si $S' = (n_p, \dots, n_1)$, *alors il existe* $F' = (f'_p, \dots, f'_1) \in B(f)$ *tel que* $f \xrightarrow{F',S'} s$.

b) Si $s = \varepsilon$, *alors* $f \in \gamma_o^\bullet$.

Par hypothèse il existe $F = (f_n, \dots, f_1) \in B(f)$ et $S = (m_n, \dots, m_1) \in \mathcal{S}$ tels que $f \xrightarrow{F,S} s$ et on a

$$s = \dot{m}_n \dots . \dot{m}_1 .$$

Si, pour $i = i_o$, on a $m_{i_o} \in M_o^\bullet$, alors $f_{i_o} \in \gamma_o^\bullet$.

Si on supprime ces deux éléments dans les suites S et F respectivement on obtient deux nouvelles suites S_o et F_o et on a toujours $f \xrightarrow{F_o, S_o} s$; si, après avoir supprimé tous les $m_i \in M_o^\bullet$, on aboutissait à une suite vide, on aurait nécessairement $s = \varepsilon$ et $f_i \in \gamma_o^\bullet$, $\forall i \in (1, 2, \dots, n)$, d'où $f \in \gamma_o^\bullet$.

On peut donc supposer que S et F ne sont pas vides et que $m_i \notin \gamma_o^\bullet$ $\forall i \in (1,2,\dots,n)$.

Si $\dot{m}_n \dots . \dot{m}_1$ est un produit formel, le lemme est démontré; sinon il existe au moins $i \in (1,2,\dots,n)$ tel que $(m_{i+1}, m_i) \in \gamma^\bullet * \gamma^\bullet$.

Posons $m'_i = m_{i+1} \cdot m_i$ et $f'_i = f_{i+1} \cdot f_i$; alors on a $f'_i < m'_i$.

Distinguons deux cas : 1°) $m'_i \notin M_o^\bullet$; 2°) $m'_i \in M_o^\bullet$, alors $f'_i \in \gamma_o^\bullet$.

Posons

$$F^1 = \begin{cases} (f_n, \dots, f_{i+2}, f'_i, f_{i-1}, \dots, f_1) & \text{dans le 1er cas} \\ (f_n, \dots, f_{i+2}, f_{i-1}, \dots, f_1) & \text{dans le 2e cas} \end{cases}$$

et

$$S^1 = \begin{cases} (m_n, \dots, m_{i+2}, m'_i, m_{i-1}, \dots, m_1) & \text{dans le 1er cas} \\ \\ (m_n, \dots, m_{i+2}, m_{i-1}, \dots, m_1) & \text{dans le 2e cas.} \end{cases}$$

α)Si S^1 et F^1 sont vides,alors nécessairement on avait $S = (m_1^{-1}, m_1)$, et par suite $F = (f_1^{-1}, f_1)$;donc $s = \varepsilon$,et $f \in \gamma_o^\bullet$.

β)Si S^1 et F^1 ne sont pas vides on a, dans les deux cas, $F^1 \in B(f)$, $S^1 \in \mathcal{S}$, $S^1 \succ F^1$ et enfin $f \xrightarrow{F^1, S^1} s$ puisque :

$$S = \begin{cases} \dot{m}_n \dots . \dot{m}_{i+1} . \dot{m}'_i . \dot{m}_{i-1} \dots . \dot{m}_1 & \text{dans le 1er cas} \\ \\ \dot{m}_n \dots . \dot{m}_{i+2} . \dot{m}_{i-1} \dots . \dot{m}_1 & \text{dans le 2e cas} \end{cases}$$

Si l'une ou l'autre de ces deux expressions est un produit formel, le lemme est démontré, sinon on recommence la même opération.

Au bout de q opérations de ce type, on aboutit nécessairement, par construction de $G^\bullet$, au produit formel qui définit s.

Si $s \neq \varepsilon$ ce produit formel est non vide et la suite F^q correspondante est non vide; c'est donc la suite cherchée.

Si $s = \varepsilon$ alors S^q est vide et le même raisonnement que celui effectué dans α) appliqué à S^{q-1} et F^{q-1} entraîne que $f \in \gamma_o^\bullet$.

B. CONSTRUCTION ET PROPRIETES DU FONCTEUR.

Soit $f \in \gamma^\bullet$ et soit $\varphi^o(f)$ la classe des $s \in G^\bullet$ qui sont associés à f.

$\varphi^o(f)$ est non vide, $\forall f \in \gamma^\bullet$, car, par hypothèse sur $M^\bullet$, il existe $m \in M^\bullet$ tel que $m > f$ et, par suite, on a $f \xrightarrow{F, S} s$, si $F = (f)$, $S = (m)$ et $s = \dot{m}$.

PROPOSITION 5. *Si $s \in G^\bullet$ est associé à $f \in \gamma^\bullet$, alors s^{-1} est associé à f^{-1}; si $s' \in G^\bullet$ est associé à $f' \in \gamma^\bullet$ et si $(f', f) \in \gamma^\bullet * \gamma^\bullet$,alors $s'.s$ est associé à $f'.f$.*

Par hypothèse, il existe $F = (f_n, \dots, f_1) \in B(f)$, $F' = (f'_p, \dots, f'_1) \in B(f')$, $S = (m_n, \dots, m_1) \in \mathcal{S}$, $S' = (m'_p, \dots, m'_1) \in \mathcal{S}$ tels que

$$f \xrightarrow{F, S} s \text{ et } f' \xrightarrow{F', S'} s'.$$

Soient $F'' = (f_1^{-1}, \dots, f_n^{-1})$, $S'' = (m_1^{-1}, \dots, m_n^{-1})$, $s'' = \dot{m}_1^{-1}, \dots, \dot{m}_n^{-1}$;

alors on a

$$F'' \in B(f^{-1}),\ S'' \in \mathcal{S} \text{ et } S'' \rightarrowtail F'' \text{ d'où } f^{-1} \xrightarrow{F'',S''} s'';$$

mais $s'' = s^{-1}$ dans G'', d'où la 1re partie de la proposition. Soient

$$F''' = (f'_p, \ldots, f'_1, f_n, \ldots, f_1),\ S''' = (m'_p, \ldots, m'_1, m_n, \ldots, m_1),$$
$$s''' = \dot{m}'_p \ldots . \dot{m}'_1 . \dot{m}_n \ldots . \dot{m}_1;$$

alors on a

$$F''' \in B(f'.f),\ S''' \in \mathcal{S} \text{ et } S''' \rightarrowtail F''' \text{ d'où } f'.f \xrightarrow{F''',S'''} s''';$$

mais $s''' = s'.s$ dans $G^{\bullet}$, d'où la 2ème partie de la proposition.

THEOREME 2. *$\varphi^{o}(f)$ est un atlas de $G^{\bullet}$ et, si $\underline{\varphi}(f)$ est l'élément de $\mathfrak{A}^{o}(G^{\bullet})$ qui correspond à $\varphi^{o}(f)$, alors $\varphi = ((\mathfrak{A}^{o}(G^{\bullet}), <), \underline{\varphi}, (\gamma^{\bullet}, <))$ est un foncteur ordonné.*

Soit $e \in \gamma^{\bullet}_{o}$ et $s, s' \in \varphi^{o}(e)$; alors, d'après la proposition 5, on a

$$s^{-1} \in \varphi^{o}(e) \text{ et } s'.s \in \varphi^{o}(e),$$

donc $\varphi^{o}(e)$ est un sous-groupe de $G^{\bullet}$.

Soit $f \in \gamma^{\bullet}_{o}$ et soient $s, s' \in \varphi^{o}(f)$; alors, d'après la proposition 5, on a

$$s'^{-1} \in \varphi(f^{-1}) \text{ et } s'^{-1}.s \in \varphi^{o}(f^{-1}.f) = \varphi^{o}(\alpha(f)).$$

Soit $t \in \varphi^{o}(\alpha(f))$; alors on a :

$$s.t \in \varphi^{o}(f.\alpha(f)) = \varphi^{o}(f),$$

donc

$$\varphi^{o}(f) = s.\varphi^{o}(\alpha(f)), \text{ si } s \in \varphi^{o}(f),$$

et $\varphi^{o}(f)$ est un atlas de $G^{\bullet}$.

On montrerait de même que $\varphi^{o}(f) = \varphi^{o}(\beta(f)).s$, d'où

$$\varphi^{o}(\beta(f)) = s.\varphi^{o}(\alpha(f)).s^{-1}.$$

Le même raisonnement que celui effectué dans la démonstration du théorème 1, III montre que φ est un foncteur.

Soient $f, f' \in \gamma^{\bullet}$ tels que $f' < f$ et soit $s \in \varphi^{o}(f)$. D'après le lemme 1 on a $s \in \varphi^{o}(f')$ et par suite $\varphi^{o}(f) \subset \varphi^{o}(f')$ d'où $\underline{\varphi}(f) > \underline{\varphi}(f')$ et φ est ordonné.

DEFINITION 5. *On dira que le foncteur φ construit par cette méthode a pour* *support le foncteur* π .

PROPOSITION 6. *φ est bien fidèle si et seulement si* $(\gamma^{\bullet}, <)$ *est fonctoriellement ordonné.*

D'après le lemme 2, si $(\gamma^{\bullet}, <)$ est fonctoriellement ordonné et si $\varepsilon \in \varphi^{o}(f)$, on a $f \in \gamma_o^{\bullet}$ et φ est bien fidèle.

Si $(\gamma^{\bullet}, <)$ n'est pas fonctoriellement ordonné, il existe $f_o \in \gamma^{\bullet} - \gamma_o^{\bullet}$ et $e_o \in \gamma_o^{\bullet}$ tels que $f_o < e_o$; alors on a $\varepsilon \in \varphi^{o}(e_o)$ et par suite $\varepsilon \in \varphi^{o}(f_o)$, donc φ n'est pas bien fidèle.

PROPOSITION 7. *Si* $(\gamma^{\bullet}, <)$ *est un groupoïde inductif,* φ *est quasi-inductif (voir [2]).*

Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $(\gamma^{\bullet}, <)$ majorée et soit

$$f = \bigcup_{i \in I} f_i .$$

Si $s \in \varphi^{o}(f)$, on a, d'après le lemme 1, $s \in \varphi^{o}(f_i)$ $\forall\, i \in I$, donc

$$\varphi^{o}(f) \subset \bigcap_{i \in I} \varphi^{o}(f_i) .$$

Réciproquement soit $s \in G^{\bullet}$ tel que $s \in \varphi^{o}(f_i)$, $\forall\, i \in I$.

Si $s = \varepsilon$, alors $f_i \in \gamma_o^{\bullet}$ $\forall\, i \in I$, et par suite $f \in \gamma_o^{\bullet}$; donc $\varepsilon \in \varphi^{o}(f)$.

Si $s \neq \varepsilon$, soit $\dot{m}_n \dots \dot{m}_1$ le produit formel qui définit s dans $G^{\bullet}$ et soit $S = (m_n, \dots, m_1) \in \mathcal{S}$.

D'après le lemme 2, il existe, pour tout $i \in I$, $F^i = (f_n^i, \dots, f_1^i) \in B(f_i)$ tels que

$$S \succ F_i \text{ et } f_i \rightarrowtail\xrightarrow{F^i, S} s .$$

Pour chaque indice $p \in (1, \dots, n)$ la famille $(f_p^i)_{i \in I}$ est majorée par m_p , donc

$$f_p = \bigcup_{i \in I} f_p^i \text{ existe dans } (\gamma^{\bullet}, <);$$

on a les relations

$$\alpha(f_1) = \bigcup \alpha(f_1^i) = \bigcup \alpha(f_i) = \alpha(f),$$

$$\alpha(f_2) = \bigcup \alpha(f_2^i) = \bigcup \beta(f_1^i) = \beta(f_1),$$

et par suite $(f_2, f_1) \in \gamma^{\bullet} * \gamma^{\bullet}$.

De proche en proche on montre que

$$(f_{p+1}, f_p) \in \gamma^\bullet * \gamma^\bullet, \text{si } p \in (1, 2, \dots, n-1),$$

et finalement on a

$$f_n \cdot \dots \cdot f_1 = \bigcup_{i \in I} (f_n^i \cdot \dots \cdot f_1^i) = \bigcup_{i \in I} f_i = f;$$

donc

$$F = (f_n, \dots, f_1) \in B(f),\ S > F \text{ et } f \rightarrowtail{\xrightarrow{F,S}} s .$$

Il en résulte

$$\varphi^o(f) = \bigcap_{i \in I} \varphi^o(f_i), \text{ et par suite } \underline{\varphi}(f) = \bigcup_{i \in I} \underline{\varphi}(f_i).$$

C. REMARQUES.

Soit $p = (G'^\bullet, \underline{p}, M^\bullet) \in \mathfrak{F}$; il est facile de montrer qu'il est possible de construire un foncteur $\varphi_p = (\mathfrak{A}^o(G'^\bullet), \underline{\varphi}_p, \gamma^\bullet)$ ayant pour support le foncteur p, par la même méthode que celle utilisée pour construire le foncteur φ.

φ_p est lié à φ de la manière suivante :

PROPOSITION 8. *Soit* $h = (G'^\bullet, \underline{h}, G^\bullet)$ *l'homomorphisme unique tel que* $p = h \circ \pi$; *alors*

$$\varphi_p = h^* \circ \varphi,$$

où $h^* = (\mathfrak{A}^o(G'^\bullet), h^*, \mathfrak{A}(G'^\bullet))$ *est le foncteur induit par* h.

En effet, $s \in G^\bullet$ (resp. $s' \in G^\bullet$) est associé à $f \in \gamma^\bullet$ si et seulement si il existe $F = (f_n, \dots, f_1) \in B(f)$ et $S = (m_n, \dots, m_1) \in \mathcal{S}$ tels que

$$f \rightarrowtail{\xrightarrow{F,S}} s \text{ (resp. } f \rightarrowtail{\xrightarrow{F,S}} s')$$

et

$$s = \dot{m}_n \cdot \dots \cdot \dot{m}_1 \text{ (resp. } s' = p(m_n) \cdot \dots \cdot p(m_1)).$$

Il en résulte que, si $s \in G^\bullet$ est associé à $f \in \gamma^\bullet$, alors

$$s' = p(m_n) \cdot \dots \cdot p(m_1) = h(s)$$

est associé à $f \in \gamma^\bullet$ et, réciproquement, si $s' \in G'^\bullet$ est associé à $f \in \gamma^\bullet$, alors $s = \dot{m}_n \cdot \dots \cdot \dot{m}_1$ est associé à f et $s' = h(s)$.

COROLLAIRE. *Si* $(\gamma^\bullet, <)$ *est fonctoriellement ordonné et si* N *est le noyau de* h, *alors* φ_p *est bien fidèle si, et seulement si,*

$$N \cap \varphi^o(f) = \emptyset, \ \forall f \in \gamma^\bullet - \gamma_o^\bullet .$$

Démonstration très simple.

On peut préciser ces résultats dans le cas suivant :

PROPOSITION 9. *Supposons que* $(\gamma^{\bullet}, <)$ *soit un groupoïde préinductif. Soit* $s \in G$, $s \neq \varepsilon$ *et soit* $\dot{m}_n \dots \dot{m}_1$ *le produit formel qui définit* s *dans* G; *alors* $s \notin \varphi^o(f)$ $\forall f \in \gamma^{\bullet} - \gamma^{\bullet}_o$ *si, et seulement si, le pseudoproduit* $m_n \dots m_1 \in \gamma^{\bullet}_o$.

En effet, supposons que $s \notin \varphi^o(f)$, $\forall f \in \gamma^{\bullet} - \gamma^{\bullet}_o$, et soit $f = m_n \dots m_1$; s est associé à f (voir prop. 4), donc $f \in \gamma^{\bullet}_o$.

Réciproquement, supposons que $m_n \dots m_1 = f \in \gamma^{\bullet}_o$; si s est associé à $f' \in \gamma^{\bullet}$, il existe d'après le lemme 7

$$F = (f'_n, \dots, f'_1) \in B(f') \text{ tel que } f' \xrightarrow{F', S} s, \text{ si } S = (m_n, \dots, m_1).$$

Nécessairement, d'après la définition du pseudoproduit, on a $f' < f$ et par suite $f' \in \gamma^{\bullet}_o$.

CONSEQUENCE. Soit C la classe des $s \in G^{\bullet}$ tels que $s \notin \varphi^o(f)$, $\forall f \in (\gamma^{\bullet} - \gamma^{\bullet}_o)$. C contient C^{-1} mais n'est pas en général stable par multiplication ni par les automorphismes intérieurs de $G^{\bullet}$.

Cependant, tout sous-groupe distingué N tel que $N \cap \varphi^o(f) = \emptyset$ $\forall f \in \gamma^{\bullet} - \gamma^{\bullet}_o$ doit être contenu dans C.

Il est facile de montrer que, si C est un ensemble, l'ensemble ordonné par inclusion des sous-groupes distingués ayant cette propriété admet des éléments maximaux.

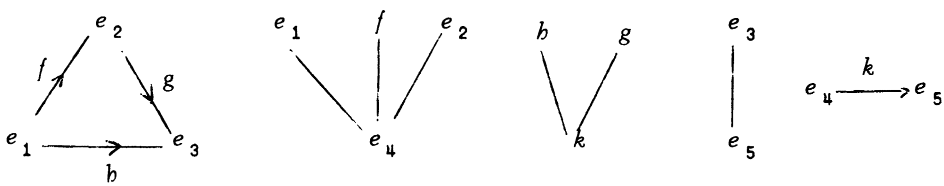
L'exemple suivant illustrera cette remarque.

D. EXEMPLE.

Soit $\gamma^{\bullet}$ le groupoïde formé de 4 morphismes, f, g, h, k, de leurs in- inverses et de 5 unités (e_i), $i = 1, 2, \dots, 5$, avec

$$\alpha(f) = e_1,\ \beta(f) = \alpha(g) = e_2,\ \beta(g) = e_3,\ h = g.f;\ \alpha(k) = e_4,\ \beta(k) = e_5.$$

γ est ordonné suivant le diagramme suivant :



Il est clair que $(\gamma^{\bullet}, <)$ est un groupoïde fonctoriellement ordonné; $(\gamma^{\bullet}, <)$ serait un groupoïde inductif si on ajoutait un plus petit élément e_o.

Soit $M^{\bullet}$ le sous-groupoïde

$$\{ f, f^{-1}, g, g^{-1}, h, h^{-1}, e_i ;\ i = 1, 2, 3 \}$$

et soit

$$B = \{ g, f, e_i ;\ i = 1, 2, 3 \} ;$$

alors B est un système de générateurs de $M^{\bullet}$.

Il résulte de la proposition 1 que le groupe libre construit sur $B = \{g, f\}$ est une $(\mathcal{G}, \mathcal{F}_g)$-projection de $M^{\bullet}$, notée G.

Soit G_1 le groupe $Z/(4)$ et G_2 le groupe de Klein; alors

$$G_1 = \{ 0, 1, 2, 3 \} \text{ et } G_2 = \{ e, a, b, c \} .$$

Il existe deux foncteurs $p_1 = (G_1, \underline{p}_1, M^{\bullet})$ et $p_2 = (G_2, \underline{p}_2, M^{\bullet})$ définis par :

$$\begin{cases} \underline{p}_1(f) = 2 \\ \underline{p}_1(g) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underline{p}_2(f) = a \\ \underline{p}_2(g) = b \end{cases}$$

et soit $\varphi_1 = (\mathcal{A}^o(G_1^{\cdot}), \underline{\varphi}_1, \gamma^{\bullet})$ et $\varphi_2 = (\mathcal{A}^o(G_2^{\cdot}), \underline{\varphi}_2, \gamma^{\bullet})$ les foncteurs qui ont pour support p_1 et p_2 respectivement; il est clair que :

$$\begin{cases} \underline{\varphi}_1(f) = 2 \\ \underline{\varphi}_1(g) = 1 \\ \underline{\varphi}_1(h) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underline{\varphi}_1(e_i) = 0 ; & i = 1, 2, 3 \\ \varphi_1^o(e_i) = (0, 2) ; & i = 4, 5 \\ \varphi_1^o(k) = (1, 3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{\varphi}_2(f) = a \\ \underline{\varphi}_2(g) = b \\ \underline{\varphi}_2(h) = c \end{cases} \qquad \begin{cases} \underline{\varphi}_2(e_i) = e ; & i = 1, 2, 3 \\ \varphi_2^o(e_i) = (e, a) ; & i = 4, 5 \\ \varphi_2^o(k) = (b, c) \end{cases}$$

ces foncteurs sont bien fidèles.

Il résulte, de la proposition 13 et de son corollaire et du fait que $\underline{p}_1$ et $\underline{p}_2$ sont surjectifs, que G_1 et G_2 sont des quotients de G par des sous-groupes distingués N_1 et N_2 respectivement qui vérifient la condition du corollaire.

D'autre part, ces sous-groupes sont nécessairement maximaux vis à vis de cette condition, car tout quotient strict de G_1 ou G_2 est isomorphe à $Z/(2)$ et, si h désigne l'homomorphisme canonique, alors $h^* \circ \varphi_1$ ou $h^* \circ \varphi_2$ ne sont plus fidèles.

Ils sont en outre distincts, car G_1 n'est pas isomorphe à G_2.

REMARQUE. Les relations qui déterminent G_1 et G_2 à partir de G sont respectivement : $f^2 = 0$, $g^2 = f$ et $f^2 = g^2 = (gf)^2 = 0$.

3. Application à l'immersion d'un groupe $(F \cdot 0)$ dans un groupoïde $(F \cdot 0)$ obtenu par localisation d'un groupe.

A) PRELIMINAIRES.

Soient $(\gamma^\bullet, <)$ et $(\gamma'^\bullet, <)$ deux groupoïdes fonctoriellement ordonnés, $M^\bullet$ et $M'^\bullet$ deux sous-groupoïdes majorants de $(\gamma^\bullet, <)$ et $(\gamma'^\bullet, <)$ respectivement.

Soit $q = ((\gamma'^\bullet, <), \underline{q}, (\gamma^\bullet, <))$ un foncteur ordonné.

DEFINITION 6. *On dira que q est* spécialement ordonné *si les conditions suivantes sont réalisées :*

1) $q(M) \subset M'$;

2) si $m' \in M'$ et $f \in \gamma^\bullet$ sont tels que $m' > \underline{q}(f)$, alors il existe $m \in M$ tel que $m > f$ et $\underline{q}(m) = m'$;

3) soit $f \in \gamma^\bullet$ et $F' = (f'_n, \dots, f'_1) \in B(\underline{q}(f))$, alors il existe $F = (f_n, \dots, f_1) \in B(f)$ tel que $f'_i = \underline{q}(f_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

REMARQUE. Si $\gamma_o^\bullet$ et $\gamma_o'^\bullet$ ont des plus grands éléments E_o et E'_o respectivement, alors on a $q(E_o) = (E'_o)$.

En effet, nécessairement $E'_o \in M$ et $E'_o > \underline{q}(E_o)$; d'après *2)* il existe $m \in M'^\bullet$ tel que $m > E_o$ et $\underline{q}(m) = E'_o$; mais la relation $m > E_o$ entraîne $m = E_o$, et par suite $\underline{q}(E_o) = (E'_o)$.

PROPOSITION 10. *Si q est bien fidèle et vérifie la condition suivante :*

(SO) Si $m' \in M'^\bullet$ et $e \in \gamma_o^\bullet$ sont tels que $\alpha(m') > q(e)$, alors il existe $m \in M^\bullet$ tel que $\alpha(m) > e$ et $q(m) = m'$.

alors q vérifie les conditions 2) et 3) de la définition 6.

Montrons déjà que la condition E_3 de E p. 55 est vérifiée pour q :

Soient $f' \in \gamma'^{\bullet}$ et $e \in \gamma_o^{\bullet}$ tels que $\underline{q}(e) = \alpha(f')$ et soit $m' \in M'^{\bullet}$ tel que $m' > f'$; alors on a $\alpha(m') > q(e)$ et, d'après (SO), il existe $m \in M^{\bullet}$ tel que

$$\alpha(m) > e \text{ et } \underline{q}(m) = m'.$$

Soit $f = me$; alors on a

$$\underline{q}(f) < m' \text{ et } \alpha(\underline{q}(f)) = \alpha(f'), \text{ d'où } \underline{q}(f) = f'.$$

Il en résulte que q est un foncteur d'hypermorphismes.

Soit alors $m' \in M'^{\bullet}$ et $f \in \gamma^{\bullet}$ tels que $m' > \underline{q}(f)$; le raisonnement précédent montre qu'il existe $m \in M^{\bullet}$ tel que

$$\underline{q}(m\,\alpha(f)) = \underline{q}(f) \text{ et } \underline{q}(m) = m'.$$

Comme q est bien fidèle on a $m\,\alpha(f) = f$ et $2)$ est vérifié.

Soient $f \in \gamma^{\bullet}$ et $F' = (f'_n, \dots, f'_1) \in B(\underline{q}(f))$.

Il existe, d'après E_3, $f_1 \in \gamma^{\bullet}$ tel que $\alpha(f_1) = \alpha(f)$ et $\underline{q}(f_1) = f'_1$, d'où $q(\beta(f_1)) = \beta(f'_1) = \alpha(f'_2)$. Toujours d'après E_3, il existe $f_2 \in \gamma^{\bullet}$ tel que

$$\alpha(f_2) = \beta(f_1) \text{ et } \underline{q}(f_2) = f'_2.$$

De proche en proche, on construit une suite $F = (f_n, \dots, f_1)$ d'éléments de $\gamma^{\bullet}$ tels que

$$\underline{q}(f_i) = f'_i,\ i = 1, 2, \dots, n, \text{et } (f_{i+1}, f_1) \in \gamma * \gamma.$$

Soit $f_o = f_n \cdot \dots \cdot f_1$; alors on a $\underline{q}(f_o) = f'$ et, comme q est bien fidèle, $f_o = f$, d'où $F \in B(f)$ et $3)$ est vérifiée.

B) DEFINITION DE LA CATEGORIE $\mathfrak{D}$.

Soit $\mathfrak{D}_o$ la classe des couples $(\gamma^{\bullet}, M^{\bullet})$ tels que :

-$(\gamma^{\bullet}, <)$ soit un groupoïde fonctoriellement ordonné

-$\gamma_o^{\bullet}$ ait un plus grand élément E dont la composante dans $\gamma^{\bullet}$ soit un sous-groupe A de γ.

-$M^{\bullet}$ soit un sous-groupoïde majorant de $(\gamma^{\bullet}, <)$.

Soit $\mathfrak{D}$ la classe des triplets $[(\gamma_2, M_2), q, (\gamma_1, M_1)]$ tels que :

$$(\gamma_i, M_i) \in \mathfrak{D}_o,\ i = 1, 2, \text{et } q = (\gamma_2, \underline{q}, \gamma_1)$$

est un foncteur spécialement ordonné.

PROPOSITION 11. *$\mathfrak{T}$ est une catégorie pour la loi de composition suivante :*

$$[(\gamma'_2, M'_2), q', (\gamma'_1, M'_1)]\,[(\gamma_2, M_2), q, (\gamma_1, M_1)] = [(\gamma'_2, M'_2), q' \circ q, (\gamma_1, M_1)]$$

si, et seulement si, $(\gamma'_1, M'_1) = (\gamma_2, M_2)$.

$\mathfrak{T}_o$ est une classe d'objets pour $\mathfrak{T}$.

Vérification immédiate.

THEOREME 3. *$\mathfrak{T}$ est isomorphe à une sous-catégorie de $\mathcal{H}$.*

Définissons une application $\underline{\chi}$ de $\mathfrak{D}$ dans $\mathcal{H}$.

Soit $(\gamma^\cdot, M) \in \mathfrak{T}_o$; posons

$$\underline{\chi}(\gamma^\cdot, M^\cdot) = (G^\cdot_{M^\cdot}, \varphi, \gamma^\cdot)$$

où $G^\cdot_{M^\cdot}$ est la $(\mathcal{G}, \mathcal{F}_g)$-projection de $M^\cdot$ construite dans 1 , 3° déf. et φ le foncteur $(\mathfrak{A}^o(G^\cdot_{M^\cdot}), \underline{\varphi}, \gamma^\cdot)$ admettant pour support le foncteur $\pi(M^\cdot) = (G^\cdot_{M^\cdot}, \underline{\pi(M^\cdot)}, M^\cdot)$.

(Si $m \in M^\cdot$ on notera toujours $\underline{\pi(M^\cdot)}(m) = \dot{m}$).

Soit $(\overline{\pi}, \pi)$ le foncteur naturalisé associé à π (voir E, prop. 25, III).

Soit $s \in G^\cdot_{M^\cdot}$ associé à E. Alors il existe $F = (f_n, \dots, f_1) \in B(E)$ et $S = (m_n, \dots, m_1) \in \mathcal{S}$ tel que

$$E \xrightarrow{F,S} s\ .$$

Par hypothèse sur E, on a nécessairement $f_i \in A$ et $m_i = f_i$; par suite, comme $f_n \dots . f_1 = E$, $d = \dot{f}_n \dots . \dot{f}_1 = \varepsilon$, donc $\underline{\varphi}(E) = \varepsilon$ et $\hat{\varphi} = (G^\cdot_{M^\cdot}, \varphi, \gamma^\cdot) \in \mathcal{H}_o$.

Soient $(\gamma_i^\cdot, M_i^\cdot) \in \mathfrak{T}_o$, $i = 1, 2$, tels que $\underline{\chi}(\gamma_1^\cdot, M_1^\cdot) = \underline{\chi}(\gamma_2^\cdot, M_2^\cdot)$; alors $\gamma_1^\cdot = \gamma_2^\cdot$ et $G_{M_1^\cdot} = G_{M_2^\cdot}$, par suite $M_1^\cdot = M_2^\cdot$ (voir remarque 1 , 3°déf).

Soit maintenant $[(\gamma_2, M_2), q, (\gamma_1, M_1)] \in \mathfrak{D}$ et $\underline{\chi}(\gamma_i, M_i) = \hat{\varphi}_i$, $i = 1, 2$.

Soit $\underline{q}_1$ la restriction de $\underline{q}$ à M_1; alors $q_1 = (M_2, \underline{q}_1, M_1)$ est un foncteur.

Soit $\overline{\pi}(q_1) = (G^\cdot_{M_2}, \underline{\overline{\pi}(q_1)}, G^\cdot_{M_1})$; alors on a

$$(\overline{\pi}(q_1), \pi(M_2), \pi(M_1), q_1) \in \sqsubset\mathcal{F}.$$

Posons

$$\chi[(\gamma_2, M_2), q, (\gamma_1, M_1)] = [\hat{\varphi}_2, \hat{\varphi}_1, q, \overline{\pi}(q_1)]$$

et montrons que

$$((\overline{\pi}(q_1))^*, \varphi_2, \varphi_1, q) \in \sqsubset\mathcal{F}.$$

Pour simplifier les notations nous poserons $\overline{\pi}(q_1) = r$.

Soit $f_1 \in \gamma_1$ et $s_1 \in \varphi_1^o(f_1)$, il existe $F^1 = (f_n^1, \dots, f_1^1) \in B(f_1)$ et $S^1 = (m_n^1, \dots, m_1^1) \in \mathcal{S}_1$ tel que

$$f_1 \xrightarrow{F^1, S^1} s_1 \text{ et } s_1 = \dot{m}_n^1 \dots . \dot{m}_1^1 .$$

Posons

$$\underline{q}(f_i^1) = f_i^2, \quad \underline{q}_1(m_i^1) = m_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, n, \ \underline{q}(f_1) = f_2 .$$

Soient $F^2 = (f_n^2, \dots, f_1^2)$ et $S^2 = (m_n^2, \dots, m_1^2)$; il est clair que $F^2 \in B(f_2)$, $S^2 \in \mathcal{S}_2$ et $f_2 \xrightarrow{F^2, S^2} s_2$, si $s_2 = \dot{m}_n^2 \dots . \dot{m}_1^2$.

Puisque,

$$\dot{m}_i^2 = (\underline{\pi}(M_2) \circ \underline{q}_1)(m_i^1) = (r \circ \underline{\pi}(M_1))(m_i^1) = r(\dot{m}_i^1),$$

on a

$$s_2 = r(s_1) \text{ et par suite } r(\varphi_1^o(f_1)) \subset \varphi_2^o(f_2).$$

Réciproquement si $f_2 = \underline{q}(f_1)$ et si $s_2 \in \varphi_2^c(f_2)$, il existe

$$F^2 = (f_n^2, \dots, f_1^2) \in B(f_2) \text{ et } S^2 = (m_n^2, \dots, m_1^2) \in \mathcal{S}_2$$

tel que

$$f_2 \xrightarrow{F^2, S^2} s_2 .$$

D'après les propriétés de q il existe $F^1 = (f_n^1, \dots, f_1^1) \in B(f_1)$ et $S^1 = (m_n^1, \dots, m_1^1) \in \mathcal{S}_1$ tels que $q(f_i^1) = f_i^2$, $q(m_i^1) = m_i^2$, $i = 1, 2, \dots, n$, et $S^1 > F^1$; on a donc

$$f_1 \xrightarrow{F', S^1} s_1, \text{ si } s_1 = \dot{m}_n^1 \dots \dot{m}_1^1$$

et comme précédemment, on montre que $r(s_1) = s_2$, et par suite que

$$r(\varphi_1^o(f_1)) = \varphi_1^o(f_2).$$

Il en résulte que $r^* \cdot \varphi_1 = \varphi_2 . q$, d'où $(\hat{\varphi}_2, \hat{\varphi}_1, q, \overline{\pi}(q_1)) \in \mathcal{H}$.

Il est facile de montrer que l'application $\underline{\chi}$ de $\mathfrak{D}$ vers $\mathcal{H}$ définit le foncteur

$$\chi = (\mathcal{H}, \underline{\chi}, \mathfrak{D})$$

et il est clair que ce foncteur est fidèle. Comme sa restriction à $\mathfrak{D}_o$ est injective, il est, lui aussi, injectif et applique $\mathfrak{D}$ sur une sous-catégorie de $\mathcal{H}$.

4. Application des résultats du par. 1 à la détermination d'une projection.

Soit $\mathcal{F}_g^o$ la catégorie des foncteurs ordonnés entre groupoïdes ordonnés $(\gamma^\bullet, <)$ ayant la propriété suivante :

$\gamma_o^\bullet$ a un plus grand élément E.

Soit $\mathcal{G}^o$ la sous-catégorie pleine des groupes muni de l'ordre trivial, alors $\mathcal{G}^o$ s'identifie à $\mathcal{G}$.

Soit $(\gamma^\bullet, <) \in \mathcal{F}_g^o$, et soit R la relation d'équivalence bicompatible engendrée par la relation R_o :

Si $f, f' \in \gamma^\bullet$, alors $(f, f') \in R_o$ si et seulement si $f < f'$.

Soit $\tilde{\gamma}^\bullet = \gamma^\bullet / R$ le graphe multiplicatif quotient.

Toutes les unités de $\gamma^\bullet$ étant équivalentes *mod* R à E, $\tilde{\gamma}^\bullet$ à une seule unité $\tilde{e}$; d'autre part, tous les éléments de $\tilde{\gamma}^\bullet$ sont inversibles.

Soit $N(\tilde{\gamma}^\bullet) = \Gamma^\bullet$ la $\mathcal{F}$-projection de $\tilde{\gamma}^\bullet$ construite par la méthode du théorème 10, III de E.

Alors $\Gamma^\bullet$ est un groupe, quotient du monoïde libre construit sur $\tilde{\gamma}^\bullet - \tilde{e}$ et auquel on a ajouté l'élément unité $\tilde{e}$ par la relation d'équivalence ρ engendrée par la relation ρ_o : Si $x, x' \in \tilde{\gamma}^\bullet$, alors $((x, x'), x . x') \in \rho_o$ si et seulement si $(x, x') \in \tilde{\gamma}^\bullet * \tilde{\gamma}^\bullet$.

Soit $\nu(\tilde{\gamma}^\bullet) = (N(\tilde{\gamma}^\bullet), \underline{\nu(\tilde{\gamma}^\bullet)}, \tilde{\gamma}^\bullet)$ le projecteur correspondant et soit $\mu(\gamma^\bullet) = \nu(\tilde{\gamma}^\bullet) . \tilde{R}$.

THEOREME 4. *$\mathcal{F}_g^o$ est une catégorie à $\mathcal{G}$-projections, une $(\mathcal{G}, \mathcal{F}_g^o)$-projection de $(\gamma^\bullet, <) \in \mathcal{F}_g^o$ étant le groupe $\Gamma^\bullet$ construit ci-dessus.*

Soit $(\gamma^\bullet, <) \in \mathcal{F}_g^o$, $G^\bullet \in \mathcal{G}$ et $p = (G^\bullet, \underline{p}, \gamma^\bullet) \in \mathcal{F}_g^o$; alors si $f, f' \in \gamma^\bullet$ sont tels que $f' < f$, on a : $\underline{p}(f') = \underline{p}(f)$.

Donc p est compatible avec R et définit par passage au quotient un néofoncteur $\tilde{p} = (G^{\cdot}, \underline{\tilde{p}}, \tilde{\gamma}^{\cdot})$.

$\Gamma^{\cdot}$ étant une $\mathcal{F}$-projection de $\tilde{\gamma}^{\cdot}$, il existe un homomorphisme unique $p' = (G^{\cdot}, \underline{p}', \Gamma^{\cdot})$ tel que $p' . \nu(\tilde{\gamma}^{\cdot}) = \tilde{p}$. D'où

$$p' . \mu(\gamma^{\cdot}) = p.$$

L'unicité de p' se démontre comme dans le théorème 1.

PROPOSITION 12.

Soit $(\gamma^{\cdot}, <) \in \mathcal{F}^o_g$ *et* $G^{\cdot} \in \mathcal{G}$.

Soit $\varphi = (\mathcal{A}^o(G^{\cdot}), \underline{\varphi}, \gamma^{\cdot})$ *un foncteur ordonné tel que* $G^{\cdot}$ *soit engendré par* $\bigcup_{f \in \gamma^{\cdot}} \varphi^c(f)$.

Soit N *le sous-groupe distingué de* G *engendré par* $\bigcup_{e \in \gamma^{\cdot}_o} \varphi^a(e)$ *et soit* $G'^{\cdot} = G^{\cdot}/N$.

Alors $G'^{\cdot}$ *est un quotient de* $\Gamma^{\cdot}$, $\Gamma^{\cdot}$ *étant la* $(\mathcal{G}, \mathcal{F}^o_g)$*-projection de* $(\gamma^{\cdot}, <)$ *construite dans le théorème précédent.*

Soit C^o le sous-groupoïde de $\mathcal{A}^o(G^{\cdot})$ engendré par $\underline{\varphi}(\gamma)$.

Définissons une application $\underline{\psi}$ de C^o dans $G'^{\cdot}$:

Soit $\check{X} \in C^o$; il existe $e \in \gamma^{\cdot}$ tel que $\alpha^o(\check{X}) = \check{U} = \underline{\varphi}(e)$; comme nécessairement on a $U \subset N$, tous les $s \in X$ sont équivalents $mod\ N$, et par suite on peut poser

$$\underline{\psi}(\check{X}) = \underline{\tilde{\rho}}_N(s)$$

si $s \in X$ et si ρ_N est la relation d'équivalence dans $G^{\cdot}$ associée à N.

Il est facile de montrer que l'application $\underline{\psi}$ est sous-jacente à un foncteur $\psi = (G'^{\cdot}, \underline{\psi}, C^o)$.

Soient $f, f' \in \gamma^{\cdot}$ tels que $f' < f$. Alors, puisque φ est ordonné, on a

$$\varphi^a(f') \supset \varphi^a(f), \text{ et par suite } \underline{\psi} \circ \underline{\varphi}(f') = \underline{\psi} \circ \underline{\varphi}(f).$$

Il en résulte que $\psi \circ \varphi \in \mathcal{F}^o_g$.

Le théorème précédent entraîne alors qu'il existe un homomorphisme unique $\theta = (G'^{\cdot}, \underline{\theta}, \Gamma^{\cdot})$ tel que

$$\psi \circ \varphi = \theta \circ \mu(\gamma^{\cdot}).$$

Il résulte ensuite de l'hypothèse sur $G^{\cdot}$ que $(\underline{\psi} \circ \underline{\varphi})(\gamma)$ est un système de générateurs de $G'^{\bullet}$ et,comme on a

$$(\psi \circ \varphi)(\gamma) = (\theta \circ \mu(\gamma^{\bullet}))(\gamma),$$

θ est une surjection et la proposition est démontrée.

Il existe des situations particulières où $G^{\bullet}$ est isomorphe à $\Gamma^{\bullet}$; on a, en fait, les deux théorèmes suivants :

THEOREME 5. *Si $(\gamma^{\bullet}, <)$ est fonctoriellement ordonné, si $M^{\bullet}$ est un sous-groupoïde majorant de $(\gamma^{\bullet}, <)$, si $G^{\bullet}$ est la $(\mathcal{G}, \mathcal{F}_g)$-projection de $M^{\bullet}$ construite dans* § 1, *1re, 3ème définitions, et φ le foncteur ayant pour support le projecteur $\pi(M^{\bullet})$, alors $G'^{\bullet}$ est isomorphe à $\Gamma^{\bullet}$.*

Considérons le diagramme suivant , dans lequel les notations de la proposition précédente sont conservées et

$$\begin{tikzcd}
 & \gamma^{\bullet} \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "\tilde{R}"] \arrow[dddr] & \\
M^{\bullet} \arrow[ur, "i"] \arrow[ddd, "\pi(M^{\bullet})"'] & C^{o} \arrow[d, "\psi"] & \tilde{\gamma}^{\bullet} \arrow[ddd, "\nu(\tilde{\gamma}^{\bullet})"] \arrow[l, dashed] \\
 & G'^{\bullet} & \\
 & & \\
G^{\bullet} \arrow[uur, "\tilde{\rho}_N"] \arrow[rr, "p"'] & & \Gamma^{\bullet} \arrow[uul, "\theta"']
\end{tikzcd}$$

$$i = (\gamma^{\bullet}, \underline{i}, M^{\bullet})$$

est l'injection canonique.

Le foncteur φ vérifie la condition de la proposition 12 et par suite θ est une surjection.

Nous poserons pour simplifier :

$$\pi(M^{\bullet}) = \pi \ , \mu(\gamma^{\bullet}) = \mu \ \text{ et } \ \nu(\tilde{\gamma}^{\bullet}) = \nu.$$

$\mu \circ i$ étant un foncteur, il existe un homomorphisme $p = (\Gamma^{\bullet}, \underline{p}, G^{\bullet})$ tel que

$$(1) \qquad \mu \circ i = p \circ \pi \ .$$

Comme, par définition d'un sous-groupoïde majorant, tout élément de $\gamma^{\bullet}$ est équivalent *mod R* à un élément de $M^{\bullet}$, on a

$$(\tilde{R} \circ i)(M) = \tilde{\gamma}$$

et,comme $\nu(\tilde{\gamma})$ est un système de générateurs de $\Gamma^{\bullet}$,

$$(\mu \circ i)(M) = (p \circ \pi)(M)$$

est un système de générateurs de $\Gamma^{\bullet}$, et par suite $\underline{p}$ est une surjection.

Il résulte ensuite de la relation *(1)* et de la relation $\psi \circ \varphi = \theta \circ \mu$ que

$$(2) \qquad \psi \circ \varphi \circ i = \theta \circ p \circ \pi \ .$$

D'autre part, si $m \in M^{\bullet}$ on a $\pi(m) = \dot{m} \in \varphi^{o}(i(m)) = X$, et par définition de $\underline{\psi}$ on a $\underline{\psi}(\breve{X}) = \underline{\tilde{\rho}}_N(\dot{m})$.

Par suite on a

$$\psi \circ \varphi \circ i = \tilde{\rho}_N \circ \pi \, . \tag{3}$$

Il résulte alors des relations *(2)* et *(3)* et du fait que π est un projecteur que

$$\theta \circ p = \tilde{\rho}_N \, . \tag{4}$$

Il en résulte que $N = Ker\, \tilde{\rho}_N = p^{-1}(Ker\, \theta)$, et par suite que, si $P = ker\, p$, on a $P \subset N$.

Soit $s \in \bigcup_{e \in \gamma_0^\bullet} \varphi^o(e)$ tel que $s \neq \varepsilon$; il existe $e \in \gamma_0^\bullet$ tel que s soit associé à e ; par suite, si $\dot{m}_n \dots \dot{m}_1$ est le produit formel qui définit s dans $G^\bullet$ et si $S = (m_n, \dots, m_1)$, il existe, d'après le lemme 2,

$$F = (f_n, \dots, f_1) \in B(e) \text{ tel que } e \xrightarrow{F,S} s \, .$$

Calculons $\underline{p}(s) = \underline{p}(\dot{m}_n) \dots . \underline{p}(\dot{m}_1)$:

Il résulte de *(1)* que $\underline{p}(\dot{m}_i) = (\overline{\mu} \circ i)(m_i) = (\nu \circ \tilde{R} \circ i)(m_i)$, $i = 1 \dots n$.

Mais $i(m_i)$ est équivalent à f_i *mod* R, donc

$$(\tilde{R} \circ i)(m_i) = \tilde{R}(f_i),$$

et par suite

$$\underline{p}(\dot{m}_i) = (\nu \circ \tilde{R})(f_i) \text{ et } \underline{p}(s) = (\nu \circ \tilde{R})(f_n \dots . f_1) = (\nu \circ \tilde{R})(e),$$

d'où $\underline{p}(s) = \varepsilon_{\Gamma^\bullet}$, l'élément unité de $\Gamma^\bullet$; et par suite $s \in P$.

N étant le plus petit sous-groupe distingué contenant $\bigcup_{e \in \gamma_0^\bullet} \varphi^o(e)$, on a $N \subset P$. Il résulte alors de ce qui précède que

$$p^{-1}[Ker\, \theta] = N = P = p^{-1}(\varepsilon_{\Gamma^\bullet}).$$

$\underline{p}$ étant une surjection, cette relation entraîne

$$Ker\, \theta = \varepsilon_{\Gamma^\bullet} \, .$$

Par suite θ est un isomorphisme.

THEOREME 6. *Si* $(\gamma^\bullet, <)$ *est un groupoïde fonctoriellement ordonné obtenu par localisation de* $G^\bullet$ *et si* φ *est le foncteur majorant associé, alors* $G'^\bullet$ *est isomorphe à* $\Gamma^\bullet$.

Dans ce cas, N est le sous-groupe engendré par la classe B des $s \in G$ ayant la propriété suivante : il existe $e \in \gamma_o^{\cdot}$ tel que $s > e$.

En effet, soient $s \in B$, $t \in G^{\cdot}$ et $e \in \gamma_o^{\cdot}$ tels que $s > e$; soit $e' = \beta(te)$; alors $e = \beta(t^{-1}e')$. Or on a :

$$(t.s.t^{-1})e' = t(s\beta(t^{-1}e').(t^{-1}e')) = t(se.t^{-1}e') = t(e.t^{-1}e') = e'.$$

Donc le sous-groupe N' engendré par B est distingué et,comme

$$B = \bigcup_{e \in \gamma^{\cdot}} \varphi^{\sigma}(e),$$

on a $N' = N$.

Montrons maintenant que la relation R est identique à la relation $\rho_{\psi\circ\varphi}$:

En effet, on a vu que si $f, f' \in \gamma^{\cdot}$ sont tels que $f < f'$, on avait :

$$(\underline{\psi} \circ \underline{\varphi})(f) = (\underline{\psi} \circ \underline{\varphi})(f').$$

Réciproquement, supposons cette relation vérifiée et soient $s \in \varphi^{\sigma}(f)$, $s' \in \varphi^{\sigma}(f')$; alors on a $s \sim s' \bmod N$, d'où $s = s'.t$, où $t \in N$. Mais $t = t_n \ldots .t_1$ où $t_i \in B$, et par définition de B on a $t_i \sim E \bmod R$, $i = 1,2 \ldots n$; par suite, comme R est bicompatible, on a $t \sim E \bmod R$, d'où $s \sim s' \bmod R$.

Les relations $s > f$ et $s' > f'$ entraînent alors $f \sim f' \bmod R$.

Les relations R et $\rho_{\psi\circ\varphi}$ sont donc identiques; mais comme $G^{\cdot}$ est contenu dans $\gamma^{\cdot}$ on a $\gamma^{\cdot}/\rho_{\psi\circ\varphi} = G^{\cdot\cdot}$, et par suite $\tilde{\gamma}^{\cdot}$ est isomorphe à $G^{\cdot\cdot}$.

$\tilde{\gamma}^{\cdot}$ étant un groupe, $\Gamma^{\cdot}$ est isomorphe à $\tilde{\gamma}^{\cdot}$ et par suite à $G^{\cdot\cdot}$.

5. Relation d'équivalence sur un groupoïde inductif associé à un sous-groupoïde majorant régulier. Application.

Soit $(\gamma^{\cdot}, <)$ un groupoïde préinductif.

Soit $M^{\cdot}$ un sous-groupoïde régulier majorant de $\gamma^{\cdot}$ ($M^{\cdot}$ est stable par pseudoproduit).

Soit r la relation suivante sur $\gamma^{\cdot}$: Si $f, f' \in \gamma$, alors $(f, f') \in r$ si et seulement si $f^{<} \cap M^{\cdot} = f'^{<} \cap M^{\cdot}$, où $f^{<}$ désigne la classe des majorants de $\gamma^{\cdot}$ dans $(\gamma^{\cdot}, <)$.

r est une relation d'équivalence et elle a la propriété suivante :

(J) Si $f, f' \in \gamma^{\cdot}$ sont tels que $f \sim f' \bmod r$, alors on a $f^{-1} \sim f'^{-1} \bmod r$.

LEMME 3. *Soient* $f, f', g, g' \in \gamma^{\bullet}$ *tels que* $g \sim g' \bmod r$, $(g, f) \in \gamma^{\bullet} * \gamma^{\bullet}$; $(g', f') \in \gamma^{\bullet} * \gamma^{\bullet}$; *s'il existe* $m \in M^{\bullet}$ *tel que* $m > f$ *et* $m > f'$, *alors on a* $g.f \sim g'.f' \bmod r$ *et* $f \sim f' \bmod r$.

Soit $W \in M^{\bullet}$ tel que $W > g.f$. Cette relation et la relation $m^{-1} > f^{-1}$ entraînent

$$W m^{-1} > (g.f).f^{-1} = g.$$

$M^{\bullet}$ étant régulier, et g étant équivalent à $g' \bmod r$, on a

$$W m^{-1} \in M^{\bullet} \text{ et } W m^{-1} > g'.$$

Cette relation et la relation $m > f'$ entraînent alors

$$(W m^{-1}) m > g'.f'.$$

Or on a

$$(W m^{-1}) m = W \alpha(m) \text{ et } W \alpha(m) < W,$$

d'où $W > g'.f'$. Il en résulte que $g.f \sim g'.f' \bmod r$. g et g' étant équivalents $\bmod r$, il existe $m' \in M$ tel que

$$m' > g \text{ et } m' > g'.$$

Le même raisonnement entraîne

$$g^{-1}.(g.f) \sim g'^{-1}.(g'.f') \bmod r,$$

c'est-à-dire $f \sim f' \bmod r$.

LEMME 4. *Soit* $e \in \gamma_0^{\bullet}$ *et* $f \in \gamma^{\bullet}$ *tels que* $\beta(f) \sim e \bmod r$; *alors il existe* $f' \in \gamma^{\bullet}$ *tel que* $\beta(f') = e$ *et* $f' \sim f \bmod r$.

Soit $m \in M$ tel que $m > f$; alors on a

$$\beta(m) > \beta(f), \text{ et par suite } \beta(m) > e.$$

Soit $f' = em$; les relations $\beta(f) \sim e \bmod r$, $m > f$, $m > f'$ entraînent, en vertu du lemme 3, la relation

$$f \sim f' \bmod r.$$

THEOREME 7. r *est une relation d'équivalence bicompatible et* $\tilde{\gamma}^{\bullet} = \gamma^{\bullet}/r$ *est un groupoïde quotient strict de* $\gamma^{\bullet}$.

Soient $f, f' \in \gamma$ tels que $f \sim f' \bmod r$, et soit $m \in M$ tel que $m > f$. Il en résulte :

$$m > f', \ \alpha(m) > \alpha(f) \ \text{et} \ \alpha(m) > \alpha(f').$$

Le lemme 3 entraîne alors que $\alpha(f) \sim \alpha(f') \bmod r$ et, puisque

$$f^{-1} \sim f'^{-1} \bmod r,$$

que $\beta(f) \sim \beta(f') \bmod r$.

Il résulte également du lemme 3 que r est compatible avec la multiplication, donc r est bicompatible.

Le lemme 4 entraîne alors le théorème.

PROPOSITION 12. *Si* $f \in \gamma^\bullet$ *et* $e \in \gamma_o^\bullet$ *sont tels que* $f \sim e \bmod r$, *alors* $f \in \gamma_o^\bullet$.

En effet soit $m \in M$ tel que $m > e$; on a $\alpha(m) > e$ et par hypothèse $\alpha(m) > f$; par suite $f \in \gamma_o^\bullet$.

Supposons maintenant que $(\gamma^\bullet, <)$ *soit un groupoïde inductif.*

LEMME 5. *Soient* $f, f', g \in \gamma$ *tels que* $f \sim f' \bmod r$ *et* $f < g$; *alors il existe* $g' \in \gamma^\bullet$ *tel que* $g' > f'$ *et* $g' \sim g \bmod r$.

Soit $m \in M$ tel que $m > g$; alors on a par hypothèse $m > f$ et $m > f'$; donc $g' = g \cup f'$ existe et on a $m > g'$.

Si $m \in M$ est tel que $m > g'$, on a $m > g$. Il en résulte que

$$g \sim g' \bmod r$$

et, comme $g' > f'$, le lemme est démontré.

PROPOSITION 13. *La relation* $\propto$ *sur* $\tilde{\gamma}$ *quotient de la relation* $<$ *par* r *est une relation d'ordre.*

Soient $f, g, g' \in C$ tels que $g < f < g'$ et $g \sim g' \bmod r$.

Soit $m \in M^\bullet$ tel que $m > f$; alors on a $m > g$. Si $m \in M$ et $m > g$, on a $m > g'$ et par suite $m > f$.

Il en résulte qu'on a $f \sim g \bmod r$; la condition Q_2 du lemme 1.I est donc vérifiée.

La condition Q_1 de ce même lemme est aussi vérifiée pour l'ordre opposé à l'ordre $<$, en vertu du lemme 5; il en résulte la proposition.

LEMME 6. *Soient* $f_i \in \gamma^\bullet$, $e_i \in \gamma_o^\bullet$, $i = 1, 2$, *tels que*

$$f_1 < f_2, \ e_1 < e_2 \ \text{et} \ \beta(f_i) \sim e_i \bmod r;$$

alors il existe $f'_i \in \gamma^\bullet$, $i = 1, 2$, *tels que*

$$f'_i \sim f_i \bmod r,\ \beta(f'_i) = e_i \text{ et } f'_1 < f'_2.$$

D'après le lemme 4, il existe $f'_i \in \gamma$ tels que $f'_i \sim f_i \bmod r$ et $\beta(f'_i) = e_i$. Soit $m \in M$ tel que $m > f_2$; alors on a $m > f'_2$ et $m > f_1$, d'où $m > f'_1$, et comme $\beta(f'_1) < \beta(f'_2)$ on a $f'_1 < f'_2$.

LEMME 7. *Soit x une classe mod r et $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de γ telle que $f_i \in x$ ($\forall i \in I$); alors $\bigcup f_i$ existe et $\bigcup f_i \in x$.*

Soit $i_o \in I$ et $m \in M$ tel que $m > f_{i_o}$; par hypothèse, on a $m > f_i$ ($\forall i \in I$), donc $\bigcup f_i$ existe et on a $m > \bigcup f_i$.

Soit $m \in M$ tel que $m > \bigcup f_i$; naturellement on a $m > f_{i_o}$, et par suite $f_{i_o} \sim \bigcup f_i \bmod r$.

THEOREME 8. *$(\tilde{\gamma}^\bullet, \propto)$ est un groupoïde inductif.*

Soient $(y, x), (y', x') \in \tilde{\gamma}^\bullet * \tilde{\gamma}^\bullet$ tels que $x \propto x'$ et $y \propto y'$. Alors il existe $f \in x$, $f' \in x'$, $g \in y$, $g' \in y'$ tels que :

$$f < f',\ g < g',\ \beta(f') \sim \alpha(g') \bmod r,\ \beta(f) \sim \alpha(g) \bmod r.$$

Comme on a $\alpha(g) < \alpha(g')$, il existe, d'après le lemme 6, $f_1, f'_1 \in \gamma^\bullet$ tels que :

$$f_1 \sim f \bmod r,\ f'_1 \sim f' \bmod r,\ \beta(f'_1) = \alpha(g'),\ \beta(f_1) = \alpha(g) \text{ et } f_1 < f'_1.$$

Il en résulte que $g . f_1 < g' . f'_1$ et, comme $y . x = \tilde{\rho}(g . f_1)$ et $y' . x' = \tilde{\rho}(g' . f'_1)$, on a $y . x \propto y' . x'$.

Soit $(y, x) \in \tilde{\gamma}^\bullet * \tilde{\gamma}^\bullet$ et $z' \in \tilde{\gamma}^\bullet$ tels que $z' \propto y . x$; alors il existe $h \in y . x$ et $h' \in z'$ tel que $h' < h$. En vertu du lemme 4, il existe $f \in x$ tel que $\alpha(f) = \alpha(h)$, et $g \in y$ tel que $\alpha(g) = \beta(f)$.

Soit $h_1 = g . f$; alors on a $h_1 \sim h \bmod r$ et, comme $\alpha(h_1) = \alpha(h)$, on a $h_1 = h$.

Il existe $g', f' \in \gamma^\bullet$ tels que

$$g' < g,\ f' < f \text{ et } g' . f' = h'.$$

Soit $x' = \tilde{\rho}(f')$, $y' = \tilde{\rho}(g')$, alors on a

$$y' . x' = z',\ x' \propto x \text{ et } y' \propto y.$$

Soit $x \in \tilde{\gamma}^\bullet$ et $u \in \tilde{\gamma}^\bullet_o$ tels que $x \propto u$; alors il existe $e \in u$ et $f \in x$

tels que $f < u$; d'après la proposition 12, on a $e \in \gamma_o^\bullet$ et par suite $f \in \gamma_o^\bullet$, donc $x \in \tilde{\gamma}_o^\bullet$.

Il résulte de ce qui précède que $(\tilde{\gamma}^\bullet, \propto)$ est fonctoriellement ordonné *(1)*.

Soient $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\tilde{\gamma}$ majorée par $y \in \tilde{\gamma}$.

Alors il existe, pour tout $i \in I$, $f_i \in x_i$ et $g_i \in y$ tels que $f_i < g_i$.

D'après le lemme 7, $\bigcup g_i = g$ existe et $\bigcup g_i \in y$; comme $f_i < g$ $(\forall i \in I)$, $\bigcup f_i = f$ existe et on a $f < g$.

Soit $x = \tilde{p}(f)$; alors on a $x \propto y$. Soit $z \in \tilde{\gamma}$ un majorant de la famille $(x_i)_{i \in I}$; alors il existe, pour tout $i \in I$, $f'_i \in x_i$ et $h_i \in z$ tels que $f'_i < h_i$. D'après le lemme 5, il existe, pour tout $i \in I$, $h'_i \in z$ tel que $f_i < h'_i$ et, d'après le lemme 7, $\bigcup h'_i$ existe et on a

$$\bigcup h'_i \in z \quad \text{et} \quad \bigcup f_i < \bigcup h'_i .$$

Il en résulte $x \propto z$, et par suite

$$x = \bigcup_{i \in I} x_i .$$

$(\tilde{\gamma}, \propto)$ est donc une classe inductive *(2)*.

Il résulte de *(1)* et de *(2)* que $(\tilde{\gamma}^\bullet, \propto)$ est fonctoriellement ordonné.

REMARQUES. $((\tilde{\gamma}^\bullet, \propto), \underline{\tilde{r}}, (\gamma^\bullet, <))$ est foncteur ordonné quasi-inductif et bien fidèle dont la restriction à $M^\bullet$ est injective.

APPLICATION.

THEOREME 9. *Si :*

$(\gamma^\bullet, <)$ est un groupoïde inductif,

$M^\bullet$ un sous-groupoïde majorant de $\gamma^\bullet$,

$G_M^\bullet$ une $(\mathcal{G}, \mathcal{F}_g)$ projection de M,

$\varphi_M = ((\mathfrak{A}^o(G_M^\bullet), <), \underline{\varphi}_M, (\gamma^\bullet, <))$ le foncteur construit par la méthode de (IV, 2),

$\overline{M}^\bullet$ le sous-groupoïde régulier de $(\gamma^\bullet, <)$ engendré par $M^\bullet$,

r_M la relation d'équivalence associée à $\overline{M}^\bullet$,

$(\tilde{\gamma}_M^\bullet, \propto)$ le groupoïde inductif quotient de $(\gamma^\bullet, <)$ par r_M,

alors φ_M définit par passage au quotient un foncteur

$$\tilde{\varphi}_M = ((\mathcal{A}^o(G_{\dot{M}}), <), \underline{\tilde{\varphi}}_M, (\tilde{\gamma}_{\dot{M}}, \propto))$$

qui est ordonné quasi-inductif et bien fidèle.

En effet, soient $f, f' \in \gamma^{\cdot}$, tels que $f \sim f' \, mod \, r_M$ et soit $s \in \varphi_M^o(f)$; alors il existe $S = (m_n, \ldots, m_1) \in \mathcal{S}_M$ tel que

1) $\dot{m}_n \ldots . \dot{m}_1 = s$

2) $m_n \ldots m_1 = g > f$;

mais $g \in \overline{M}^{\cdot}$ donc, par hypothèse, on a $g > f'$, et par suite $s \in \varphi_M^o(f')$, donc

$$\varphi_M^o(f) = \varphi_M^o(f').$$

Donc φ_M définit par passage au quotient $\tilde{\varphi}_M$ qui a les mêmes propriétés que φ_M, compte tenu des propriétés de $\tilde{r}_M$.

CHAPITRE V

Le chapitre débute par quelques rappels sur la théorie des structures feuilletées et tout particulièrement sur la notion d'holonomie.

Dans le paragraphe 2, on montre qu'étant donné un pseudogroupe $(\gamma^\bullet, <)$ d'homéomorphismes locaux d'un espace topologique E, la donnée d'un revêtement $(\tilde{X}, \mathrm{p})$ d'un espace topologique connexe et localement connexe X et d'un foncteur $\varphi = ((\mathcal{P}^o(G^\bullet), <), \underline{\varphi}, (\gamma^\bullet, <))$ ordonné, bien fidèle et quasi-inductif, où $G^\bullet$ est le groupe d'automorphismes de ce revêtement, permet de construire un feuilletage $(T, T') = (E, \gamma, \varphi, \tilde{X})$.

Le paragraphe suivant est consacré à l'étude de l'holonomie de ce feuilletage et les résultats du chapitre III sont utilisés pour établir un théorème fondamental (théorème 1).

Dans les paragraphes 4 et 5, on étudie diverses propriétés du feuilletage $(E, \gamma, \varphi, \tilde{X})$.

1. Rappel sur la théorie des feuilletages topologiques.

A) DEFINITIONS GENERALES (voir [9]).

Soit E un ensemble muni de deux topologies T et T'. On dira que (T, T') définit sur E un *feuilletage topologique* si la condition suivante est vérifiée :

Pour tout $x \in E$ il existe un voisinage ouvert U' de x relativement à T' sur lequel T et T' induisent la même topologie.

T' est supposée localement connexe.

Une composante connexe de E relativement à T' est appelée une *feuille* de (T, T').

Les feuilles de (T, T') forment une partition de E ; la relation d'équivalence correspondante est appelée relation *d'équivalence sous-jacente à (T, T')* et l'espace quotient $\check{E}$ muni de la topologie quotient de T est appelé *espace transverse* de (T, T').

Si U est un ouvert de E relativement à T, le couple des topologies induites par T et T' sur U définit un feuilletage topologique sur U, appelé *feuilletage induit par (T, T')* sur U et noté $(T, T')_U$.

Une feuille F de (T, T') est dite *simple* si tout point de F à un système fondamental de voisinages U ouverts relativement à T et tels que l'application canonique de l'espace transverse $\check{U}$ de $(T, T')_U$ dans l'espace transverse $\check{E}$, qui associe à toute feuille de U la feuille de E qui la contient, soit un homéomorphisme sur un ouvert de $\check{E}$. Un tel voisinage est appelé ouvert *distingué* de (T, T').

Le feuilletage est dit *simple* si toute feuille est simple; il est dit *localement simple* si tout point $x \in E$ admet un voisinage ouvert U relativement à T tel que $(T, T')_U$ soit simple; un tel ouvert est appelé *ouvert simple* et une feuille de $(T, T')_U$ sera appelée *plaque* de U.

B) NOTION DE CHAINE PURE ET D'HOLONOMIE.

a) Chaîne pure : Soit (T, T') un feuilletage topologique localement simple.

Soient O et O' deux ouverts simples tels que O' soit distingué dans O et que l'ouvert obtenu par saturation de O' relativement à la relation d'équivalence sous-jacente à $(T, T')_O$ soit identique à O; alors nous dirons que le couple (O, O') ou le couple (O', O) est un *chaînon pur.* On appelle *chaîne pure* une suite $C' = (O_p, \dots, O_1)$ telle que, pour tout $i < n$, le couple (O_i, O_{i+1}) soit un chaînon pur.

A toute chaîne pure C' est associé un homéomorphisme $I(C')$ de $\check{O}_1$ sur $\check{O}_p$ obtenu en composant les homéomorphismes canoniques ou leurs inverses associés à chaque chaînon pur.

b) Groupoïde d'holonomie : C'est le groupoïde H' des triplets (O^*, f, O) tels que :

1) O et O^* soient des ouverts simples;

2) il existe une chaîne pure $C' = (O_n, \dots, O_1)$ telle que

$$O_1 = O \quad \text{et} \quad O_n = O^*;$$

3) $f = I(C')$.

La classe H'_0 s'identifie à la classe des ouverts simples de (T, T').

Soit $<$ la relation suivante sur H' :

$(O_1^*, f_1, O_1) < (O^*, f, O)$ si et seulement si O_1^* est distingué dans O^*, O_1 est distingué dans O et

$$u^* \circ f_1 = f \circ u,$$

u^* et u étant les applications canoniques de $\breve{O}^*_1$ dans $\breve{O}^*$ et de $\breve{O}_1$ dans $\breve{O}$, respectivement .

Alors $(H', <)$ est un groupoïde ordonné régulier (voir [2]).

c) Pseudogroupe transverse d'holonomie : Soit ω' un ouvert simple et $H'(\omega')$ le sous-groupoïde de H' formé des triplets (O^*, f, O) tels que O et O^* soient saturés dans ω', alors $\breve{O}^*$ et $\breve{O}$ s'identifient à des ouverts $\underline{\Phi}(O)$ et $\underline{\Phi}(O^*)$ de $\breve{\omega}'$ et f à un homéomorphisme local de $\breve{\omega}'$, soit $\underline{\Phi}(O^*, f, O)$.

$\underline{\Phi}$ est une application de $H'(\omega')$ dans le pseudogroupe $\overline{\gamma}^{\bullet}_{\omega'}$ des homéomorphismes locaux de $\breve{\omega}'$.

(On identifiera les unités de $\overline{\gamma}^{\bullet}_{\omega'}$ aux ouverts de $\breve{\omega}'$).

Soit $\gamma_{\omega'} = \underline{\Phi}(H'(\omega'))$.

Alors $\gamma_{\omega'}$ définit un sous-pseudogroupe $\gamma^{\bullet}_{\omega'}$ de $\overline{\gamma}^{\bullet}_{\omega'}$ et l'application $\underline{\Phi}$ est sous-jacente à un foncteur ordonné

$$\Phi = ((\gamma^{\bullet}_{\omega'}, <), \underline{\Phi}, (H'(\omega'), <))$$

qui est un isomorphisme ordonné.

L'ordre $<$ sur $\gamma^{\bullet}_{\omega'}$ étant l'ordre habituel, $\gamma^{\bullet}_{\omega'}$ *s'appelle le pseudogroupe transverse d'holonomie relatif à* ω' et il a les propriétés suivantes :

1) c'est un sous-pseudogroupe faible de $\overline{\gamma}^{\bullet}_{\omega'}$ (voir [4]);

2) il est saturé par induction;

3) $(\gamma^{\bullet}_{\omega'})_0$ est la classe de tous les ouverts de $\breve{\omega}'$.

Le groupoïde $\tilde{\gamma}_{\omega}$ des jets locaux des éléments de γ_{ω} s'appelle le groupoïde transverse d'holonomie relatif à ω' (voir [10]).

2. Construction d'un feuilletage.

Soit $(\gamma^{\bullet}, <)$ un pseudogroupe d'homéomorphismes locaux d'un espace topologique E ayant les propriétés 1), 2), 3).

(On notera α et β les applications source et but dans $\gamma^{\bullet}$ et $B(x)$ l'ensemble des voisinages ouverts d'un point $x \in E$).

Soit $(\tilde{X}, p)$ un revêtement simplement connexe d'un espace topologique X connexe et localement connexe et G le groupe d'automorphismes de ce revêtement; ε , l'élément unité de G (voir [1]).

DEFINITION 1. Soit $y \in \tilde{X}$; un voisinage ouvert V de y sera dit *normal* si $p(V)$ est un ouvert de X tel que chaque composante connexe de $p^{-1}(p(V))$ soit appliquée homéomorphiquement par p sur $p(V)$ et si V est l'une de ces composantes connexes; alors V est connexe.

On sait que (voir [1]) :

A) Quel que soit $y \in \tilde{X}$, l'ensemble des voisinages normaux de y, noté $B^n(y)$, constitue un système fondamental de voisinages de y.

B) Si $s \in G$, $s \neq \varepsilon$ et si V est normal, alors $s(V) \cap V = \emptyset$.

C) Si G' est un sous-groupe de G et si ρ est la relation d'équivalence sous-jacente à G', alors l'espace $\tilde{X}/\rho$ est connexe et localement connexe, et $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$ est un revêtement normal de $\tilde{X}/\rho$, le groupe des automorphismes de ce revêtement étant G'.

Soit F le produit topologique $E \times \tilde{X}$ et $\mathcal{T}$ la topologie produit de celles de E et de $\tilde{X}$.

Soit $f \in \gamma^{\bullet}$, $\alpha(f) = U$, $\beta(f) = U'$ et soit $s \in G$; alors, au couple (f, s) on peut associer un homéomorphisme local f_s de F en posant: $f_s(x, y) = (f(x), s(y))$, si $x \in U$ et $y \in \tilde{X}$; la source de f_s est l'ouvert $U \times \tilde{X}$ et le but l'ouvert $U' \times \tilde{X}$.

Soit $(\mathcal{A}^o(G), <)$ le groupoïde inductif des atlas de G (chap. III).

Soit $\varphi = ((\mathcal{A}^o(G), <), \underline{\varphi}, (\gamma^{\bullet}, <))$ un foncteur ordonné quasi-inductif.

Soit Γ la classe des homéomorphismes locaux f_s de F associés aux couples (f, s) tels que $s \in \varphi^c(f)$.

Soit $(\overline{\Gamma}^{\bullet}, <)$ le pseudogroupe de tous les homéomorphismes locaux de F.

PROPOSITION 1. *La classe Γ définit un sous-pseudogroupe faible de $\overline{\Gamma}$.*

REMARQUE PRELIMINAIRE. Si f_s, $f'_{s'} \in \overline{\Gamma}$ sont tels que $f_s < f'_{s'}$, alors on a $f < f'$ et $s = s'$.

Soient $g_t, f_s \in \Gamma$ et $U' = \beta(f)$, $V = \alpha(g)$, $W = U' \cap V$; alors $\beta(f_s) \cap \alpha(g_t) = W \times \tilde{X}$ et par suite, compte tenu de la remarque préliminaire, le pseudoproduit $g_t f_s$ dans $\overline{\overline{\Gamma}}$ est égal à gf_{ts}.

Par définition du pseudoproduit on a

$$gf = g' . f' \text{ avec } g' < g \text{ et } f' < f ;$$

φ étant ordonné, on a $t \in \varphi^o(g')$ et $s \in \varphi^o(f')$ et φ étant un foncteur, on, a $ts \in \varphi^o(g'.f') = \varphi^o(gf)$; donc $gf_{ts} \in \Gamma$.

Soit $f_s \in \Gamma$; alors on a

$$(f_s)^{-1} = f^{-1}_{s^{-1}} \text{ et } f^{-1}_{s^{-1}} \in \Gamma,$$

car $\varphi^o(f^{-1}) = \{\varphi^o(f)\}^{-1}$ dans G.

Soient $(f^i_{s_i})_{i \in I}$ une famille d'élément de Γ majorée par $f_s \in \Gamma$; alors, d'après la remarque préliminaire, on a $s_i = s$, $\forall i \in I$. L'agrégat de cette famille dans $\overline{\Gamma}$ est égal à $(\bigcup f^i)_s$; mais, comme φ est quasi-inductif, on a $\varphi^o(f) = \bigcap_{i \in I} \varphi^o(f_i)$, et par suite $s \in \varphi^o(f)$, d'où $(\bigcup f^i)_s \in \Gamma$.

Ces trois conditions sont suffisantes pour que Γ soit un sous-pseudo groupe faible de $\overline{\Gamma}$ (voir [4]).

COROLLAIRE. *Γ est un pseudogroupe (voir [4]).*

REMARQUE. Tout point $(x, y) \in F$ appartient à au moins une unité de Γ.

PROPOSITION 2. *Soit $\mathfrak{T}'$ la topologie sur F, somme des topologies des sous-espaces de F de la forme $\{x\} \times \tilde{X}$, si $x \in E$. Alors Γ est aussi un pseudogroupe d'homéomorphismes locaux pour cette topologie.*

Le fait que tout $f_s \in \Gamma$ applique homéomorphiquement le sous-espace $\{x\} \times \tilde{X}$ de F sur le sous-espace $\{f(x)\} \times \tilde{X}$ entraîne immédiatement la proposition.

Dans la suite on posera $\{x\} \times \tilde{X} = \tilde{X}_x$.

PROPOSITION 3. *Soit R la relation suivante sur F : Si $(x, y), (x', y') \in F$, alors $((x, y), (x', y')) \in R$ si et seulement si il existe $f_s \in \Gamma$ tel que $f_s(x, y) = (x', y')$; alors R est une relation d'équivalence ouverte par rapport à $\mathfrak{T}$ et à $\mathfrak{T}'$.*

Résultat classique.

Soit $F' = F/R$ l'ensemble quotient de F par R, $q : F \to F'$ l'application canonique, T et T' les topologies quotients de $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$ respectivement.

Nous supposerons dorénavant que φ est, en outre, bien fidèle.

PROPOSITION 4. *(T, T') définit sur F' un feuilletage topologique localement simple.*

Remarquons déjà que $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$ définit sur F un feuilletage simple dont les feuilles sont les sous-espaces $\tilde{X}_x$.

Soit $z \in F'$ et $(x, y) \in F$ tel que $q(x, y) = z$.

Soit $U \in B(x)$ et $V \in B^n(y)$, et soient $(x_i, y_i) \in F$, $i = 1, 2$ tels que $x_i \in B(x)$, $y_i \in B^n(y)$ et $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \bmod R$; il existe $f \in \gamma^{\cdot}$ et $s \in \varphi^o(f)$ tels que $f(x_1) = x_2$ et $s(y_1) = y_2$. V étant normal, on a $s = \varepsilon$ et, φ étant bien fidèle, on a $f \in \gamma_o^{\cdot}$, d'où $y_1 = y_2$ et $x_1 = x_2$.

Par suite la restriction de q à $U \times V$ est injective et, comme R est ouverte, *q est un homéomorphisme local de $U \times V$ sur $q(U \times V)$ pour les deux topologies (1).*

Il en résulte que $q(\{x\} \times V)$ est un voisinage ouvert de z par rapport à T', tel que les topologies induites par T et T' soient identiques; comme, par ailleurs, T' est localement connexe, (T, T') déterminent sur F' un feuilletage topologique.

De plus, il résulte de (1) que q est un isomorphisme local de $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')_{U\times V}$ sur $(T, T')_{q(U\times V)}$; comme $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')_{U\times V}$ est simple, il en est de même pour $(T, T')_{q(U\times V)}$, et par suite (T, T') est localement simple.

NOTATION. On notera ce feuilletage $(E, \gamma, \varphi, \tilde{X})$.

PROPOSITION 5. *Tout sous-espace $\tilde{X}_x$, $x \in E$, est un revêtement normal, pour la projection q, d'une feuille de F'.*

Soit $x_o \in E$ et γ_{x_o} la classe des $f \in \gamma^{\cdot}$ tels que $f(x_o) = x_o$ et soit

$$S_{x_o} = \bigcup_{f \in \gamma_{x_o}} \varphi^o(f).$$

Soient $s, s' \in S_{x_o}$; alors il existe $f, f' \in \gamma_{x_o}$ tels que $s \in \varphi^o(f)$ et $s' \in \varphi^o(f')$ et, comme $f' f \in \gamma_{x_o}$ et $s's \in \varphi^o(f'f)$, on a $s's \in S_{x_o}$.

D'autre part, $f^{-1} \in \gamma_{x_o}$ et $s^{-1} \in \varphi^o(f^{-1})$, donc $s^{-1} \in S_{x_o}$.

Il en résulte que S_{x_o} est un sous-groupe de G.

Soit R_{x_o} la relation d'équivalence induite par R sur $\tilde{X}_{x_o}$; alors on a

$$((x_o, y), (x_o, y')) \in R_{x_o}$$

si et seulement si il existe $s \in S_{x_o}$ tel que $y' = s(y)$; par conséquent $\tilde{X}_{x_o}/R_{x_o}$ est homéomorphe à $\tilde{X}/S_{x_o}$.

Donc $\tilde{X}_{x_o}$ est un revêtement normal de $\tilde{X}_{x_o}/R_{x_o}$ (rappel C), le groupe de ce revêtement étant isomorphe à S_{x_o}.

Par ailleurs, R étant ouverte par rapport à $\mathcal{T}'$, et $\tilde{X}_{x_o}$ étant un ouvert de $\mathcal{T}'$, $\tilde{X}_{x_o}/R_{x_o}$ est homéomorphe à $q(\tilde{X}_{x_o})$ muni de la topologie induite par T'.

Enfin $q(\tilde{X}_{x_o})$ est une feuille de F' puisque $q(\tilde{X}_{x_o})$ est un ouvert connexe de T' et que, si $x \in E$ et $x \neq x_o$, on a $q(\tilde{X}_x) = q(\tilde{X}_{x_o})$ ou bien

$$q(\tilde{X}_x) \cap q(\tilde{X}_{x_o}) = \emptyset .$$

3. Holonomie de ce feuilletage.

PROPOSITION 6. *Soit $z \in F'$ et O un ouvert simple de F' contenant z. Soit $(x_o, y_o) \in F$ tel que $q(x_o, y_o) = z$; alors il existe $U_o \in B(x_o)$ et $V_o \in B^n(y_o)$ tels que $q(U_o \times V_o)$ soit un ouvert distingué de O.*

Dans F, muni de $\mathcal{T}$, les ouverts de la forme $U \times V$ où $U \in B(x_o)$ et $V \in B^n(y_o)$ constituent un système fondamental de voisinages de (x_o, y_o). Par suite, comme R est ouverte, il existe $U_1 \in B(x_o)$ et $V_1 \in B^n(x_o)$ tel que $W'_1 = q(W_1)$ soit contenu dans O, si $W_1 = U_1 \times V_1$.

Mais W'_1 est un ouvert simple de F'; par suite il existe un voisinage O_1 de z, ouvert par rapport à T, qui est distingué dans O et dans W'_1.

Il existe alors $U_o \in B(x_o)$ et $V_o \in B^n(y_o)$ tel que $W'_o = q(W_o)$ soit contenu dans O_1, si $W_o = U_o \times V_o$.

Mais W_o est distingué dans W_1, donc W'_o est distingué dans W'_1 et par suite dans O_1, donc dans O.

COROLLAIRE. *Soit $y'_o \in \tilde{X}$ tel que $q(x_o, y'_o) = z$; alors il existe $f \in \gamma$ et $s \in \varphi^c(f)$ tel que $f(x_o) = x_o$ et $y'_o = s(y_o)$.*

Soit $V'_o = s(V_o)$ et $U'_o = f[U_o \cap \alpha(f)]$; alors $q(U'_o \times V'_o)$ contient z et est aussi distingué dans O.

DEFINITION 2. Soient V_1 et V_2 deux ouverts normaux de $\tilde{X}$ tels que $V_1 \subset V_2$; alors nous dirons que le couple (V_1, V_2) ou le couple (V_2, V_1) est *un chaînon simple normal.*

Nous appellerons *chaîne simple normale* toute suite $C = (V_n, \dots, V_1)$ d'ouverts normaux telle que pour tout $i < n$ le couple (V_i, V_{i+1}) soit un *chaînon simple normal.*

Soit $C = (V_n, \dots, V_1)$ une chaîne simple normale et U un ouvert de E. Posons $W_i = U \times V_i$ et $W'_i = q(W_i)$.

Il est clair que la suite $(W'_n, \dots, W'_1)$ est une chaîne pure de F' qu'on appellera *chaîne pure normale associée à C et à U* et qu'on notera C'_U.

REMARQUE. Soit $f' = I(C'_U)$ et $v_i : W'_i \to \check{W}'_i$ l'application canonique. Soit $x \in U$ et $x'_1 = v_1(q(\{x\} \times V_1))$; alors si $x'_n = f'(x'_1)$, on a

$$x'_n = v_n(q(\{x\} \times V_n)).$$

PROPOSITION 7. *Soit $D = (O_p, \dots, O_1)$ une chaîne pure de F' et soit $g' = I(D)$.*

Soient $z_1 \in O_1$ et $z_p \in O_p$ reliés par D.

Soit $(x_1, y_1) \in F$ tel que $q(x_1, y_1) = z_1$.

Alors il existe une chaîne pure normale $C'_U = (W'_n, \dots, W'_1)$, avec $C = (V_n, \dots, V_1)$, $W'_i = q(U \times V_i)$, telle que :

1) $x_1 \in U$, $y_1 \in V_1$ et il existe $y_p \in V_n$ tel que $q(x_1, y_p) = z_p$.

2) si $f' = I(C'_U)$, alors $(W'_n, f', W'_1) < (O_p, g', O_1)$.

Démontrons déjà cette proposition dans le cas d'un chaînon pur (O_2, O_1), avec $O_2 \subset O_1$.

Soit α_i la plaque de O_i qui contient z_i, $i = 1, 2$; alors on a

$$\alpha_2 = \alpha_1 \cap O_2.$$

Quel que soit $z \in \alpha_1$ (resp. $\in \alpha_2$) il existe $U(z) \in B(x_1)$ et $V(z)$ normal dans $\tilde{X}$ tel que $q[U(z) \times V(z)]$ soit distingué dans O_1 (resp. dans O_2). En effet il suffit de choisir $y \in \tilde{X}$ tel que $q(x_1, y) = z$ et d'appliquer la proposition 6. En particulier pour z_1 nous choisissons y_1.

Posons $V'(z) = q(\{x_1\} \times V(z))$; alors les $V'(z)$, pour $z \in \alpha$, recouvrent α .

α étant connexe, il existe une suite finie $(V'(z_1),\dots, V'(z_n))$ telle que $\tilde{z}_2 \in V'(z_n)$ et $V'(z_i) \cap V'(z_{i+1}) \neq \emptyset$.

$\tilde{X}_{x_1}$ étant un revêtement de $q(\tilde{X}_{x_1})$ qui contient α, et les $V(z_i)$ étant normaux, on peut relever la suite $(V'(z_1),\dots, V'(z_n))$ en une suite $(V_1^1,\dots, V_n^1)$ d'ouverts de $\tilde{X}_{x_1}$ tels que $V_i^1 = \{x_1\} \times V_i^*$ où V_i^* est normal dans $\tilde{X}$ et $V_i^* \cap V_{i+1}^* \neq \emptyset$, $i = 1,\dots, n-1$.

On peut toujours choisir $V_1^* = V(z_1)$.

Il existe, pour tout $i = 1, 2,\dots, n$, $f_i \in \gamma$ et $s_i \in G$ tels que $V_i^* = s_i(V(z_i))$, $s_i \in \varphi^o(f_i)$ et $f_i(x_1) = x_1$.

D'après le corollaire de la proposition 6, il existe $U_i^* \in B(x_i)$ tel que $q(U_i^* \times V_i^*)$ soit distingué dans O_1, et dans O_2 s'il est contenu dans O_2.

Posons $V_{2i-1} = V_i^*$.

$V_{2i} =$ une composante connexe de $V_i^* \cap V_{i+1}^*$, $i = 1, 2,\dots, n-1$; alors $C = (V_{2n-1},\dots, V_1)$ est une chaîne simple normale.

Soit $U = \bigcap_{i=1,2,..,n} U_i^*$, et soit $C'_U = (W'_{2n-1},\dots, W'_1)$ la chaîne pure de F' associée à C et à U.

On a $y_1 \in V_1$ car $V_1 = V_1^* = V(z_1)$, et d'autre part $z_2 \in V'(z_n)$, donc il existe $y_2 \in V_{2n-1}$ tel que $q(x_1, y_2) = z_2$.

Enfin il est clair que $(W'_{2n-1}, f', W'_1) < (O_2, g, O_1)$, si $f' = I(C'_U)$ et $g = I(O_1, O_2)$; par suite la proposition est démontrée dans ce cas particulier.

Dans le cas général, la proposition se démontre facilement par récurrence; il suffit de réduire convenablement U.

Soit H' le groupoïde d'holonomie du feuilletage (T, T'); soient V^* un ouvert normal de $\tilde{X}$, $\omega = E \times V^*$ et $\omega' = q(\omega)$.

Alors le feuilletage $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')_\omega$ est isomorphe au feuilletage $(T, T')_{\omega'}$; par suite l'espace transverse $\breve{\omega}'$ s'identifie à l'espace transverse $\breve{\omega}$ qui n'est autre que E.

PROPOSITION 8. *Soit $f \in \gamma^\bullet$, $\alpha(f) = U$, $\beta(f) = \overline{U}$; alors il existe une chaîne pure normale $C'_U = (W'_n,\dots, W'_1)$, avec $C = (V_n,\dots, V_1)$ et $W'_i =$*

$= q(U \times V_i)$, *telle que si* $f' = I(C'_U)$ *on ait avec les notations de 1 :*

1) $\tau = (W'_n, f', W'_1) \in H'(\omega')$;

2) $\underline{\Phi}(\tau) = f$.

Soit $s \in \varphi^c(f)$ et soit $\overline{V}^* = s^{-1}(V^*)$.

Il existe une chaîne simple normale $C = (V_n, \dots, V_1)$ telle que $V_1 = V^*$ et $V_n = \overline{V}^*$.

Soit $C'_U = (W'_n, \dots, W'_1)$ la chaîne pure associée à C et à U, où $W'_1 = q(U \times V^*)$ et $W'_n = q(U \times \overline{V}^*) = q(\overline{U} \times V^*)$; W'_1 et W'_n sont donc saturés dans ω' et par suite, si $I(C'_U) = f'$, on a

$$\tau = (W'_n, f', W'_1) \in H'(\omega').$$

Soit $x \in U$; alors la plaque de W'_n associée à la plaque $q(\{x\} \times V^*)$ de W_1 est la plaque $q(\{x\} \times V_n) = q(\{f(x)\} \times V^*)$. Il en résulte que $\underline{\Phi}(\tau)(x) = f(x)$.

PROPOSITION 9. *Soit* γ_ω *le pseudogroupe transverse d'holonomie de* (T, T') *relatif à* ω'; *alors pour tout* $g \in \gamma_\omega$ *et tout* $x \in \alpha(g)$ *il existe* $U^* \in B(x)$ *tel que la restriction* gU^* *de* g *à* U^* *appartienne à* γ.

Soit $D = (O_p, \dots, O_1)$ une chaîne pure de F' telle que, si $g' = I(D)$, on ait

$$\underline{\Phi}(O_p, g', O_1) = g\,; \tag{1}$$

alors O_1 et O_p sont saturés dans ω'.

Soit $x_1 \in \alpha(g)$, $y_1 \in V^*$ et $z_1 = q(x_1, y_1)$; alors $z_1 \in O_1$.

Soit $z_p \in O_p$ associé à z_1 par C. Il existe $y_p \in V^*$ et $x_p \in E$ tels que $q(x_p, y_p) = z_p$.

D'après la proposition 7, il existe une chaîne pure normale $C'_U = (W'_n, \dots, W'_1)$ avec $C = (V_n, \dots, V_1)$ et $W'_i = q(U \times V_i)$ telle que : $x_1 \in U$, $y_1 \in V_1$, il existe $y_n \in V_n$ tel que $q(x_1, y_n) = z_p$ et, si $f' = I(C'_U)$ on ait :

$$(W'_n, f', W'_1) < (O_p, g', O_1).$$

On peut toujours choisir $V_1 = V^*$.

Par ailleurs il existe $f \in \gamma^\cdot$ et $s \in \varphi^o(f)$ tel que $x_p = f(x_1)$ et $s(y_n) = y_p$; et, comme on peut toujours supposer que $V_n = s^{-1}(V^*)$, on a

$$(W'_n, f', W'_1) = \tau \in H'(\omega').$$

Soit $U^* = U \cap \alpha(f)$ et C'_{U^*} la chaîne pure associée à C et à U^*; alors si $f'^* = I(C'_{U^*})$ on a :

$$\tau^* = (W'^*_n, f'^*, W'^*_1) \in H'(\omega') \text{ et } \tau^* < \tau,$$

d'où

$$(2) \qquad \underline{\Phi}(\tau^*) < \underline{\Phi}(\tau) < \underline{\Phi}(O_p, g', O_1);$$

or $f^* = \underline{\Phi}(\tau^*)$ est, d'après la démonstration de la proposition 8, égal à $f U^*$; donc $f^* \in \gamma^\bullet$, puisque γ est saturé par induction.

Les relations *(1)* et *(2)* entraînent alors $f^* = g U^*$, et comme $x_1 \in U^*$ la proposition est démontrée.

PROPOSITION 10. *$\gamma^\bullet_\omega$ et $\gamma^\bullet$ ont même groupoïde de jets.*

Il résulte de la proposition 8 que $\gamma^\bullet \subset \gamma^\bullet_\omega$, et de la proposition 9 que si $g \in \gamma^\bullet_\omega$ et si $x \in \alpha(g)$, alors il existe $f \in \gamma^\bullet$ tel que $j^\lambda_x g = j^\lambda_x f$.

L'étude qui précède et les résultats du chapitre IV vont maintenant nous permettre de démontrer le théorème suivant :

THEOREME 1. *Soit γ un pseudogroupe d'homéomorphismes locaux d'un espace topologique E ayant les propriétés 1), 2), 3), du paragraphe 1; alors il existe un feuilletage topologique localement simple (T, T') admettant un ouvert simple ω' tel que*

1) l'espace transverse $\breve{\omega}'$ soit homéomorphe à E;

2) si on identifie E et $\breve{\omega}'$, le groupoïde transverse d'holonomie $\tilde{\gamma}^\bullet_\omega$ de (T, T') relativement à ω' est identique au groupoïde des jets du pseudogroupe γ.

En effet, soit M un sous-groupoïde majorant de $\gamma^\bullet$ et G_M une $(\mathcal{G}, \mathcal{F}_g)$-projection de $M^\bullet$ (voir chap. IV, 1); alors le théorème 2 et les propo. 6 et 7 de IV montrent qu'on peut construire un foncteur ordonné bien fidèle et quasi inductif $\varphi = ((\mathfrak{A}^o(G^\bullet_M), <), \underline{\varphi}, (\gamma^\bullet, <))$.

On sait par ailleurs que le groupe G_M peut être réalisé comme groupe d'automorphismes d'un revêtement $\tilde{X}$ d'un espace topologique X connexe et localement connexe (voir par exemple [13] où l'espace X construit est un polyèdre).

La proposition 10 entraîne alors que le feuilletage $(E, \gamma, \varphi, \tilde{X})$ construit au paragraphe 2 a les propriétés requises.

4. Déroulement faible de $(T, T') = (E, \gamma, \varphi, \tilde{X})$ **au-dessus de** ω'.

A) PRELIMINAIRES.

DEFINITION 3. Une chaîne pure normale $C'_U = (W'_n, \dots, W'_1)$ avec $C = (V_n, \dots, V_1)$ et $W'_i = q(U \times V_i)$ sera dite *de base* $(x, y) \in F$ si

$$1)\ U \in B(x); \qquad 2)\ V_n = V^*; \qquad 3)\ y \in V_1.$$

Une telle chaîne a la propriété suivante : W'_n est saturé dans ω' et on a :

$$i_n . f' . v_1 . q(x, y) = x,$$

si v_1 est l'application canonique de W'_1 sur $\check{W}'_1$, $f' = I(C'_U)$ et i_n l'injection canonique de $\check{W}'_n$ dans E.

Il en résulte que C'_U définit un élément bien déterminé de $F'^*(\omega)$, déroulement faible de (T, T') au-dessus de ω', à savoir :

$$_x\dot{j}^{\lambda}_z (W'_n, f', W'_1), \text{ si } z = q(x, y).$$

LEMME 1. *Deux chaînes pures normales de même base (x, y) définissent le même élément de $F'^*(\omega)$*

Ce lemme facile à démontrer résulte en particulier de la remarque qui suit la définition 2.

THEOREME 2. *Le déroulement faible $F'^*(\omega)$ du feuilletage $(T, T') = (E, \gamma, \varphi, \tilde{X})$ est isomorphe au feuilletage $(T_o, T'_o) = (E, \gamma_o^\bullet, \varphi_o, \tilde{X})$ si φ_o est la restriction de φ à $\gamma_o^\bullet$.*

REMARQUE. Par hypothèse sur $\gamma^\bullet$, $\gamma_o^\bullet$ est constitué par l'ensemble des ouverts de E.

Soit $(x, y) \in F$. Soit $C'_U = (W'_n, \dots, W'_1)$ une chaîne pure normale de base (x, y). Soient $f' = I(C'_U)$ et $z = q(x, y)$. Posons

$$\xi(x, y) = {}_x\dot{j}^{\lambda}_z (W'_n, f', W_1);$$

il résulte du lemme précédent que $\xi : (x, y) \to \xi(x, y)$ *est une application de F dans $F'^*(\omega)$.*

Soit $X \in F'^*(\omega)$; alors il existe une chaîne pure $D = (O_p, \dots, O_1)$

de F' telle que O_p soit saturé dans ω', et que si $g' = I(D)$, on ait

$$X = {}_x j_z^\lambda (O_p, g', O_1), \text{ et } x = j \cdot g' \cdot u(z)$$

avec u application canonique de O_1 dans $\breve{O}_1$ et j injection canonique de $\breve{O}_p$ dans ω'.

Soit $y_p \in V^*$ et $z_p = q(x, y_p)$; alors z est relié à z_p par D.

D'après la proposition 7, il existe une chaîne pure normale $C'_U = (W'_n, \ldots, W'_1)$ avec $C = (V_n, \ldots, V_1)$ et $W'_i = q(U \times V_i)$ telle que :

a) $x \in U$ et $y_p \in V_n$, et il existe $y \in V_1$ tel que $q(x, y) = z$;

b) si $f' = I(C'_U)$ on a $(W'_n, f', W'_1) < (O_p, g', O_1)$. *(1)*

On peut toujours choisir $V_n = V^*$ de sorte que C'_U soit une chaîne pure normale de base (x, y).

La relation *(1)* entraîne alors que

$$\xi(x, y) = {}_x j_z^\lambda (W'_n, f', W'_1) = {}_x j_z^\lambda (O_p, g', O_1),$$

donc ξ *est surjective*.

Soient $(x_i, y_i) \in F$, $i = 1, 2$, tels que

$$\xi(x_1, y_1) = \xi(x_2, y_2)$$

et soient $z_i = q(x_i, y_i)$.

On a nécessairement $x_1 = x_2$ et $z_1 = z_2$; il existe donc $f \in \gamma^\cdot$ et $s \in \varphi^o(f)$ tels que

$$f(x_1) = x_1 \text{ et } s(y_1) = y_2 ;$$

soient $U_1 = \alpha(f)$, $U_2 = \beta(f)$ et $C^1 = (V^1_{n_1}, \ldots, V^1_1)$, $C^2 = (V^2_{n_2}, \ldots, V^2_1)$ deux chaînes simples normales telles que

$$y_1 \in V^1_1,\ y_2 \in V^2_1 \text{ et } V^1_{n_1} = V^2_{n_2} = V^* .$$

On peut toujours supposer que $V^2_1 = s(V^1_1)$.

Soient $C'^1_{U_1} = (W'^1_{n_1}, \ldots, W'^1_1)$ et $C'^2_{U_2} = (W'^2_{n_2}, \ldots, W'^2_1)$ les chaînes pures normales associées à C^1, C^2 et à U_1, U_2 respectivement; alors $C'^1_{U_1}$ est de base (x_1, y_1), $C'^2_{U_2}$ est de base (x_1, y_2) et on a, si $f'_i = I(C'^i_{U_i})$:

$$_{x_i} j^\lambda_{z_i}(W'^i_{n_i}, f'_i, W'^i_1) = \xi(x_i, y_i).$$

De plus, par construction, on a $W'^{1}_{1} = W'^{2}_{1}$; il en résulte que $D = (W'^{2}_{n_2}, \ldots, W'^{2}_{1}, W'^{1}_{1}, \ldots, W'^{1}_{n_1})$ est une chaîne pure de F' et on a, si $f' = I(D)$,

$$\tau = (W'^{2}_{n_2}, f', W'^{1}_{n_1}) \in H'(\omega');$$

il est clair que $\Phi(\tau) = f$.

On sait que $j^{\lambda}_{x_1} f \in \tilde{\gamma}_{\omega}$ détermine un automorphisme de la feuille de $F'^*(\omega)$ déterminée par x et, par construction de la chaîne D, on a

$$j^{\lambda}_{x_1} f(\xi(x_1, y_1)) = \xi(x_2, y_2) = \xi(x_1, y_1)$$

donc $j^{\lambda}_{x_1} f = x_1$. Par suite, il existe $U \in B(x_1)$ tel que fU soit égal à U et,comme $\varphi^{a}(f) \subset \varphi^{a}(U)$, on a $s \in \varphi^{a}(U)$.

Réciproquement si $y_1, y_2 \in \tilde{X}$ sont tels qu'il existe $U \in B(x_1)$et $s \in \varphi^{a}(U)$ tels que $y_2 = s(y_1)$, il est facile de montrer que

$$\xi(x_1, y_1) = \xi(x_1, y_2).$$

Donc *en résumé* on a :

$$\xi(x_1, y_1) = \xi(x_2, y_2)$$

si et seulement si $x_1 = x_2$ et il existe $U \in B(x_1)$ et $s \in \varphi^{a}(U)$ tels que $y_2 = s(y_1)$.

Par conséquent la relation d'équivalence associée à l'application ξ n'est autre que la relation d'équivalence R_o sous-jacente au pseudo-groupe Γ'_o d'homéomorphismes de F construit à partir de $\gamma^{\bullet}_o$ et de φ_o.

Soit $F'_o = F/R_o$ et $q_o : F \to F/R_o$ l'application canonique; ξ définit donc par passage au quotient une bijection $\tilde{\xi}$ de F'_o sur $F'^*(\omega)$.

Soit $(T_o, T'_o) = (E, \gamma^{\bullet}_o, \varphi_o, \tilde{X})$ le feuilletage défini sur F'_o, (T^*, T'^*) le feuilletage de $F'^*(\omega)$.

Soit U un ouvert de E, V un ouvert normal de $\tilde{X}$.

Les ensembles $q_o(U \times V)$, $q_o(\{x\} \times V)$ forment une base d'ouverts de T_o, T'_o respectivement et les ensembles $\xi(U \times V)$, $\xi(\{x\} \times V)$ forment une base d'ouverts de T^*, T'^* respectivement; donc $\tilde{\xi}$ applique une base d'ouverts de T_o, T'_o sur une base d'ouverts de T^*, T'^* respectivement; c'est donc un isomorphisme du feuilletage (T_o, T'_o) sur le feuilletage (T^*, T'^*).

REMARQUE :

PROPOSITION 11. *Soit* $\varphi = ((\mathfrak{A}^o(G^\cdot) <), \underline{\varphi}, (\gamma^\cdot, <))$ *un foncteur ordonné bien fidèle et soit* $\tilde{\gamma}^\cdot$ *le groupoïde des jets de* $\gamma^\cdot$*; alors* φ *définit par passage à la limite (inductive) un foncteur*

$$\psi = (\mathfrak{A}^o(G^\cdot), \underline{\psi}, \tilde{\gamma}^\cdot) \text{ bien fidèle.}$$

Soit $X \in \tilde{\gamma}^\cdot$ et $x = \alpha(X)$; posons

$$\psi^o(X) = \bigcup_{f \in X} \varphi^o(f).$$

Soient $s, s' \in \psi^o(X)$; alors il existe f et $f' \in \gamma^\cdot$ tels que $s \in \varphi^o(f)$, $s' \in \varphi^o(f')$ et $j_x^\lambda f = j_x^\lambda f'$, d'où $j_x^\lambda (f'^{-1} f) = x$; d'autre part, d'après les propriétés de φ, on a $s'^{-1} s \in \varphi^o(f'^{-1} f)$.

Il en résulte que, si $X = x$, alors $\psi^o(X)$ est un sous-groupe de G et, si X est quelconque, $\psi^o(X)$ est contenu dans une classe à gauche $mod\ \psi^o(x)$.

Soit $t \in \psi^o(x)$; alors il existe $g \in \gamma^\cdot$ tel que $t \in \varphi^o(g)$ et $j_x^\lambda g = x$; or $j_x^\lambda fg = X$ et $st \in \varphi^o(fg)$; donc $st \in \psi^o(X)$ et par suite

$$\psi^o(X) = s\psi^o(x).$$

On montrerait de la même manière que, si $y = \beta(X)$, on aurait $\psi^o(X) = \psi^o(y)s$, d'où :

$$\psi^o(y) = s\,\psi^o(x)s^{-1}.$$

Soit alors $\underline{\psi}(X)$ l'élément de $\mathfrak{A}^o(G^\cdot)$ correspondant à $\psi^o(X)$; en utilisant la même méthode que dans la démonstration du théorème 1 du chap. IV, on montre que l'application $\underline{\psi}$ est sous-jacente à un foncteur

$$\psi = (\mathfrak{A}^o(G^\cdot), \underline{\psi}, \tilde{\gamma}^\cdot).$$

Soit $X \in \tilde{\gamma}^\cdot$ tel que $\varepsilon \in \psi^o(X)$. Il existe $f \in \gamma^\cdot$ tel que

$$j_x^\lambda(f) = X, \text{ si } x = \alpha(X), \text{ et } \varepsilon \in \varphi^o(f).$$

Comme φ est bien fidèle, on a $f \in \gamma_o^\cdot$, et par suite $X = x$; donc ψ est bien fidèle.

CONSEQUENCE. Soit $x \in E$ et $\tilde{\gamma}_x^{\bullet}$ le groupe des $X \in \gamma^{\bullet}$ tels que $\alpha(X) = \beta(X) = x$.

Il est facile de voir que

$$\bigcup_{X \in \tilde{\gamma}_x} \psi^o(X) = S_x \qquad \text{(voir prop. 5)}$$

$$\text{et } \psi^o(x) = S_x^o .$$

ψ étant un foncteur bien fidèle, nécessairement S_x^o est distingué dans S_x et $\tilde{\gamma}_x^{\bullet}$ est isomorphe à S_x / S_x^o.

Or $\underset{\sim}{X}_x$ est un revêtement normal, de groupe S_x, d'une feuille a de F', et un revêtement normal, de groupe S_x^o, de la feuille a^* de $F'^*(\omega)$ déterminée par x; donc a^* est un revêtement normal de a de groupe

$$S_x / S_x^o = \tilde{\gamma}_x^{\bullet} .$$

On retrouve ainsi une propriété fondamentale de $F'^*(\omega)$.

5. Propriétés particulières de $(T, T') = (E, \gamma, \varphi, \tilde{X})$.

PROPOSITION 12. *L'espace transverse $\check{F}'$ est homéomorphe à l'espace E/ρ, où ρ est la relation d'équivalence (ouverte) sous-jacente au pseudo-groupe $\gamma^{\bullet}$.*

Soit $\eta : F' \to \check{F}'$, $\tilde{\rho} : E \to E/\rho$ les applications canoniques respectives.

Soit $x \in E$; alors $q(\tilde{X}_x)$ est une feuille de F', et par suite la correspondance $x \to \eta(q(\tilde{X}_x))$ définit une application r' de E dans $\check{F}'$ qui est évidemment surjective.

Compte tenu de la définition de R, il est clair que $r'(x) = r'(x')$ si et seulement si $(x, x') \in \rho$; donc r' définit par passage au quotient une bijection $\tilde{r}$ de E/ρ sur $\check{F}'$.

La relation d'équivalence ρ et la relation d'équivalence sous-jacente à (T, T') étant ouvertes, il est facile de montrer que $\tilde{r}$ est un homéomorphisme.

Soit $\mathcal{T}''$ la topologie sur F somme des topologies des sous-espaces $E \times \{y\} = Ey$, si $y \in \tilde{X}$.

Soit T'' la topologie sur F' quotient de la topologie $\mathcal{T}''$.

THEOREME 3. *Si* E *est connexe et localement connexe et si* $\bigcup_{f \in \tilde{\gamma}^{\bullet}} \varphi^{c}(f)$ *est un système de générateurs de* G, *alors* (T, T'') *définit sur* F' *un feuilletage simple, supplémentaire au feuilletage* (T, T').

L'espace transverse $\check{F}''$ *de ce feuilletage est homéomorphe à* X.

$(\mathcal{T}, \mathcal{T}'')$ définit sur F un feuilletage simple dont les feuilles sont les sous-espaces Ey.

Tout $f_s \in \Gamma$ applique homéomorphiquement tout ouvert de $\mathcal{T}''$, $U \times \{y\}$, où U est ouvert dans E, sur l'ouvert de $\mathcal{T}''$, $f(U) \times \{s(y)\}$; donc Γ est un pseudogroupe d'homéomorphismes locaux pour la topologie $\mathcal{T}''$.

Il résulte de cela et du fait que T'' est localement connexe que (T, T'') définit sur F' un feuilletage topologique.

Si U est connexe et V normal, alors q est un isomorphisme local de $(\mathcal{T}, \mathcal{T}'')_{U \times V}$ sur $(T, T'')_{q(U \times V)}$; par suite (T, T'') est localement simple.

Enfin il est clair que $q(U \times V)$ est un ouvert bisimple, donc (T, T') et (T, T'') sont supplémentaires.

Pour pousuivre la démonstration, nous avons besoin du lemme suivant :

LEMME. *Soit* E *un espace topologique,* $(O_i)_{i \in I}$ *une famille d'ouverts connexes; si, quel que soit* $(i, j) \in I \times I$, *il existe une suite finie* $(i_1, \ldots, i_{n+1})$ *telle que* $i_1 = i$, $i_{n+1} = j$ *et* $O_p \cap O_{p+1} \neq \emptyset$ *pour* $p = 1, 2, \ldots, n$, *alors* $O = \bigcup_{i \in I} O_i$ *est connexe.*

Démonstration simple.

Soit A une trajectoire de $\tilde{X}$ relativement à $G^{\bullet}$ et soit $\theta = \bigcup_{y \in A} q(Ey)$. Soient $y_1, y'_1 \in A$; alors il existe $s \in G^{\bullet}$ tel que $y'_1 = s(y_1)$.

Par hypothèse sur $G^{\bullet}$, on a $s = s_n \ldots . s_1$ avec $s_i \in \bigcup_{f \in \gamma^{\bullet}} \varphi^{o}(f)$; il existe donc pour tout $i \in 1, 2, \ldots, n$, $f_i \in \gamma^{\bullet}$ tel que $s_i \in \varphi^{o}(f_i)$.

Soient $y_2 = s_1(y_1)$ et par récurrence $y_{i+1} = s_i(y_i)$; alors on a

$$y_{n+1} = (s_n . s_{n-1} \ldots . s_1)(y_1) = y'_1.$$

Soient, pour tout $i \in 1, 2, \ldots, n$, $x_i \in \alpha(f_i)$; alors on a $(x_i, y_i) \in Ey_i$, $(f_i(x_i), y_{i+1}) \in Ey_{i+1}$ et $(x_i, y_i) \sim (f_i(x_i), y_{i+1}) \bmod R$; donc

$$q(Ey_i) \cap q(Ey_{i+1}) \neq \emptyset.$$

Comme $q(Ey_i)$ est ouvert et connexe par rapport à T'', le lemme ci-dessus entraîne alors que θ est ouvert et connexe.

Par ailleurs, il est clair que si $y' \notin A$ et $y \in A$ on a

$$q(Ey') \cap (Ey) = \emptyset;$$

donc le complémentaire C_θ de θ dans F' est égal à $\bigcup_{y \notin A} q(Ey)$ qui est un ouvert pour T''; donc θ est une feuille de (T, T'').

Soit η'' l'application canonique de F' sur $\check{F}''$.

Soit r'' l'application de $\tilde{X}$ sur $\check{F}''$ définie par :

$$r''(y) = \eta''(q(Ey)) \text{ si } y \in \tilde{X};$$

d'après ce qui précède, r'' définit par passage au quotient une bijection $\tilde{r}''$ de X sur $\check{F}''$ et il est facile de montrer que $\tilde{r}''$ est un homéomorphisme.

Soit $(x, y) \in F$, U un ouvert connexe $\in B(x)$ et $V \in (B^n(y))$; alors $q(U \times V)$ est un voisinage distingué de $z = q(x, y)$ et (T, T'') est simple.

PROPOSITION 13. *Si E et $\tilde{X}$ sont des variétés topologiques respectivement à p et $n-p$ dimensions, alors F' est une variété à n dimensions et (T, T') définit sur F' une structure de variété feuilletée de codimension p.*

Vérification simple.

(Pour la définition des variétés feuilletées voir par ex. [11]).

6. Cas particulier.

Supposons que le pseudogroupe γ soit obtenu en saturant par induction un groupe H d'homéomorphismes de E sur E; alors γ est obtenu par localisation de H.

Soit π un homéomorphisme de G sur H. A tout $s \in G$ on peut associer un homéomorphisme s^* de F sur F en posant

$$s^*(x, y) = (\pi(s)(x), s(y)).$$

Soit G' l'ensemble de ces homéomorphismes; alors G' est un groupe isomorphe à G.

Soit $\underline{\varphi_1} = (\mathfrak{A}^o(H), \varphi_1, \gamma^\bullet)$ le foncteur majorant associé à γ (voir chap. III) et $\overline{\pi}^{-1} = (\mathfrak{A}^o(G), \overline{\pi^{-1}}, \mathfrak{A}^o(H))$ le foncteur défini par la restriction de π^{-1} aux classes à gauche modulo un sous-groupe de G.

Soit $\varphi = (\mathfrak{A}^{o}(G^{\cdot}), \underline{\varphi}, \gamma^{\cdot}) = \pi^{-1} \circ \varphi_1$. φ est un foncteur ordonné quasi-inductif et bien fidèle.

Soit Γ le pseudogroupe d'homéomorphismes locaux de F associé à γ et à φ.

Soit $f_s \in \Gamma$; alors $\pi(s) \in \varphi_1^{o}(f)$ et par suite on a $f < \pi(s)$, d'où $f_s < s^*$; comme $s^* \in \Gamma$ quel que soit $s \in G$, Γ est obtenu par localisation de G' et la relation d'équivalence R est dans ce cas la relation d'équivalence sous-jacente à G'.

On retrouve ainsi, comme cas particulier, une construction classique (voir par exemple [11]).

Dans ce cas particulier, le feuilletage simple transverse (T, T'') est une fibration.

BIBLIOGRAPHIE

[E] EHRESMANN. Catégories et structures. Dunod, 1965.

[1] CHEVALLEY. Theory of Lie groups.

[2] EHRESMANN. Catégories ordonnées, holonomie et cohomologie. Ann. Inst. Fourier 14, I (1964).

[3] EHRESMANN. Structures quotients, Comm. Math. Helv. 38 (1963).

[4] EHRESMANN. Espèces de Structures locales, élargissements de catégories. Cahiers de Top. et Géom. diff. (dirigés par C. Ehresmann) III (1961).

[5] EHRESMANN. Catégories et structures. Cahiers de Top. et Géom. diff. VI (1964).

[6] EHRESMANN. Espèces de Structures sous-inductives. Cahiers de Top. et Géo. diff. VII (1965).

[7] EHRESMANN. Sous-structures et catégories ordonnées. Fund. Math. 54 (1964).

[8] EHRESMANN. Catégories structurées. Ann. Ec. Norm. Sup. 80. 3ème série (1963).

[9] EHRESMANN. Structures feuilletées. Proc. 5th Canadian Math. Cong. (1961).

[10] EHRESMANN. Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudogroupes de Lie. Colloque du C.N.R.S. Strasbourg, 1953.

[11] HAEFLIGER. Variétés feuilletées. Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa. 3, Vol. 16, Fasc. 4 (1962).

[12] HIGGINS. Presentations of Groupoids. Proc. Cambridge Phil. Soc. 60, 1, (1964).

[13] HILTON and WYLIE. Homology theory. Cambridge University Press (1962).

[14] JOUBERT. C.R. 260 (1965) p. 3251.

[15] JOUBERT. C.R. 261 (1965) p. 623.

[16] JOUBERT. C. R. 261 (1965) p. 3268.

[17] JOUBERT. Extension de foncteurs ordonnés. Travaux du Séminaire de Top. et Géom. diff. dirigé par C. Ehresmann.