BOUBAKAR BA

Structures presque complexes, structures conformes et dérivations

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 8 (1966), exp. nº 3, p. 1-74

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1966__8__A3_0>

CAHIERS
de
TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Vol. VIII

STRUCTURES PRESQUE COMPLEXES, STRUCTURES CONFORMES ET DERIVATIONS

par Boubakar BA

INTRODUCTION

A l'origine de ce travail se trouve une tentative de généraliser aux variétés presque complexes le théorème sur les automorphismes d'une variété analytique complexe de Bochner et Montgomery [3], problème qui a été résolu depuis par Boothby, S. Kobayashi et Wang [4] .

L'étude des automorphismes infinitésimaux nous a conduit à considérer le cas où la variété est munie d'une structure riemannienne ou pseudo-riemannienne compatible avec la structure presque complexe et à envisager les relations qui existent entre les automorphismes des diverses structures qui interviennent. On sait d'autre part [13] d'après les travaux de Spencer-Kodaïra que l'étude des déformations d'une structure conduit à résoudre le faisceau des germes d'automorphismes de la structure, d'où l'apparition d'opérateurs cohomologiques sur les faisceaux de germes de tenseurs de certains types. Nous avons donc, en vue de l'étude des déformations, cherché systématiquement les opérateurs cohomologiques opérant sur les algèbres de tenseurs sur une variété, ce qui nous a amené à étudier les dérivations des algèbres de tenseurs attachés à un fibré vectoriel sur une variété. Le travail comprend donc plusieurs parties:
- le chapitre I se compose de préliminaires algébriques relatifs à l'existence d'une structure complexe, d'une structure pseudo-hermitienne sur un espace vectoriel. Nous ne nous sommes pas limités systématiquement

au cas où l'espace vectoriel a une dimension finie.

- le chapitre II commence par l'examen de certains exemples de structures presque complexes et notamment l'exemple du fibré tangent à une variété W. Cette question étant liée à celles des connexions (linéaires ou de vecteur) sur une variété, nous avons analysé le cas général d'un fibré vectoriel $p : E \to W$ et montré que les scissions de la suite exacte

$$(1_E) : 0 \to \mathcal{V}_E \to TE \to p^*TW \to 0$$

de fibrés vectoriels sur E (où $\mathcal{V}_E$ désigne le fibré des vecteurs verticaux, p^*TW l'image réciproque du fibré tangent $\pi : TW \to W$) qui sont compatibles avec les homothéties de E sont en correspondance biunivoque avec les connexions sur E.

Les scissions quelconques de 1_E, interprétées comme scissions de la suite

$$(1_{E'}) : 0 \to \mathcal{V}_{E'} \to TE' \to p^*TW \to 0$$

où E a été remplacée par le complémentaire E' de la section nulle de E, s'obtiennent à partir de connexions sur $\mathcal{V}_{E'}$ dites connexions régulières de vecteur, car dans le cas où $E = TW$, ce sont bien des connexions régulières de vecteur au sens d'Akbar-Zadeh [1] . Mais à une scission correspond plusieurs connexions de vecteur.

Dans le cas où $E = TW$, l'isomorphisme naturel $\mathcal{V} \simeq \pi^*TW$ permet d'associer à toute scission de (1_E) une structure presque complexe sur TW, dont l'intégrabilité est étudiée et on retrouve dans le cas où la scission est définie par une connexion linéaire sur W, la condition bien connue : la connexion doit être plate [5] .

La deuxième partie du chapitre II, étudie les fonctions holomorphes sur une variété presque complexe et les champs de vecteurs que nous avons appelés holomorphes. L'existence de ces éléments permet sous certaines conditions de régularité (par exemple : homogénéité locale) de feuilleter la variété dans le premier cas en sous-variétés presque complexes qui rendent constantes les germes de fonctions holomorphes et dans le second cas en sous-variétés analytiques complexes. Lorsque la variété est le produit d'une variété analytique complexe par une variété presque complexe sans germe de fonction holomorphe, les deux feuilletages ainsi définis sont transverses l'un de l'autre.

Dans le cas général, V est localement fibrée sur une variété complexe qui permet donc (localement) d'obtenir les germes de fonctions holomorphes sur V à partir des fonctions holomorphes sur une variété complexe.

Un théorème d'intégrabilité est alors donné à la fin du chapitre II.

Le chapitre III commence par l'étude des transformations conformes sur une variété pseudo-riemannienne et l'établissement de quelques formules utiles pour la suite. On montre ensuite que si un tenseur de type (p, q) $(p \neq q)$, de longueur partout non nulle est invariant par le groupe des transformations conformes alors ce dernier est un groupe d'isométries pour une métrique conforme à la métrique initiale, ce qui constitue un pas dans la résolution du problème suivant dû à Lichnérowicz:(*) si V est une variété de Riemann compacte dont le groupe des transformations conformes n'est le groupe d'isométries d'aucune métrique conforme alors V est isométrique à la sphère. Cette conjecture prouvée par Goldberg et Kobayashi dans le cas où le groupe des isométries est supposé transitif [12], est prouvée ici dans l'hypothèse où le groupe des transformations conformes est supposé transitif et $\pi_1(V)$ fini. Tout récemment Lichnérowicz a résolu le problème avec des hypothèses plus générales : il suppose $R = cte$ (ce qui est loisible d'après Yamabé [23]) et $R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = cte$ [19] .

Nous étudions ensuite le cas d'une variété à bord et obtenons notamment un théorème qui donne la cohomologie relative de $(V, \partial V)$ en liaison avec les transformations conformes dans le cas riemannien.

Lorsque la structure pseudo-riemannienne est subordonnée à une structure presque complexe on obtient dans les cas V à bord ou sans bord des conditions sous lesquelles une transformation conforme est presque complexe, une transformation conforme et presque complexe est un automorphisme : les résultats se précisent mieux dans le cas presque

(*) A. AVEZ vient de résoudre ce problème (Cf. Comptes Rendus de l'Ac. des Sc.1964).

kählérien.

Le chapitre IV étudie, pour les raisons indiquées plus haut, les dérivations et pseudo-dérivations de l'algèbre bigraduée des tenseurs naturellement attachés à un fibré $E \to V$, les dérivations de l'algèbre graduée des formes symétriques sur E et les dérivations des formes antisymétriques sur E. Cette dernière étude donne naturellement comme cas particulier, lorsque $E = T(V)$, la théorie de Frölicher-Nijenhuis [10] .

Dans les cas cités, les dérivations et pseudo- dérivations sont classifiées et on trouve le rôle important qu'y joue l'introduction d'une connexion sur E qui permet ici encore de scinder des suites exactes qui s'introduisent naturellement.

On trouve que dans les dérivations et pseudo-dérivations de l'algèbre de tous les tenseurs et de l'algèbre symétrique il n'existe pas d'opérateur cohomologique n'opérant pas trivialement sur les fonctions.

Dans le dernier cas au contraire (dérivations de l'algèbre extérieure) on met en évidence l'existence d'opérateurs cohomologiques opérant non trivialement sur les fonctions.

Certains des résultats contenus dans ce travail ont déjà été indiqués dans trois notes [2] .

Je tiens à exprimer ici ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur Lichnérowicz qui a bien voulu en dirigeant mes travaux me donner tous les conseils et tous les encouragements sans lequels ce travail n'aurait vu le jour.

Je remercie également Monsieur le Professeur Spencer pour l'aide qu'il m'a procurée pendant l'année 1961 - 1962 que j'ai passée à l'Université de Princeton.

Monsieur le Professeur Ehresmann a bien voulu me faire l'honneur de présider le jury de cette thèse et de publier ce travail dans son séminaire : je lui dois une profonde reconnaissance.

Je prie Monsieur le Professeur Bruhat, qui en me proposant un sujet de deuxième thèse me fait l'honneur d'être membre du jury, de bien vouloir accepter mes sincères remerciements.

CHAPITRE I

PRELIMINAIRES ALGEBRIQUES

1. Structure complexe sur un espace réel.

Pour tout espace vectoriel complexe E, on note $E_{\mathbf{R}}$ l'espace vectoriel réel sous-jacent. Une application f d'un espace vectoriel complexe dans un autre E' est appelée semi-linéaire si elle vérifie :

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \forall x \text{ et } y \in E$$

$$f(\lambda x) = \bar{\lambda} f(x) \qquad \forall \lambda \in \mathbf{C} \quad x \in E,$$

autrement dit si $f \in Hom_{\mathbf{C}}(E, \overline{E'})$ où $\overline{E}'$ désigne l'espace vectoriel complexe conjugué de E'. Une bijection $\tau : E \to E$ semi-linéaire et involutive est appelée semi-involution.

Sur $\mathbf{C}^{(I)}$, où I désigne un ensemble quelconque, l'application $(Z^{\alpha}) \to (\overline{Z}^{\alpha})$ est semi-linéaire et involutive et est appelée semi-involution canonique. Toute base $(e_i)_{i \in I}$ de E définit un isomorphisme de $\mathbf{C}^{(I)}$ sur E et par suite permet de définir par transport de structure une semi-involution sur E. Soit (E, τ) un espace vectoriel complexe muni d'une semi-involution, alors sur E^*, dual de E on définit une semi-involution τ^* par la relation :

$$\langle \tau^* \varphi, x \rangle = \overline{\langle \varphi, \tau x \rangle} \qquad \forall \varphi \in E^*, x \in E$$

Le couple (E^*, τ^*) est dit dual du couple (E, τ). L'ensemble E_o des éléments de E invariants par τ est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, appelé espace vectoriel réel de E, dont la dimension (sur $\mathbf{R}$) est égale à la dimension (complexe) de E. Plus précisément on a : $E = E_o + iE_o$ $E_o \cap iE_o = \{0\}$.

Soit $F = Hom_{\mathbf{R}}(E_{\mathbf{R}}, \mathbf{C}_{\mathbf{R}})$. Il est muni d'une semi-involution naturelle à savoir l'application qui à tout $f \in F$ associe $\bar{f}$ défini par $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$.

Le couple $(F, -)$ admet comme espace réel F_o un espace vectoriel qui s'identifie canoniquement à $E^*_{\mathbf{R}}$.

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$.

1°) Peut-on le considérer comme l'espace vectoriel E_o réel d'un espace vectoriel complexe E, muni d'une semi-involution ? Si E existe il est dit le complexifié de $\mathcal{E}$.

2°) Peut-on le considérer comme l'espace vectoriel sous-jacent à un espace vectoriel complexe E ? Si E existe on dit qu'il définit une structure complexe sur $\mathcal{E}$.

On voit facilement que le 1er problème admet toujours une solution: en considérant $F = Hom_{\mathbf{R}}(\mathcal{E}, \mathbf{C}_{\mathbf{R}})$ muni de la semi-involution définie précédemment $\mathcal{E}$ s'identifie alors canoniquement à un sous-espace de F^*_o. Le complexifié E de $\mathcal{E}$ est donc simplement le sous-espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ engendré par l'image canonique de $\mathcal{E}$ dans F^*, sous-espace qui est manifestement stable par la semi-involution de F^*. Si $dim\, \mathcal{E} < +\infty$ on a plus simplement $E = F^*$. On peut encore remarquer que $E = \mathcal{E} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$, muni de la semi-involution $x \otimes \lambda \to x \otimes \overline{\lambda}$.

En ce qui concerne le 2ème problème on a la :

PROPOSITION 1. *Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de $\mathcal{E}$:*

1) Pour qu'il existe une structure complexe sur $\mathcal{E}$ il faut et il suffit qu'il existe une partition de I en deux sous-ensembles I_1 et I_2 et une bijection de I_1 sur I_2.

2) La donnée d'une structure complexe équivaut à celle d'un automorphisme J de $\mathcal{E}$ vérifiant $J^2 = -$ Identité.

On voit donc que si $dim\, \mathcal{E} = +\infty$ ou si $dim\, \mathcal{E} < +\infty$ est paire il existe une structure complexe et seulement dans ces cas.

L'opérateur J se prolonge au complexifié de $\mathcal{E}$ en un automorphisme d'espace vectoriel complexe dont le sous-espace des vecteurs propres correspondant à l'une des deux valeurs propres $(\pm i)$ peut être identifié à l'espace vectoriel E qui définit la structure complexe sur $\mathcal{E}$. On dit encore que J définit la structure complexe de $\mathcal{E}$.

2. Algèbre extérieure sur un espace vectoriel complexe.

Soit E un espace vectoriel complexe. L'espace vectoriel F sur $\mathbf{R}$ des applications linéaires de $E_{\mathbf{R}}$ dans $\mathbf{C}_{\mathbf{R}}$ admet la décomposition naturelle

$$F = E^* \oplus \overline{E}^* \qquad E^* \cap \overline{E}^* = \{0\}$$

où E^* désigne le dual (sur $\mathbf{C}$) de E et $\overline{}$ désigne la conjugaison définie au chapitre précédent, ce qui permet de considérer l'algèbre extérieure des formes complexes sur E comme plongée dans l'algèbre extérieure (sur $\mathbf{R}$) ΛF, de F. De même $\Lambda \overline{E}^*$ se plonge dans ΛF. On posera $F_{a,o} = \Lambda^a E^*, F_{o,b} = \Lambda^b \overline{E}^*, F_{a,b} = \{u \wedge v, u \in F_{a,o}, v \in F_{o,b}\}$ et on a donc $\Lambda F = \sum_{a,b} F_{a,b}$. La projection canonique de ΛF sur $F_{a,b}$ est notée $P_{a,b}$. ΛF apparait comme une algèbre bi-graduée.

Tout automorphisme A de E définit par transposition un automorphisme de E^* et par transport au moyen de la bijection $f \to \overline{f}$, un automorphisme de $\overline{E}^*$, d'où un automorphisme de F. La représentation naturelle de $GL(F)$ dans ΛF permet d'en déduire un automorphisme de ΛF, noté $\tilde{A}$. L'application $A \to \tilde{A}$ est une représentation du groupe $GL(E, \mathbf{C})$ dans le groupe opposé au groupe des automorphismes de ΛF. L'image de l'homothétie de rapport $i = \sqrt{-1}$ par cette représentation est notée C. On sait que cette homothétie définit dans E_R la «structure complexe» J et on voit facilement que si $\Phi \in \Lambda^p F$ on a

$$(C\Phi')(t_1, \ldots, t_p) = \Phi(Jt_1, \ldots, Jt_p) \text{ où } t_i \in E_R .$$

On peut maintenant considérer tout élément $U \in Hom_{\mathbf{C}}(E, E)$, comme élément de l'algèbre de Lie de $GL(E, \mathbf{C})$; la représentation $A \to \tilde{A}$ définie ci-dessus induit une représentation de l'algèbre de Lie $Hom_{\mathbf{C}}(E, E)$ dans ΛF. L'image, par cette représentation, de l'homothétie de rapport i dans E (ou ce qui revient au même de l'opérateur J de E_R) est noté M.

On a donc si $\Phi \in \Lambda^p F$,

$$(M\varphi)(t_1, \ldots, t_p) = \sum_{k=1}^{p} \varphi(t_1, \ldots, Jt_k, \ldots, t_p) \text{ pour } t_i \in E_R$$

et l'on vérifie que $M = \sum_{a,b} (a-b) i P_{a,b}$ tandis que $C = \sum_{a,b} i^{a-b} P_{a,b}$.

Supposons que E_R soit de dimension finie égale à $2n$. Si (Z_α) désigne une base de E^*, $(Z_\alpha, \overline{Z}_\alpha)$ sera une base de F et l'on vérifie que

$(\frac{i}{2})^n (Z_1 \wedge \overline{Z}_1) \wedge \dots \wedge (Z_n \wedge \overline{Z}_n) = (x_1 \wedge y_1) \wedge \dots \wedge (x_n \wedge y_n)$ où x_α (resp. y_α) désigne la partie réelle (resp. la partie imaginaire pure) de Z_α, est une $2n$- forme réelle, dont le signe est indépendant de la base (Z_α)et détermine par suite une orientation de E_R, que nous dirons canonique. Désignons par $E_R^{\mathbf{C}}$ le complexifié de E_R. D'après ce qui précède il s'identifie à F^*. Une base $(Z_\alpha, \overline{Z}_\alpha)$ de F est dite adaptée à la structure complexe de E_R.

De même la base duale $(\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{E}_{\alpha^*})$ de $E_R^{\mathbf{C}}$ est dite adaptée. L'ensemble des bases de $E_R^{\mathbf{C}}$ adaptées à la structure complexe de E_R est invariant par le groupe des matrices de la forme, $\begin{pmatrix} A & o \\ o & \overline{A} \end{pmatrix}$ où $A \in GL(n, \mathbf{C})$, tandis que l'ensemble des bases de E_R, de la forme (e_α, e_{α^*}) duales des bases réelles (x_α, y_α) de F est invariant par le groupe des matrices de la forme $\begin{pmatrix} B & C \\ -C & B \end{pmatrix}$ où $B \in GL(n, \mathbf{R})$, $C \in GL(n, \mathbf{R})$.

3. Structure pseudo-hermitienne sur un espace vectoriel réel.

Les notations étant les mêmes que plus haut, on sait qu'on entend par forme hermitienne sur E une application $H : E \times E \to \mathbf{C}$ telle que pour tout $t \in E$, l'application partielle $t' \to H(t, t')$ soit linéaire et qu'on ait de plus $H(t, t') = \overline{H(t', t)}$ $\forall t$ et $t' \in E$.

Notons $g(t, t')$ (resp. $\omega(t, t')$) la partie réelle (resp. la partie imaginaire pure) de $H(t, t')$.

On vérifie que g (resp. ω) définit sur E_R une forme bilinéaire symétrique (resp. alternée), invariante par J et qu'on a :

$$g(Jt, t') = \omega(t, t') \qquad \forall t \text{ et } t' \in E_R.$$

de sorte que la donnée de l'un des trois éléments H, g, ω suffit à déterminer les deux autres. Si l'une des trois formes est non-dégénérée, les deux autres le sont également. On dit dans ce cas que E_R est munie d'une structure pseudo-hermitienne. La structure est dite hermitienne si g est non seulement non dégénérée mais positive.

Si γ désigne une forme bilinéaire symétrique quelconque sur E_R on en déduit une forme bilinéaire symétrique g, invariante par J par la relation

$$g(t, t') = \gamma(t, t') + \gamma(Jt, Jt')$$

d'où une forme hermitienne sur E qui est positive définie si γ l'est.

Soit (g, J) une structure pseudo-hermitienne sur E_R de dimension finie; Notons $\hat{g}$ et $\hat{\omega}$ les applications de E_R dans son dual définies par les relations

$$\hat{g}(x)(y) = g(x, y) \text{ et } \hat{\omega}(x)(y) = \omega(x, y) \quad \forall x \text{ et } y \in E_R$$

on vérifie facilement qu'on a,

$$\hat{\omega}\, \hat{g}^{-1}\, \hat{\omega} + \hat{g} = 0 \tag{1}$$

et que si deux formes bilinéaires g (symétrique) et ω (alternée) non dégénérées vérifient (1) sur E_R, il existe une structure complexe J telle que (g, ω, J) définisse une structure pseudo-hermitienne.

On dit que ω et g sont échangeables lorsque la relation (1) est satisfaite.

PROPOSITION 2. *Etant donnée une 2- forme ω de rang maximum (i. e. non dégénérée) sur un espace vectoriel E_R de dimension finie (donc paire), on peut toujours construire une forme bilinéaire non dégénérée d'indice paire donnée $2p \leq \dim E_R$, échangeable avec ω.*

(L'indice de la forme bilinéaire symétrique est par définition le nombre de carrés négatifs de la décomposition en somme de carrés de la forme quadratique associée à la forme bilinéaire).

Si $p = 0$, on se donne arbitrairement une forme bilinéaire symétrique définie positive γ, d'où en notant $\hat{\gamma}$ l'application définie par

$$\hat{\gamma}(x)(y) = \gamma(x, y),$$

un automorphisme $K = \hat{\omega}^{-1} \circ \hat{\gamma}$ de E_R. On vérifie que K est antisymétrique par rapport à γ c'est-à-dire que :

$$\gamma(Kx, y) + \gamma(x, Ky) = 0,$$

que K^2 est symétrique par rapport à γ, donc complètement réductible, a toutes ses valeurs propres négatives. Soit $E_R = \sum_\lambda E_\lambda$ la décomposition de E_R en somme directe de sous-espaces propres (la valeur propre associée à E_λ étant $-\lambda^2$). On définit alors $J \mid E_\lambda = \frac{K}{\lambda} \mid E_\lambda$ et $J = \sum_\lambda J \mid E_\lambda$. On

vérifie que $J^2 = -I$, que $\omega(Jx, Jy) = \omega(x, y)$ pour tout x et $y \in E_R$.
La forme bilinéaire symétrique

$$(x, y) \to \omega(x, Jx) = g(x, y)$$

définit alors la forme quadratique cherchée car elle est somme de formes quadratiques positives sur les E_λ orthogonaux deux à deux.
Si $0 < 2p < E_R$, on décompose E_R en somme directe de deux sous-espaces E_1 et E_2 de dimensions $2p$ et $2(n-p)$, orthogonaux relativement à ω c'est-à-dire que $\omega(x, y) = 0$, $\forall\, x \in E_1$ et $y \in E_2$, de sorte $\omega \mid E_i$ est non dégénérée pour $i = 1, 2$. Sur E_i il existe donc d'après ce qui précède une forme bilinéaire symétrique définie positive g_i, échangeable avec $\omega \mid E_i$.
La forme bilinéaire $g_2 - g_1$ est échangeable avec ω, non dégénérée et a l'indice voulu $2p$.
Si E_R est munie d'une structure pseudo-hermitienne définie par g et ω on sait que sur E^* il existe une base (Z_α) telle que l'on ait

$$H(t, t') = \sum_{\alpha=1}^{n-p} Z_\alpha(t)\overline{Z}_\alpha(t') - \sum_{1+n-p=\alpha}^{n} Z_\alpha(t)\overline{Z}_\alpha(t')$$

H désignant la forme hermitienne sur E associée à g et ω.
Z_α et $\overline{Z}_\alpha$ considérés comme éléments de F, définissent ce qu'on entend par base adaptée à la structure pseudo-hermitienne de E_R. g et ω s'expriment au moyen de cette base par

$$g(t, t) = \sum_{\alpha=1}^{n-p} Z_\alpha(t)\overline{Z}_\alpha(t) - \sum_{\beta=n-p+1}^{n} Z_\beta(t)\overline{Z}_\beta(t)$$

$$\omega = \frac{i}{2}(\Sigma\, Z_\alpha \wedge \overline{Z}_\alpha - \Sigma\, Z_\beta \wedge \overline{Z}_\beta)$$

en convenant d'identifier la forme bilinéaire alternée ω à la 2-forme qu'elle définit canoniquement.
L'ensemble des bases adaptées $(Z_\alpha, \overline{Z}_\alpha)$ est invariant par le groupe des matrices de la forme $\begin{pmatrix} A & o \\ o & \overline{A} \end{pmatrix}$ où $A \in U(n, p)$ (groupe des matrices laissant invariante dans C^n la forme hermitienne :

$$Z_1\overline{Z}_1 + \dots + Z_{n-p}\overline{Z}_{n-p} - Z_{n-p+1}\overline{Z}_{n-p+1} - \dots - Z_n\overline{Z}_n)$$

on a également :

$$g(t,t) = \sum_{\alpha=1}^{n-p} x_\alpha^2 + y_\alpha^2 - \sum_{n-p+1}^{n} (x_\beta)^2 + (y_\beta)^2$$

$$\omega = \sum_{\alpha=1}^{n-p} x_\alpha \wedge y_\alpha - \sum_{\beta=n-p+1}^{n} x_\beta \wedge y_\beta$$

OPERATEUR $*$

Soit E_R un espace vectoriel de dimension m, pseudo-euclidien (c'est-à-dire muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée g) orienté (c'est-à-dire muni d'une m- forme $\Omega \neq 0$). g s'étend en une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, notée $\langle\ ,\ \rangle$ sur ΛE_R et ΛE_R^*. Ces données déterminent canoniquement une m-forme v, appelée élément de volume, de même signe que Ω, telle que $\langle v, v\rangle = (-1)^p$ où p désigne l'indice de la forme quadratique associée à g. Pour tout $\varphi \in \Lambda^q E_R^*$, on définit $*\varphi \in \Lambda^{m-q} E_R$ par la relation

$$\langle *\varphi, \psi\rangle = \langle v, \varphi \wedge \psi\rangle \qquad \forall\ \psi \in \Lambda^{m-q} E_R^* .$$

On vérifie que $*$ est un isomorphisme d'espace vectoriel et qu'on a

$$(2)\begin{cases} \varphi \wedge *\varphi' = \varphi' \wedge * \varphi = \langle \varphi', \varphi\rangle\, v \\ **\varphi = (-1)^{q(m-q)}\,\varepsilon\,\varphi \quad \text{où } q = deg(\varphi),\ \varepsilon = \langle v, v\rangle \\ \langle *\varphi, *\varphi'\rangle = \varepsilon\,\langle \varphi, \varphi'\rangle \end{cases}$$

pour toutes q-formes φ et φ'.

Si E_R est muni d'une structure pseudo-hermitienne, elle est canoniquement orientée et par suite, au moyen de sa structure pseudo-euclidienne sous-jacente et de son orientation, on peut définir un élément de volume dont on vérifie immédiatement qu'il vaut $\frac{\omega^n}{n!}$.

L'indice de la forme quadratique étant nécessairement pair, on vérifie ici que $*$ est un isomorphisme d'espace vectoriel pseudo-euclidien à cause de (2). De plus on a

$$(3)\begin{cases} *\,\omega^p = \dfrac{p!}{(n-p)!}\,\omega^{n-p} \qquad \forall\ p;\ \text{entier},\ 0 \leq p \leq 2n \\ *\,C = C\,* \\ **\,\varphi = (-1)^p\,\varphi \end{cases}$$

(2) et (3) entraînent $\langle \omega^p, \omega^p\rangle = \dfrac{n!\,p!}{(n-p)!}$ $\quad(4)$.

CHAPITRE II

STRUCTURES PRESQUE COMPLEXES

Toutes les applications considérées sont de classe C^{∞}.

1. Définitions.

Soit V une variété différentiable C^{∞}, de dimension paire $2n$. Notons $T(V)$ son fibré tangent et pour tout $x \in V$, $T_x(V)$ l'espace vectoriel des vecteurs tangents en x à V, $R(V)$ le fibré principal des repères réels de V, $R^c(V)$ le fibré principal des repères complexes. On a alors, comme on le sait, le résultat suivant :

PROPOSITION 1. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) Il existe sur chaque espace $T_x(V)$ une structure complexe (voir chapitre I) de telle sorte que la condition suivante soit vérifiée.

Tout point $y \in V$ possède un voisinage U sur lequel est définie une forme différentielle Θ, à valeurs dans $\mathbf{C}^n$ dont la restriction à chaque point $p \in U$ définit un isomorphisme d'espace vectoriel complexe de $T_p(V)$ sur $\mathbf{C}^n$.

b) Il existe un champ différentiable $J_x \in Aut\, T_x(V)$ de carré $-Id$, ce qui revient à dire que le fibré tangent $T(V)$ possède une structure complexe différentiable.

c) Il existe un champ différentiable de sous-espaces de dimension n des complexifiés $T_x^{\mathbf{C}}(V)$ des espaces tangents.

d) Le fibré principal $R(V)$ contient un sous-fibré principal dont le groupe structural est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} B & C \\ -C & B \end{pmatrix}$ où $B \in GL(n, R)$.

e) Le fibré principal $R^{\mathbf{C}}(V)$ contient un sous-fibré principal dont le groupe structural est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} A & o \\ o & \bar{A} \end{pmatrix}$ où $A \in GL(n, \mathbf{C})$.

DEFINITION. *Lorsque l'une des propriétés $(a) - (e)$ est vérifiée par une variété V, on dit qu'elle possède une structure presque complexe. On appelle variété presque complexe une variété munie (par exemple) d'un* champ différentiable $x \to J_x$ d'automorphismes des espaces tangents, de carré $-Id$.

Une structure presque complexe étant donnée sur V, à chaque espace tangent on peut appliquer les considérations algébriques du chapitre I. On en déduit en particulier que V est canoniquement orientée par la donnée de J et que les opérateurs C et M définis « ponctuellement» s'étendent au module des formes différentielles sur V. De même l'espace des formes à valeurs complexes est bi-gradué et les opérateurs $P_{a,b}$ se définissent comme au chapitre I.

2. Exemples.

1) Soit V la variété réelle sous-jacente à une variété analytique complexe. Les cartes locales complexes munissent canoniquement V d'une structure presque complexe dite dérivée de la structure analytique complexe.

2) Sur l'ensemble $\{I, e_1, \ldots, e_7\}$ considéré comme base de $\mathbf{R}^8$, la table de multiplication :

$$e_s^2 = -I \quad e_s e_h = -e_h e_s \text{ si } h \neq s, \quad e_s(e_s e_h) = e_s^2 e_h = -e_h$$

$$e_s = e_{s+1} e_{s+3} = e_{s+4} e_{s+5} = e_{s+2} e_{s+6} \text{ avec } e_{s+7} = e \text{ pour } s,h = 1,..,7$$

$$I e_s = e_s I = e_s$$

permet par prolongement $\mathbf{R}$-linéaire de munir $\mathbf{R}^8$ d'une structure d'algèbre (non associative) appelée algèbre des Octaves de Cayley. Si $x = x^i e_i$, $y = y^i e_i$ sont deux éléments de R^7 (identifié au sous-espace de $\mathbf{R}^8$ des vecteurs de 1ère coordonnée nulle).

On définit

$$x \wedge y = \sum_{(i,k)} x^i y^k e_i e_k \qquad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{7} x^i y^i$$

et on vérifie que l'application $(x, y) \to x \wedge y$ est une application bilinéaire alternée de $R^7 \times R^7$ dans R^7 telle que $x \wedge (x \wedge y) = -y$ si $\langle x, x \rangle = 1$ et que $(\langle x, y \rangle = 0) \Longrightarrow \langle x, x \wedge y \rangle = 0$ (si $\langle x, x \rangle = 1$).
Autrement dit, sur $S^6 = \{ x \in R^7, \langle x, x \rangle = 1 \}$ on définit une structure presque complexe J par $J_x y = x \wedge y$ où l'on a identifié $T_x(S^6)$ avec l'ensemble des points $y \in R^7$ tels que $\langle y, x \rangle = 0$.

3. Structure presque complexe sur $T(W)$.

Soit W une variété différentiable de dimension m; notons $\mathcal{V}$ le fibré sur $T(W)$ des vecteurs tangents à $T(W)$ qui sont verticaux, c'est-à-dire (en notant par $\pi : T(W) \to W$ la projection canonique) le noyau de $\pi_* : TT(W) \to T(W)$ application tangente à π. On a donc la suite exacte de fibrés vectoriels sur $T(W)$

$$(1) \qquad 0 \to \mathcal{V} \to TT(W) \to \pi^*T(W) \to 0$$

où $\pi^*T(W)$ désigne le fibré sur $T(W)$, image réciproque du fibré $T(W) \to W$ par l'application π (fibré qui est, comme on le sait, le sous-ensemble de $T(W) \times T(W)$ des couples (t_1, t_2) tels que $\pi(t_1) = \pi(t_2)$).
Or si $t \in T(W)$, $\mathcal{V}_t = T_t(T_{\pi(t)}(W))$ est l'espace tangent au point t à l'espace vectoriel $T_{\pi(t)}(W)$. On a donc un isomorphisme $\mathcal{V}_t \simeq T_{\pi(t)}(W)$ au moyen de la translation $u \to u - t$ qui identifie tout vecteur tangent à un espace vectoriel en un de ses points à un élément de cet espace. De même, par définition, la fibre $(\pi^*T(W))_t$ de $\pi^*T(W)$ au point $t \in T(W)$ est $\{t\} \times T_{\pi(t)}(W)$ c'est-à-dire isomorphe canoniquement à $T_{\pi(t)}(W)$. Autrement dit les deux fibrés $\mathcal{V}$ et $\pi^*T(W)$ sont canoniquement isomorphes.
Soit $K : TT(W) \to \mathcal{V}$ une scission quelconque de la suite exacte

$$0 \to \mathcal{V} \to TT(W) \to \pi^*T(W) \to 0$$

qui permet par conséquent d'écrire :

$$TTW = \mathcal{V} \oplus \pi^*TW \qquad \text{(Somme de Whitney).}$$

En appelant j l'isomorphisme canonique de $\mathcal{V}$ sur $\pi^*T(W)$, on définit $J(X+Y) = j^{-1}(Y) - j(X)$ pour $X \in \mathcal{V}$, $Y \in \pi^*T(W)$. D'où

$$J^2(X+Y) = -X - Y,$$

autrement dit $J^2 = -I$.

Nous voyons donc que toute scission de la suite exacte (1) définit une structure presque complexe sur $T(W)$.
Comme toute suite exacte de fibrés vectoriels sur un espace paracompact se scinde, nous voyons donc que le fibré tangent à une variété différen-

tiable quelconque possède une structure presque complexe. Une telle structure presque complexe est, comme on le voit, telle que $J\mathcal{V}\cap\mathcal{V}=\{0\}$. Réciproquement, si J est une structure presque complexe sur $T(W)$ telle que $\mathcal{V}$ soit un sous-fibré réel de $TT(W)$ (c'est-à-dire précisément $J\mathcal{V}\cap\mathcal{V}=\{0\}$) alors elle définit une scission de (1).

PROPOSITION 2. *Les structures presque complexes sur le fibré tangent à une variété différentiable W telles que $\mathcal{V}$ soit un sous-fibré réel de $TT(W)$ sont en correspondance biunivoque avec les scissions de la suite exacte :*

$$0\to\mathcal{V}\to TT(W)\to\pi^*T(W)\to 0.$$

REMARQUE. Dire que $\mathcal{V}$ est réel c'est également dire que les espaces tangents à W qui sont les sous-variétés intégrales de la distribution $t\to\mathcal{V}_t$ $(t\in T(W))$ sont des sous-variétés réelles de la variété presque complexe $T(W)$. (En appelant sous-variété réelle d'une variété presque complexe V une sous-variété U telle que $JT_x(U)\cap T_x(U)=\{0\}$ $\forall x\in U$).

SCISSIONS DE (1_E) ET CONNEXIONS.

Nous allons dans ce paragraphe étudier les scissions de (1) en liaison avec la théorie des connexions dans un fibré vectoriel.

Considérons plus généralement un fibré vectoriel $E(C^\infty)$ sur une variété (C^∞) paracompacte W. Notons $p:E\to W$ la projection, $\tilde{E}$ le module des sections de E et pour toute application μ d'une variété dans une autre μ_* désigne l'application tangente.

Notons $\mathcal{V}_E$ le sous-fibré de $T(E)$ des vecteurs verticaux c'est-à-dire tels que $p_*(t)=0$. Nous avons encore la suite exacte de fibrés vectoriels sur E

$$(1_E)\qquad 0\to\mathcal{V}_E\to TE\to p^*T(W)\to 0$$

et l'isomorphisme $\mathcal{V}_E\simeq p^*E$ où $p^*E\to E$ désigne le fibré vectoriel (sur E) image réciproque par p du fibré E (sur W). Le groupe multiplicatif $\mathbf{R}^*$ des nombres réels $\neq 0$ opère sur E au moyen des homothéties et toute scission $K:T(E)\to\mathcal{V}_E$ de 1_E définit par le noyau de K une distribution de sous-espaces tangents à E, appelée horizontale, qui est invariante par

$\mathbf{R}^*$ si et seulement si $K \circ h_{\lambda *} = h_{\lambda *} \circ K$ (où $h_{\lambda *}$ désigne l'application tangente à l'homothétie h_λ de rapport $\lambda \neq 0$) pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^*$. Nous avons alors le théorème :

THEOREME. *Il y a une correspondance biunivoque naturelle entre les scissions de 1_E définissant des distributions invariantes par $\mathbf{R}^*$ et les connexions sur E.*

Soit D une connexion sur E, c'est-à-dire une application qui à tout $t \in T(W)$, tout $\sigma \in \tilde{E}$ associe un élément $D_t\sigma \in E_{\pi(t)}$ (où $\pi : TW \to W$ désigne la projection) de façon que l'on ait :

$$D_{\lambda t}(f\sigma) = \lambda[(t \circ f)\sigma(\pi(t)) + D_t\sigma]$$

pour toute fonction f, C^∞ sur W et tout $\lambda \in \mathbf{R}$. On en déduit une connexion $\tilde{D}$ sur le fibré p^*E, dite image réciproque de D par p et comme $\mho_E \simeq p^*E$, on en déduit finalement une connexion (notée encore $\tilde{D}$) sur $\mho_E$.

Le fibré $\mho_E$ admet une section S dite canonique, qui à tout point $v \in E$ associe le vecteur tangent à E en v, vertical et image de v par l'isomorphisme (déjà mentionné au n°3,) entre vecteurs verticaux en v et éléments de la fibre de E passant par v. On en déduit une application

$$\Theta : TE \to \mho_E \text{ définie par } \Theta(u) = \tilde{D}_u S \quad \forall u \in TE.$$

On peut définir d'autre part une application $K : TE \to \mho_E$ de la manière suivante : pour tout $v \in TE$, soit $\sigma \in \tilde{E}$ une section (locale)telle que $\sigma_* p_*(u) = u$. On pose alors $K(u) = D_{p_*(u)}\sigma$ en identifiant comme plus haut $E_{p(v)}$ à $(\mho_E)_v$. Il faut naturellement vérifier que si σ' est une autre section (locale) vérifiant $\sigma'_* p_*(u) = u$ on a $D_{p_*(u)}\sigma' = D_{p_*(u)}\sigma$ ce qui va résulter du lemme suivant :

LEMME. *Soient σ et σ' deux sections (locales) du fibré E telles que $\sigma(x_o) = \sigma'(x_o)$ alors les deux égalités suivantes sont équivalentes*

(1) $\sigma_*(t) = \sigma'_*(t)$ pour tout $t \in T_{x_o}(W)$

(2) $D_t\sigma = D_t\sigma'$.

La propriété étant locale, nous pouvons supposer que $E = U \times F$

où U est un ouvert de $\mathbf{R}^m$ et F un espace vectoriel de dimension finie. On a alors une correspondance biunivoque entre le $\mathfrak{F}(U)$-module des applications de U dans F et le $\mathfrak{F}(U)$-module des sections de E, où $\mathfrak{F}(U)$ désigne l'anneau des fonctions différentiables sur U. Si une section σ est représentée par l'application $x \to (x, f(x))$ l'application tangente σ_* est évidemment représentée par $t \to (t, f_*(t))$.

Posons $\omega(f) = f_*(t) - p_F(D_t\sigma)$ où $p_F : U \times F \to F$ désigne la projection $(x, y) \to y$. Soit φ une forme linéaire sur F, l une fonction sur U on a

$$(lf)_*(t).\ \varphi = t.\ (\varphi \circ lf) = t.\ (l(\varphi \circ f))$$

à cause du caractère linéaire de φ, le premier membre désignant l'action du vecteur $(lf)_*(t)$ tangent à F sur la fonction φ.

D'où

$$(lf)_*(t) = (t.l)f(x_o) + l(x_o)f_*(t).$$

En tenant compte du fait que si deux vecteurs tangents à F prennent même valeur pour toute forme linéaire, ils sont égaux.
Comme D est une connexion, on déduit finalement de ce qui précède que ω est une application vérifiant les égalités :

$$\omega(f + f') = \omega(f) + \omega(f')$$

$$\omega(lf) = l(x)\,\omega(f) \qquad , \quad \forall\, l \in \mathfrak{F}(U).$$

On a donc, en désignant par e_i une base de F et par abus de notation en désignant de la même manière les applications constantes de U dans F définies par les e_i,

$$f = f^k e_k \qquad f' = f'^k e_k \qquad \text{d'où}$$

$$\omega(f) = f^k(x_o)\,\omega(e_k) \qquad \omega(f') = f'^k(x_o) \quad \omega(e_k).$$

Soit finalement si $\sigma(x_o) = \sigma'(x_o)$

$$\omega(f) = \omega(f') \qquad \text{d'où}$$

$$f_*(t) - f'_*(t) = p_F(D_t\sigma) - p_F(D_t\sigma').$$

Autrement dit l'équivalence des relations $\sigma_*(t) = \sigma'_*(t)$ et $D_t\sigma = D_t\sigma'$ est démontrée.

Le lemme précédent montre également que les deux distributions définies par K et Θ coincident.

En effet, si σ est une section de E, on peut considérer σp comme une section du fibré p^*E. La section canonique S et la section σp vérifient alors les relations $\sigma p(v) = S(v)$ et $\sigma_* p_*(u) = S_*(u)$ pourvu que σ soit une section vérifiant la condition $\sigma_* p_*(u) = u$ pour $u \in T(E)$, section permettant justement de définir $K(u)$. Le lemme, appliqué à la connexion $\tilde{D}$, donne alors

$$\tilde{D}_u S = \tilde{D}_u(\sigma p) = D_u \sigma \text{ d'où } \Theta(u) = K(u).$$

Il faut enfin vérifier que pour tout vecteur u tangent en v à E, il existe une section locale σ telle que $\sigma p(v) = v$, $\sigma_* p_*(u) = u$ lorsque u n'est pas vertical, ce qui résulte aussitôt du fait si $y \in F$, $\nu \in T_y F$, il existe toujours une application $f : U \to F$ telle que $f(x_o) = y$, $f_*(t) = \nu$ où $t \in T_{x_o}(U)$ est donné non nul. Si u est vertical on posera simplement $K(u) = u$. On voit d'ailleurs facilement que si u est vertical $\tilde{D}_u S = u$ car si (σ_k) est une famille de sections de E, formant une base en chaque point de U, $S = S^k \tilde{\sigma}_k$ où les $S^k(v)$ pour $v \in E$ sont justement les coordonnées de v par rapport aux $\sigma_k(p(v))$ tandis que $\tilde{\sigma}_k = \sigma_k p$ désignent les sections images réciproques des σ_k par p. On a donc

$$\tilde{D}_u S = (u \cdot S^k)\tilde{\sigma}_k + S^k \tilde{D}_u \tilde{\sigma}_k .$$

Comme $p_*(u) = 0$ et que $\tilde{\sigma}_k = \sigma_k p$ on a finalement $\tilde{D}_u S = (u \cdot S^k)\tilde{\sigma}_k$ or $u \cdot S^k = S^k(u)$ par définition même de la section canonique ce qui démontre bien que $\tilde{D}_u S = u$ pour u vertical.

Il reste à démontrer que la distribution définie par K est invariante par $\mathbf{R}^*$ et réciproquement.

Or soit h_λ l'homothétie de rapport $\lambda \neq 0$ on a

$$ph_\lambda = p \text{ d'où } p_* h_{\lambda *} = p_*$$

si σ vérifie $\sigma_* p_*(u) = u$, on en déduit

$$\sigma_* p_* h_{\lambda *} u = u \qquad \text{et encore}$$

$$h_{\lambda *} \sigma_* p_* h_{\lambda *} u = h_{\lambda *} u$$

et comme $(h_\lambda \sigma)_* = h_{\lambda *} \sigma_*$ on en déduit que

$$(h_\lambda \sigma)_* p(h_{\lambda *} u) = h_{\lambda *} u \qquad \text{soit}$$

$$K(h_{\lambda *} u) = D_{p_* h_{\lambda *} u}(h_\lambda \sigma) = h_\lambda(D_{p_*(u)}\sigma) = h_\lambda K(u).$$

Ce qui montre la première partie du théorème.

Réciproquement, soit une distribution invariante par $\mathbf{R}^*$, définie par K. On pose

$$D_t \sigma = K\sigma_*(t) \quad \text{pour } t \in TW$$

et l'on vérifie immédiatement à l'aide du lemme et de l'invariance par $\mathbf{R}^*$ que la relation précédente définit une connexion (on utilise en particulier le fait que si h est une fonction telle que $h(x_o) = 0$ alors

$$(h\sigma)_*(t) = (t.h)\sigma_*(x_o)).$$

Notons E' le fibré des vecteurs non nuls.

Soit maintenant ∇ une connexion quelconque dans le fibré $\mho_{E'} \simeq p^*E'$. Elle est dite connexion de vecteur sur E'. Elle permet de définir encore une fonction $\theta : TE' \to \mho_{E'}$ par la relation

$$\theta(u) = \nabla_u S.$$

Mais cette fois Θ ne définit pas nécessairement une scission de la suite 1_E. Lorsqu'on a $Ker\ \theta \oplus \mho_{E'} = TE'$, on dit [1] que ∇ est une connexion régulière. Il est clair que pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que pour tout vecteur $u \neq 0$ vertical on ait $\theta(u) \neq 0$. En effet on a déjà

$$dim\ TE' - dim\ Ker\ \theta \leq dim\ \mho_{E'}.$$

La condition $\theta(u) \neq 0$ pour tout vecteur vertical entraîne en outre

$$dim\ Ker\ \theta + dim\ \mho_{E'} \leq dim\ TE'$$

d'où l'égalité $dim\ TE = dim\ Ker\ \theta + dim\ \mho_{E'}$ et comme $Ker\ \theta \cap \mho_{E'} = \{0\}$ on a bien $Ker\ \theta \oplus \mho_{E'} = TE'$.

Si D est une connexion sur E, les considérations précédentes montrent que $\tilde{D}$ est une connexion régulière.

Réciproquement, soit une distribution horizontale, supplémentaire de $\mathcal{V}_{E'}$, c'est-à-dire une scission de $1_{E'}$, est-elle induite par une connexion régulière au moins ? Nous avons le

THEOREME. *Toute scission de la suite exacte* $(1_{E'})$ *peut être définie par une connexion régulière :*

La section canonique S est un champ de vecteur sur E', non nul partout. Une métrique riemanienne sur E' permet donc de décomposer $TE' = T_1E' \oplus T_2E'$ où T_1E' est le fibré de rang 1, engendré par S, T_2E' le fibré orthogonal à S. Sur le fibré T_2E' soit δ une connexion. En posant $D_tY = (t.f)S + \delta_tH$ pour tout $Y = fS + H$ $(H \in T_2E')$ et tout $t \in TE'$, on définit une connexion linéaire sur E' telle que $D_tS = 0$ pour tout vecteur t.

Soit $K : TE' \to \mathcal{V}_{E'}$ l'application qui définit la scission de la suite $(1_{E'})$. Pour toute section $\sigma : E' \to \mathcal{V}_{E'}$ (qui est donc un champ de vecteur sur E) on pose $\nabla_t\sigma = K(D_t\sigma)$ relation dont on vérifie facilement qu'elle définit bien une connexion sur le fibré $\mathcal{V}_{E'}$ et l'on a $\nabla_tS = 0$ $\forall\, t \in TE'$. Soit enfin $\tilde{\nabla}$ une connexion sur $\mathcal{V}_{E'}$ telle que $\tilde{\nabla}_tS \neq 0$ pour tout vecteur vertical t, connexion dont l'existence est évidente (il suffit de prendre par exemple l'image réciproque par p d'une connexion sur E'). On définit finalement la connexion $\hat{D}$ sur $\mathcal{V}_{E'}$ par la relation

$$\hat{D}_{v+h}\sigma = \nabla_h\sigma + \tilde{\nabla}_vS.$$

Pour tout vecteur $t = v + h$ $(v \in \mathcal{V}_{E'}$, h horizontal$)$ $\hat{D}$ ainsi défini est bien une connexion telle que $\hat{D}_vS \neq 0$ pour tout vecteur $v \neq 0$ et $\hat{D}_hS = 0$ pour tout h horizontal de sorte que la distribution définie par la connexion régulière $\hat{D}$ est bien celle qui était donnée.

En conclusion nous voyons donc qu'à toute scission de (1_E) on peut associer d'une infinité de manière une connexion régulière qui la définit et que toute connexion régulière définit une scission de $(1_{E'})$. Lorsque la distribution est invariante par l'action de $\mathbf{R}^*$ la connexion régulière peut être choisie d'une seule manière de façon à être l'image réciproque par $p : E' \to W$ d'une connexion sur le fibré E.

Lorsque $E = T(W)$, toutes ces scissions correspondent à des structures presque complexes sur TW.

3. Intégrabilité d'une structure presque complexe.

Les notations étant les mêmes qu'au paragraphe I, on sait qu'on a la proposition suivante :

PROPOSITION. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) Quels que soient a et b, la différentielle de toute forme bihomogène de bidegré (a, b) est somme de formes de bidegré $(a+1, b)$ et $(a, b+1)$.

2) $P_{o,2}(d\alpha) = 0$ pour toute forme α de bidegré $(1, 0)$.

3) $P_{o,2}(d\theta^\alpha) = 0$ pour les formes θ^α définissant localement la structure.

4) $d\theta^\alpha \wedge (\theta^1 \wedge \ldots \wedge \theta^n) = 0 \qquad j = 1, \ldots, n.$

5) $T(X, Y) = [JX, JY] - [X, Y] - J[JX, Y] - J[X, JY] = 0$ pour tous champs de vecteurs X et Y. ($1/4\ T$ est appelée forme de torsion).

Chacune des assertions précédentes est trivialement vérifiée par la structure presque complexe dérivée d'une structure analytique complexe et il résulte d'un théorème de Newlander-Nirenberg que, réciproquement, toute structure presque complexe vérifiant *(1) ... (5)* dérive d'une structure analytique complexe. On dit alors que la structure presque complexe est intégrable.

A) Considérons la structure presque complexe définie sur S^6 par les octaves de Cayley. Tout champ de vecteur sur S^6 sera identifié à une application de S^6 dans $\mathbf{R}^7$ de sorte que si X et Y désignent deux champs de vecteurs on a $[X, Y] = dY(X) - dX(Y)$ où dX (resp. dY) désigne la différentielle de l'application $X : S^6 \to \mathbf{R}^7$ (resp. Y). On en déduit aussitôt :

$$T(X,Y) = d(JY)(JX) - d(JX)(JY) - dY(X) + dX(Y) -$$
$$- J\{ d(JY)(X) - dX(JY)\} - J\{dY(JX) - d(JX)(Y)\}.$$

Or en un point $x \in S^6$, $J_x Y_x = x \wedge Y_x$ de sorte que

$$d(JY)(JX) = JX \wedge Y + J[\, dY(JX)\,] .$$

En calculant de même les autres termes, on trouve qu'en un point $x \in S^6$ et pour deux vecteurs y et z tangents en x à S^6 on a

$$T_x(y,z) = (x \wedge y) \wedge z - (x \wedge z) \wedge y - 2[\, x \wedge (y \wedge z)\,] .$$

En particulier, avec les notations du *(2, 2)*

$$T_{e_S}(e_{S+1}, e_{S+2}) = - e_{S+5} .$$

Pour des raisons d'homogénéité on voit que la torsion n'est nulle en aucun point de S^6 qui se trouve donc munie d'une structure presque complexe non intégrable.

B) Considérons maintenant la structure presque complexe définie sur TW par une scission de *(1)*. A tout champ de vecteur X sur W, on peut associer un champ de vecteur horizontal X_h tel que $\pi_*(X_h) = X$ et un champ de vecteur vertical, noté X_v, image de X_h dans l'isomorphisme j de $\mathcal{V}$ sur π^*TW. Le champ X_v ainsi obtenu est d'ailleurs constant le long des fibrés de $\mathcal{V}$ de sorte que si Y est un champ de vecteur sur W on a immédiatement $[\, X_v,\ Y_v\,] = 0$.

Les modules sur $\mathcal{F}(W)$ des sections (locales) du type X_h et X_v engendrent localement (sur $\mathcal{F}(TW)$) les sections des fibrés $\mathcal{V}$ et π^*TW. Il suffit donc pour déterminer la torsion de la structure presque complexe de calculer $T(X_v, Y_v)$, $T(X_h, Y_h)$, $T(X_h, Y_v)$. On a

$$T(X_v, Y_v) = [\, JX_v, JY_v\,] - [\, X_v,\ Y_v\,] - J[\, X_v, JY_v\,] - J[\, JX_v, Y_v\,] .$$

Il résulte de la définition même de J que $J(X_v) = - jX_v = - X_h$ et comme $[\, X_h,\ Y_v\,]$ est vertical comme on le voit aisément,

$$T(X_v,\ Y_v) = [\, X_h,\ Y_h\,] + j\{[\, X_h,\ Y_h\,] + [\, X_v, Y_h\,]\} .$$

De même

$$T(X_h, Y_v) = -[X_v, Y_h] + J([X_h, Y_h]) - [X_h, Y_v])$$

$$T(X_h, Y_h) = -[X_h, Y_h] - j\{[X_v, Y_h] + [X_h, Y_v]\}.$$

On en déduit que la structure presque complexe définie par la scission est intégrable si et seulement si l'on a

$$J[X_h, Y_h] = [X_h, Y_v] + [X_v, Y_h]$$

ce qui entraîne en particulier que la distribution horizontale définie par la scission est intégrable. On peut énoncer :

THEOREME. *Pour que la structure presque complexe définie par une scission de (1) soit intégrable il faut et il suffit que pour tous champs de vecteurs X et Y sur W on ait*

$$J[X_h, Y_h] = [X_h, JY_h] + [JX_h, Y_h].$$

Supposons la distribution horizontale définie par l'image réciproque d'une connexion linéaire sur W. Elle est alors, comme on l'a vu, invariante par le groupe $\mathbf{R}^*$ opérant sur $T(W)$ par les homothéties. Or le champ canonique S est précisément le champ de vecteur sur $T(W)$, générateur du groupe à un paramètre $\mathbf{R}^*$, comme on le vérifie facilement, il en résulte que si X_h est le champ horizontal déterminé par X, $[S, X_h]$ est à la fois horizontal et vertical donc nul. Si $\{X_1, \dots, X_n\}$ désigne une base locale définie sur un ouvert U de W, on a $S = S^k(X_k)_v$, autrement dit

$$(X_h . S^k)(X_k)_v + S^k [X_h, (X_k)_v] = 0.$$

Or, $\tilde{D}$ étant la connexion dans $\mho$ déterminée par la connexion linéaire D, on a, puisque X_h est horizontal

$$D_{X_h} S = 0 = (X_h . S^k)(X_k)_v + S^k \tilde{D}_{X_h}(X_k)_v.$$

On en déduit donc

$$\tilde{D}_{X_h}(X_k)_v = [X_h, (X_k)_v]$$

ou ce qui revient au même

$$(D_X Y)_v = [X_h, Y_v] \text{ pour tous champs } X \text{ et } Y.$$

De la relation

$$[\, X_h , S \,] = 0 \,.$$

On déduit aussi

$$[[\, X_h , Y_h \,]\, , S \,] = 0 \text{ et par suite}$$

$$([\, X_h , Y_h \,] . S^k)(X_k)_v + S^k [[\, X_h , Y_h \,] , (X_k)_v \,] = 0 \,.$$

Mais on a

$$\tilde{D}_{Y_h}(\tilde{D}_{X_h} S) = Y_h(X_h . S^k)(X_k)_v + (X_h . S^k)\tilde{D}_{Y_h}(X_k)_v + $$

$$+ (Y_h . S^k) D_{X_h}(X_k)_v + S^k D_{Y_h} D_{X_h}(X_k)_v \,.$$

Soit

$$[\, \tilde{D}_{X_h} , \tilde{D}_{Y_h} \,] Z_v = [[\, X_h , Y_h \,] \, , Z_v \,] \,.$$

Et comme

$$\tilde{D}_{[X,Y]_h} Z_v = [[\, X , Y \,]_h , Z_v \,] \text{ on a finalement}$$

$$(R(X,Y)Z)_v = [[\, X_h , Y_h \,] - [\, X , Y \,]_h , Z_v \,] .$$

Pour que la distribution horizontale obtenue soit intégrable il faut donc et il suffit que $[\, X_h , Y_h \,] = [\, X , Y \,]_h$ soit $R(X,Y) = 0$ pour tous champs de vecteurs sur W (où R désignera la courbure de la connexion).

La structure presque complexe est intégrable si de plus

$$J\,[\, X_h , Y_h \,] = [\, X_h , Y_v \,] + [\, X_v , Y_h \,]$$

c'est-à-dire si de plus

$$[\, X , Y \,]_v = (D_X Y - D_Y X)_v \,.$$

Le théorème précédent devient alors, ce qui est bien connu (cf [5]) :

THEOREME. *Pour que la structure presque complexe définie par une connexion linéaire soit intégrable, il faut et il suffit qu'elle soit sans courbure et sans torsion.*

Nous voyons donc que la condition d'intégrabilité de la distribution horizontale est plus faible que celle de l'intégrabilité de la structure presque complexe. La condition $R = 0$ entraîne simplement qu'on a une structure de produit local déterminé par la distribution des champs de vecteurs verticaux et celle des champs horizontaux. Dans le cas général d'une scission de *(1)* définie par une connexion de vecteur nous avons également les deux tenseurs

$$\rho(X, Y) = [X_h, Y_h] - [X, Y]_h$$
$$\tau(X, Y) = [X_h, Y_v] - [Y_h, X_v] - [X, Y]_v$$

que l'on peut considérer comme 2 formes sur $T(W)$ à valeurs dans $\mathcal{V}$ et qui sont des invariants de la scission.

4. Fonctions holomorphes sur une variété presque complexe.

DEFINITIONS.

V (resp. V') étant une variété presque complexe, de tenseur J (resp. J'), on appelle application presque complexe de V dans V' une application différentiable $f : V \to V'$ telle que $f_*(Jt) = J'(f_*(t))$ pour tout $t \in T(V)$.

On appelle automorphisme de la variété presque complexe V tout difféomorphisme de V qui soit presque complexe (f^{-1} est alors évidemment presque complexe). Une fonction holomorphe φ sur V est par définition une application presque complexe de V dans $\mathbf{C}$ muni de sa structure presque complexe canonique. Pour que $\varphi : V \to \mathbf{C}$ soit presque complexe il faut et il suffit que, avec les notations du § 1, on ait $P_{o,1}(d\varphi) = 0$.

Pour tout ouvert U de V, soit $p(U)$ le nombre maximum de fonctions holomorphes sur U dont les différentielles soient linéairement indépendantes en chaque point de U et soit $p(x) = \lim p(U)$ lorsque U parcourt l'ensemble des voisinages de $x \in V'$. La fonction $x \to p(x)$ est évidemment semi continue inférieurement car si $x_o \in V$ il existe un voisinage $U(x_o)$ tel que $p(x_o) = p(U(x_o))$. Si $x \in U(x_o)$, on a $p(x) \geq p(U) = p(x_o)$.. Cn a alors le résultat suivant :

THEOREME. *Soit V une variété presque complexe telle que $p(x)$ soit constant. Alors V possède un feuilletage tel que tout germe de fonction holomorphe soit constant sur ses feuilles.*

Pour tout $x \in V$, soient en effet U un voisinage tel que $p(U) = p(x)$, $f_1, \dots, f_p$, p fonctions holomorphes linéairement indépendantes sur U.

Toute autre fonction holomorphe φ sur un voisinage U' de x, est telle que sur $U' \cap U$ on ait $d\varphi = \sum_{k=1}^{p} \varphi_k df_k$.
Il en résulte aussitôt que le sous-espace de $T_x(V)$ définipar $d\varphi = 0 = d\overline{\varphi}$ lorsque φ parcourt l'ensemble des germes de fonctions holomorphes au voisinage de x est de dimension constante lorsque x parcourt V. On définit donc ainsi un champ de sous-espaces des espaces tangents, champ qui est évidemment intégrable et définit par suite un feuilletage de V. Tout germe de fonction holomorphe est, par construction, constant sur les feuilles de V ainsi obtenues.
Remarquons d'ailleurs que le voisinage U, muni de la structure presque complexe induite par celle de V, vérifie la proposition suivante :

PROPOSITION. *Il existe une variété analytique complexe $\tilde{U}$ et une application presque complexe $f : U \to \tilde{U}$ telle que toute fonction holomorphe sur U se factorise en $\varphi = \tilde{\varphi} \circ f$ où $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \to \mathbf{C}$ est une fonction analytique complexe sur $\tilde{U}$.*

Si $(\tilde{U}', f')$ est un autre couple constitué d'une variété analytique complexe et d'une application f' presque complexe vérifiant les conditions de la proposition alors $\tilde{U}'$ est isomorphe (en tant que variété analytique complexe) à $\tilde{U}$. Appelons variété presque complexe régulière toute variété presque complexe vérifiant la proposition précédente, on a alors le

THEOREME. *Soit V une variété presque complexe telle que $p(x)$ soit constant. Alors V est localement isomorphe à une variété presque complexe régulière.*

Notons que si le feuilletage de V est régulier alors V est régulier on prend alors pour $\tilde{V}$ la variété obtenue à partir de V par passage au quotient par la relation d'équivalence qui identifie deux points de V s'ils appartiennent à la même feuille et pour $f : V \to \tilde{V}$ la projection naturelle.

A quelle condition une variété presque complexe donnée est-elle régulière ? Il faut évidemment commencer par voir sous quelles conditions la fonction $p(x)$ est constante. Le faisceau des germes de fonctions holomorphes étant invariant par les automorphismes de V, on voit que pour que $p(x)$ soit constant il suffit que le pseudo-groupe des automorphismes locaux de V soit transitif, c'est-à-dire que deux points quelconques de V, m et n, étant donnés, il existe une transformation presque complexe d'un voisinage de m sur un voisinage de n.

On peut se demander si la condition $p(x) =$ constante n'entraîne pas, réciproquement, que le pseudo-groupe des automorphismes locaux de V est transitif. Lorsque $p(x) = n = 1/2 \dim V$, la variété est analytique complexe et on voit qu'il en est ainsi dans ce cas.

Soit $\quad T(X,Y) = [JX, JY] - [X,Y] - J[JX,Y] - J[X,JY]$ la 2- forme dont la nullité assure l'intégrabilité de la structure presque complexe. Pour toute fonction holomorphe f on a $T(X,Y)f = 0$. En effet

$$T(X,Y)f = i(JX)(Yf) - i(JY)(Xf) - X(Yf) + Y(Xf) - i(JX)(Yf) -$$
$$- Y(Xf) + X(Yf) + i(JY)(Xf) = 0\,.$$

Autrement dit les sous-espaces $\tau_x = \{T(t,t')$ pour $t \in T_x(V)$, $t' \in T_x(V)\}$ sont tangents aux feuilles du feuilletage défini précédemment. Plus précisément considérons la distribution de sous-espaces définie par les champs de vecteurs de la forme $T(X,Y)$, $[T(X,Y), T(X_1, Y_1)]$ etc.... En supposant qu'une telle distribution soit de rang constant (ce qui est notamment le cas lorsque le pseudo-groupe des automorphismes locaux est transitif) elle définit un feuilletage de V telle que toute fonction holomorphe soit constante sur ses feuilles. Tout point possède un voisinage U sur lequel le feuilletage précédent induit un feuilletage régulier. La variété quotient $\tilde{U}'$ obtenue à partir de la variété feuilletée U est naturellement munie d'une structure presque complexe car les espaces tangents aux feuilles sont invariants par J ($JT(X,Y) = T(JX,Y)$ et la projection naturelle $U \to \tilde{U}'$ est presque complexe. Comme $T(X,Y)$, pour tous champs de vecteurs X et Y sur U, est tangent aux feuilles de U, il en résulte que la torsion de la structure presque complexe de $\tilde{U}'$ est nulle. Localement $\tilde{U}'$ possède donc $1/2 \dim \tilde{U}'$ fonctions holomorphes dont les différentielles sont indépendantes, fonctions holomorphes qui, composés avec $U \to \tilde{U}$, donnent $1/2 \dim \tilde{U}'$ fonctions holomorphes sur U, dont les différentielles sont indépendantes. On en déduit que $2p \geq \dim \tilde{U}'$. Comme d'autre part $T(X, Y), [T(X_1, Y_1), T(X, Y)], \ldots,$ sont tangents aux feuilles définies par les fonctions holomorphes on a $\dim U - \dim \tilde{U}' \leq 2(n-p)$ (c'est-à-dire que les feuilles de la fibration $U \to \tilde{U}'$ sont contenues dans les feuilles définies par les fonctions holomorphes). Finalement il en résulte $2p = \dim \tilde{U}'$.

Autrement dit le champ de sous-espaces engendrés par les champs de vecteurs de la forme $T(X, Y), [T(X_1, Y_1), T(X, Y)], \ldots,$ définit le même feuilletage que le champ de sous-espaces défini par $\{ t \mid d\varphi(t) = 0,$ pour φ holomorphe $\}$. On peut donc énoncer :

PROPOSITION. *Soit V une variété presque complexe dont le pseudo-groupe des automorphismes locaux opère transitivement : alors le feuilletage déterminé par les germes de fonctions holomorphes est identique au feuilletage déterminé par les germes de champs de vecteurs de la forme*

$$T(X, Y), [T(X, Y), T(X', Y')], \ldots.$$

Considérons la variété V, feuilletée de la façon ci-dessus indiquée. Soit W une sous-variété presque complexe de V, transverse aux feuilles du feuilletage.

Si t et t' sont deux vecteurs tangents à W, $T(t, t')$ est un vecteur tangent aux feuilles et par suite, puisque la torsion de la structure presque complexe de W est la restriction à W de la torsion de la structure presque complexe de V, $T(t, t')$ est également tangent à W donc $T(t, t') = 0$. Autrement dit, d'après le théorème de Newlander-Nirenberg, W est une variété analytique complexe, d'où

PROPOSITION. *Toute sous-variété presque complexe de V, transverse aux feuilles, est une variété analytique complexe.*

Il résulte également des considérations précédentes qui si T considéré comme application de $T_x(V) \times T_x(V)$ dans $T_x(V)$ est surjective en chaque point $x \in V$, il n'existe aucun germe de fonction holomorphe sur V. Comme on vérifie aisément que la sphère S^6, munie de sa structure presque complexe précédemment définie, vérifie précisément la condition ci-dessus indiquée, on retrouve ainsi un résultat d'Ehresmann [9]. Sur S^6 il n'existe aucun germe de fonction holomorphe.

CHAMPS DE VECTEURS HOLOMORPHES ET PRESQUE COMPLEXES.

DEFINITION. *Nous appelons champ de vecteur presque complexe, tout champ X qui engendre un groupe local à un paramètre d'automorphismes locaux.*

Lorsque X et JX sont tous les deux presque complexes, nous disons que X est un champ holomorphe.

Pour que X soit un champ de vecteur presque complexe il faut et il suffit comme on sait, que $L(X)J = 0$ ce qui s'écrit :

$$J[X, Y] = [X, JY] \text{ pour tout champ de vecteur } Y.$$

Pour que X soit un champ de vecteur holomorphe il faut et il suffit que l'on ait en plus de la relation précédente, $T(X, Y) = 0$ pour tout champ Y.

Si $V = V_1 \times V_2$ où V_i est une variété presque complexe, on munit V d'une structure presque complexe évidente, produit des structures presque complexes de V_1 et V_2. En notant $C(V)$ (resp. $C(V_i)$, $i = 1, 2$) l'ensemble des champs de vecteurs de V (resp. V_i, $i = 1, 2$), on définit de façon évidente une injection $C(V_i) \to C(V)$ pour tout i, injection qui transforme d'ailleurs les champs de vecteurs presque complexes de V_i dans les champs de vecteurs presque complexes de V. Si V_1 est analytique complexe, tout champ presque complexe est holomorphe, et l'injection $C(V_1) \to C(V)$ transforme précisément les champs holomorphes de V_1 en champs holomorphes sur V. Pour le voir il suffit de considérer $T(X, Y)$ lorsque X est l'image par $C(V_1) \to C(V)$ d'un champ holomorphe sur V_1 et Y un champ sur V, bi-projetable, car localement, l'ensemble des champs bi-projetables engendre (sur $\mathcal{J}(V)$) le module des champs de vecteurs sur V. On a alors

$$T(X,Y) = T(X, Y_1) + T(X, Y_2) \text{ où } Y_1 \in C(V_1), Y_2 \in C(V_2).$$

Comme X provient d'un champ holomorphe sur V_1 on a $T(X, Y_1)=0$ et comme $X \in C(V_1)$ tandis que $Y_2 \in C(V_2)$ on a $[X, Y_2] = 0$ d'où il résulte que $T(X, Y_2) = 0$ c'est-à-dire $T(X, Y) = 0$.

Nous voyons donc que sur une variété qui est localement le produit d'une variété analytique complexe par une variété presque complexe il existe des germes de champs holomorphes. De façon générale on a la :

PROPOSITION. *L'algèbre de Lie des champs de vecteurs holomorphes est un idéal de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs presque complexes.*

Soit en effet Z un champ de vecteur presque complexe, et X un champ de vecteur holomorphe. Il résulte facilement du fait que $L(Z)J = 0$ que l'on a

$$[Z, T(X, Y)] = T([Z, X], Y) + T(X, [Z, JY])$$

condition qui exprime tout simplement que $L(Z)T = 0$.

On en déduit que si X est holomorphe, $T([Z, X], Y) = 0$ pour tout Y, autrement dit que $[Z, X]$ est holomorphe.

Il en résulte en particulier que le champ S de sous-espaces de $T(V)$, défini par $S_x = \{t, t = X_x$ où X est un germe de champ holomorphe$\}$, supposé de rang constant (ce qui est notamment le cas lorsque le pseudo-groupe des automorphismes locaux opère transitivement sur V) est intégrable et ses variétés intégrables sont des sous-variétés presque complexes de V qui sont en fait des variétés analytiques complexes. On a donc :

THEOREME. *Soit V une variété presque complexe dont le pseudo-groupe des automorphismes locaux est transitif. Alors le faisceau des germes de champs holomorphes détermine sur V un feuilletage dont les feuilles sont des sous-variétés analytiques complexes.*

Si $PA(V)$ désigne le pseudo-groupe des automorphismes locaux de V, appelons groupe d'isotropie linéaire en x_o le groupe des automorphismes $\mu_* : T_{x_o}(V) \to T_{x_o}(V)$ où $\mu \in PA(V)$ est un automorphisme local, d'un voisinage de x_o sur un voisinage de x_o avec $\mu(x_o) = x_o$. On a alors le

THEOREME. *Soit V une variété presque complexe telle que l'on ait :*

A) $PA(V)$ transitif

B) Le groupe d'isotropie linéaire irréductible.

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1) V est analytique complexe

2) $\exists$ un germe de champ de vecteur holomorphe non nul (au moins)

3) $\exists$ un germe de fonction holomorphe non constante (au moins).

Il est évident que (1) entraîne (2) et (3) car toute variété analytique complexe possède localement des champs holomorphes et des fonctions holomorphes.

Les sous-espaces $N(T) = \{ t ; T_x(t, u) = 0 \quad \forall u \}$

et $im\, T = \{ V \mid , V = T(t, u) \quad u \in T_x, t \in T_x \}$

sont invariants par le groupe d'isotropie linéaire. Si donc ce dernier opère irréductiblement sur $T_{x_o}(V)$ c'est que $N(T)$ (resp. $im\, T$) est nul ou égal à $T_{x_o}(V)$ tout entier. La condition (2) (resp. (3)) entraîne évidemment $N(T) \neq 0$ (resp. $im\, T \neq T_{x_o}(V)$) d'où dans le cas (2) (resp. 3), la nullité de la torsion, autrement dit l'intégrabilité de la structure presque complexe.

CHAPITRE III

TRANSFORMATIONS CONFORMES

I. Transformations conformes de variétés riemaniennes.

1. Cas général.

Si V désigne une variété différentiable C^{∞}, de dimension m, $\mathfrak{F}(V)$ le module des fonctions C^{∞} sur V, $\mathcal{C}(V)$ le $\mathfrak{F}(V)$-module des champs de vecteurs, on sait qu'on entend par structure pseudo-riemanienne sur V, la donnée d'une forme bilinéaire symétrique g sur le $\mathfrak{F}(V)$-module $\mathcal{C}(V)$ telle que g_x définisse pour tout $x \in V$ une structure pseudo-euclidienne sur l'espace $T_x(V)$ des vecteurs tangents en x à V. (On rappelle que si t, $t' \in T_x(V)$, il existe X et $X' \in \mathcal{C}(V)$ tels que $X_x = t$, $X'_x = t'$ on définit alors $g_x(t, t')$ par $g(X, X')(x)$ et l'on vérifie que la définition ne dépend pas des champs de vecteurs X et X' prolongeant t et t').

Chaque espace de tenseurs se trouve ainsi muni canoniquement d'une structure pseudo-euclidienne dont le produit scalaire est noté $\langle\, ,\rangle$. On en déduit une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur le $\mathfrak{F}(V)$-module des champs de tenseurs, noté encore $\langle\, ,\rangle$.

Si V est orienté, il existe alors une seule m-forme différentielle, définissant l'orientation de V, appelée élément de volume, notée v et telle que $\langle v, v\rangle = \varepsilon$ où $\varepsilon = \pm 1$ dépend de l'indice de la forme quadratique associée à g. ($\varepsilon = (-1)^{\text{indice de } g}$).

En chaque point $x \in V$, l'espace pseudo-euclidien orienté $T_x(V)$ est muni de l'isomorphisme $*$ (chap. I, § 3) d'où un isomorphisme noté encore $*$ sur les champs de p-formes locales ou globales et par suite l'opérateur δ défini par :

$$\delta \varphi = (-1)^{mp+m+1}\, \varepsilon * d * \varphi$$

où p désigne le degré de φ.

DEFINITIONS.

Une transformation différentiable $\mu : V \to V$ *est dite conforme (ou g-conforme s'il y a risque de confusion) s'il existe une fonction* $f \in \mathfrak{F}(V)$, $f > 0$ *telle que* $\mu g = f g$.

Un champ de vecteur $X \in \mathcal{C}(V)$ *est dit conforme (ou transformation infinitésimale conforme) s'il existe* $\lambda \in \mathfrak{F}(V)$ *telle que*

$$\mathfrak{L}(X)g = \lambda g.$$

où $\mathfrak{L}(X)g$ *désigne la dérivée de Lie du tenseur* g. *Il revient au même de dire que les transformations du groupe local engendré par* X *sont conformes.*

PROPOSITION 1. *Soit* μ *(resp.* X*) une transformation (resp. un champ de vecteur) conforme. Pour tous tenseurs de type* (p, q) *sur* V *on a :*

$$(1) \qquad \langle \mu t, \mu \tau \rangle \circ \mu = f(\overset{-1}{\mu})^{-(p-q)} \langle t, \tau \rangle$$

(resp.

$$(2) \quad \mathfrak{L}(X)\langle t, \tau \rangle = \langle \mathfrak{L}(X)t, \tau \rangle + \langle t, \mathfrak{L}(X)\tau \rangle + 2\left(\frac{p-q}{m}\right)\delta\xi \langle t, \tau \rangle$$

où ξ *désigne la 1-forme associée à* X *par l'isomorphisme entre champs et formes, défini par* g*).*

Supposons d'abord que $q = 1$ et $p = 0$, c'est-à-dire que t et τ soient des champs de vecteurs, on peut écrire, puisque μ est conforme, et par définition de μg :

$$(\mu g)(t, \tau) = g(\overset{-1}{\mu} t, \overset{-1}{\mu} \tau) \circ \overset{-1}{\mu} = f(\mu) g(t, \tau)$$

ce qui n'est rien d'autre que *(1)* où μ est remplacé par $\overset{-1}{\mu}$. $(p = 0, q = 1)$. Supposons maintenant que $q = 0$, $p = 1$, c'est-à-dire que t et τ soient des 1-formes alors on a :

$$(\mu t)(Z) = t(\overset{-1}{\mu} Z) \circ \overset{-1}{\mu} \qquad \forall Z \in \mathcal{C}(V).$$

Soit Y le champ de vecteur associé à t par l'isomorphisme entre champs et formes défini par g; on peut donc écrire à l'aide de ce qui précède

$$(\mu t)(Z) = \langle Y, \overset{-1}{\mu} Z \rangle \circ \overset{-1}{\mu} = f(\mu) \langle \mu Y, Z \rangle$$

Autrement dit $f(\mu)\mu Y$ est le champ de vecteur correspondant à la 1-

forme μt. De même si Z est associé à τ, $f(\mu)\mu Z$ est associé à $\mu\tau$ on peut donc écrire

$$\langle \mu t, \mu\tau\rangle = f(\mu)\mu t(\mu Z) = f(\mu)^2 \langle \mu Y, \mu Z\rangle$$

et, en raison de ce qui a déjà été prouvé pour les champs de vecteurs

$$\langle \mu t, \mu\tau\rangle = f(\mu)^2[(f(\overset{-1}{\mu}) \langle t, \tau\rangle) \circ \overset{-1}{\mu}].$$

De la relation $\mu g = f(\mu)g$ on déduit

$$f(\mu\nu) = (f(\nu) \circ \overset{-1}{\mu})f(\mu)$$

pour toutes transformations conformes μ et ν, et par suite

$$1 = (f(\overset{-1}{\mu}) \circ \overset{-1}{\mu})f(\mu),$$

ce qui permet décrire finalement

$$\langle \mu t, \mu\tau\rangle \circ \mu = f(\overset{-1}{\mu})^{-1} \langle t, \tau\rangle .$$

Autrement dit (1) est démontré pour les 1-formes et les champs de vecteurs. Supposons maintenant que

$$t = t_1 \otimes \dots \otimes t_p \otimes \theta^1 \otimes \dots \otimes \theta^q, \ \tau = \tau_1 \otimes \dots \otimes \tau_p \otimes \varphi^1 \otimes \dots \otimes \varphi^p$$

où les t_i et les τ_i sont des 1-formes, tandis que les θ^i et les φ^i sont des champs de vecteurs, on en déduit

$$\begin{aligned}\langle \mu t, \mu\tau\rangle \circ \mu &= \left(\prod_{i=1}^{p} \langle \mu t_i, \mu\tau_i\rangle \circ \mu\right)\prod_{i=1}^{q} \langle \mu\theta^i, \mu\varphi^i\rangle \circ \mu \\ &= (f(\overset{-1}{\mu})^{-p} \prod_{i=1}^{p} \langle t_i, \tau_i\rangle \circ \mu)f(\overset{-1}{\mu})^{q}(\prod_{i=1}^{q} \langle \theta^i, \varphi^i\rangle \circ \mu) \\ &= f(\overset{-1}{\mu})^{-(p-q)} \langle t, \tau\rangle .\end{aligned}$$

La formule (1) étant vraie pour les tenseurs décomposables et étant additive et locale, il en résulte qu'elle est toujours vraie puisque tout tenseur est localement somme de tenseurs décomposables. (Remarquer qu'elle est trivialement vraie pour $p = q = 0$, c'est-à-dire pour les fonctions).

La formule (2) s'en déduit par dérivation, en considérant le groupe local à 1 paramètre engendré par X, on trouve alors

$$\mathfrak{L}(X) \langle t, \tau\rangle = \langle \mathfrak{L}(X)t, \tau\rangle + \langle t, \mathfrak{L}(X)\tau\rangle - (p-q)\lambda \langle t, \tau\rangle .$$

Pour déterminer λ, faisons $t = \tau = v$ (élément de volume) on trouve :

$$\mathfrak{L}(X)\langle v, v\rangle = 0 = -2\,\delta\xi \,.\, \varepsilon - m\lambda\,\varepsilon$$

d'où

$$\lambda = -\frac{2\,\delta\xi}{m},$$

d'où la formule (2).

Supposons qu'un tenseur t soit invariant par toutes les transformations conformes et qu'on ait $\langle t, t\rangle \neq 0$ en chaque point de V.

Posons $\alpha = |\langle t, t\rangle^{\frac{1}{p-q}}$. La proposition 1 donne alors

$$f(\overset{-1}{\mu})(\alpha \circ \mu) = \alpha \text{ ou encore } f(\mu)(\alpha \circ \overset{-1}{\mu}) = \alpha$$

pour toute transformation conforme μ.

D'où $$\mu(\alpha g) = (\alpha \circ \overset{-1}{\mu}) f(\mu) g = \alpha g.$$

Autrement dit la métrique αg est invariante par le groupe des transformations conformes.

Réciproquement, supposons qu'une métrique $\tilde{g}$ conforme à g soit invariante par le groupe des transformations conformes, on a bien $\langle \tilde{g}, \tilde{g}\rangle = 0$ en chaque point car $\langle \tilde{g}, \tilde{g}\rangle = \alpha^2 \langle g, g\rangle = \alpha^2 m$. D'où

COROLLAIRE 1. *Pour que le groupe de transformations conformes d'une métrique* g, *soit le groupe des isométries d'une métrique conforme* αg, *il faut et il suffit qu'il laisse invariant un tenseur de longueur non nulle partout, de type* (p, q) $(p \neq q)$.

Remarquons qu'il en va de même de tout sous-groupe du groupe des transformations conformes, c'est-à-dire que si un sous-groupe du groupe des transformations conformes laisse invariant un tenseur de longueur non nulle en chaque point $(p \neq q)$, il laisse invariant une métrique conforme à la métrique donnée.

Nous voyons également que si le tenseur invariant a une longueur constante les transformations conformes sont des isométries pour la métrique donnée.

On sait que le tenseur de courbure conforme de Weyl d'une variété de Riemann est invariant par le groupe des transformations conformes. Il en résulte que le corollaire 1 s'applique à toute variété de Riemann dont le tenseur de courbure conforme ne s'annule en aucun point car il est de type (3 , 1) . D'où

COROLLAIRE 2. *Si sur une variété de Riemann le tenseur de Weyl ne s'annule en aucun point, le groupe des transformations conformes laisse invariant une métrique conforme à la métrique donnée.*

Supposons que V soit une variété de Riemann compacte dont le groupe $K(V)$ des transformations conformes n'est pas compact, il en résulte qu'il n'existe pas de métrique invariante par $K(V)$ puisqu'on sait que le groupe des isométries d'une variété compacte est compact; donc le tenseur de Weyl possède au moins un zéro.

Si le pseudo-groupe des transformations conformes de V est transitif, on en déduit que la variété est conformément plate (localement) si $dim\ V > 3$. Si $\pi_1(V)$, groupe de Poincaré de V, est fini, on en déduit que $\tilde{V}$ est conforme à une sphère, d'après Kuiper [14]*. On peut donc énoncer

PROPOSITION 2. *Soit V une variété de Riemann compacte de dimension $m > 3$, à groupe de Poincaré fini, dont le pseudo-groupe des transformations conformes est transitif, et dont le groupe des transformations conformes est non compact, alors $\tilde{V}$, revêtement universel de V est conforme à la sphère.*

Cette proposition permet donc de classifier les variétés de Riemann compacte et simplement connexes (ou à π_1 fini), de $dim > 3$, dont le pseudo-groupe des transformations conformes est transitif, relativement à leur groupe de transformations conformes. Si $K(\tilde{V})$ est non compacte la variété simplement connexe $\tilde{V}$ est une sphère.

Si $K(V)$ est compact, alors $K(V)$ est le groupe des isométries de V, pour une métrique $\tilde{g}$, conforme à la métrique donnée, définie par

$$\tilde{g} = \int_{K(V)} (\mu g)\, d\mu$$

où $d\mu$ désigne une mesure de Haar bi-invariante sur $K(V)$, de masse

---

* N. H. KUIPER. On conformally flat spaces in the large, Ann. of Math (2) 50 (1949), pp. 916- 924.

totale 1. Comme $\mu g = f(\mu)g$ on a bien $\tilde{g} = (\int_{K(V)} f(\mu)d\mu)g$.

On peut préciser un peu mieux la classification des variétés à π_1 fini, en supposant non seulement le pseudo-groupe des transformations conformes transitif, mais le groupe $K_o(V)$ transitif sur V.

Supposons en effet $K_o(V)$ transitif sur V, soit $I(V)$ un sous-groupe compact maximal de $K_o(V)$, opérant transitivement sur V, dont l'existence est assurée par un théorème de Montgoméry [20] (1) puisque $\pi_1(V)$ est fini. Le revêtement universel $\tilde{V}$ de V est compact et conforme à la sphère, d'après ce qui précède. Notons p la projection de $\tilde{V}$ sur V, g la métrique de Riemann invariante par $I(V)$, construite à partir de la mesure de Haar de $I(V)$ et conforme à la métrique de V, p^*g la métrique qu'elle définit sur $\tilde{V}$ par image réciproque, $\tilde{g}$ la métrique de $\tilde{V}$, conforme à p^*g telle que $\tilde{V}$, muni de $\tilde{g}$ soit une sphère, dont l'existence est assurée par le théorème de Kuiper [14] (2), $I(\tilde{V}, p^*g)$ et $I(\tilde{V}, \tilde{g})$ les groupes d'isométries de $\tilde{V}$ muni respectivement des métriques p^*g et $\tilde{g}$, enfin $K(\tilde{V})$ le groupe des transformations conformes de $\tilde{V}$. $(\tilde{V}, \tilde{g})$ étant une sphère, on sait que $I(\tilde{V}, \tilde{g})$ est un sous-groupe compact maximal de $K(\tilde{V})$ et par suite, $I(\tilde{V}, p^*g)$ étant également compact, il existe $\mu \in K(\tilde{V})$ tel que $I(\tilde{V}, p^*g) \subset \mu^{-1}.I(\tilde{V}, \tilde{g}).\mu$.

Il en résulte que $\mu\tilde{g}$ est invariant par $I(\tilde{V}, p^*g)$. Or il existe une fonction f sur $\tilde{V}$ telle que $\mu\tilde{g} = fp^*g$; p^*g et fp^*g étant invariants par le groupe transitif $I(\tilde{V}, p^*g)$ on a $f = C^{te}$. Il en résulte que $(\tilde{V}, \tilde{g})$ étant une sphère, $(\tilde{V}, \mu\tilde{g})$ est aussi une sphère et de même pour $(\tilde{V}, p^*g)$. La variété (V, g) qui admet $(\tilde{V}, p^*g)$ pour revêtement est donc une variété d'Einstein. Comme $K_o(V) \neq I(V, g)$ il résulte d'un théorème de Yano-Nagano [24] (3) que (V, g) est une sphère. D'où :

THEOREME 1. *Soit V une variété de Riemann compacte, à groupe fondamental fini dont le groupe $K_o(V)$ des transformations conformes est transitif et non compact. Alors V est conforme à la sphère, si $\dim V > 3$.*

---

(1) MONTGOMERY. Simply connected homogeneous spaces. Proc. Ann. Math. Soc. 1 - 1950 p. 467 - 469.

(2) N. H. KUIPER. Loc cit. plus haut.

(3) K. YANO and T. NAGANO. On Einstein spaces admitting a one parameter group of conformal transformations. Ann. of Math. (2) 69 - (1959) p. 451 - 461.

REMARQUE. Le raisonnement précédent montre d'ailleurs que si (V, g) est une sphère, il en est de même de (V, fg) pour toute fonction strictement positive f telle que $I(V, fg)$ opère transitivement sur V. Le théorème 1 entraîne alors le corollaire suivant :

COROLLAIRE 3 (Goldberg-Kobayashi [12]). *Soit V une variété de Riemann homogène de dimension $m > 3$ telle que $K_o(V) \neq I_o(V)$. Alors V est isométrique à une sphère.*

$K_o(V)$ et $I_o(V)$ désignent les composantes connexes de l'identité de $K(V)$ et $I(V)$. $K(V)$ est transitif et l'hypothèse $K_o(V) \neq I_o(V)$ entraîne comme nous le verrons plus loin [corollaire 5] que le 1er nombre de Betti de V est nul, ce qui entraîne [12] que $\pi_1(V)$ est fini et le théorème 1 et la remarque ci-dessus entraînent alors que V muni de sa métrique initiale est isométrique à la sphère.

UN EXEMPLE DE VARIETE HOMOGENE SANS CONNEXION LINEAIRE INVARIANTE.

Supposons que V soit riemannienne compacte, simplement connexe et munie d'une connexion linéaire invariante par le groupe $K(V)$ des transformations conformes supposé non compact et transitif sur V. La courbure et la torsion de la connexion étant des tenseurs de type (3.1) et (2.1) sont donc nulles. Un repère Z_o au point $x_o \in V$ définit par transport parallèle le long d'une courbe arbitraire joignant x_o à x un repère Z au point x qui ne dépend pas de la courbe choisie, du fait de la courbure et de la simple connexité de V. Le champ θ de corepères, dual du champ $x \to Z$ de repères ainsi construit, est à dérivée covariante nulle et donc fermée à cause de la nullité de la torsion :

$$d\theta(X, Y) = (D_X\theta)(Y) - (D_Y\theta)(X) - \theta(T(X, Y)) = 0 .$$

Enfin $b_1(V) = 0$ entraîne l'existence d'une fonction $f : V \to \mathbf{R}^m$ telle que $df = \theta$, autrement dit à jacobien bijectif en chaque point, ce qui est impossible puisque V est compact (sans bord).

S^m, (pour $m \geq 2$), vérifiant les conditions voulues, est un exemple de variété homogène (relativement au groupe $K(V)$) dépourvue de connexion linéaire invariante.

Sur l'espace des tenseurs à support compact, introduisons le produit scalaire global

$$(t, t') = \int_V \langle t, t' \rangle v$$

où V est supposé de nouveau munie d'une métrique pseudo-riemannienne (non nécessairement définie positive).

Si μ est une isométrie, on a :

$$(\mu t, \mu t') = \int_V \langle \mu t, \mu t' \rangle v = \int_V(\langle t, t' \rangle \circ \mu^{-1}) v .$$

Or si φ est une fonction quelconque on a, μ étant une isométrie

$$\mu(\varphi v) = (\mu \varphi) v$$

donc

$$\int_V \varphi v = \int_V \mu(\varphi v) = \int (\mu \varphi) v .$$

Prenant ici $\langle t, t' \rangle = \varphi$ on en déduit que $(\mu t, \mu t') = (t, t')$ autrement dit le produit scalaire global $(\, , \,)$ sur l'espace des tenseurs à support compact est invariant par le groupe des isométries, d'où la proposition suivante bien connue dans le cas riemannien, en restreignant $(\, , \,)$ aux champs de Killing.

PROPOSITION 3. *1) Le groupe des isométries d'une variété pseudo-riemannienne compacte est réductif. (Il est même réductif dans le groupe des transformations conformes).*

2) L'algèbre de Lie des champs de Killing à support compact sur une variété pseudo-riemannienne est réductive. (Elle est même réductive dans l'algèbre de Lie des transformations infinitésimales conformes à support compact).

Le produit scalaire global $(\, , \,)$ n'est plus invariant si l'on considère les transformations conformes. Toutefois, si l'on se restreint à l'espace vectoriel des champs de tenseurs à support compact de type (p, q) avec $2(p - q) = m = \dim V$ (ce qui suppose $\dim V$ paire) on trouve que

$$(\mu t, \mu t') = \int_V \langle \mu t, \mu t' \rangle v = \int_V (f(\mu^{-1})^{-(p-q)} \circ \mu^{-1})(\langle t, t' \rangle \circ \mu^{-1}) v$$

et comme $f(\overset{-1}{\mu})\circ\overset{-1}{\mu} = (f(\mu))^{-1}$ et $\mu v = f(\mu)^{-\frac{m}{2}} v$ on trouve finalement $(\mu t, \mu t') = (t, t')$, en remarquant comme plus haut que si η est une m-forme quelconque sur V, à support compact,

$$\int_V \eta = \int_V \mu\eta$$

où μ désigne un difféomorphisme quelconque de V, d'où :

PROPOSITION 4. *Soit V une variété de dimension paire, $\mathfrak{T}$ l'espace des tenseurs de type (p, q) avec $2(p-q) = m$, à support compact. Alors la représentation naturelle du groupe $K(V)$ des transformations conformes de V, dans $\mathfrak{T}$ est complétement réductible.*

Soit φ une p-forme harmonique c'est-à-dire telle que $d\varphi \doteq \delta\varphi = 0$. La forme $\mu\varphi$ est encore fermée pour tout difféomorphisme μ; $*\mu\varphi$ est défini par la relation :

$$\langle \mu\varphi, \psi\rangle = \langle v, \mu\varphi\wedge\psi\rangle$$

La proposition 2 permet alors d'écrire :

$$\langle *\mu\varphi, \psi\rangle = f(\mu)^m(\langle \overset{-1}{\mu} v, \varphi\wedge\overset{-1}{\mu}\psi\rangle \circ \overset{-1}{\mu}).$$

et d'autre part :

$$\langle \mu *\varphi, \psi\rangle = f(\mu)^{m-p}(\langle *\varphi, \overset{-1}{\mu}\psi\rangle \circ \overset{-1}{\mu}) = f(\mu)^{m-p}(\langle v, \varphi\wedge\overset{-1}{\mu}\psi\rangle\circ\overset{-1}{\mu}).$$

En tenant compte de ce que $\overset{-1}{\mu} v = f(\overset{-1}{\mu})^{\frac{m}{2}} v$, on déduit

$$*\mu\varphi = f(\mu)^{p-\frac{m}{2}}\mu *\varphi.$$

D'où l'on déduit :

PROPOSITION 5. *1) Les formes harmoniques sur une variété pseudo-riémannienne quelconque sont transformés en formes harmoniques par toute homothétie.*

2) L'espace $H_{\frac{m}{2}}(V)$ des formes harmoniques de degré $\frac{m}{2}$ sur une variété de dimension paire est invariant par le groupe des transformations conformes.

3) Supposons que μ appartienne à la composante connexe de l'identité du groupe des transformations conformes, alors $\mu\varphi$ et φ

sont homologues, comme elles sont toutes deux harmoniques (dans l'hypothèse deg $\varphi = \frac{m}{2}$ *) on en déduit que* $\mu\varphi = \varphi$, *autrement dit que toute forme harmonique de degré* $\frac{m}{2}$ *est invariante par la composante connexe de l'identité du groupe* $K(V)$, *pourvu que* V *soit riemannien, compact, car c'est dans ce dernier cas seulement que le théorème de décomposition de de Rham est valable.*

Considérons maintenant des transformations infinitésimales conformes. Soit $\overline{\mathcal{L}(X)}$ le transposé de $\mathcal{L}(X)$ relativement au produit scalaire global. De même que pour les formes on a $\mathcal{L}(X) = di(X) + i(X)d$, de même on voit facilement que $\overline{\mathcal{L}(X)}\varphi = \delta(\xi \wedge \varphi) + \xi \wedge \delta\varphi$, formule qui peut servir à définir $\overline{\mathcal{L}(X)}\varphi$ que φ soit à support compact ou non.

PROPOSITION 6. *Pour tout tenseur* t *de type* (p, q) *et toute transformation infinitésimale conforme* X *on a*

$$\mathcal{L}(X)t + \overline{\mathcal{L}(X)}t = \left(1 - \frac{2(p-q)}{m}\right)\delta\xi . t .$$

Il suffit de vérifier la proposition pour les tenseurs à support compact étant donné que $\mathcal{L}(X) + \overline{\mathcal{L}(X)}$ est un opérateur local. Or si t et τ sont deux tenseurs (p, q) à support compact on a, compte tenu de la proposition 1

$$\mathcal{L}(X)[\langle t, \tau\rangle v] = [\langle \mathcal{L}(X)t, \tau\rangle + \langle t, \mathcal{L}(X)\tau\rangle + \\ + \frac{2(p-q)}{m}\langle t, \tau\rangle]v + \langle t, \tau\rangle \mathcal{L}(X)v$$

et comme $\mathcal{L}(X)v = -\delta\xi v$ et que $\int \mathcal{L}(X)[\langle t, \tau\rangle v] = 0$, on en déduit :

$$\left(\mathcal{L}(X)t + \overline{\mathcal{L}(X)}t - \left(1 - \frac{2(p-q)}{m}\right. t, \tau\right) = 0 \qquad \forall \tau$$

à support compact, d'où la proposition.

On en déduit aussitôt, en appliquant la proposition précédente aux formes le corollaire suivant :

COROLLAIRE 4. *Soit* V *une variété pseudo-riemannienne vérifiant la condition (R) suivante :*

(R) Pour toute forme différentielle ψ *à support compact il existe une suite* ψ_k *de formes différentielles à support compact admettant la*

décomposition $\psi_k = d\lambda_k + \delta\mu_k + h_k$, *où* h_k *est harmonique, telle que*

$$\lim_{k\to\infty} (\varphi, \psi_k - \psi) = 0 \qquad \forall \varphi.$$

Alors :

1) Toute forme harmonique est invariante par les homothéties infinitésimales.

2) S'il existe une forme harmonique non nulle sur V de degré $\frac{m}{2}$, *toute homothétie infinitésimale est une isométrie.*

1. En effet, si X est une homothétie infinitésimale, $\delta\xi$ est constant et par suite $\mathfrak{L}(X)\varphi = \delta\Lambda + h$. Il résulte alors de l'hypothèse (R) que $\mathfrak{L}(X)\varphi$ est orthogonal (relativement à $(\ ,\ ))$ à toute forme à support compact, donc nulle car $(\delta\Lambda + h, d\alpha) = 0$ $\forall \alpha$ et $\mathfrak{L}(X)\varphi = di(X)\varphi$ est orthogonal à $\delta\psi_k + h_k$ pour tous les ψ_k et h_k (h et h_k désignent par hypothèse des formes harmoniques).

2. Si φ, $(\deg \varphi \neq \frac{m}{2})$ est une forme harmonique non nulle et X une homothétie, on a

$$\mathfrak{L}(X)\varphi + \overline{\mathfrak{L}(X)}\varphi = \left(1 - \frac{2p}{m}\right)\delta\xi\,\varphi.$$

D'après ce qui précède $\mathfrak{L}(X)\varphi = \overline{\mathfrak{L}(X)}\varphi = 0$ donc $\delta\xi\,\varphi = 0$ c'est-à-dire $\delta\xi = 0$.

REMARQUES. Si V est une variété de Riemann compacte, (R) est vérifiée (c'est le théorème de Hodge-De Rham) et on retrouve les résultats classiques.

Si V est compacte sans être nécessairement riemannienne, on a un résultat plus fort que le *2)* du corollaire car

$$\int_V v = \int_V \mu^* v = f(\mu)^{\frac{m}{2}} \int_V v$$

donc $f(\mu) = 1$, si μ désigne une homothétie quelconque.

Si V est riemannienne non compacte les conclusions du théorème sont vraies en remplaçant forme harmonique par forme harmonique à support compacte (ou de carré intégrable), comme le montre un calcul aisé.

2. Transformations conformes de variétés riemanniennes à bord.

Dans ce paragraphe, nous supposerons que la métrique g de V est définie positive. Soit M une sous-variété ouverte de V, relativement compacte dont le bord ∂M est une sous-variété différentiable de codimension 1, compacte de V.

En tout point du bord ∂M, l'espace tangent à V est somme directe de l'espace tangent à ∂M et de son orthogonal (relativement à g), de sorte que l'espace des tenseurs sur V, se décompose en chaque point de ∂M en somme directe de l'espace des tenseurs sur ∂M et de son orthogonal relativement au prolongement canonique de g aux tenseurs.

Il en résulte que si τ désigne un tenseur en un point de ∂M, on peut écrire : $\tau = t_\tau + n_\tau$ où t_τ est un tenseur sur ∂M et $\langle t_\tau, n_\tau \rangle = 0$; t_τ (resp. n_τ) est appelée composante tangentielle (resp. composante normale) de τ.

Si $t_\tau = 0$ (resp. $n_\tau = 0$) on dit que τ est normal (resp. tangentiel). $(\, , \,)$ désignera dans la suite le produit scalaire global sur M. On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 7. *S'il existe sur M une transformation infinitésimale conforme tangentielle qui n'est pas une isométrie, toute forme harmonique tangentielle ou normale de longueur constante est nulle.*

Une forme harmonique désigne toujours une forme φ vérifiant $d\varphi = \delta\varphi = 0$ et non la condition (plus faible) $\Delta\varphi = (d\delta + \delta d)\varphi = 0$.

Soit φ une forme harmonique de longueur constante ($\langle \varphi, \varphi \rangle = Cte$); la formule de Stokes permet d'écrire, si X désigne une transformation infinitésimale conforme

$$(\mathfrak{L}(X)\varphi, \overline{\mathfrak{L}(X)}\varphi) = (di(X)\varphi, \delta(\xi \wedge \varphi)) = \int_{\partial M} i(X)\varphi \wedge * \delta(\xi \wedge \varphi) =$$

$$= -\int_{\partial M} di(X)\varphi \wedge *(\xi \wedge \varphi)$$

d'où

$$(\mathfrak{L}(X)\varphi + \overline{\mathfrak{L}(X)}\varphi, \mathfrak{L}(X)\varphi) = (\mathfrak{L}(X)\varphi, \mathfrak{L}(X)\varphi) + \int_{\partial M} i(X)\varphi \wedge * \delta(\xi \wedge \varphi).$$

Soit, compte tenu de la proposition 5 et de la proposition 1

$$(\mathfrak{L}(X)\varphi, \overline{\mathfrak{L}(X)}\varphi) = -(1-\frac{2p}{m})\frac{p}{m}\int_M(\delta\xi)^2\langle\varphi,\varphi\rangle\, v - \int_{\partial M} i(X)\varphi\wedge *\,\delta(\xi\wedge\varphi).$$

Ainsi si φ est normale, X étant tangentielle, $i(X)\varphi$ est normale; si φ est tangentielle, on a

$$\int_M i(X)\varphi\wedge *\,\delta(\xi\wedge\varphi) = -\int_{\partial M} di(X)\varphi\wedge *(\xi\wedge\varphi) = 0$$

car $\xi\wedge\varphi$ est tangentielle et par suite $*(\xi\wedge\varphi)$ est normale. Dans les deux cas on a donc

$$(\mathfrak{L}(X)\varphi, \mathfrak{L}(X)\varphi) = -(1-\frac{2p}{m})\frac{p}{m}(\delta\xi\varphi, \delta\xi\varphi).$$

La métrique étant positive on voit qu'on en déduit, si $\delta\xi \neq 0$, $\varphi = 0$ pourvu que $1-\frac{2p}{m} > 0$, $p > 0$.

Si $2\deg\varphi \geq m$, on a $2\deg(*\varphi) \leq m$ et φ étant supposé harmonique tangentielle (ou normale) $*\varphi$ est harmonique normale (ou tangentielle). Enfin $\langle\varphi,\varphi\rangle = Cte$ entraîne $\langle *\varphi, *\varphi\rangle = Cte$. D'où la proposition.

PROPOSITION 8. *Les formes harmoniques tangentielles ou normales sont invariantes par les isométries infinitésimales tangentielles.*

En effet, la proposition 6 appliquée à l'isométrie infinitésimale X permet d'écrire

$$\mathfrak{L}(X)\varphi + \overline{\mathfrak{L}(X)}\varphi = 0.$$

D'où par intégration, en supposant φ harmonique

$$\begin{aligned}(\mathfrak{L}(X)\varphi, \mathfrak{L}(X)\varphi) + (\overline{\mathfrak{L}(X)}\varphi, (\overline{\mathfrak{L}(X)}\varphi) &= -2\int_{\partial M} i(X)\varphi\wedge *\,\delta(\xi\wedge\varphi) = \\ &= 2\int_{\partial M} di(X)\varphi\wedge *(\xi\wedge\varphi) = 0\end{aligned}$$

et on conclut comme plus haut que $(\mathfrak{L}(X)\varphi, \mathfrak{L}(X)\varphi) + (\overline{\mathfrak{L}(X)}\varphi, \overline{\mathfrak{L}(X)}\varphi) = 0$ d'où la proposition.

Remarquons que dans les deux propositions qui précèdent, ce sont les transformations infinitésimales tangentielles qui interviennent, ce qui se justifie dans une certaine mesure par le fait que ce sont elles qui sont « compatibles » avec la structure de variété à bord =. On sait [1], en effet

[1] Mme J. LELONG-FERRAND. Application des méthodes de Hilbert à l'étude des transformations infinitésimales. Bull. Soc. Math. de France (1958).

que seules les transformations infinitésimales tangentielles engendrent un groupe global à un paramètre de difféomorphismes de $M \cup \partial M$.

Les transformations infinitésimales isométriques tangentielles laissant invariantes les formes harmoniques, on voit que sur une variété M pour laquelle l'espace des isométries tangentielles est transitif (c'est-à-dire que par tout vecteur tangent à M il «passe» un champ de vecteur définissant une isométrie infinitésimale tangentielle) toutes les formes harmoniques sont de longueur constante. On a en effet, à cause de la proposition 1 et de la transitivité :

$$\mathfrak{L}(X)\langle \varphi, \varphi\rangle = 2\langle \mathfrak{L}(X)\varphi, \varphi\rangle = 0 \Longrightarrow \langle \varphi, \varphi\rangle = Cte$$

Toutes les formes harmoniques tangentielles ou normales sur un tel espace sont donc nulles pourvu qu'il existe une transformation infinitésimale conforme qui ne soit pas une isométrie. Or il résulte d'un théorème de Duff-Spencer (1) que l'espace $H^p(\overline{M}, \partial M)$ de cohomologie de $\overline{M}$ relative à ∂M est isomorphe à l'espace des formes harmoniques normales de degré p. (Remarquer que nous appelons ici formes harmoniques ce que Duff et Spencer appellent champ harmonique). Autrement dit si toutes les formes harmoniques normales sont nulles on a $H^p(\overline{M}, \partial M) = 0$ et comme en vertu de la dualité de Lefschetz $\dim H^p(\overline{M}, \partial M) = \dim H^{m-p}(\overline{M})$ on a donc le

THEOREME 2. *Soit M une sous-variété de Riemann relativement compacte de V, orientable, dont le bord ∂M est une variété compacte de codimension 1, telle que l'algèbre de Lie des isométries infinitésimales tangentielles soit transitive sur M : alors on a l'une (au moins) des possibilités suivantes :*

1) $H^p(\overline{M}) = H^p(\overline{M}, \partial M) = 0$ pour $0 < p < m$

2) Toute transformation infinitésimale conforme, tangentielle est isométrique.

---

(1) DUFF et SPENCER. Harmonic tensors on Riemannian manifolds. Ann of Math 56 (1962) 128-156.

Dans le cas où la variété est sans bord $\partial M = \emptyset$ on retrouve bien entendu le résultat suivant dû à Goldberg-Kobayashi (1)

COROLLAIRE 5. *Soit M une variété de Riemann compact sans bord, homogène. Alors si $K_o(M) \neq I_o(M)$, $H_p(M) = 0$ pour $0 < p < m$.*

Nous avons vu (cor. 3) que cette proposition entraîne en fait que M est une sphère si $dim\ M > 3$.

II. Transformations conformes de variétés presque hermitiennes et presque kähleriennes.

1. Cas général.

Si V est une variété presque complexe, de tenseur $J(J^2 = -I)$; de dimension $2n$, on entend par structure presque pseudo-hermitienne sur V, la donnée, si elle existe, d'une structure pseudo-riemannienne définie par une métrique g vérifiant la relation :

$$g(Jt, Jt') = g(t, t') \text{ pour tous vecteurs } t \text{ et } t'.$$

Il résulte des considérations algébriques du chapitre I que g est nécessairement d'indice pair $2p$. Les deux tenseurs g et J déterminent une structure presque symplectique sur V définie par la 2- forme ω au moyen de la relation :

$$\omega(t, t') = g(Jt, t') \qquad \forall t \text{ et } t'.$$

Alors que sur toute variété presque complexe il existe une structure presque hermitienne (c'est-à-dire une structure presque pseudo-hermitienne dont la métrique g est définie positive), il n'est pas vrai que toute variété presque complexe puisse être munie d'une structure presque pseudo-hermitienne d'indice donné $2p$. Pour qu'une telle structure existe il faut et il suffit qu'il existe un champ différentiable de sous-espaces de dimension $2p$ des espaces tangents à la variété, invariants par J, autrement dit un sous-fibré de rang $2p$, du fibré tangent, invariant par J.
De même, étant donnée une structure presque symplectique (définie par ω)

(1) S. GOLDBERG and S. KOBAYASHI. The conformal transformation group of a compact Riemannian manifold (Amer. J. of Math. 84 (1962) 170 - 174.

sur V, pour qu'il existe une structure presque pseudo-hermitienne subordonnée, d'indice $2p$ (nécessairement pair) il faut et il suffit qu'il existe un sous-fibré E de rang $2p$ du fibré tangent, sur lequel la restriction de ω soit non dégénérée (c'est-à-dire de rang maximum). Cela résulte aisément des considérations algébriques du chapitre I en remarquant que le cas particulier $p = 0$ est classique ou ce qui revient au même que tout fibré vectoriel E muni d'une 2- forme $(\omega : \overset{2}{\Lambda} E \to \mathbf{R})$ de rang maximum, peut être muni d'une structure presque complexe compatible, à partir d'une métrique (définie positive) arbitraire sur E. (Le calcul formel est le même que dans le cas d'un espace vectoriel, traité au chapitre I).

Soit V une variété presque pseudo-hermitienne, de métrique g, de tenseur de structure presque complexe J et de 2-forme ω. Une telle variété est canoniquement orientée par ω^n et l'élément de volume défini par cette orientation et la métrique g est $\frac{\omega^n}{n!}$, comme il résulte de ce qui a été vu au chapitre I. On sait alors que pour $0 \leq p \leq n$, $\langle \omega^p, \omega^p \rangle = Cte$. On déduit immédiatement de la 2ème remarque du §I, corol. 1 le résultat suivant :

THEOREME 1. *1) Pour qu'une transformation g-conforme d'une variété presque pseudo-hermitienne soit une isométrie il faut et il suffit qu'elle conserve l'un des ω^p pour $0 < p < n$.*

2) Pour qu'une transformation conforme soit un automorphisme de la structure presque pseudo-hermitienne il faut et il suffit qu'elle conserve ω (autrement dit qu'elle soit un automorphisme de la structure presque symplectique).

Dans le cas des transformations infinitésimales on peut améliorer ce dernier résultat. En effet si une transformation infinitésimale conforme X conserve ω^p, on a $\mathfrak{L}(X)\omega^p = 0$ soit $\mathfrak{L}(X)\omega \wedge \omega^{p-1} = 0$. Or on sait (1) [17] qu'une telle relation entraîne $\mathfrak{L}(X)\omega = 0$ pourvu que $p \leq n-1$. On en déduit donc :

(1) A. LICHNEROWICZ. Théorie globale des connexions p. 218 - th. 2.

THEOREME 2. *Pour qu'une transformation infinitésimale conforme soit un automorphisme de la structure presque pseudo-hermitienne il faut et il suffit qu'elle conserve l'un des* ω^p *pour* $0 < p < n$.

Etudions maintenant les relations qui existent entre les transformations conformes et les automorphismes de la structure presque complexe. Remarquons que J étant un tenseur de type $(1, 1)$, nous ne pouvons appliquer le corollaire 2, §1, chap. III aux transformations conformes qui conservent J.

Toutefois, lorsque la structure presque complexe n'est pas intégrable, la torsion de la structure, qui est un tenseur de type $(2, 1)$ est non nulle et invariante par le groupe des transformations conformes et presque analytiques. Or si la structure presque complexe est localement homogène (ou transitive) la non intégrabilité de la structure presque complexe entraîne la non nullité de la torsion en tout point. Il en résulte que les transformations conformes et presque analytiques sont des isométries relativement à une métrique conforme à la métrique initiale. Lorsque la structure presque complexe n'est pas transitive, la non intégrabilité entraîne toutefois la non nullité de la torsion sur une sous-variété ouverte V^* de la variété V. Sur V^* il existe alors une métrique conforme à la métrique initiale qui est invariante par les transformations conformes et presque analytiques. Appelons structure presque pseudo-hermitienne conforme à une structure (g, J, ω) donnée, la structure définie par $(\alpha g, J, \alpha\omega)$ où α est une fonction strictement positive sur V, on a le résultat suivant:

THEOREME. *1) Le groupe des transformations conformes et presque analytiques d'une variété presque pseudo-hermitienne* V, *dont la structure presque complexes est non intégrable est un sous-groupe du groupe des isométries d'une sous-variété ouverte* V^* *de* V, *munie d'une structure presque pseudo-hermitienne conforme à la structure induite par celle de* V.

2) Le groupe des transformations conformes et presque analytiques d'une variété presque pseudo-hermitienne V, *dont la structure presque complexe est non intégrable et transitive est un sous-groupe du* *groupe des automorphismes d'une structure presque pseudo-hermitienne sur V, conforme à la structure initiale.*

Cette deuxième partie du théorème implique en particulier que dans le cas presque hermitien, V étant supposé compact, le groupe des transformations conformes et presque analytiques est compact lorsqu'on suppose la structure presque complexe non intégrable et transitive.

Ainsi sur la sphère S^6, la structure presque hermitienne définie par la métrique habituelle et la structure presque complexe donnée par les nombres de Cayley est homogène. Le groupe des transformations conformes et presque analytiques est donc compact. En fait içi, comme les isométries laissent la structure presque complexe invariante et opèrent transitivement on voit que le tenseur de torsion de la structure presque complexe est de longueur constante.

D'après ce qui a été vu (2ème remarque. Corol. 1, §I, chap. III) la métrique naturelle de S^6 est donc invariante par les transformations conformes et presque analytiques.

Plus généralement le raisonnement précédent permet d'énoncer :

COROLLAIRE 1. *Si V est une variété presque pseudo-hermitienne transitive (c'est-à-dire que le pseudo-groupe des automorphismes locaux est transitif) dont la structure presque complexe est non intégrable, toute transformation conforme et presque analytique est un automorphisme.*

On remarque donc ici une différence essentielle entre le cas analytique complexe et le cas presque complexe non intégrable. On peut toutefois se demander (bien que la méthode employée ne s'applique pas au cas intégrable), si la conclusion subsiste, c'est-à-dire si pour une variété hermitienne, homogène, toute transformation conforme et analytique est un automorphisme. Nous avons vu précédemment que si une variété riemannienne homogène compacte possède une transformation conforme qui ne soit pas une isométrie, c'est une sphère. Autrement dit, dans le cas hermitien homogène «compact» le problème posé est à résoudre uniquement dans le cas des sphères. Mais il reste entier dans le cas pseudo-hermitien localement homogène (ou transitif).

Remarquons seulement pour bien illustrer la différence entre le cas analytique complexe et le cas presque complexe non intégrable que $\mathbf{C}^n$ munie de sa métrique canonique est localement homogène (ou même homogène). Cependant les homothéties (réelles) sont des transformations conformes, analytiques (en ce sens qu'elles commutent avec i) et ne sont pas des isométries.

Pour toute 1- forme vectorielle (tenseur $(1,1)$) A, définissons Ag par la relation

$$(Ag)(t,t') = g(t,At') \qquad \forall\, t, t' \text{ champs de vecteurs.}$$

On peut ainsi écrire $\omega = -Jg$.

Soit μ une transformation quelconque de V, pour tous champs de vecteurs X et Y on peut écrire :

$$(\mu\omega)(X,Y) = \omega(\overset{-1}{\mu}X, \overset{-1}{\mu}Y) \circ \overset{-1}{\mu} \quad \text{et} \quad (\mu J)(Y) = \mu(J\overset{-1}{\mu}(Y))$$

d'où $(\mu\omega)(X,Y) = g(J(\overset{-1}{\mu}X), \overset{-1}{\mu}Y) \circ \overset{-1}{\mu} = (\mu g)((\mu J)(X), Y)$

Autrement dit

$$\mu\omega = -(\mu J)(\mu g). \tag{1}$$

Supposons donc que μ soit une transformation ω- conforme et g- conforme. On a alors $\mu\omega = \lambda\omega$ et $\mu g = f(\mu)g$ où λ est une fonction et $f(\mu)$ la fonction déjà introduite au §1(chap. III) et l'on sait que l'on a, avec les mêmes notations

$$\langle \mu\omega, \mu\omega \rangle \circ \overset{-1}{\mu} = f(\overset{-1}{\mu})^{-2} \langle \omega, \omega \rangle$$

d'où l'on déduit que $\lambda^2 = f(\mu)^2$. Soit $\lambda = \pm f(\mu)$ et par suite $\mu J = \pm J$. On peut remarquer directement que la relation (1) entraîne $\mu\omega = \pm f(\mu)\omega$ si $\mu g = f(\mu)g$ et $\mu J = \pm J$. D'où :

PROPOSITION 1. *Sur une variété presque pseudo-hermitienne, toute transformation ω- conforme et g- conforme est presque analytique ou presque antianalytique* (en appelant ainsi une transformation μ transformation J en son opposé). *Réciproquement toute transformation g-conforme et presque analytique ou presque antianalytique est ω- conforme.*

Si X est une transformation infinitésimale, $exp\ uX(J)$ et J sont homotopes et par suite si $exp\ uX$ est ω-conforme et g-conforme, on ne peut avoir que $exp\ uXJ = J$. Autrement dit :

PROPOSITION. *Toute transformation infinitésimale ω-conforme et g-conforme est presque analytique.*

On peut encore obtenir cette proposition en remarquant que de la relation $\mu\omega = -(\mu J)(\mu g)$ on déduit, si X est une transformation infinitésimale

$$\mathcal{L}(X)\omega + J\mathcal{L}(X)g + (\mathcal{L}(X)J)g = 0.$$

La relation (2. prop. 1) donne alors

$$2\ \langle \mathcal{L}(X)\ \omega,\omega\rangle + 2\ \frac{2}{2\,n}\ \delta\xi\ \langle \omega,\omega\rangle = 0.$$

Si X est conforme on a donc :

$$\mathcal{L}(X)\omega = -\frac{\delta\xi}{n} \text{ si } \mathcal{L}(X)g = -\frac{\delta\xi}{n}$$

d'où
$$-\frac{\delta\xi}{n}\omega + J\frac{\delta\xi}{n}g = (\mathcal{L}(X)J)g = 0$$

c'est-à-dire $\mathcal{L}(X)J = 0$.

Si ω est fermée, toute transformation ω-conforme est telle que λ est constant; en effet :

$$\mu\omega = \lambda\,\omega \text{ entraîne } d(\lambda\,\omega) = d(\mu\omega) = \mu(d\omega) = 0.$$

Comme $d\lambda \wedge \omega = 0$ entraîne $d\lambda = 0$ pourvu que $1 \leq n-1$, d'après [1] on a donc la proposition suivante, compte tenu de la proposition 2 :

PROPOSITION 3. *Sur une variété pseudo presque kählerienne i. e. $d\omega = 0$ de dimension $2n$ $(n \geq 2)$ toute transformation g-conforme et presque analytique (ou ω-conforme et g-conforme) est une homothétie.*

Dans le cas presque kählerien, c'est-à-dire si la métrique est définie positive, on sait que si la variété est complète et non localement euclidienne toute homothétie est une isométrie. D'où le corollaire :

COROLLAIRE 2. *Sur une variété presque kählerienne complète non loca-*

(1) A. LICHNEROWICZ. Loc cit. p. 218

lement euclidienne de dimension $2n$ ($n \geq 2$), *toute transformation conforme et presque analytique est un automorphisme.*

Remarquons que ce corollaire est encore valable pour toute variété presque pseudo-kählérienne *compacte*, car alors si μ est une homothétie, on a

$$\int_V \frac{\omega^n}{n!} = \int_{\mu V} \mu\left(\frac{\omega^n}{n!}\right) = f(\mu)^n \int_{\mu V = V} \frac{\omega^n}{n!} \text{ donc } f(\mu) = 1.$$

Soit X une transformation infinitésimale conforme. En posant $\mathfrak{L}(X)J = u$, nous avons :

$$\mathfrak{L}(X)\omega + J\mathfrak{L}(X)g = -ug$$

ou encore $$\mathfrak{L}(X)\omega + \frac{1}{n}\delta\xi\omega = -ug.$$

En supposant ω fermée et en désignant par C l'opérateur déjà introduit (chap. I) on peut écrire, si ξ désigne la 1-forme associée à X dans l'isomorphisme entre champs de vecteurs et formes, défini par g,

$$-dC\xi + \frac{1}{n}\delta\xi.\omega = -ug.$$

Or

$$(Cug)(t,t') = ug(Jt, Jt') = g(Jt, uJt') = -g(Jt, Jut') - ug(t,t')$$

car la relation $J^2 = -I$ entraîne $Ju + uJ = 0$. D'où, puisque $C\omega = \omega$,

$$(2) \qquad CdC\xi - \frac{2}{n}\delta\xi.\omega + dC\xi = 0.$$

On voit donc qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une transformation conforme soit presque analytique est que l'on ait :

$$dC\xi = CdC\xi.$$

Condition qui équivaut en effet à $ug = 0$.

Or, on sait (1)([17]p. 228) que si ξ désigne 1-forme et T la torsion de la structure presque complexe, on a :

$$d\xi - Cd\xi + MdC\xi = 4\xi \circ T.$$

Donc si ξ est fermée on a $MdC\xi = 4(\xi \circ T)$, or la relation $M\varphi = 0$ pour une 2-forme équivaut à $C\varphi = \varphi$ comme on le voit immédiatement :

---

(1) A. LICHNEROWICZ. Loc. cit.

$$M\varphi(X, Y) = \varphi(JX, Y) + \varphi(X, JY) = -C\varphi(X, JY) + \varphi(X, JY).$$

Autrement dit $\xi \circ T = 0$ équivaut, pour toute 1- forme fermée à $CdC\xi = dC\xi$. D'où :

PROPOSITION. *1) Une transformation infinitésimale conforme fermée est presque analytique si et seulement si* $\xi \circ T = 0$.

2) Si sur une variété presque pseudo-kählérienne le faisceau des germes de transformations infinitésimales conformes fermées et presque analytiques est transitif, la structure presque complexe est intégrable.

En effet, sous cette dernière hypothèse, on aurait $\xi \circ T = 0$ pour $2n$- formes linéairement indépendantes donc $T = 0$.

3) En supposant au contraire la structure presque complexe intégrable on voit que toute transformation conforme fermée est presque analytique. Dans le cas kälérien, notamment, toute transformation conformée fermée est donc un automorphisme pourvu que la variété soit complète et non localement euclidienne.

2. Variétés presque kälériennes à bord.

Supposons désormais que M soit une sous-variété ouverte de V, dont le bord ∂M est une sous-variété compacte de codimension 1. Nous notons, comme plus haut $\overline{M} = M \cup \partial M$, que nous supposons compact. Nous supposons enfin que la métrique est définie positive et que $d\omega = 0$.

On sait que $*\omega^p = \dfrac{p!}{(n-p)!}\,\omega^{n-p}$ pour tout entier $p \geq 0$. On en déduit alors que si ω est fermée, elle est harmonique ainsi que ω^p pour tout p. Il résulte alors de la prop. 7, §I, Ch. 3 que si $\partial M = \emptyset$, toute transformation infinitésimale conforme est une isométrie, car ω est une forme harmonique de longueur constante, non nulle. C'est le théorème de Goldberg [1].

THEOREME. *Sur une variété presque kälérienne compacte* ($\partial M = \emptyset$), *toute transformation infinitésimale conforme est une isométrie, donc un automorphisme* (car ω, forme harmonique est invariante par les isométries).

Si $\partial M \neq \emptyset$, pouvons-nous appliquer les résultats de la prop. 7, §I,

---

[1] GOLDBERG. Bull. of Amer. Math. Soc. 1960, p. 54.

chap. III ? Il faut pour cela que ω^p soit tangentielle ou normale, or si $\omega = {}^t\omega + {}^n\omega$, en désignant par ${}^t\omega$ et ${}^n\omega$ les composantes tangentielles et normales de ω, en un point du bord, on a

$$\omega^p = {}^n\omega \wedge {}^t\omega^{p-1} + {}^t\omega^p .$$

D'où l'on déduit que si ω^p est tangentielle (ou normale pour un $n > p > 0$ on aurait ${}^n\omega \wedge {}^t\omega^{p-1} = 0$ ou ${}^t\omega^p = 0$, or

$$\omega^n = {}^n\omega \wedge {}^t\omega^{n-1}.$$

On aurait donc $\omega^n = 0$, ce qui est impossible.

Finalement ω^p pour tout $n < p < 0$ n'est ni tangentielle ni normale. Soit X une transformation infinitésimale conforme, il résulte de [(1)] que l'on a

$$\delta(\xi \wedge \omega) + C^{-1} d C \xi = \omega . \delta\xi$$

ou encore puisque $dC\xi$ est de degré 2,

$$\delta(\xi \wedge \omega) + C d C \xi = \omega . \delta\xi .$$

Et compte tenu de la relation (2), §II, 1, chap. III :

$$(1 - \frac{2}{n})\omega . \delta\xi = \delta(\xi \wedge \omega) - dC\xi = \delta(\xi \wedge \omega) + \mathfrak{L}(X)\,\omega.$$

Prenons le produit scalaire global des deux membres avec $\mathfrak{L}(X)\omega = - dC\xi$ et notons

$$\| \varphi \|^2 = \int_V \langle \varphi, \varphi \rangle \; v \quad \text{pour toute } p\text{- forme } \varphi,$$

$$(1 - \frac{2}{n})(\omega . \delta\xi, \mathfrak{L}(X)\omega) = (\delta(\xi \wedge \omega), \mathfrak{L}(X)\omega) + \| \mathfrak{L}(X)\omega \|^2$$

or

$$(\mathfrak{L}(X)\omega, \omega . \delta\xi) = \int_{\overline{M}} \mathfrak{L}(X)\omega \wedge *(\omega_o \delta\xi) = \int_{\overline{M}} \delta\xi\, \mathfrak{L}(X)\omega \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} .$$

Comme on a

$$\delta\xi . \omega^n + \mathfrak{L}(X)\omega^n = 0,$$

puisque $\frac{\omega^n}{n!}$ est l'élément de volume, on en déduit

$$(\mathfrak{L}(X)\omega, \omega . \delta\xi) = - \int (\delta\xi)^2 \frac{\omega^n}{n!} = - \| \delta\xi \|^2 .$$

D'autre part, la formule de Stokes donne, si φ et ψ désignent deux formes

---

(1) A. WEIL. Variétés kähleriennes, Hermann - p. 42, th. 1.

$$(d\varphi, d\psi) = \int_{\partial M} \varphi \wedge * \delta\psi = - \int_{\partial M} d\varphi \wedge * \psi$$

d'où ici, en prenant $\xi \wedge \omega = \psi$ et $C\xi = \varphi$

$$(\mathfrak{L}(X)\omega, \delta(\xi \wedge \omega)) = -(\delta(\xi \wedge \omega), dC\xi) = - \int_{\partial M} C\xi \wedge * \delta(\xi \wedge \omega) =$$
$$= \int_{\partial M} dC\xi \wedge *(\xi \wedge \omega)$$

soit finalement

$$-(1 - \frac{2}{n}) \| \delta\xi \|^2 = \| \mathfrak{L}(X)\omega \|^2 - \int_{\partial M} \mathfrak{L}(X)\omega \wedge *(\xi \wedge \omega)$$

or

$$*(\xi \wedge \omega) = i(\xi) i(\omega) \frac{\omega^n}{n!} = i(\xi)(*\omega) = i(\xi) \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} = - C\xi \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} .$$

Il en résulte donc :

$$-(1 - \frac{2}{n}) \| \delta\xi \|^2 = \| \mathfrak{L}(X)\omega \|^2 + \int_{\partial M} \mathfrak{L}(X)\omega \wedge C\xi \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} .$$

On en déduit la proposition

PROPOSITION 5. *Pour qu'une transformation infinitésimale conforme soit un automorphisme d'une variété presque kählérienne à bord il faut et il suffit si $n \geq 2$, que l'on ait sur le bord*

$$\int_{\partial M} C\xi \wedge \mathfrak{L}(X) \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} \geq 0 .$$

Or si JX est normale au bord on a

$$C\xi(t) = g(X, Jt) = - g(JX, t) = 0 ,$$

pour t tangent au bord. Autrement dit $C\xi$ est normale et par suite

$$\int_{\partial M} C\xi \wedge \mathfrak{L}(X)\omega^{n-1} = 0 .$$

D'où le corollaire :

COROLLAIRE 3. *1) Toute transformation infinitésimale conforme dont l'image par J est normale est un automorphisme.*

2) Toute transformation infinitésimale conforme laissant la 2- forme ω invariante le long du bord est un automorphisme.

Nous savons que toute transformation infinitésimale ω-conforme et g-conforme est une homothétie. C'est-à-dire qu'on a $d\delta\xi = 0$. La formule de Stokes donne alors

$$\| \delta\xi \|^2 = (\delta\xi, \delta\xi) = (\xi, d\delta\xi) - \int_{\partial M} \delta\xi (*\xi).$$

Si ξ est tangentielle, $\int_{\partial M} \delta\xi(*\xi) = 0$ car $*\xi$ est normale, d'où

PROPOSITION 6. *Toute transformation infinitésimale conforme et presque analytique tangentielle d'une variété presque kählérienne à bord, compacte est un automorphisme.*

Lorsque la variété est kählérienne nous avons vu que les transformations conformes formées sont presque analytiques. Lorsqu'elles sont tangentielles ce sont donc des automorphismes infinitésimaux.

3. Champs de vecteurs presque analytiques de variété à bord.

Soit X une transformation infinitésimale presque analytique, c'est-à-dire telle que l'on a $\mathcal{L}(X)J = u = 0$ ou encore

$$\mathcal{L}(X)\omega + J\mathcal{L}(X)g = 0.$$

On en déduit $(\mathcal{L}(X)\omega)(t, t') = -(\mathcal{L}(X)g)(t, Jt')$ soit

$(C\mathcal{L}(X)\omega)(t, t') = \mathcal{L}(X)\omega(Jt, Jt') = (\mathcal{L}(X)g)(Jt, t') = -(\mathcal{L}(X)\omega)(t', t).$

D'où finalement $C\mathcal{L}(X)\omega = \mathcal{L}(X)\omega$.

Or on a $\delta(\xi \wedge \omega) + CdC\xi = \omega.\delta\xi$ ce qui, compte tenu de la relation ci-dessus qui entraîne :

$$CdC\xi = dC\xi,$$

donne

$$\delta(\xi \wedge \omega) = \omega.\delta\xi - dC\xi. \tag{3}$$

Par intégration sur M et tenant compte de la formule de Stokes on trouve

$$\| \mathcal{L}(X)\omega \|^2 - \| \delta\xi \|^2 = \int_M C\xi \wedge \frac{\mathcal{L}(X)\omega^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Si donc X conserve l'élément de volume on a

$$\| \mathcal{L}(X\omega) \|^2 = \int_{\partial M} C\xi \wedge \frac{\mathcal{L}(X)\omega^{n-1}}{(n-1)!}.$$

D'où le :

THEOREME 4. *Sur une variété presque kählérienne à bord compact, une transformation infinitésimale presque analytique conservant l'élément de* *de volume est un automorphisme si et seulement si*

$$\int_{\partial M} C\xi \wedge \mathfrak{L}(X)\omega^{n-1} \leq 0.$$

COROLLAIRE 4. *Toute transformation infinitésimale presque analytique conservant l'élément de volume dont l'image par J est normale est un automorphisme.*

Toute transformation infinitésimale presque analytique conservant ω le long du bord est un automorphisme : on retrouve ici, dans le cas $\partial M = \emptyset$, une généralisation d'un résultat de Lichnérowicz (1) :

THEOREME. *Toute transformation infinitésimale presque analytique d'une variété presque kählérienne compacte ($\partial M = \emptyset$) conservant l'élément de volume est un automorphisme.*

On peut d'ailleurs remarquer sur la formule (3) qu'il suffit que $\delta\xi$ soit constant (toujours sous l'hypothèse $\partial M = \emptyset$) pour que la transformation presque analytique soit un automorphisme; on aurait en effet

$$\delta(\xi \wedge \omega) = \omega . \delta\xi - dC\xi$$

où $\omega . \delta\xi$ est harmonique, $dC\xi$ exacte est $\delta(\xi \wedge\omega)$ co-exacte,ce qui entraîne $\omega\,\delta\xi = 0 = dC\xi$.

On peut encore dire que pour qu'une transformation infinitésimale presque analytique soit un automorphisme il faut et il suffit qu'elle conserve l'un des ω^p pour $0 < p \leq n$ car $\mathfrak{L}(X)\omega^p = 0$ pour $0 < p < n$ entraîne $\mathfrak{L}(X)\omega = 0$.

---

(1) A. LICHNEROWICZ. Géométrie des groupes de transformations, Dunod, p. 147.

CHAPITRE IV

DERIVATIONS DE TENSEURS

Dans ce chapitre nous étudions les dérivations de tenseurs sur une variété différentiable, étant donnée leur importance dans la plupart des questions de géométrie différentielle.

1. Dérivations d'algèbre bigraduée.

$\mathfrak{S}$ désigne une k-algèbre bigraduée où k est un anneau commutatif unitaire. On a donc la décomposition en somme directe :

$$\mathfrak{S} = \sum_{\substack{a \in \mathbf{Z} \\ b \in \mathbf{Z}}} \mathfrak{S}^{a,b}$$

avec $\mathfrak{S}^{a,b} . \mathfrak{S}^{a',b'} \subset \mathfrak{S}^{a+a',b+b'}$ où $\mathfrak{S}^{a,b}$ est un k-sous-module de $\mathfrak{S}$ pour tout (a, b). En particulier $\mathfrak{S}^{o,o}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{S}$.

DEFINITION. *Une application $D : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$ est dite dérivation (où k-dérivation pour bien préciser l'anneau k) de bidegré (a, b) si l'on a :*

1) $D(\mathfrak{S}^{r,s}) \subset \mathfrak{S}^{r+a,b+s}$.

2) $D(t, t') = Dt.t' + t.Dt'$.

3) $D \in Hom_k(\mathfrak{S}, \mathfrak{S})$.

L'espace des dérivations est muni de façon évidente d'une structure de k-module et si l'on pose $[D, D']\, t = D(D't) - D'(Dt)$, D et D' désignant deux dérivations quelconques, on constate immédiatement que $[D, D']$ est une dérivation, et par suite que sur l'espace $\mathfrak{D}_k(\mathfrak{S})$ des k-dérivations on a une structure naturelle d'algèbre de Lie bigraduée.
Si l'algèbre $\mathfrak{S}$ possède une unité, on plonge naturellement k dans $\mathfrak{S}$ et l'on vérifie que $Dk = 0$ pour toute k-dérivation D.
Si $\mathfrak{S}$ est libre (algèbriquement) avec pour base x_i, y_j, t_k où les $x_i \in \mathfrak{S}^{1,o}$ $y_j \in \mathfrak{S}^{o,1}$ et $t_k \in \mathfrak{S}^{o,o}$, soient $dx_i \in \mathfrak{S}^{1+p,q}$, $dy_j \in \mathfrak{S}^{p,q+1}$, $dt_k \in \mathfrak{S}^{p,q}$ des éléments arbitrairement choisis correspondant respectivement aux x_i, y_j et t_k; alors il existe une dérivation et une seule d de $\mathfrak{S}$ prenant pour x_i (resp. y_j, t_k) la valeur dx_i (resp. dy_j, dt_k).
En effet, tout élément $\tau \in \mathfrak{S}^{p,q}$ s'écrit d'une manière et d'une seule

comme combinaison linéaire finie (à coefficients dans k) des produits (finis) d'éléments x_i, y_j, t_k de la forme :

$$x_i y_j t_k x_\rho \dots y_\beta$$

où p éléments x_i et q éléments y_j figurent dans la suite (le nombre d'éléments t_k étant arbitraire). On posera

$$d(x_{i_1} x_{i_2} y_{j_1} t_\alpha \dots y_{j_k}) = dx_{i_1} \circ x_{i_2} \dots y_{i_k} + \dots + x_{i_1} \dots dy_{j_k}$$

formule que l'on étend par k - linéarité sur $\mathfrak{S}^{p,q}$.

On vérifie bien que d ainsi définie est une k - dérivation répondant à la question et est unique. Il existe donc sur toute algèbre bigraduée libre des dérivations de bidegré quelconque et elles s'obtiennent toutes par le procédé précédent.

2. Dérivations de tenseurs.

Soit E un fibré vectoriel localement trivial sur une variété différentiable [1] V, paracompacte, $\mathfrak{F}$ l'algèbre (sur $\mathbf{R}$) des fonctions C^∞ sur V, $E^{p,q}$ le fibré

$$\underbrace{(E \otimes .. \otimes E)}_{p} \otimes \underbrace{(E^* \otimes .. \otimes E^*)}_{q}$$

où E^* désigne le dual de E, $E^{*,*}$ le fibré somme directe des $E^{p,q}$, $\mathfrak{S}$ la $\mathfrak{F}$ - algèbre des sections C^∞ de $E^{*,*}$.

Nous nous proposons d'étudier les dérivations de $\mathfrak{S}$. Notons $\mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{S})$ (resp. $\mathfrak{D}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S})$) les $\mathbf{R}$ - dérivations (resp. les $\mathfrak{F}$ - dérivations).

On a naturellement l'inclusion $\mathfrak{D}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S}) \subset \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{S})$. Plus précisément $\mathfrak{D}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S})$ est le sous-module de $\mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{S})$ des éléments nuls sur $\mathfrak{F}$, comme on le voit immédiatement.

Remarquons d'abord que V étant paracompacte, toute dérivation de $\mathfrak{S}$ possède le caractère local. C'est-à-dire que si $t \in \mathfrak{S}$ et U est un ouvert de V, alors $t \mid U = 0$ entraîne $Dt \mid U = 0$ pour toute dérivation D. Soit en effet $x \in U$. Il existe une fonction C^∞ telle que $f(x) = 0$ et $f = 1$ en dehors de U. Donc si $t \mid U = 0$, on a $t = ft$. D'où :

---

[1] différentiable signifie toujours indéfiniment différentiable.

$$(Dt)(x) = D(ft)(x) = Df(x).t(x) + f(x).Dt(x) = 0.$$

Il en résulte que pour tout $t \in \mathfrak{S}$, $Dt \mid U$ ne dépend que des valeurs de t dans U.

On voit donc que toute dérivation D de $\mathfrak{S}$ définit naturellement une dérivation du faisceau des germes de sections du fibré $E^{*,*}$. La réciproque étant trivialement vraie, nous voyons qu'il n'y a pas de distinction à faire entre les points de vue «germes de sections» et «sections».

Nous avons le théorème suivant :

THEOREME.

1) $\mathfrak{D}^{p,q}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{D}^{p,q}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{S})$ *pour* $(p, q) \neq (0,0)$

2) La suite de $\mathfrak{F}$*-modules*

$$0 \to \mathfrak{D}^{o,o}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S}) \to \mathfrak{D}^{o,o}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{S}) \to \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{F}) \to 0$$

est exacte, (où $\mathfrak{D}^{p,q}(\mathfrak{S})$ *désigne l'ensemble des* k*-dérivations de bidegré* (p, q)*, (pour* $k = \mathfrak{F}$ *ou* $\mathbf{R}$*) et* $\mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{F})$ *désigne le* $\mathfrak{F}$*-module des dérivations de* $\mathfrak{F}$*, c'est-à-dire des champs de vecteurs sur* V*).*

La première partie du théorème exprime que toute dérivation de bidegré non nul est triviale sur $\mathfrak{F}$. En effet, soit D une telle dérivation, on a $t.f = ft$, si $f \in \mathfrak{F}$, $t \in \mathfrak{S}$. D'où :

$$Dt.f + tD(f) = D(f).t + f.Dt.$$

D'où $t.Df = Df.t$ égalité qui n'a lieu si $t \notin \mathfrak{F}$ que si $Df \in \mathfrak{F}$. Si donc D est de bidegré $(p, q) \neq (0,0)$ on a nécessairement $Df = 0$ ce qui entraîne que $D(ft) = fDt \quad \forall t \in \mathfrak{S}$, c'est-à-dire $D \in \mathfrak{D}^{p,q}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S})$.

Pour démontrer la deuxième partie du théorème, remarquons que l'on a déjà la suite exacte :

$$0 \to \mathfrak{D}^{o,o}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S}) \to \mathfrak{D}^{o,o}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{S}) \to \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{F}).$$

Il suffit donc de voir qu'à tout champ de vecteur sur V, $X \in \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{F})$, on peut associer naturellement une dérivation $\nabla_X \in \mathfrak{D}^{o,o}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{S})$ telle que $\nabla_X f = X.f$ pour $f \in \mathfrak{F}$.

Or on sait que sur un fibré vectoriel localement trivial E il existe une connexion c'est-à-dire précisément une application :

$$\nabla : \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{F}) \to Hom_{\mathbf{R}}(\mathcal{E}^{1,o}, \mathcal{E}^{1,o})$$

telle que l'on ait de plus

$$\nabla_X(ft) = (X.f)t + f\nabla_X t \text{ pour } t \in \mathcal{E}^{1,o}.$$

Pour $\varphi \in \mathcal{E}^{o,1}$ définissons $\nabla_X \varphi$ par la relation

$$(\nabla_X \varphi)(t) = X \circ \varphi(t) - \varphi(\nabla_X t)$$

et pour $\tau \in \mathcal{E}^{p,q}$, que nous identifions à une application $\mathfrak{F}$-multilinéaire de

$$\underbrace{\mathcal{E}^{o,1} \times \ldots \times \mathcal{E}^{o,1}}_{p} \times \underbrace{\mathcal{E}^{1,o} \times \ldots \times \mathcal{E}^{1,o}}_{q}$$

dans $\mathfrak{F}$, posons

$$\begin{aligned}(\nabla_X \tau)(\varphi_1, \ldots, \varphi_p; t_1, \ldots, t_q) &= X.\tau(\varphi_1, \ldots, t_q)\\ &- \sum_{i=1}^{p} \tau(\varphi_1, \ldots, \nabla_X \varphi_i, \ldots, \varphi_p; t_1, \ldots, t_q)\\ &- \sum_{i=1}^{q} \tau(\varphi_1, \ldots, \varphi_p; t_1, \ldots, \nabla_X t_i, \ldots, t_q)\end{aligned}$$

$\nabla_X \tau$ ainsi défini est une dérivation de bidegré $(0,0)$ (vérification immédiate). En posant enfin $\nabla_X f = X.f$, on a défini finalement une dérivation de bidegré $(0,0)$ qui prolonge $X \in \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{F})$. L'application $\nabla : \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{F}) \to \mathfrak{D}^{o,o}(\mathcal{E})$ étant d'ailleurs $\mathfrak{F}$-linéaire on voit que la suite exacte du théorème est en fait scindée, par la donnée d'une E-connexion.

Dans le cas particulier où $E = T(V)$, fibré tangent à V, il existe une autre manière (canonique) d'associer à chaque $X \in \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{F})$ une dérivation de $\mathcal{E}$. C'est la dérivation de Lie : l'application $\theta : \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{F}) \to \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}^{o,o}(\mathcal{E})$ que l'on obtient ainsi est comme on sait $\mathbf{R}$-linéaire mais n'est pas $\mathfrak{F}$-linéaire. Elle permet toutefois de dire, sans utiliser une connexion que la suite considérée plus haut est exacte.

Le théorème nous montre que les seules dérivations sur $\mathcal{E}$ qui ne sont pas «purement algébriques» sont de bidegré $(0,0)$. Les autres ne font pas intervenir la structure différentiable de V.

Les dérivations de $\mathcal{E}$ de bidegré $(p,q) \neq (0,0)$ s'identifient à la somme directe

$$Hom_{\mathfrak{F}}(\mathcal{E}^{1,o}, \mathcal{E}^{p,q}) \oplus Hom_{\mathfrak{F}}(\mathcal{E}^{o,1}, \mathcal{E}^{p,q}).$$

Soient en effet $A : \mathcal{E}^{1,o} \to \mathcal{E}^{p,q}$ et $B : \mathcal{E}^{o,1} \to \mathcal{E}^{p,q}$ deux applications $\mathcal{F}$-linéaires. Si τ est un tenseur de $\mathcal{E}^{a,b}$, on peut écrire pour un ouvert convenable U de V,

$$\tau \mid U = \tau^{i_1 \dots i_a}_{j_1 \dots j_b} t_{i_1} \otimes \dots \otimes t_{i_a} \otimes \varphi^{j_1} \otimes \dots \otimes \varphi^{j_b}$$

pour une base (t_i) de $\mathcal{E}^{1,o}$ et (φ^j) de $\mathcal{E}^{o,1}$. On définit alors

$$d(t_I \otimes \varphi_J) = A\, t_{i_1} \otimes t_{i_2} \otimes \dots \otimes \varphi^{j_b} + \dots + t_{i_1} \otimes \dots \otimes B\, \varphi^{j_b}$$

$$\text{où } t_I = t_{i_1} \otimes \dots \otimes t_{i_a} \qquad \varphi_J = \varphi^{j_1} \dots \varphi^{j_b}.$$

On vérifie qu'à cause du caractère $\mathcal{F}$- linéaire de A et B, $d\tau$ ainsi défini ne dépend pas des bases locales choisies et par suite définit une dérivation de $\mathcal{E}$. On peut considérer parmi les dérivations précédentes, celles pour lesquelles B est défini à partir de A par transport de structure, puisque $\mathcal{E}^{1,o} = (\mathcal{E}^{o,1})^*$. $\mathfrak{D}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E})$ est ainsi identifié aux sections d'un fibré vectoriel, plus précisément $\mathfrak{D}^{p,q}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E})$ s'identifie aux sections du fibré $E^{p,q+1} \otimes E^{p+1,q}$. Existe-t-il des opérateurs cohomologiques parmi les dérivations de $\mathcal{E}$? Soit D une telle dérivation, de carré $D^2 = 0$; on a alors :

$$D(t \otimes t') = Dt \otimes t' + t \otimes Dt'.$$

D'où $D^2(t \otimes t') = 0 = D^2 t \otimes t' + 2\, Dt \otimes Dt' + t \otimes D^2 t' = 2\, Dt \otimes Dt'$

ce qui n'est possible que si $Dt = 0$.

Nous voyons donc que toute dérivation de carré nul est triviale.

L'algèbre tensorielle possède deux quotients importants, l'algèbre symétrique et l'algèbre extérieure dont nous allons étudier les dérivations.

3. Dérivations de l'algèbre symétrique.

E étant toujours un fibré vectoriel localement trivial sur V, notons Φ l'algèbre des tenseurs covariants symétriques sur E, c'est-à-dire la $\mathcal{F}$-algèbre des applications multilinéaires symétriques de $\mathcal{E}^{1,o}$ dans $\mathcal{F}$. Tout élément $\varphi \in \Phi$ s'identifie comme on le sait à un tenseur symétrique et si ψ (resp. φ) est le symétrisé d'un tenseur t (resp. t') on a, pour la loi d'algèbre sur Φ, $\varphi . \psi =$ le symétrisé de $t \otimes t'$. D'où l'on déduit facilement que si ∇ est une connexion sur E, X un champ de vecteur sur V

$$\nabla_X(\varphi\circ\psi) = \nabla_X\varphi\circ\psi + \varphi\circ\nabla_X\psi .$$

Ces préliminaires étant remarqués, nous avons le théorème :

THEOREME. *Soient* $D^p_{\mathbf{R}}\Phi$ *(resp.* $\mathfrak{D}^p_{\mathcal{F}}\Phi$*) le* $\mathcal{F}$*-module des* **R***-dérivations « de degré* p *» (resp. des* $\mathcal{F}$*-dérivations) de* Φ, $\mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathcal{F},\Phi^p)$ *le* $\mathcal{F}$*-module des applications* D *de* $\mathcal{F}$ *dans* Φ^p *vérifiant* $D(fg) = g\cdot Df + f.Dg$. *Alors on a la suite exacte :*

$$0 \to \mathfrak{D}^p_{\mathcal{F}}(\Phi) \to \mathfrak{D}^p_{\mathbf{R}}(\Phi) \to \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathcal{F},\ \Phi^p) \to 0.$$

Remarquons que Φ est simplement une algèbre graduée et que les dérivations de Φ sont munies d'un degré et non d'un bidegré. Nous avons d'abord le :

LEMME. $\mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathcal{F},\Phi^p)$ *est isomorphe au* $\mathcal{F}$*-module des applications* p*-linéaires symétriques de* $\mathcal{E}^{1,0}$ *dans* $\mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathcal{F})$.

En effet si $D \in \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathcal{F},\Phi^p)$, $t_1,\dots,t_p \in \mathcal{E}^{1,0}$, l'application $f \to Df(t_1,\dots,t_p)$ est une dérivation de $\mathcal{F}$ de degré 0, c'est-à-dire un champ de vecteur sur V. En effet

$$D(fg)(t_1,\dots,t_p) = fDg(t_1,\dots,t_p) + gDf(t_1,\dots,t_p).$$

Autrement dit il existe une application p-linéaire de $\mathcal{E}^{1,0}$ dans $\mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathcal{F})$, soit X, telle que $X(t_1,\dots,t_p)f = Df(t_1,\dots,t_p)$.
Comme $Df \in \Phi^p$, X est symétrique. Réciproquement, si X est une application p-linéaire symétrique de $\mathcal{E}^{1,0}$ dans $\mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathcal{F})$, la relation ci-dessus définit $D \in \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathcal{F},\Phi^p)$.
Soit ∇ une connexion dans E, $D \in \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathcal{F},\Phi^p)$, nous allons définir une dérivation (notée encore D) de degré p, de Φ, dont la restriction à $\mathcal{F}$ est D.
Si $\varphi \in \Phi^1$ nous définissons $D\varphi \in \Phi^{p+1}$ comme étant le symétrisé de l'application $p+1$-linéaire $(t_1,\dots,t_{p+1}) \to (\nabla_{X(t_1,\dots,t_p)}\varphi)(t_{p+1})$ où X est l'application p-linéaire symétrique de $\mathcal{E}^{1,0}$ dans $\mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathcal{F})$ associée à $D \in \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathcal{F},\Phi^p)$.

On vérifie facilement que $D(f\varphi) = Df.\varphi + fD\varphi$ si $f \in \mathcal{F}$.

Si $\varphi \in \Phi^p$, U est un voisinage muni d'une base locale $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ on a

$$\varphi = \varphi^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \varphi_{\alpha_1} . \varphi_{\alpha_2} \dots \varphi_{\alpha_p} \text{ (sur } U\text{)}.$$

On définit alors

$$D\varphi = D\varphi^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \varphi_{\alpha_1} \dots \varphi_{\alpha_p} + \dots + \varphi^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \varphi_{\alpha_1} . \varphi_{\alpha_2} \dots D\varphi_{\alpha_p} \quad \text{(sur } U\text{)}$$

où $\varphi^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \in \mathcal{F} \mid U$, $\varphi_{\alpha_k} \in \mathcal{E}^{1,0} \mid U$.

Du fait que Φ *est commutative*, on vérifie que cette définition ne dépend pas de la base choisie et par récurrence que

$$D(\varphi.\psi) = D\varphi.\psi + \varphi.D\psi .$$

Autrement dit à tout élément $D \in \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathcal{F}, \Phi^p)$ la connexion associe une dérivation qui coïncide sur $\mathcal{F}$ avec D. La suite du théorème est non seulement exacte mais scindée. (On remarque trivialement que toute $\mathcal{F}$ - dérivation définit une $\mathbf{R}$ - dérivation nulle sur les fonctions).

La classification des dérivations de Φ se complète en remarquant que $\mathfrak{D}^p_{\mathcal{F}}(\Phi)$ s'identifie aux applications de Φ^1 dans Φ^{p+1} qui sont $\mathcal{F}$ - linéaires. Comme pour les dérivations de tenseurs quelconques on voit facilement que

$$D^p_{\mathcal{F}}(\Phi) \simeq Hom_{\mathcal{F}}(\Phi^1, \Phi^{p+1}) \simeq \Phi^{p+1} \otimes \mathcal{E}^{1,0}.$$

On voit encore ici qu'il n'existe pas d'opérateur cohomologique non nul, du fait que $(\tau \in \Phi,\ \tau^2 = 0)$ entraîne $\tau = 0$.

Si $E = T(V)$, on peut remarquer que la donnée d'une connexion linéaire permet non seulement d'associer à tout élément $D \in \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathcal{F}, \Phi^p)$ une dérivation qui le prolonge, mais même de déterminer une dérivation de degré *1*.

Si $\varphi \in \Phi^1$, posons

$$(D\varphi)(t_1, t_2) = (\nabla_{t_1}\varphi)(t_2) + (\nabla_{t_2}\varphi)(t_1)$$

et si $f \in \mathcal{F}$: $Df(t) = t.f$.

On vérifie que l'on a ainsi une application $D : \Phi^1 \to \Phi^2$ telle que

$$D(f\varphi) = (Df).\varphi + fD\varphi$$

que l'on peut donc prolonger comme plus haut en une dérivation de Φ de degré $+1$. Nous disons que D est induit par la connexion ∇.
Réciproquement, toute dérivation de degré 1 est-elle induite ainsi par une connexion linéaire ?

On voit d'abord que pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire que l'on ait :

$$Df(t) = t.f,$$

autrement dit que $Df = df$ où d désigne la dérivée extérieure. Supposons donc que D vérifie la condition $Df = df$. Posons pour tout $\varphi \in \Phi^1$:

$$(\nabla_t \varphi)(u) = \tfrac{1}{2}[D\varphi(t, u) + d\varphi(t, u)]$$

en désignant par $d\varphi$ la dérivée extérieure de la 1-forme φ, ce qui a un sens puisque $E = T(V)$. On vérifie alors facilement que

$$\nabla_t(f\varphi) = (t.f)\varphi + f\nabla_t\varphi$$

autrement dit que $t \to \nabla_t\varphi$ est une dérivation covariante, ce qui définit donc, comme on le sait, une connexion linéaire d'où :

THEOREME. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une dérivation D de degré 1 de Φ, soit induite par une connexion linéaire est que $Df = df$ pour $f \in \mathfrak{F}$.*

La méthode ci-dessus permet également de déterminer les connexions linéaires ∇ dont on s'est donné les valeurs $\nabla_X X$, pourvu que l'on ait

$$\nabla_{fX} fX = f(X.f)\,X + f^2\,\nabla_X X,$$

question liée à la recherche des connexions ayant les géodésiques données.

4. Antidérivations de l'algèbre extérieure.

E désigne toujours un fibré vectoriel localement trivial sur V. Ψ désigne la $\mathfrak{F}$-algèbre des applications multilinéaires alternées de $\mathcal{E}^{1,0}$ dans $\mathfrak{F}$. Comme il est immédiat que toute dérivation $D : \Psi \to \Psi$ de degré impair est nulle. nous étudions ici les applications $\mathbf{R}$-linéaires $D : \Psi \to \Psi$

vérifiant

1) $D\Psi^p \subset \Psi^{p+q}$ *2)* $D(\psi_1 \wedge \psi_2) = D\psi_1 \wedge \psi_2 + (-1)^{q \deg \psi_1} \psi_1 \wedge D\psi_2$

que nous appelons antidérivations, étant entendu que si q est pair, une antidérivation est automatiquement une dérivation. Nous étudions donc les opérateurs non triviaux, antidérivation lorsque le degré est impair, dériva- lorsque le degré est pair. Dans le cas $E = T(V)$, les anti-dérivations ont été entièrement classifiées par Nijenhuis et Frölicher sous le nom de dérivations [10]. En ce qui concerne le cas général d'un fibré E quelconque nous avons le :

THEOREME. *Soient* $\mathfrak{D}^p_{\mathbf{R}}(\Psi)$ *(resp.* $\mathfrak{D}^p_{\mathcal{F}}(\Psi)$*) le* $\mathcal{F}$*-module des* $\mathbf{R}$*-antidérivations (resp.* $\mathcal{F}$*-antidérivations) de* Ψ, $\mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathcal{F}, \Psi^p)$ *le* $\mathcal{F}$*-module des applications* D *de* $\mathcal{F}$ *dans* Ψ^p *vérifiant*

$$D(fg) = gDf + fDg.$$

Alors la suite

$$0 \to \mathfrak{D}^p_{\mathcal{F}}(\Psi) \to \mathfrak{D}^p_{\mathbf{R}}(\Psi) \to \mathfrak{D}^p_{\mathbf{R}}(\mathcal{F}, \Psi^p) \to 0$$

est exacte.

Nous avons d'abord, comme dans le cas de l'algèbre symétrique Φ, le lemme suivant :

LEMME. $\mathfrak{D}^p_{\mathbf{R}}(\mathcal{F}, \Psi^p) \simeq \Psi^p \otimes_{\mathcal{F}} \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$*-module des applications* p*-linéaires alternées de* $\mathcal{E}^{1,0}$ *dans* $\mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathcal{F})$.

La démonstration est exactement la même que dans le cas de Φ, algèbre symétrique (voir § 3).

Soit ∇ une connexion dans E, $D \in \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathcal{F}, \Psi^p)$. Si $\varphi \in \Psi^1$, définissons $D\varphi$ comme étant l'antisymétrisée de l'application $(p+1)$-linéaire

$$(t_1, \ldots, t_{p+1}) \to (\nabla_{X(t_1, \ldots, t_p)}(t_{p+1})$$

où X est l'application p-linéaire alternée de $\mathcal{E}^{1,0}$ dans $\mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathcal{F})$ associée à $D \in \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathcal{F}, \Psi^p)$ par l'isomorphisme du lemme.

On vérifie facilement que si $f \in \mathcal{F}$, $D(f\varphi) = Df \wedge \varphi + fD\varphi$ ce qui permet, si $\varphi \in \Psi^q$ de définir $D\varphi$ au moyen d'une base locale définie dans un voisinage de coordonnées locales :

$$\varphi = \varphi^{\alpha_1 \dots \alpha_q} \varphi_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{\alpha_q}$$

d'où

$$D\varphi = D\varphi^{\alpha_1 \dots \alpha_q} \varphi_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{\alpha_q} + \sum_{i=1}^{q} \varphi^{\alpha_1 \dots \alpha_q} \varphi_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge (-1)^{pi} D\varphi_{\alpha_i} \wedge \dots \wedge \varphi_{\alpha_q}$$

On vérifie que, du fait que Ψ est anticommutative, cette définition ne dépend pas de la base locale choisie, et par récurrence que si $\varphi \in \Psi^q$, $\psi \in \Psi^r$, on a

$$D(\varphi \wedge \psi) = D\varphi \wedge \psi + (-1)^{qp} \varphi \wedge D\psi .$$

Enfin la restriction de D à $\mathfrak{F}$ est l'élément dont on est parti, autrement dit la connexion ∇ permet de scinder la suite du théorème qui est donc exacte (on remarque trivialement que $\mathfrak{D}_{\mathfrak{F}}(\Psi) \to \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\Psi)$ est injective).

La classification des dérivations est achevée si l'on remarque en plus que

$$\mathfrak{D}^p_{\mathfrak{F}}(\Psi) \simeq Hom_{\mathfrak{F}}(\Psi^1, \Psi^{p+1}) \simeq \Psi^{p+1} \otimes \mathcal{E}^{1,0} .$$

OPERATEUR COHOMOLOGIQUE.

Supposons que D soit une antidérivation de carré nul, on peut alors écrire

$$0 = D^2(\varphi \wedge \psi) = D(D\varphi \wedge \psi + (-1)^p \varphi \wedge D\psi) = D\varphi \wedge D\psi + (-1)^{p^2} D\varphi \wedge D\psi$$

pour φ et $\psi \in \Psi^1$.

Si f et $g \in \mathfrak{F}$ on a

$$0 = D^2(fg) = D(Dfg + fDg) = (-1)^{p^2} Df \wedge Dg + Df \wedge Dg = 0 .$$

Enfin, pour $f \in \mathfrak{F}$ et $\varphi \in \Psi^1$

$$0 = D^2(f\varphi) = D(Df \wedge \varphi + fD\varphi) = (-1)^{p^2} Df \wedge D\varphi + Df \wedge D\varphi .$$

Autrement dit, pour qu'une antidérivation soit un opérateur cohomologique il faut que l'on ait, en désignant par p son degré

Si p est pair : $D^2 f = D^2 \varphi = 0$, $Df \wedge D\varphi = D\varphi \wedge D\psi = Df \wedge Dg = 0$

pour $f \in \mathfrak{F}$, $\varphi \in \Psi^1$, $\psi \in \Psi^1$

Si p est impair : $D^2 f = D^2 \varphi = 0$.

Ces conditions sont de plus suffisantes puisque Ψ est localement engendré par Ψ^1 et $\mathfrak{F}$ et que les antidérivations sont des opérateurs locaux.

Du fait que $\Psi^{n+1} = 0$ si le rang de E est n, on voit qu'il existe trivialement des opérateurs de carré nul; il suffit que le degré de D soit supérieur à $\frac{n}{2}$.

Dans le cas p pair, les conditions $Df \wedge D\varphi = D\varphi \wedge D\psi = Df \wedge Dg = 0$ entrainent l'existence d'une forme $\omega \in \Psi$, pour chaque dérivation de degré $p > 0$ telle que $Df = \omega \wedge \omega_f$, $D\varphi = \omega \wedge \omega_\varphi$. Du fait que D est une dérivation, on déduit aussitôt que $f \to \omega_f$ est une application vérifiant $\omega_{fg} = (\omega_f) g + f\omega_g$ et que $\varphi \to \omega_\varphi$ vérifie $\omega_{f\varphi} = (\omega_f) \wedge \varphi + f\omega_\varphi$, autrement dit qu'il existe une antidérivation (de degré $p-1$) δ telle que $\delta f = \omega_f$, $\delta\varphi = \omega_\varphi$. Réciproquement il est immédiat que si δ est une antidérivation de degré impair, $f \to Df = \omega \wedge \delta f$ et $\varphi \to \omega \wedge \delta\varphi$ définissent pour ω donné, une dérivation de degré pair et de carré nul si $\omega \wedge \delta\omega = 0$. Enfin pour $p = 0$, on voit aisément que les conditions

$$Df \wedge D\varphi = D\varphi \wedge D\psi = Df \wedge Dg = 0$$

entraînent $Df = D\varphi = 0$ pour toute fonction $f \in \mathfrak{F}$ et tout $\varphi \in \Psi$.

Autrement dit toute dérivation de degré nul, de carré nul, est nulle. On peut résumer :

THEOREME. *1) Pour qu'une antidérivation de degré impair soit de carré nul il faut et il suffit que* $D^2 f = D^2 \varphi = 0$ *pour* $f \in \mathfrak{F}$ *et* $\varphi \in \Psi^1$.

2) Toute antidérivation de degré nul et carré nul est nulle. Les antidérivations de degré pair ($\neq 0$) *de carré nul sont de la forme* $f \to \omega \wedge \delta f$ *et* $\varphi \to \omega \wedge \delta\varphi$ *où* δ *est une antidérivation de degré impair et* ω *un élément de* Ψ^1 *donné tel que* $\omega \wedge \delta\omega = 0$.

Considérons le cas particulier $E = T(V)$. Comme pour Φ, il est immédiat que la donnée d'une connexion linéaire détermine canoniquement une antidérivation D de degré $+1$ dans Ψ et telle que $Df = df$. Réciproquement, soit D une antidérivation de degré $+1$ dont la restriction à f est égale à la différentielle df. On en déduit qu'il existe une 2-forme antisymétrique $T(X, Y)$ telle que $D\varphi - d\varphi = \varphi \circ T$ pour toute 1-forme. Or on sait qu'il existe toujours une connexion linéaire ayant une torsion donnée. Si δ

est l'antidérivation dans Ψ, définie par cette connexion, on a $\delta\varphi = D\varphi$ donc $D = \delta$ puisque $\mathfrak{F}$ et Ψ^1 engendrent localement Ψ. D'où

THEOREME. *Pour qu'une antidérivation D de degré $+1$ soit induite par une connexion linéaire il faut et il suffit que $Df = df$ pour toute fonction $f \in \mathfrak{F}$.*

5. Pseudo-dérivations de $\mathfrak{E}$.

Parmi les opérateurs différentiels d'ordre *1* dans $\mathfrak{E}$ (avec les notations du début de ce chapitre), nous avons vu que l'espace des dérivations est assez pauvre puisqu'en particulier toute dérivation de bidegré $(p,q) \neq (0,0)$ est $\mathfrak{F}$-linéaire.

Appelons pseudo-dérivation de $\mathfrak{E}$, de bidegré (p,q) tout opérateur $D : \mathfrak{E} \to \mathfrak{E}$ vérifiant les égalités

$$D(\mathfrak{E}^{a,b}) \subset \mathfrak{E}^{a+p,b+q}$$

$$D(ft) = Df \otimes t + fDt \quad \text{pour } f \in \mathfrak{F},\ t \in \mathfrak{E}.$$

En particulier une dérivation est une pseudo-dérivation et il est immédiat que toute pseudo-dérivation est un opérateur différentiel en ce sens qu'elle possède le caractère local $(t \mid U = 0 \Longrightarrow Dt \mid U = 0$ si U est un ouvert de $V)$. Toute pseudo-dérivation donne par restriction à $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}^{o,o}$ une application $\mathbf{R}$-linéaire D de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{E}^{p,q}$ vérifiant la relation :

$$D(fg) = Df.g + fDg.$$

Notons $\mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{F},\mathfrak{E}^{p,q})$ le $\mathfrak{F}$-module de telles applications. Nous avons alors

THEOREME. *La suite*

$$0 \to Hom^{p,q}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{E}) \to \mathfrak{P}^{p,q}(\mathfrak{E}) \to \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{F},\mathfrak{E}^{p,q}) \to 0$$

est exacte.

où $Hom^{p,q}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{E})$ désigne le $\mathfrak{F}$-module des éléments de $Hom_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{E},\mathfrak{E})$ de bidegré (p,q) et $\mathfrak{P}^{p,q}(\mathfrak{E})$ le $\mathfrak{F}$-module des pseudo-dérivations de $\mathfrak{E}$ de bidegré p,q. Comme aux paragraphes précédents, on démontre aisément le

LEMME.

$$\mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{F},\mathfrak{E}^{p,q}) \simeq Hom_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{E}^{q,p},\mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{F})) = \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{F}) \otimes_{\mathfrak{F}} \mathfrak{E}^{p,q}$$

en remarquant que le dual (sur $\mathfrak{F}$) de $\mathfrak{S}^{q,p}$ est $\mathfrak{S}^{p,q}$.
Une connexion ∇, dans E, étant alors donnée, il s'agit de définir, pour tout $D \in \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{S}^{p,q})$ une pseudo-dérivation de $\mathfrak{S}$ dont la restriction à $\mathfrak{F}$ est D.

Soit $X \in Hom_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S}^{q,p}, \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{F}))$ l'élément associé à D au moyen du lemme, $t \in \mathfrak{S}^{a,b}$, appelons Dt l'application de $\mathfrak{S}^{q,p}$ dans $\mathfrak{S}^{a,b}$ définie par

$$Dt(\tau) = \nabla_{X(\tau)} t \quad \text{pour } \tau \in \mathfrak{S}^{q,p}.$$

Il est clair que $Dt \in Hom_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S}^{q,p}, \mathfrak{S}^{a,b}) \simeq \mathfrak{S}^{a+p,b+q}$. Si $f \in \mathfrak{F}$ on a

$$\begin{aligned} D(ft)(\tau) &= (\nabla_{X(\tau)} f)t + f\nabla_{X(\tau)} t \\ &= Df(\tau).t + fDt(\tau) = (Df \otimes t + fDt)(\tau). \end{aligned}$$

Soit $D(ft) = Df \otimes t + fDt$.
Autrement dit l'application D ainsi définie sur $\mathfrak{S}$ est une pseudo-dérivation qui prolonge bien l'élément $D \in \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{S}^{p,q})$ donné.
Finalement comme $Hom_{\mathfrak{F}}^{p,q}(\mathfrak{S}) \to \mathfrak{P}^{p,q}(\mathfrak{S})$ est injectif et que toute pseudo-dérivation nulle sur $\mathfrak{F}$ est un élément de $Hom_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S}, \mathfrak{S})$, le théorème est établi.
On voit que par le procédé précédent les éléments de $\mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{S}^{0,0})$ donnent en fait des dérivations (de bidegré $(0,0)$), tandis que si $(p,q) \neq (0,0)$ on n'obtient pas des dérivations.
Lorsque l'on se restreint aux tenseurs covariants symétriques (resp. antisymétriques) les pseudo-dérivations de bidegré $(0,q)$ donnent par symétrisation (resp. antisymétrisation) les dérivations de Φ (resp. antidérivations de Ψ). Dans le cas particulier $E = T(V)$, toute connexion définit canoniquement une pseudo-dérivation de bidegré $(0,1)$ dont la restriction à $\mathfrak{F}$ est égale à la différentielle extérieure d. La réciproque est ici immédiate; toute dérivation D de $\mathfrak{S}$ de bidegré $(0,1)$ dont la restriction à $\mathfrak{F}$ est égale à d définit une connexion linéaire ∇ par la relation :

$$\nabla_X t = Dt(X) \qquad \forall\, t \in \mathfrak{S}.$$

DEFINITION. *Appelons connexion de bidegré* (p,q) *toute scission de la* *suite exacte :*

$$0 \to Hom^{p,q}(\mathcal{E}) \to \mathcal{P}^{p,q}(\mathcal{E}) \to \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathcal{F}, \mathcal{E}^{p,q}) \to 0.$$

Nous voyons qu'une connexion de bidegré $(0,0)$ est tout simplement une connexion dans le fibré $E^{*,*}$ qui détermine naturellement une connexion dans le fibré E (car la loi de dérivation covariante qu'elle définit conserve $E^{p,q}$ $\forall p$ et q) mais qui n'est pas nécessairement le prolongement naturel à $E^{*,*}$ d'une connexion dans E.

Supposons $E = T(V)$. De même que toute connexion linéaire détermine canoniquement une pseudo-dérivation de bidegré $(0,1)$, nous allons voir que toute connexion de bidegré (p,q) détermine canoniquement une pseudo-dérivation de bidegré $(p+q, p+q+1)$. En effet soit ∇_X la pseudo-dérivation définie par l'élément $X \in \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathcal{F}, \mathcal{E}^{p,q}) \simeq Hom_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}^{p,q}, \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathcal{F}))=$ $= \mathcal{E}^{p+1,q}$. Si $t \in \mathcal{E}^{r,s}$, soit Dt l'application de $\mathcal{E}^{p+1,q}$ dans $\mathcal{E}^{r+p,s+q}$ définie par :

$$Dt(X) = \nabla_X t \in \mathcal{E}^{r+p,q+s}$$

car ∇_X est de bidegré (p,q).

On a donc :

$$Dt \in Hom_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}^{p+1,q}, \mathcal{E}^{r+p,s+q}) \simeq \mathcal{E}^{r+p+q,s+p+1+q}.$$

On vérifie qu'avec ces identifications :

$$D(ft) = Df \otimes t + fDt \quad \text{si } f \in \mathcal{F}.$$

Autrement dit D est une pseudo-dérivation de bidegré $(p+q, p+q+1)$. Avant d'examiner la réciproque, remarquons que l'isomorphisme

$$\mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathcal{F}, \mathcal{E}^{p,q}) \simeq \mathcal{E}^{p+1,q}$$

montre que tout élément $t \in \mathcal{E}^{1+p,q}$ définit lorsque $p \geq 0$ un élément de $\mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathcal{F}, \mathcal{E}^{p,q})$ ce qui permet de définir une famille d'éléments

$$d_{p,q} \in \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathcal{F}, \mathcal{E}^{p+q,p+q+1})$$

par la relation :

$$(d_{p,q}f)(\tau) = \tau . f \in \mathcal{E}^{p,q} \quad \text{si } \tau \in \mathcal{E}^{p+1,q}$$

où l'on a identifié

$$d_{p,q} f \in \mathcal{E}^{p+q,p+q+1}$$

à un élément de $Hom_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}^{p+1,q}, \mathcal{E}^{p,q})$ et $\tau \in \mathcal{E}^{p+1,q}$ à un élément de $\mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathcal{F}, \mathcal{E}^{p,q})$.

Ceci étant, si ∇ est une connexion de bidegré (p, q), la pseudo-dérivation D de bidegré $(p+q, p+1)$ qu'elle définit est telle que $Df = d_{p,q} f$ car par définition, on a :

$$Df(\tau) = \tau . f = d_{p,q} f(\tau) \text{ pour } \tau \in \mathcal{E}^{1+p,q}.$$

Réciproquement, soit D une pseudo-dérivation de bidegré $(p+q, p+q+1)$ telle que $Df = d_{p,q} f$. Définissons ∇ par

$$\nabla_X t = Dt(X)$$

pour tout $t \in \mathcal{E}^{r,s}$, avec les identifications déjà faites plus haut. On a alors $\nabla_X f = X.f$ et $\nabla_X(ft) = (Df \otimes t)(X) + fDt(X)$.

C'est-à-dire $\nabla_X(ft) = (Xf)t + f\nabla_X t$

pour tout $t \in \mathcal{E}$ et $X \in \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathcal{F}, \mathcal{E}^{p,q}) \simeq \mathcal{E}^{p+1,q}$.

Autrement dit ∇ est bien une connexion de bidegré (p, q). D'où :

THEOREME. *Pour qu'une pseudo-dérivation D de $\mathcal{E}$ soit définie par une connexion de bidegré (p, q) il faut et il suffit que l'on ait :*

$$Df = d_{p,q} f \qquad \forall f \in \mathcal{F}.$$

OPERATEURS COHOMOLOGIQUES.

Soit D une pseudo-dérivation de carré nul. On a donc par un calcul facile

$$D^2(fg) = 0 = Df \otimes Dg + Dg \otimes Df.$$

D'où $Df \otimes Df = 0$ pour $f = g$ et par suite $Df = 0$. Autrement dit toute pseudo-dérivation de carré nul est triviale sur les fonctions c'est-à-dire que $D \in Hom_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$. Par exemple s'il existe sur le fibré tangent un opérateur de carré nul il définit une pseudo-dérivation de bidegré $(0, 0)$, de carré nul.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.H. AKBAR-ZADEH. Thèse Paris (1961).

[2] B. BA. CRAS t. 252 pp. 3 719 - 3 721 (1961).
" t. 255 pp. 819 - 821 (1962).
" t. 257 pp. 3 554 - 3 556 (1963).
" t. 258 pp. 54 - 56 (1964).

[3] S. BOCHNER et D. MONTGOMERY. Groups of differentiable and real or complex analytic transformations. Ann of Math 46 (1945) pp. 685 - 694.

[4] W.M. BOOTHBY, S. KOBAYASHI et H.C. WANG. Mappings and automorphisms of almost complex manifolds. Ann of Math 77 (1963) pp. 329 - 334.

[5] P. DOMBROWSKI. On the geometry of tangent bundle. Journ. Rein. Ang. Math. Berlin (1962).

[6] D. DUFF et D.C. SPENCER. Harmonic tensors on manifolds with boundary. Proc. Nat. Acad. Sc. (37) pp. 614 - 619 (1951).

[7] C. EHRESMANN. Sur les variétés presque complexes. Proc. Int. Math. Cong. (1950) pp. 412 - 419.

[7 bis] C. EHRESMANN. Sur la théorie des espaces fibrés. Coll. Int. du CNRS Top. alg. (1947).

[8] C. EHRESMANN. Notice sur les travaux scientifiques (1955).

[9] C. EHRESMANN. Structures feuilletées. Proc of the fifth. Can. Math. Cong.

[10] A. FROLICHER et A. NIJENHUIS. Théory of Vector-valued differential forms. Proc. Kon. Ned. Ak. Wet. Amsterdam A. 59 n° 3 pp. 338-359 (1956).

[11] S.I. GOLDBERG. Bull. Amer. Math. Soc. 1960 p. 54.

[12] S.I. GOLDBERG et KOBAYASHI. Bull. Amer. Math Soc. (1962) 68 pp. 378 - 381.

[13] KODAIRA et SPENCER. On deformations of complex analytic structures (I.II) Ann. of Math. (67) 1958 pp. 327-466.
On deformations of complex analytic structures (III) Ann. of Math. (71) 1960 pp. 44-76.

[14] N.H. KUIPER. On conformally flat spaces in the large. Ann. of Math (2) 50 (1949) pp. 216-924.

[15] Mme J. LELONG-FERRAND. Bull. Soc. Math. France (1958) 86 pp.1-26.

[16] Melle P. LIBERMANN. Sur quelques exemples de Structures pfaffiennes. Ann. di Matematica pura e d app. IV vol. LX pp. 153-172.

[16bis] C. EHRESMANN et P. LIBERMANN. CRAS. t. 232 p. 1281-1283, pp.

[17] A. LICHNEROWICZ. Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie. Rome (1955).

[18] A. LICHNEROWICZ. Géométrie des groupes de transformations (Dunod) Paris 1958.

[19] A. LICHNEROWICZ. CRAS. t. 259 n° 4 (1964) pp. 697-700.

[20] D. MONTGOMERY. Simply connected homogeneous Spaces. Proc. Am. Math. Soc. (1) pp. 467-469 (1950).

[21] Ph. TONDEUR. CRAS. t. 254 pp. 407-408 (1962).

[22] A. WEIL. Variétés Kāhlériennes. Hermann. Paris (1958).

[23] YAMABE. Osaka Math. Jour. 12 (1960) (21-37).

[24] K. YANO et T. NAGANO. Einstein Spaces admitting... Ann of Math. (2) vol. 69 (1959) pp. 451-4-1.