CAHIERS DU SÉMINAIRE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

JEAN-MICHEL KANTOR

Les problèmes de Hilbert et leur devenir

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 2e série, tome 3 (1993), p. 95-112
<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1993_2_3__95_0>

LES PROBLEMES DE HILBERT ET LEUR DEVENIR

Jean-Michel KANTOR[1]

"*Il n'y a pas de problèmes résolus, il n'y a que des problèmes plus ou moins résolus*" (Henri Poincaré).

"Parler de l'avenir des mathématiques est un exploit fantaisiste qu'on ne saurait donc trop déconseiller ; en propres termes c'est une absurdité. [...] [l'état des mathématiques en l'an 2000] sera merveilleux si les physiciens atomistes ou quelques conférences de la paix ne viennent rompre brutalement le fil du progrès." (R. Godement, 1948, Réf. Gén. [LeL][2]) Le sujet dans son développement historique ne peut plus, aujourd'hui, être traité que de manière partielle —et encore y faudrait-il une équipe comme celle réunie à l'occasion du séminaire sur les problèmes posés par David Hilbert en 1900, tenu en 1974 aux Etats-Unis. Poincaré et Hilbert furent sans doute les derniers mathématiciens disposant d'une vision globale de leur science —et évoquer la descendance mathématique de Hilbert n'est plus à la portée d'un seul mathématicien. Cette remarque devrait aider le lecteur à excuser une partie des manques et erreurs qui suivent —ou ne suivent pas— et dont je suis seul responsable malgré l'aide amicale de

V. I. Arnold, M. Berger, M. Berry, H. Brezis, P. Cartier, J.-L. Colliot-Thélène, J. Dixmier, J.-P. Kahane, V. Kharlamov, B. Malgrange, I. Matijasevich, B. Mazur, C. Sabbagh, J.-P. Serre, G. Tenenbaum, M. Waldschmidt.

Je les remercie chaleureusement, ainsi que le personnel de la bibliothèque interuniversitaire scientifique de Jussieu, et enfin Smilka Zdravkovska.

I) LE CONTEXTE

Poincaré avait marqué le premier Congrès international de mathématiques, en 1897, par un discours sur les relations entre les mathématiques et la physique. Hilbert, invité à parler au Congrès international suivant (Paris, 6-10 août 1900) hésita entre une réponse à Poincaré et une liste de problèmes susceptibles de stimuler les recherches du nouveau siècle. Hilbert posa la question à Minkowski : "évoquerai-je les directions probables des mathématiques du nouveau siècle [...] un regard vers le futur ? ". L'idée enthousiasma Minkowski. A Paris, Hilbert sut captiver son auditoire :

"Qui ne soulèverait le voile qui nous cache l'avenir afin de jeter un coup d'œil sur les progrès de notre Science et les secrets de son développement ultérieur durant les siècles futurs ? " [H, p. 58].

Il exposa dix des vingt-trois problèmes publiés dans les Actes du Congrès :

[1] 29, R. Lacépède 75005 Paris.

[2] Les références sont indiquées par les initiales des auteurs, et classées selon les références générales (Réf. Gén.) et celles relatives à chaque problème.

Sur les fondements :

Problèmes 1, 2, 6

Quatre autres problèmes d'arithmétique et d'algèbre :

Problème 7	Irrationnalité et transcendance.
Problème 8	Hypothèse de Riemann.
Problème 13	Superposition de deux fonctions.
Problème 16	Ovales et cycles limites.

Et les trois derniers concernant la théorie des fonctions :

Problème 19	Calcul des variations.
Problème 21	Equations différentielles fuchsiennes et monodromie.
Problème 22	Uniformisation.

Pour Hilbert le choix de ces problèmes était destiné à montrer la profonde unité des mathématiques et à étayer sa profession de foi dans un avenir glorieux (en mathématiques il n'y a pas d'"ignorabimus"[3]). Les problèmes de Hilbert allaient désormais connaître le succès que l'on sait, et leur histoire est riche d'anecdotes instructives, mais aussi de chausse-trappes. L'état actuel nous réserve aussi quelques surprises. Nous allons essayer de faire le point des problèmes, en privilégiant les progrès effectués entre 75 et 92, puisqu'un travail considérable a été effectué lors du séminaire de l'American Mathematical Society en 75; pour des raisons de trop grande technicité nous laissons de côté certains problèmes (4, 9, 11, 14).

II) L'ETAT DE LA QUESTION

Problèmes 1 et 2 Hypothèse du continu; non-contradiction de l'arithmétique.

On doit associer aux deux premiers problèmes les noms de Kurt Gödel et Paul Cohen.

L'hypothèse du continu, objet du problème 1, peut s'exprimer par :

Toute partie non dénombrable de $\mathbb{R}$ *a même cardinal que* $\mathbb{R}$

ou :

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

La non-contradiction de l'arithmétique a été traitée par Gödel, qui démontre (1931) l'incomplétude et l'indécidabilité de l'arithmétique. En 1938 Gödel démontre que si la théorie des ensembles (selon les axiomes de Zermelo-Fraenkel) est non-contradictoire, alors cette théorie augmentée de l'axiome du choix et/ou de l'hypothèse du continu est encore non-contradictoire. Enfin en 1963 P. Cohen démontre que si les axiomes de Zermelo-Fraenkel sont consistants, la négation de l'axiome du choix, ou bien la négation de l'hypothèse du continu[4] peuvent être ajoutées, la théorie restant consistante!

Le succès de Gödel a surtout retenti hors des sphères mathématiques, car il n'a pas changé le mode de travail des mathématiciens —à part les logiciens évidemment— et il a donné lieu à une mine de citations candidates pour la future édition du Dictionnaire de la bêtise[5].

---

[3]Dubois-Reymond.

[4]L'hypothèse généralisée du continu implique l'axiome du choix.

[5]Exemple : R. Debray (Le Scribe, 1980) : "du jour où Gödel a démontré qu'il n'existe pas de consistance

J.Y. Girard résume la découverte de Gödel par cette image :

"Il y a des choses qui ne sont pas du ressort du mécanisme dans la pensée mathématique" ([B]).

Problème 3 Congruence des polyèdres. "De l'égalité en volume de deux tétraèdres de bases et de hauteurs égales".

Deux pyramides à base triangulaire et de même hauteur sont dans le même rapport que leurs bases. La démonstration (Euclide) utilise la méthode d'exhaustion, alors que pour les figures planes le calcul de la surface de tout polygone se ramène, par découpage ("géometrie des ciseaux"), à celui du carré. Démontrer qu'une telle réduction est impossible pour les volumes.

En fait le problème était déja résolu par Bricard (1896) et Dehn (1900), étudiant de Hilbert, grâce à la notion d'invariant ; deux solides que l'on peut découper en morceaux identiques ayant nécessairement le même invariant. Un invariant est un élément $D(P)$ (d'un groupe) associé à chaque polytope P de manière que

$$D(P \cap P') + D(P \cup P') = D(P) + D(P')$$

si P, P' et $P \cup P'$ sont des polytopes. De plus

$$D(P) = 0$$

si le polytope est plan ; si g est un déplacement de l'espace,

$$D(g(P)) = D(P).$$

L'invariant de Dehn est défini comme suit : on identifie le groupe des angles de droites dans le plan à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, on pose

$$D(P) = \sum_i |L_i| \otimes \delta_i, \qquad D(P) \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$$

où L_i est une arête et δ_i l'angle dièdre s'appuyant sur L_i. Or, Dehn montre que le cube et le tétraèdre régulier de même volume n'ont pas le même invariant (de Dehn). Le problème fut alors considéré comme résolu. De plus, en 1965 Sydler démontra que deux polytopes sont équivalents si et seulement si ils ont même volume et même invariant de Dehn. (cf. [B], [C], [S]). Par contre, on ne connaît pas de résultats analogues en dimension supérieure, ou en géométrie non-euclidienne à partir de la dimension 3 (incluse). Le sujet a fait l'objet d'un problème d'agrégation [A].

Plus récemment, d'autres invariants, les invariants d'Hadwiger, ont été introduits en dimension quelconque, et on a démontré que deux polytopes sont équivalents si et seulement si ils ont mêmes invariants d'Hadwiger. Nous renvoyons à [C] pour les relations avec le calcul des groupes d'homologie d'Eilenberg-MacLane et les développements en cours.

---

de l'arithmétique de Peano formalisable dans le cadre de cette théorie (1931) les politologues avaient les moyens de comprendre pourquoi il fallait momifier Lénine et l'exposer...sous un mausolée".

Problème 5 Groupes topologiques et groupes de Lie. Est-ce qu'un groupe localement euclidien est un groupe de Lie?

Ce problème a connu une certaine mode dans les années 50. Il a été résolu en 1953 par Gleason, Montgomery-Zippin. Par contre reste ouverte la question suivante : On se donne un groupe topologique localement compact qui opère fidèlement sur une variété topologique, est-ce un groupe de Lie? Par exemple (problème en fait équivalent) est-ce que les entiers p-adiques peuvent agir fidèlement sur une variété topologique compacte? Signalons que le Théorème de Montgomery-Zippin joue un rôle crucial dans un travail récent important de M. Gromov ([G])

Problème 6 Axiomatisation de la physique.

Deux raisons principales font qu'il n'y a plus de rapports entre ce problème tel que Hilbert l'énonçait, et tel qu'il peut être posé aujourd'hui, à la suite de :

— la révolution de la physique moderne : relativité, relativité générale, physique quantique.

— l'introduction de nouveaux outils mathématiques, et d'abord l'espace de Hilbert (sur lequel Hilbert a travaillé dès l'hiver 1900 dans l'état d'esprit suivant :

"*It appears to me of outstanding interest to undertake an investigation of the convergence conditions which serve for the erection of a given analytic discipline so that we can set up a system of the simplest fundamental facts which require for their proofs a specific convergence condition. Then by the use of that one convergence condition alone —without the addition of any other convergence condition whatsoever— the totality of the theorems of the particular discipline can be established.*" (Réf. Gén. [R, p. 85])

Stimulé par la lecture du travail de Fredholm, Hilbert devait introduire l'espace qui porte son nom. Il est étonnant de constater qu'aucune allusion n'est faite par Hilbert à cette recherche dans les problèmes formulés au Congrès de Paris. La notion d'espace de Hilbert a renouvelé complètement le formalisme mathématique à l'œuvre en physique théorique.

Franchissant le siècle, si on veut indiquer les directions actuelles les plus actives, semblent se dégager :

— Relativité générale et géométrie différentielle globale. Construction de variétés qui serviraient de modèles cosmologiques efficaces (S. Hawking, R. Penrose);

— Mathématiques de la théorie quantique des champs; groupes de jauge; introduction des groupes quantiques dans le formalisme de la physique quantique.

Problème 7 Irrationalité et transcendance de α^β pour α algébrique et β algébrique irrationnel (par exemple $2^{\sqrt{2}}$ ou e^π).

Le problème a été résolu par Gel'fond (1935) et Th. Schneider. La constante d'Euler garde cependant tous ses mystères.

Signalons des progrès récents dans ce domaine : A. Baker (1966, médaille Fields en 1970) : Si les (a_i) sont des nombres algébriques non-nuls dont les logarithmes sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, alors $1, \log a_1, \ldots, \log a_n$, sont linéairement indépendants sur le corps des nombres algébriques. Les travaux des vingt dernières années utilisent des outils venant de divers horizons mathématiques. La théorie des fonctions de plusieurs variables complexes a permis en 1970 à Enrico Bombieri (médaille Fields 1974) de résoudre une conjecture de Nagata, et à W.D. Brownawell en 1985 de donner la première version effective du Nullstellensatz de Hilbert. Ce dernier énoncé est utile dans des problèmes d'indépendance algébrique; la méthode créée par A.O. Gel'fond en 1949, développée par G.V. Cudnovskii dans les années 70, lui a permis de démontrer la transcendance de nombres comme $\Gamma(1/4)$ ou $\Gamma(1/3)$ (où Γ est la fonction gamma d'Euler). L'algèbre commutative, avec les formes de Chow, a été introduite dans ce contexte avec beaucoup de succès par Yu. V. Nesterenko. Les résultats de transcendance concernant la fonction exponentielle usuelle, ou bien les fonctions elliptiques (Th. Schneider), ont été étendus aux groupes algébriques (commutatifs) par S. Lang dans les années 60; ce thème a été abondamment développé, notamment par D.W. Masser, d'abord seul, puis en collaboration avec G. Wüstholz, en liaison avec les travaux de Faltings sur la conjecture de Mordell[6].

Sa démonstration par G. Faltings entraîne que pour p fixé ≥ 3, l'équation

$$x^p + y^p = z^p$$

n'a qu'un nombre fini de solutions sans facteur commun. Reste à montrer que ce nombre est zéro pour résoudre le problème de Fermat. D'autre part, évènement important, K. Ribet a montré qu'une conjecture profonde liée à la fois à la théorie des nombres, à la géométrie algébrique et à la théorie des groupes entraîne l'hypothèse de Fermat, ce qui désenclave celle-ci.

Problème 8 Hypothèse de Riemann.

Sans doute le problème le plus célèbre de l'histoire des mathématiques; d'après Hilbert, le problème le plus important des mathématiques, et même, alla-t-il jusqu'à dire dans une conversation, le problème le plus important qui se pose à l'humanité! (loc. cit.). On sait aujourd'hui que plus de 40% des zéros sont sur la droite fatidique ([C] 1989) et on a étudié les fluctuations entre les zéros. Il semble, comme cela a été très vite suggéré, que la répartition des zéros ressemble à celle des valeurs propres d'un opérateur auto-adjoint (Hilbert-Polya, vers 1915). Vers 1973 Dyson suggère que l'opérateur puisse être un opérateur hermitien aléatoire. Depuis plusieurs dizaines d'années les progrès sur cette hypothèse sont essentiellement techniques, et les plus puissants ordinateurs sont mis à l'épreuve. Certains de ces progrès sont de véritables tours de force ([B-I], cf. [G-K]). D'autre part on a cherché, comme le suggérait Hilbert, à généraliser l'hypothèse de Riemann en remplaçant le corps des rationnels par un corps de fonctions sur une courbe projective définie sur $\mathbb{F}_q$. Ce fut l'une des motivations des créateurs de la géométrie algébrique moderne, A. Weil, O. Zariski. Les "Conjectures de Weil", énoncées en 1949, et qui étendent les hypothèses précédentes aux variétés de dimension supérieures, ont été résolues en 1973 par P. Deligne (médaille Fields 1978) (cf. Réf. Gén. [K]).

[6] Ces aspects de la théorie font l'objet des travaux d'un groupe de recherches à Paris animé par D. Bertrand, M. Laurent, P. Philippon et M. Waldschmidt.

Problème 10 "De la possibilité de résoudre une équation diophantienne".

Il s'agit de donner un algorithme permettant de tester la résolubilité d'équations diophantiennes (équations polynomiales à coefficients entiers dont on cherche des solutions rationnelles). Comme l'indique l'énoncé, le problème est à la frontière entre la logique —théorie de la récursion— et la théorie des nombres. Il a été résolu négativement par I. Matiasevich en 1970. Ce résultat négatif a été obtenu par l'approfondissement de notre connaissance des ensembles récursifs (récursivement énumérables ou "listables") et des ensembles diophantiens, c'est-à-dire des ensembles de paramètres entiers a_i pour lesquels une équation polynomiale

$$P(a_1, a_2, \ldots, a_n, z_1, z_2, \ldots z_m) = 0$$

a des solutions (z) en nombres entiers. Le théorème de Matiasevich affirme que ces deux classes d'ensembles sont les mêmes. Application étonnante : il existe un polynôme effectivement calculable à coefficients entiers de 10 variables entières dont les valeurs positives sont exactement l'ensemble des nombres premiers !

D'autres problèmes voisins sont encore sans solution ; par exemple : existe-t-il un système

$$(1) \qquad f(x_1, x_2, \ldots x_n, t) = 0$$

d'équations à coefficients entiers qui possède des solutions $(x_1, ..., x_n)$ rationnelles si et seulement si le paramètre t est entier.

Autrement dit, existe-t-il un morphisme de variétés sur $\mathbb{Q}$

$$V \to \text{Droite affine}$$

dont la fibre en a est non vide si et seulement si a est entier ?

Problème 11 Classification des formes quadratiques à coefficients dans des anneaux d'entiers algébriques.

Cf. Réf. Gén. [K].

Problème 12 Il s'agit de généralisations de la loi de réciprocité quadratique de Gauss ; la théorie algébrique moderne des nombres est née des travaux concernant cette loi.

Considérons l'équation (dans les entiers)

$$x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

Cette équation a des solutions si et seulement si le nombre p premier est congru à 1 modulo 4. Cette régularité est à la fois à l'origine de la théorie des groupes et de la théorie moderne des nombres.

Pour résumer les développements de ce problème, on doit citer : la théorie de corps de classes (Hilbert et, vers 1930, Furtwangler-Takagi-E. Artin), l'introduction de méthodes de cohomologie des groupes, l'étude des séries L et l'immense "programme de Langlands" qui cherche à étendre la loi de réciprocité quadratique au cas non abélien, sur lequel travaillent de nombreux mathématiciens dans le monde (mais Langlands, lui, s'intéresse aujourd'hui à la turbulence!)

Problème 13 "Impossibilité de la résolution de l'équation générale du septième degré au moyen de fonctions de deux arguments seulement" : superposition des fonctions. L'équation du troisième degré se ramène par translation à

$$X^3 + pX + q = 0$$

qui admet pour solution (Scipione del Ferro, XVI^e siècle)

$$x = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{4 \cdot 27}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{4 \cdot 27}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

L'équation du quatrième degré peut se résoudre en superposant (composant) additions, multiplications, racines carrées, cubiques, quatrièmes. Pour tenter de résoudre les équations algébriques de degré supérieur (espoir vain d'après N. Abel et E. Galois), l'idée de Tschirnhaus (1683) est d'ajouter une nouvelle équation :

$$\begin{array}{cc} \text{à} & P(X) = 0 \\ \text{on ajoute} & Y = Q(X), \end{array}$$

où Q est un polynôme de degré strictement inférieur à celui de P, à déterminer selon le but recherché. On peut démontrer ainsi que les racines de l'équation du cinquième degré s'expriment à l'aide des opérations usuelles de l'arithmétique, de radicaux et d'une solution $\varphi(x)$ de l'équation du cinquième degré

$$X^5 + xX + 1 = 0$$

dépendant d'un paramètre x. De même pour l'équation du sixième degré, les racines s'expriment comme précédemment en ajoutant une fonction $\theta(x, y)$ solution d'une équation du sixième degré dépendant de deux paramètres x et y.

Pour le septième degré il faut encore ajouter la fonction $\sigma(x, y, z)$ solution de l'équation

$$X^7 + xX^3 + yX^2 + zX + 1 = 0.$$

D'où la question naturelle : peut-on exprimer $\sigma(x, y, z)$ au moyen de superposition de fonctions algébriques de deux variables ? Les questions formulées par V. Arnold et Shimura dans Réf. Gén. [M], ont été résolues par V. Lin, mais la question originelle de D. Hilbert reste sans réponse. Signalons encore un résultat étrange dans le même ordre d'idées, et qui a conduit à des travaux intéressant de complexité : La solution de

$$X^5 + xX^2 + yX + 1 = 0$$

ne peut s'exprimer au moyen de fonctions algébriques d'une variable, d'additions et de multiplications. On interdit la division! (Askolt Khovanski, cf. [R]; articles historiques [JPK] et [D]).

L'importance des travaux de Kolmogorov sur la complexité fait l'objet de remarques intéressantes de Youri I. Manin au Congrès international de Kyoto (Réf. Gén. [C]). Une autre motivation de D. Hilbert est la nomographie, méthode de résolution des équations par le tracé de famille de courbes dépendant d'un paramètre. Ce problème, motivé entre autres par les méthodes de calcul de l'époque a suscité en retour le développement de la notion d'ϵ-entropie (Kolmogorov), qui joue un rôle crucial dans les théories de l'approximation (entre autres), utilisées aujourd'hui dans les programmes informatiques. Retraçons brièvement l'histoire du problème. Contrairement à l'attente des mathématiciens et de Hilbert, en 1957 V.I. Arnold —alors étudiant de Kolmogorov— démontre que toute fonction continue de trois variables f peut s'écrire

$$f(x,y,z) = \sum_i f_i(\varphi_i(x,y),z)$$

avec des fonctions f_i et φ_i continues. Et A. Kolmogorov, quelques semaines plus tard, démontre qu'on peut écrire toute f continue de n variables sous la forme :

$$f(x_1,x_2,\dots x_n) = \sum_{i=1}^{2n+1} f_i\left(\sum_j \varphi_j(x_j)\right)$$

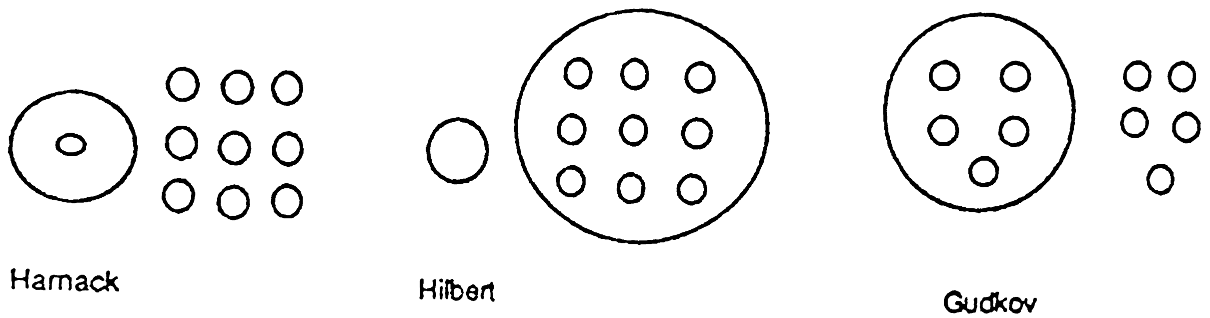
où les φ_j sont continues, monotones, **indépendantes de** f. Il faut aussi citer des résultats de Vitushkin (1954). Dans le cas de superpositions de séries formelles, de fonctions analytiques, ou même de fonctions indéfiniment dérivables, une technique élémentaire de dénombrement suivie d'un argument du type de Baire permet de montrer, par exemple, que presque toute fonction entière a son germe en un point quelconque qui ne peut s'exprimer par superposition de séries de deux variables. Il y a donc beaucoup plus de fonctions entières de trois variables que de deux. Le résultat de Vitushkin est que dans le cas de fonctions de classe α (avec α supérieur à un, pas forcément entier) c'est le nombre n/α qui intervient.

Problème 15 "Etablissement rigoureux de la géométrie énumérative de Schubert". Calcul de Schubert.

Les considérations de Schubert, dans l'étude du nombre de points d'intersection de variétés —par exemple le nombre de droites qui rencontrent quatre droites données dans l'espace de dimension trois— furent reprises par l'école italienne (Severi). Le manque de rigueur des raisonnements —"principe de conservation des nombres", autrement dit argument heuristique de continuité—, conduisit à la théorie moderne des multiplicités, partie intégrante de la géométrie algébrique (Pierre Samuel, Alexander Grothendieck médaille Fields 1966). Un point de vue topologique a été adopté par René Thom (médaille Fields 1958 : polynômes de Thom-Bordman, théorie énumérative des singularités). Le problème 15 ne peut encore être considéré comme résolu, malgré les progrès récents (Demazure, Fulton, Kleiman, R. McPherson).

Problème16 "Problèmes de topologie des courbes et des surfaces algébriques".
C'est le seul problème directement concerné par la topologie. Il comprend deux parties distinctes :

A Considérons une courbe non-singulière dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ de degré m. D'un point de vue topologique, une telle courbe est formée d'ovales dont le nombre est au plus $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)+1$, cette majoration étant optimale (théorème d'Harnack). On appelle M-courbes celles qui réalisent le maximum. Il s'agit d'étudier les dispositions possibles des ovales. Le problème est non-trivial à partir de $m = 6$, la question, posée par Hilbert, fut résolue dans ce cas par Gudkov dans les années 70.



Dispositions possibles pour $m = 6$

En 1933 Petrovskii démontre des inégalités concernant des invariants topologiques de

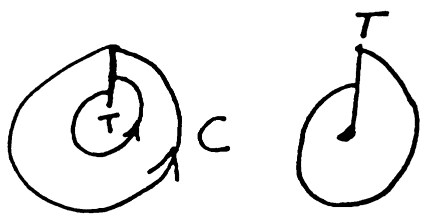
$$B = \{x \mid f(x) \geq 0\}$$

où f définit une courbe de degré pair, inégalités généralisées par Thom-Milnor. En 1971 V. Arnold démontre des résultats de congruence concernant le nombre P des ovales pairs (contenues dans un nombre pair d'ovales) et celui des ovales impairs, I. Pour une courbe de degré m pair, $P - I$ est congru à $(m/2)^2$ modulo 8. Pour le degré 8 le problème n'est toujours pas résolu. L'historique des travaux, de O. Oleïnik-J. Petrovski (1949) à Viro (1979) est traité dans [R]. L'Ecole de Léningrad (Kharlamov, Gudkov, Rohlin) a mis en évidence des relations subtiles entre une variété algébrique complexe non singulière et sa partie réelle [V]. Les travaux actuels sont d'une haute technicité. Les résultats obtenus ont des applications en analyse (équations aux dérivées partielles, systèmes complètement intégrables).

B Problème de la finitude des cycles limites.

Etant donné un champ de vecteurs V dans le plan, on appelle cycle une trajectoire périodique, cycle-limite un cycle sur lequel s'accumulent des trajectoires non-périodiques

Quand V est analytique, un cycle-limite est isolé dans l'ensemble des cycles. Mais il se pourrait que les cycles s'accumulent sur un point ou plus généralement sur un "polycycle" (notion due à H. Poincaré) formé de morceaux de courbes intégrales se croisant en des points singuliers de V

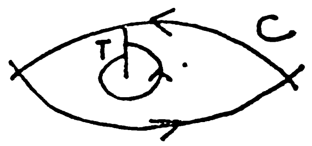


D'où la question naturelle posée par Hilbert : étant donné un champ de vecteurs $V = (X, Y)$, où X et Y sont des polynômes de degré $\leq n$, trouver le nombre maximum de cycles limites. Mais au préalable, il faut essayer de prouver la conjecture suivante :

Conjecture Un champ de vecteurs polynomial n'a qu'un nombre fini de cycles limites.

1928 : Dulac démontre cette conjecture, mais sa démonstration est incomplète, comme le découvre dans les années 70 Youri Il'yashenko. Cependant plusieurs idées de Dulac vont être reprises par Il'yasenko et Ecalle, dans des directions différentes. Ilyashenko (1984) démontre la conjecture de finitude pour le complémentaire d'un sous-ensemble algébrique propre de l'espace vectoriel des champs de vecteurs polynomiaux de degré n.

Le cadre adéquat est en fait celui des feuilletages $\mathbb{F}$ singuliers (localement définis par des champs de vecteurs analytiques, avec des points singuliers isolés). L'application retour est définie au voisinage d'un polycycle C :



Il existe une courbe analytique

$$T : [0,1] \to M$$

avec $T(0) \in C$, T transverse à $\mathbb{F}$ et la feuille passant par $T(t)$ —pour t suffisamment petit— recoupe une première fois T en $(f(t))$. L'application f fixe 0, préserve l'orientation, est analytique sur un ouvert en dehors de 0, mais en général n'est pas analytique en 0. Elle peut donc posséder une suite de points fixes isolés (t_n) qui converge vers 0. C est alors la limite des cycles limites passant par les $T(t_n)$. Il s'agit de de montrer qu'un polycycle ne peut être limite de cycles limites, autrement dit que, si f n'est pas l'identité, 0 est un point fixe isolé. Ceci impliquerait la finitude d'après le Théorème de Poincaré-Bendixson. La démonstration d'Il'yashenko de la finitude (Conjecture) et celle d'Ecalle sont en cours de publication; Ecalle poursuit ses travaux qui utilisent sa théorie des développements asymptotiques généralisés (calcul différentiel étranger; résurgence) pour étudier l'application retour f.

Enfin signalons l'existence d'une version “linéarisée” du problème **B** [K].

Problème 17 Sommes de carrés : “Représentation des formes définies par des sommes de carrés”.

“Définies” signifie ici que les formes de n variables (polynômes homogènes) à coefficients réels sont toujours positives ou nulles pour les valeurs réelles des variables.

Peut-on toujours les représenter comme quotient de sommes de carrés de formes ?

Ce problème a joué un rôle moteur dans la géométrie algébrique réelle.

Emil Artin, 1927 :

Soit X une variété algébrique irréductible définie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$, f une fonction rationnelle sur X, et supposons f positive sur les points réels de X où elle est définie. Alors f est somme de carrés dans le corps des fonctions de X (fonctions à coefficients dans $\mathbb{Q}$ si X est définie sur $\mathbb{Q}$).

Théorème de Pfister (circa 1970) :

Soit X une variété algébrique irréductible définie sur $\mathbb{R}$, de dimension d, et f dans le corps des fonctions de X, positive (au sens précédent). Alors f peut s'écrire comme une somme d'au plus 2^d carrés.

Hilbert avait déja étudié à quelle condition un polynôme homogène de degré m de n variables pouvait s'écrire comme somme de carrés de polynômes homogènes. Récemment on a aussi étudié le cas des fonctions analytiques, différentiables, et des fonctions de Nash; (cf. [B]). La géométrie algébrique réelle connaît un regain d'intérêt, en raison de ses relations avec la logique —principe d'élimination de Tarski-Seidenberg, théorie des modèles— et avec les applications industrielles (robotique), mais elle est intrinsèquement plus complexe que la géométrie algébrique complexe.

Problème 18 "Reconstruire l'espace avec des polyèdres congruents".

Le problème d'Hilbert se divise en trois parties distinctes :

A "Dans l'espace euclidien à n dimensions, montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini d'espèces différentes de groupes de déplacements à région fondamentale (compacte)", autrement dit, on cherche les sous groupes discrets du groupe $E(n)$ des isométries de $\mathbb{R}^n$ à quotient compact. Le résultat fut démontré par Bieberbach en 1910. La classification de ces groupes est importante en cristallographie et aussi en relation avec la théorie des groupes de Lie.

B "Pavage de l'espace par un seul polyèdre qui ne soit pas un domaine fondamental comme en **A**".

C "Empilement des sphères. Comment disposer des sphères de même rayon dans l'espace (en dimension quelconque) de manière à réaliser la densité d'occupation la plus grande? " Le texte de Hilbert semble indiquer qu'il ne pressentait pas le succès et les développements qu'allait connaître ce problème. L'empilement hexagonal dans le plan est le plus dense (démonstration de Thue en 1882, complétée par Fejes en 1940).

Dans l'espace, le problème n'est toujours pas résolu. Des progrès ont été réalisé très récemment par Hales (Chicago). Pour des sphères centrées aux points d'un réseau, le problème est résolu en dimension au plus égale à 8. Le sujet a de multiples ramifications : applications à la géométrie des nombres, liens profonds entre la théorie du codage et celle des empilements de sphères, géométrie très riche des réseaux les plus denses connus.

Avant d'aborder l'analyse, Hilbert pose de manière générale la question du choix de la classe de fonctions avec lesquelles travailler : différentiables, analytiques? ... D'autres classes intermédiaires existent, qui, me semble-t-il, n'ont pas été suffisamment considérées (fonctions différentiellement algébriques, classes de Gevrey...).

Problèmes 19, 20, 23 Equations aux dérivées partielles : calcul des variations et problème de Dirichlet.

Les développements du calcul des variations sont si divers (méthode des éléments finis, théorie du contrôle), qu'il est impossible d'en donner ici un aperçu. Ils jouent un rôle central dans l'étude des phénomènes non-linéaires (Exemples : problème de Plateau, équations des surfaces minimales) et dans les applications industrielles des mathématiques, sous la forme du contrôle optimal. En supposant connu l'exposé de James Serrin (Réf. Gén. [M]), on peut indiquer pour le problème 20 (Résolubilité des problèmes de valeurs au bord) les développements concernant les systèmes elliptiques, soit linéaires à coefficients peu réguliers, soit non-linéaires : étude des applications harmoniques, questions de régularité motivées par la géométrie globale, comme dans les travaux de Schoen-Uhlenbeck (cf. Réf. Gén. [C], exposé de Karen Uhlenbeck), la mécanique (élasticité) ou l'étude plus récemment des cristaux liquides (Réf. Gén. [I] 1988 et 1990). L'étude des extensions du calcul des variations (23) a connu un très large développement ces dernières années. Signalons par exemple le travail de Bahri sur l'existence de solutions périodiques du problème des trois corps.

Problème 21 Monodromie des équations fuchsiennes. "Existe-t-il toujours une équation différentielle linéaire de la classe de Fuchs ayant des points critiques donnés et un groupe de monodromie donné ? "

On peut chercher à démontrer l'existence sur la sphère de Riemann des objets suivants avec points singuliers donnés et monodromie donnée :

1 Equations fuchsiennes (classe de Fuchs) : équation différentielle linéaire d'ordre un dont la matrice de monodromie n'a que des pôles simples aux points singuliers donnés ;

2 On impose à toutes les solutions d'être à points singuliers réguliers, c'est-à-dire avec une croissance modérée dans les secteurs angulaires (C'est le problème traité par Deligne, [D]).

3 Systèmes fuchsiens.

"Fuchsien" implique singulier régulier mais la réciproque est fausse.

Plejmelj (1930) a donné une solution du problème **1**. On s'est aperçu récemment d'une erreur dans la démonstration (Réf. Gén. [E], vol. 1). Il y a des contre-exemples intéressants pour **1** [B].

Problème 22 Uniformisation des courbes analytiques.

C'est un bel exemple d'un problème-carrefour : topologie, fonctions de variables complexes, théorie des groupes, équations aux dérivées partielles,... Les développements récents concernent l'extension en dimension supérieure (Griffiths).

III) ELEMENTS DE REFLEXION

Ne négligeons pas les petits problèmes qui paraissent futiles et sans grand avenir : les exemples sont nombreux dans la liste de Hilbert, qui ont donné lieu à des développements importants (en géométrie en particulier).

Aujourd'hui aussi le phénomène se produit :
— l'attracteur de Henon;
— pavages non périodiques;
— ...

Si on considère l'ensemble des problèmes de Hilbert et les travaux auxquels ils ont donné lieu, il est clair qu'ils renvoient à une part importante des mathématiques de ce siècle. Ils ont stimulé des efforts considérables de nombreux mathématiciens : lequel, pendant ce siècle, n'a rêvé de résoudre une question posée par Hilbert ? Examinons cependant les sujets localement, en oubliant la figure impressionnante de leur auteur : outre l'absence de certaines questions importantes (analyse fonctionnelle, théorie de la mesure) ou la faible part prise par d'autres (topologie, Poincaré y est sans doute pour quelque chose), des mathématiciens ont pu estimer surévalué l'intérêt suscité par Hilbert pour certains problèmes. J. Dieudonné ([L]) juge une bonne part de ces problèmes "isolés", mais ce reproche peut devenir caduc, comme le montrent par exemple les travaux récents qui "décloisonnent" l'hypothèse de Fermat. Certains problèmes qui ne furent pas présentés à Paris (3, 5, 15) ainsi que leurs développements ultérieurs, ont profité de l'aura du grand mathématicien.

A Problèmes, programme ?

Comme le montre sa correspondance avec Minkowski, Hilbert a sans doute caressé le rêve d'écrire le programme d'action des mathématiciens du XX^e siècle —tout au moins les premières étapes. Cela correspondait à sa vision structurée, centralisée des mathématiques : Göttingen au centre, la théorie des nombres au coeur de la science mathématique... D'ailleurs Ostrowski n'avait-il pas remarqué une étrange ressemblance avec un autre grand adepte des programmes d'action, V. I. Lénine ? Plutôt que d'un programme, auquel manqueraient inévitablement les moyens d'action, c'est plutôt d'un **projet**, d'une projection vers l'avenir, qu'il s'agit, mettant en valeur les idées chères à Hilbert :
— la capacité des mathématiques à dépasser les crises (il n'y a pas de problèmes sans solution —à rapprocher du point de vue dialectique de Poincaré) ;
— l'unité profonde des mathématiques, autour de la théorie des nombres ;
— l'indépendance des mathématiques relativement aux sciences physiques.

L'autre sujet qu'Hilbert envisageait de traiter dans son exposé de Paris, les relations entre les mathématiques pures et la physique, il devait l'aborder en 1930, lors de sa retraite, quand il fut fait citoyen d'honneur de sa bonne ville de Koenigsberg-Kaliningrad —la ville de Kant et de Jacobi. Dans son exposé, qu'il résuma dans une interview à la radio locale, la défense des mathématiques pures est liée, à travers une lecture de Kant, à sa conviction profonde —qu'il se proposait pour ainsi dire de démontrer—, de la toute puissance des mathématiques :

"Wir müssen wissen. Wir werden wissen."

Et sur ces mots on entend un grand éclat de rire d'Hilbert. Comment le comprendre ? L'intuition de ce qui allait se passer ? Deux mois plus tard les "Monatshefte für mathematik" recevaient un article d'un jeune mathématicien de 25 ans, Kurt Gödel...

B Hier, aujourd'hui, demain ?

A l'approche de l'an 2000, il est tentant —mais périlleux— d'imaginer un travail analogue. D'ailleurs, depuis Hilbert d'autres mathématiciens se sont risqués à envisager des programmes partiels (par exemple A. Weil ([LeL]), ou l'équipe réunie par F. Browder ([M]), ou enfin l'"esquisse d'un programme" de A. Grothendieck. ([G]).

Heureux hasard, ou signe de la fin d'une époque ? L'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* de Klein marquait la fin du siècle, la conférence d'Hilbert le début d'un formidable développement (1900-1970 environ); aujourd'hui la parution de l'*Encyclopædia of Mathematical Sciences* ([E]) peut jouer un rôle analogue à celui joué par la première. Comment dès lors imaginer un "nouveau programme de Hilbert" ?

Un bouleversement considérable a marqué le développement des mathématiques depuis une vingtaine d'années. Si dans la première partie du siècle, jusqu'aux années soixante, les mathématiques sont essentiellement stimulées par une logique interne, et placées ainsi sous le parrainage d'Hilbert (et de son disciple Bourbaki), aujourd'hui ce sont les "besoins externes" —en un sens global— qui sont le moteur principal de la vie des mathématiques en tant que science. Poincaré prend sa revanche. Le développement des outils informatiques permet un "feed-back positif" (J.-L. Lions) entre la théorie et les applications. C'est d'ailleurs la remarque que font les rédacteurs de l'*Encyclopædia of Mathematical Sciences* (Vol.1), en évoquant, dans leur introduction "the industrialization of Mathematics". Citons quelques exemples :

- rôle moteur de l'informatique dans la recherche logique ([I]);
- problèmes du codage, de la cryptographie, de la théorie du signal en théorie des nombres; recherches "expérimentales" dans ce domaine utilisant les ordinateurs les plus puissants;
- rapprochements entre physique théorique et mathématiques (médailles Fields 90);
- topologie et calcul formel (F. Sergeraert [I-90]);
- systèmes non-linéaires (chaos, équation de Korteweg-de Vries, ...);
- surfaces minimales à courbure moyenne constante (applications aux interfaces de polymères).

Ce caractère nouveau du développement des mathématiques (qui demande une étude comparative approfondie avec d'autres époques) est résumée par Jacques-Louis Lions à propos de la théorie du contrôle optimal ([L]) : "Hermès, le programme d'Hilbert (Problème 23) en action" (déjà le filtre de Kalman a un rôle important dans le contrôle de l'Airbus).

Bien sûr, ce bouleversement ne va pas sans conséquences sociologiques, qui rapprochent les mœurs de la tribu mathématicienne de celles d'autres milieux : courses aux contrats, poids grandissant des recherches militaires mais pratique "romantique" des mathématiques (on rêve, "mais peut-être ne faut-il pas trop rêver" ? [F])[7].

Le **"nous devons savoir"** d'Hilbert doit aujourd'hui être complété d'un **"nous vou-**

[7] Dans un autre champ, celui des relations entre le philosophique et le mathématique, on renvoie à [K2] mais surtout à [C'].

lons agir". On pourrait ainsi imaginer une étude préalable au "programme des mathématiques du XXI^{e} siècle" qui consisterait, dans une collaboration entre mathématiciens et autres scientifiques, à recenser les problèmes importants de ces sciences qui mériteraient l'effort —nouveau ou décuplé— des mathématiciens (intégrales de Feynmann, turbulences, certains systèmes complexes encore inabordés de ce point de vue, biologie théorique, sciences cognitives...) et à faire surgir des choix correspondant à une vraie demande sociale.

Un programme de cette nature, mettant en œuvre la puissance des mathématiques, ne ferait-il pas rire David Hilbert... de joie?

Paris, février 1993.

Post-Scriptum (mars 1993)

Je remercie Barry Mazur de ses remarques à la lecture d'une première version de ce texte :

"Looking over the Hilbert problems as you reviewed them, for me is *quaintness*. One thinks of mathematical developments in the latter part of the century (Grothendieck's, Langland's, Beilinson's conjectures, classification of finite simple groupes, of differential structures, singularity theory, conformal and topological field theories with their concommitant theories of quantum groups, balanced tensor categories, invariants of three-manifolds, classification of three-manifolds à la Thurston, ...) and one squints at a stock of old Daguerreotypes, charming mementoes of the period."

REFERENCES GENERALES

[C] Congrès International des mathématiciens, Kyoto 1990. Actes, Mathematical Society of Japan, Springer-Verlag, 1992.

[C'] P. Cartier, "La pratique —et les pratiques— des mathématiques" Encyclopédie philosophique universelle, vol. 1, 1991.

[D] "Ein Jahrhundert Mathematik 1880-1930" Fetschrift rum Jubilaüm der DMV, Vieweg & S. 1990. Recension "The mathematical intelligencer", 13, 4, p.70-74.

[E] Современие проблеми математики, Фудаменталние направлиениа, Итоки науки и техники, Москва, 1985. Edition anglaise : Encyclopædia of mathematical sciences, Springer-Verlag, 1990.

[F] J.M. Fontaine, "Valeurs spéciales des fonctions L des motifs" Séminaire Bourbaki, 1992, Exposé 751.

[G] A. Grothendieck, "Esquisse d'un programme" Dossier de candidature au C.N.R.S. 1985, non publié.

[H] D. Hilbert, "Sur les problèmes futurs des mathématiques" Compte-rendu du deuxième Congrès international des mathématiques, Paris, Gauthier-Villars, 1902, p. 58-114.

[I] "Images des mathématiques" Supplément au courrier du C.N.R.S.

1985

— J.F. Boutot, L. Moret-Bailly, "Equations diophantiennes : la conjecture de Mordell."

— "Images des nombres transcendants, d'après P. Philippon."

1988

— M. Parigot, "Preuves et programmes; les mathématiques comme langage de programmation."

— J.M. Ghidaglia et J.C. Saut, "Equations de Navier-Stokes, turbulence et dimension des attracteurs."

1990

— F. Sergeraert, "Infini et effectivité : le point de vue fonctionnel."

— F. Bethuel, H. Brezis, J.M. Coron, F. Helein : "Problèmes mathématiques des cristaux liquides."

[K] J.-M. Kantor, "Hilbert (problèmes de)" Encyclopædia Universalis, 1989, vol. 11

[K2] J.-M. Kantor, "L'intuition en équations" Compte-rendu du Congrès de Kyoto, Le Monde, Août 1990.

[L] J.-L. Lions, "L'Ordinateur, nouveau Dédale" Daedalon gold Medal lecture, 1991.

[M] "Mathematical developments arising from Hilbert Problems" Edited by F. Browder, 1976, A.M.S. Proceedings

[LeL] "Les grands courants de la pensée mathématique" Edité par F. Le Lionnais, en particulier articles de J. Dieudonné, R. Godement, A. Weil, 1948, rééd. 1962.

[P] H. Poincaré, "L'avenir des mathématiques" Congrès International des mathématiciens, Rome, 1908.

[R] C. Reid, "Hilbert" Springer-verlag, 1970.

REFERENCES SPECIFIQUES DES PROBLEMES

Logique (problèmes 1 et 2)

[B] Bouleau, J.Y. Girard, A. Louveau, "Cinq conférences surl'indécidabilité" 1982, Presses de l'Ecole nationale des Ponts et Chaussées.

[G] E. Nagel, J. Newman, K. Gödel, J.Y. Girard, "Le théorème de Gödel" Seuil 1989.

Problème 3

[A] "Agrégation de mathématiques, problèmes de mathématiques générales" Revue de mathématiques spéciales, 1985-86, p. 139-150.

[B] Boltianski, "Hilbert's third problem" Wiley 1978

[C] P. Cartier, "Décomposition des polyèdres : le point sur le troisième problème de Hilbert" Sém. Bourbaki, 1984-85, n°646.

[S] G. Sah, "Hilbert's third problem : scissors congruence" Pitman, 1979.

Problème 5

[A] Aczel J., "The state of the second part of Hilbert's fifth problem" B.A.M.S. 20, 1982.

[G] M. Gromov, "Groups with polynomial growth and expanding maps" Publications de l'I.H.E.S., N°53.

Problème 6

[B] "P. Bohl's fourth thesis and Hilbert sixth problem" (Naouka, 1986).

Problème 7

[B-M] A. Baker and D.W. Masser (ed.), "Transcendence theory, advances and applications" Academic Press, 1977.

[B-W] D. Bertrand et M. Waldschmidt (ed.), "Approximations diophantiennes et nombres transcendants" Birkhäuser P.M. 31, 1983.

[B] A. Barker (ed.), "New advances in transcendence theory" Cambridge University Press, 1988.

[P] P. Philippon (ed.), "Approximation diophantiennes et nombres transcendants" de Gruyter, 1992.

Problèmes 8 et 9

[B-I] E. Bombieri, Iwaniec, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 13, 1986.

[G-K] Graham, Kolesnik, LMS Lecture Notes, 126, Springer-Verlag 1991.

[I] Ivic, "The Riemann Zeta function" (Wiley, 1985).

[T] Titchmarsh, "The Riemann Zeta function" (Oxford, 1986.).

Problème 13

[D] J. Dixmier, "Histoire du treizième problème de Hilbert" Séminaire d'histoire des mathématiques de l'Institut Henri Poincaré, 1991-1992 (publié dans ce volume).

[JPK] J.-P. Kahane, "Le treizième problème de Hilbert : un carrefour de l'analyse, de l'algèbre et de la géométrie" Cahiers du Séminaire d'histoire des mathématiques, série 1, volume 3 (1982).

[R] J.J. Risler, "Complexité et géométrie réelle, d'après A. Khovanski" Sém. Bourbaki, 1984-85, Nov. 84, N°637.

[K] A. Khovanski, "The representability of algebroïdal functions as compositions of analytical functions and one variable algebroïdal functions" Funct. an. and its applic. v. 4, N°2, 1970, p. 74-79.

[L] V. Y. Lin, "Superposition of algebraic functions" Funct. An. and its applic., 1976, 10, 1, p. 32-38. 1976, p. 37-45.

Problème 16

[B] J. Bochnak M. Coste M. F. Roy "Géométrie algébrique réelle" Springer-Verlag, Ergebnisse, 1986.

[R] J.J. Risler, "Les nombres de Betti des ensembles algébriques réels, une mise au point" Gazette des mathématiciens, 1992.

[V] Viro, Успехи в топологии вещественныих агебраицескыих многобразии. Proc. Int. Cong. Warsawa, 1983, 595-611.

Problème 17

[BS] H. Benis-Sinaceur, "De D. Hilbert à E. Artin : Les différents aspects du dix-septième problème de Hilbert et les filiations conceptuelles de la théorie des corps réels clos" Arch. Hist. Ex. Sc., 29, 3, 1984, pp. 267-286.

[K] A. Khovanskii, "Fewnomials" A.M.S.1991, Translations of mathematical monographs.

Problème 18 parties A et B

[G-S] B. Grünbaum, G.C. Shepard, "Tiling with congruent tiles" B.A.M.S. 3, 1980, 951-973.

[D-G] L. Danzer, B. Grünbaum, G.C. Shepard, "Does every type of polyhedron tile three-space? " Topologie structurale, 8, 1983.

[D-K] M. Duneau, A. Katz, "Cristaux apériodiques et groupe de l'icosaèdre" Publications du Centre de Physique théorique, Ecole polytechnique, Palaiseau.

Problème 18 partie C

[C-S] J. Conway, N.J. Sloane, "Sphere packings, lattices and groups, " Grundlehren, 290, Springer-Verlag. 1988.

[O] J. Oesterlé, "Empilementde sphères" Sém. Bourbaki, 1989-90, N°727, juin90.

"Les sphères de Kepler" vidéo, série "Mosaïque mathématique" Prod. Les films d'ici, Paris.

[P] R. Penrose, "Pentaplexity : a class of non-periodic tilings of the plane" Math. Intelligencer 2, 1979, 32-37.

[S] F. Sigrist, "Sphere packing" Math. Intelligencer, 5, 3, 1983.