PIERRE CARTIER

Des nombres premiers à la géométrie algébrique (une brève histoire de la fonction zêta)

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 2e série, tome 3 (1993), p. 51-77

<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1993_2_3__51_0>

DES NOMBRES PREMIERS A LA GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

(une brève histoire de la fonction zéta)

Pierre CARTIER[1]

A André Weil
qui m'a servi de guide,
ici et ailleurs.

TABLE DES MATIÈRES

---

[1] Ce texte reproduit le contenu d'un exposé donné au Séminaire d'Histoire des Mathématiques de l'Institut Henri Poincaré le 23 janvier 1991. La rédaction préliminaire en est due à M. LELIEVRE. Je le remercie pour ce travail méticuleux et pour la compilation de la bibliographie, ainsi que pour son inlassable patience dans notre collaboration.

La première partie de ce travail est consacrée à un inventaire des diverses fonctions ζ qui ont été introduites en Mathématiques, de Riemann jusqu'à l'époque récente. Dans la seconde partie, qui forme véritablement le sujet de mon propos, je me limiterai à la ***préhistoire*** des rapports entre la fonction ζ et la géométrie, époque qui s'étend ***grosso modo*** de 1920 (début des travaux d'Artin) à 1950 (avec l'article d'A. Weil où est définie la fonction ζ associée à une variété algébrique). Je n'aborderai pas ici les développements ultérieurs dus essentiellement à Grothendieck, Deligne et leurs successeurs; ils nécessiteraient (et mériteraient d'ailleurs) un autre exposé.

I. LES MÉTAMORPHOSES DE LA FONCTION ζ

Nombreuses sont les applications de la fonction zéta, nombreuses aussi les classes connues de fonctions zéta. Pour illustrer leur diversité, je commencerai par en établir un catalogue, ni exhaustif, ni complètement détaillé.

1. Euler et Riemann.

La première fonction zéta, introduite par Euler et reprise par Riemann, a servi de prototype aux diverses généralisations. Celles-ci visent essentiellement deux buts:

– Il s'agit tout d'abord d'*appliquer les techniques* qui ont fait leurs preuves pour la fonction ζ de Riemann, en vue d'obtenir des renseignements, souvent analytiques, dans des problèmes de nature arithmético-géométrique.

– Peut-être y a-t-il eu aussi un phénomène de *fuite en avant*. Comme on n'a pas encore jusqu'à ce jour réussi à démontrer l'*hypothèse de Riemann* (qui est le problème central touchant la fonction ζ) – malgré les efforts importants entrepris récemment pour sa résolution (par L. de Branges, notamment) – on a essayé d'en prouver des variantes ou des extensions. Cette fuite en avant n'a pas été totalement vaine, même si elle n'a pas permis de résoudre tous les problèmes fondamentaux; elle a engendré des *méthodes* permettant d'attaquer l'hypothèse de Riemann proprement dite. Notamment, comme Weil l'a expliqué de manière éloquente, l'analogie entre corps de nombres et corps de fonctions a joué un rôle méthodologique extrêmement important, qui a justifié les efforts entrepris; on peut dire aujourd'hui que dans tous les cas raisonnables où l'on peut formuler une hypothèse de Riemann, *sauf le cas original*, on a à peu près résolu la question. Il semble toutefois qu'il y ait quelque chose d'irréductible dans le cas de l'hypothèse initiale et qu'il nous manque un chaînon décisif, que nous fourniraient peut-être les travaux récents, dits de *géométrie d'Arakelov*.

Rappelons brièvement les principales propriétés qui constituent la charpente de la théorie de la fonction ζ de Riemann, et qui ont servi de modèle à toutes les généralisations.

a. *Développement en série de Dirichlet et en produit infini eulérien:*

La fonction ζ a été définie initialement par Euler (1748) sous la forme d'un produit infini $\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$ où p parcourt tous les nombres premiers. Euler a ensuite remarqué que cette fonction pouvait également se représenter par un développement en série $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$. Le développement de la fonction ζ en produit eulérien n'est en fait qu'une manière condensée d'exprimer le théorème de décomposition de tout entier en produit de nombres premiers (existence et unicité). Euler a prouvé que $\zeta(s)$ est bien défini (*i.e.* que la série et le produit infini convergent) pour tout nombre réel $s > 1$.

b. *Prolongement analytique:*

C'est Riemann (1859) qui, le premier, a considéré la fonction ζ comme une fonction d'une variable complexe. Le développement en produit infini montre d'emblée que la fonction ζ est holomorphe et n'a pas de zéros dans le domaine Re $s > 1$. Riemann a posé et résolu le problème du prolongement analytique pour la fonction ζ, à savoir: définir $\zeta(s)$ également pour tous les nombres complexes s. Il montre que $\zeta(s)$ a un pôle pour $s = 1$, et même un pôle simple, mais n'a pas d'autre singularité. Elle s'étend en une fonction méromorphe sur tout le plan complexe, avec un résidu connu pour $s = 1$, égal à 1:

$$\operatorname{Res}_{s=1} \zeta(s) = 1. \tag{1}$$

c. *Equation fonctionnelle:*

Riemann écrit aussi une égalité mettant en relation $\zeta(s)$ et $\zeta(1-s)$, que l'on appelle l'équation fonctionnelle de la fonction ζ. Il remarque que si l'on modifie la fonction ζ en $\xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$, l'équation fonctionnelle prend une forme très condensée:

$$\xi(s) = \xi(1-s). \tag{2}$$

Cette équation donne déjà des renseignements intéressants sur les zéros de la fonction ζ, en examinant simplement les pôles de la fonction Γ; sachant que la fonction ζ n'a comme seule singularité que $s = 1$, on peut obtenir ce qu'on appelle les *zéros triviaux* de la fonction, ceux dans la zone Re $s < 0$, à savoir les zéros simples $s = -2, -4, \ldots, -2n, \ldots$.

En fait, Euler avait déjà suggéré implicitement l'équation fonctionnelle de la fonction ζ. Il avait calculé $\zeta(2)$, $\zeta(4)$, $\zeta(6), \ldots$ au moyen des nombres de Bernoulli B_{2n}

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \ , \zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \ , \tag{3}$$

l'expression générale ayant la forme

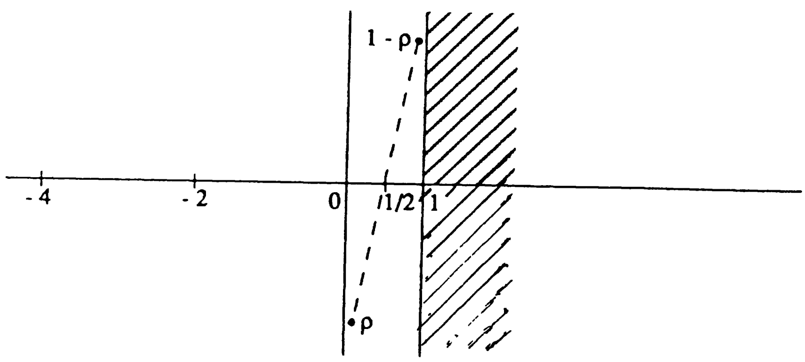
$$\zeta(2n) = \frac{2^{2n-1}\ \pi^{2n}\ |B_{2n}|}{(2n)!}. \tag{4}$$

Il avait aussi calculé, indépendamment, la valeur de ζ aux entiers impairs négatifs, par des méthodes qui n'avaient guère de fondement tant qu'on n'avait pas effectué, avec Riemann, le prolongement analytique du côté Re $s < 1$ (la fonction ζ n'étant définie initialement que pour s réel > 1). Il avait ainsi obtenu une relation entre $\zeta(-1)$ et $\zeta(2)$, entre $\zeta(-3)$ et $\zeta(4)\ldots$; ce n'était qu'un cas particulier de l'équation fonctionnelle $\xi(s) = \xi(1-s)$.

d. *La formule du produit et la répartition des nombres premiers:*

Concernant les zéros de la fonction ζ, on doit à Riemann deux résultats fondamentaux dans son mémoire de 1859. Tout d'abord, Riemann ajoute un facteur $s(s-1)$ dans la fonction $\xi(s)$; cela ne détruit pas l'équation fonctionnelle, mais lui permet d'obtenir une fonction entière $\xi(s) = \pi^{-s/2}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\,\zeta(s)\,s(s-1)$ car les deux pôles sont compensés. (Aujourd'hui, on préfère garder la fonction méromorphe[1].) Grâce à l'équation fonctionnelle, on montre facilement que les zéros de la fonction ξ sont situés dans la bande critique $0 < \text{Re } s < 1$. Il est de tradition, depuis Riemann, d'appeler ρ ces zéros. La fonction ξ est désormais une fonction entière; si l'on connaît l'ensemble de ses zéros, on doit pouvoir la reconstituer[2]. Riemann affirme alors que $\xi(s)$ s'écrit sous forme du produit d'une constante par un produit infini qui parcourt tous les zéros de la fonction ξ, chaque facteur s'annulant pour le zéro $s = \rho$ correspondant de $\zeta(s)$. Bien entendu, ce produit infini diverge mais – et c'est un point important – il converge si on le rend symétrique, *i.e.* si l'on regroupe judicieusement les facteurs. L'équation fonctionnelle montre en effet qu'on peut associer à tout nombre ρ le nombre $1-\rho$ qui en est le symétrique, géométriquement, par rapport à $\frac{1}{2}$. De ce fait, si l'on regroupe dans ce produit infini le facteur correspondant à ρ et le facteur correspondant à $1-\rho$, on obtient un produit infini absolument convergent (le prime signifie que l'on ne prend qu'une fois chaque paire ρ, $1-\rho$)

$$\xi(s) = c \prod_{\rho}{}' \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) \cdot \left(1 - \frac{s}{1-\rho}\right). \tag{5}$$



[1] On prendra garde aux deux significations différentes du même symbole $\xi(s)$ selon les époques!

[2] Songer au cas d'un polynôme! Euler n'a pas de scrupules à cet endroit.

Le premier problème majeur, dans le mémoire de Riemann de 1859, était de démontrer cette formule; il l'énonce, mais les justifications qu'il en donne sont très insuffisantes. L'objectif de Riemann est d'utiliser cette formule du produit pour en déduire des estimations très précises sur la répartition des nombres premiers. Si l'on note, suivant la tradition, $\pi(x)$ le nombre (Anzahl) de nombres (Zahlen) premiers $p \leq x$, Legendre (1788) et Gauss (en 1792, mais jamais publié) avaient conjecturé qu'on avait $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ pour $x \to \infty$. Riemann donne des formules encore plus précises au moyen de sommations portant sur les zéros et les $\pi(x)$. En fait, il a fallu près de quarante ans pour que Hadamard (1896) et, indépendamment, de la Vallée Poussin (1896) démontrent rigoureusement cette formule de développement en produit infini au moyen d'une théorie générale de la factorisation des fonctions entières – par des arguments qui étaient essentiellement connus d'Euler et de Riemann, en tout cas certainement de Riemann – et justifient ainsi rigoureusement la loi de répartition des nombres premiers. Hadamard donne la forme $\lim_{x \to \infty} \pi(x)/\frac{x}{\log x} = 1$, et de la Vallée Poussin donne la forme plus forte $\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + O\left(x\ e^{-c\sqrt{\log x}}\right)$ pour une constante $c > 0$.

e. *L'hypothèse de Riemann:*

La seconde grande question que soulève Riemann dans son mémoire de 1859 concerne ce qu'on appelle l'hypothèse de Riemann, à savoir: *les zéros non triviaux de la fonction* ζ (*i.e.* ceux qui sont situés dans la bande critique $0 < \text{Re } s < 1$) *ont tous une partie réelle égale à* $\frac{1}{2}$; autrement dit, les zéros complexes de ζ sont tous sur ce qu'on appelle la "droite critique". Riemann lui-même, en 1859, assigne la démonstration rigoureuse de cette conjecture ("Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen") comme but à ses recherches futures, mais l'abandonne dans l'immédiat, car il peut s'en passer pour le moment ("da er für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien"). Comme je l'ai indiqué plus haut, les nombreux efforts entrepris depuis Riemann pour démontrer cette hypothèse ont été vains jusqu'à présent.

En attendant une démonstration rigoureuse, quelle assurance peut-on fonder sur l'évidence numérique? Odlyzko, l'éminent spécialiste d'analyse numérique, que j'ai interrogé là-dessus il y a un ou deux ans, m'a avoué qu'il ne prendrait pas le risque de parier. Le fait est que jusqu'à présent, chaque fois qu'on a pu calculer les zéros de la fonction ζ de Riemann dans une certaine tranche – on en a calculé jusqu'à un milliard et demi par ordre croissant (tel était le record du monde détenu en 1986 par R.P. Brent) et on a calculé aussi les zéros dans des bandes ultérieures beaucoup plus étroites (c'est ce que Odlyzko a fait assez récemment) – ils étaient tous sur la droite critique, mais – et c'est la remarque que font ceux qui ont effectué des calculs numériques – il reste toujours la crainte du phénomène de bifurcation suivant. Tous les zéros qu'on a testés sont simples, mais il y a parfois des paires de zéros extrêmement rapprochés, et dans certains cas, il faut faire un calcul très précis pour arriver à les distinguer. Or, un argument topologique facile montre que si on déforme un tout petit peu une fonction qui a une paire de tels zéros extrêmement rapprochés, on peut obtenir deux zéros qui sont symétriques par rapport à la droite critique. Numériquement, on tombe dans des zones où le brouillard s'accroît, et il se pourrait que deux tels zéros bifurquent en deux zéros qui soient symétriques par rapport à l'axe d'abcisse $\frac{1}{2}$; on a d'ailleurs de temps en temps des sueurs froides avant que les calculs ne soient totalement confirmés. Ainsi, le sentiment général des spécialistes d'analyse numérique est qu'il n'y a pas d'évidence absolument contraignante pour que l'hypothèse de Riemann soit vraie. Comme on va le voir, partant méthodologiquement de l'hypothèse de Riemann, on a construit, par analogie, une énorme machine mathématique, mais il se pourrait encore que l'hypothèse de Riemann soit fausse. Personnellement, jusqu'à présent j'ai plutôt parié que l'hypothèse de Riemann était vraie: cela a guidé un certain nombre des recherches que j'ai faites. Mais je ne serais pas vraiment surpris qu'elle soit fausse.

Passons maintenant en revue les nombreuses fonctions zéta qu'on a fabriquées par analogie, en généralisant les propriétés fondamentales de la fonction ζ classique d'Euler-Riemann, qui viennent d'être rappelées.

2. Fonctions L de Dirichlet, formes quadratiques binaires.

Le prototype des travaux de Dirichlet, autour de 1840, est le suivant. Il étudie les représentations d'un nombre entier comme somme de deux carrés, question déjà résolue par Fermat pour l'essentiel. Il se trouve que tous les résultats de Fermat sur ce sujet peuvent être condensés sous une forme quantitative compacte de la manière suivante:

$$\text{(1)} \quad \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}{}' \frac{1}{(m^2+n^2)^s} = 4(1^{-s}+2^{-s}+3^{-s}+\cdots)\cdot(1^{-s}-3^{-s}+5^{-s}-7^{-s}+\cdots) = 4\zeta(s)L(s)$$

($\sum'$ veut dire qu'en somme sur tous les couples $(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ différents de $(0,0)$).

Il est facile de généraliser la série (1) au cas d'une forme quadratique (définie positive) binaire (*i.e.* à deux variables) par une somme du type $\sum'_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} (am^2+bmn+cn^2)^{-s}$. Dirichlet découvre l'avantage de mettre cette somme sous la forme d'une série génératrice $\sum_{k=1}^{\infty} u_k\, k^{-s}$, où u_k est le nombre de solutions entières de l'équation $am^2+bmn+cn^2=k$, pour un entier k fixé et pour des entiers a, b, c donnés par la forme quadratique définie positive.

Dirichlet remarque d'abord qu'on ne doit pas prendre n'importe quelle forme quadratique; il faut que son discriminant $D = 4ac - b^2$ soit primitif, *i.e.* qu'on ne puisse pas l'écrire sous la forme $D = d\cdot t^2$ où t est un entier et d un discriminant de ce type. Il faut donc se limiter aux discriminants primitifs.

Dirichlet introduit ensuite plusieurs idées importantes:

1) *Equivalence de formes quadratiques.* Supposons que l'on ait deux formes quadratiques

$$Q(m,n) = am^2+bmn+cn^2 \quad , \quad Q'(m,n) = a'm^2+b'mn+c'n^2.$$

Elles seront dites équivalentes, au sens arithmétique[1], s'il existe une transformation linéaire

[1] Cette notion était déjà connue de Gauss (voir les "Disquisitiones").

du type

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} m' = & \alpha m + \beta n \\ n' = & \gamma m + \delta n \end{cases}$$

avec des coefficients α, β, γ, δ entiers, et $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, telle que l'on ait $Q(m,n) = Q'(m',n')$ lorsque la relation précédente est satisfaite. S'il en est ainsi, le nombre u_k de solutions de l'équation $Q(m,n) = k$ est égal au nombre u'_k de solutions de l'équation $Q'(m,n) = k$. Par suite, les séries $\sum'_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} Q(m,n)^{-s}$ et $\sum'_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} Q'(m,n)^{-s}$ ont la même valeur.

2) *Séries périodiques.*- Dans la formule (1) ci-dessus apparaît la série $1^{-s} - 3^{-s} + 5^{-s} - 7^{-s} + \cdots$ qu'on peut réécrire comme différence des deux séries $1^{-s} + 5^{-s} + 9^{s} + \cdots$ et $3^{-s} + 7^{-s} + 11^{-s} + \cdots$. Plus généralement, étant donné un entier $\Delta \geq 2$, on pourra considérer les Δ séries suivantes

$$1^{-s} + (\Delta+1)^{-s} + (2\Delta+1)^{-s} + (3\Delta+1)^{-s} + \cdots$$

$$2^{-s} + (\Delta+2)^{-s} + (2\Delta+2)^{-s} + (3\Delta+2)^{-s} + \cdots$$

$$\cdots$$

$$\Delta^{-s} + (\Delta+\Delta)^{-s} + (2\Delta+\Delta)^{-s} + (3\Delta+\Delta)^{-s} + \cdots$$

correspondant aux Δ progressions arithmétiques de raison Δ. Les séries intéressantes seront les combinaisons linéaires des séries précédentes; ce sont celles qui s'écrivent sous la forme $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, k^{-s}$ avec $a_{k+\Delta} = a_k$ (séries périodiques).

3) *Regroupement de séries.* La forme quadratique $Q(m,n) = m^2 + n^2$ est de discriminant 4, et l'on peut prouver que toutes les formes quadratiques de discriminant 4 sont équivalentes au sens arithmétique. Dans le cas général, il convient de donner deux définitions

$$\text{(3)} \qquad \zeta_Q(s) = \sum'_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} Q(m,n)^{-s}$$

$$\text{(4)} \qquad \zeta_D(s) = \sum_{\{Q\}} \zeta_Q(s);$$

dans cette dernière formule, Q parcourt un ensemble de représentants des formes quadratiques de discriminant D, pour l'équivalence arithmétique.

Dirichlet prouve ensuite une généralisation de la formule (1) sous la forme

$$\zeta_D(s) = w \cdot \zeta(s) \cdot L_D(s). \tag{5}$$

La constante w est égale à 2, avec deux exceptions[1]

$D = 3 \quad , \quad w = 6$

$D = 4 \quad , \quad w = 4.$

La fonction $\zeta(s)$ est celle d'Euler-Riemann. Enfin la série $L_D(s)$ est de la forme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) n^{-s}$. Le coefficient $\left(\frac{D}{n}\right)$ est appelé le *symbole de Jacobi*; il est égal à 0 si D et n ont un diviseur $d > 1$ en commun, et il vaut ± 1 dans les autres cas. On a une périodicité

$$\left(\frac{D}{m}\right) = \left(\frac{D}{n}\right) \quad \text{si} \quad m \equiv n \mod. D$$

et la série $L_D(s)$ est bien du type considéré au 2). De plus, dans une période, il y a autant de termes égaux à $+1$ que de termes égaux à -1.

La fonction $\zeta_D(s)$ a un pôle simple pour $s = 1$, comme la fonction ζ de Riemann. Le calcul du résidu de $\zeta_D(s)$ pour $s = 1$ est un des outils les plus originaux et les plus performants de Dirichlet. On peut, en fait, calculer de deux manières différentes ce résidu: une manière qui utilise la factorisation (5) ci-dessus, et une autre plus géométrique. En comparant les deux résultats, on s'aperçoit alors que le *nombre de classes*[2], *i.e.* le nombre de formes quadratiques, à équivalence près, d'un discriminant donné D, se calcule facilement au moyen du nombre[3] $L_D(1) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{D}{n}\right)$; telle est l'origine des méthodes analytiques pour calculer le nombre de classes. Tout cela était bien connu et parfaitement assimilé en 1920 et servira de modèle aux généralisations ultérieures (voir la partie II).

On a ici introduit la fonction $\zeta_D(S)$ en liaison avec les formes quadratiques binaires (point de vue de Dirichlet). Il se trouve aussi que c'est la fonction zéta associée au corps de nombres $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ (au sens de Dedekind). Pour ce type de fonction ζ, les deux théories, celle des *formes quadratiques* à deux variables et celle des *corps quadratiques*, sont essentiellement les mêmes. Par contre, elles divergent si l'on passe au cas des formes quadratiques à plus de deux variables, et elles donnent lieu à deux types de généralisation de la fonction ζ, la généralisation d'Epstein et celle de Dedekind, que nous allons considérer maintenant.

---

[1] En ce sens, il y a une certaine atypicité dans la formule (1) qui sert de prototype à ces recherches.

[2] On le note traditionnellement $h(D)$.

[3] La série converge, mais non absolument. La sommation de telles séries est un "exercice de calcul intégral" classique; il repose sur les manipulations de racines de l'unité et le développement en série $\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots$

3. Fonctions ζ et formes quadratiques (Epstein et Siegel).

Présentons la forme géométrique de ce type de généralisation de la fonction ζ.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $d > 0$, muni d'une forme quadratique Q et soit Λ un réseau de E. Epstein (1903), au début de notre siècle, définit de la façon suivante une fonction qui généralise la fonction ζ_Q précédente:

$$Z_{E,Q,\Lambda}(s) = \sum_{\substack{\xi\in\Lambda \\ \xi\neq 0}} Q(\xi)^{-s}.$$

Pour cette fonction, il étudie, comme cela avait été fait pour la fonction ζ de Riemann, le domaine de convergence absolue (ici Re $s > \frac{d}{2}$), le prolongement analytique, les pôles, l'équation fonctionnelle, la série génératrice et la série théta associée[1].

Toutefois, cette façon de généraliser la fonction ζ_Q de Dirichlet ne vaut que si la forme quadratique Q est définie positive, et Epstein se borne à ce cas. Lorsque la forme quadratique Q est indéfinie, *i.e.* lorsqu'elle ne prend pas que des valeurs strictement positives, on a quand même pu définir une fonction ζ associée. Il faut procéder de façon plus subtile, car on ne peut plus sommer la série précédente devenue divergente. Aussi a-t-il fallu attendre Siegel, à partir de 1930, pour se débarrasser des difficultés liées à ce cas.

Ces difficultés sont faciles à comprendre géométriquement. Si la forme quadratique Q est indéfinie, l'ensemble des points où elle prend une valeur déterminée forme (disons en dimension trois) un hyperboloïde à une ou deux nappes. Or, sur un hyperboloïde donné, il peut y avoir une infinité de points du réseau Λ. Mais, dans cette situation, il y a deux groupes de symétrie dont il faut tenir compte:

– les transformations linéaires de E qui laissent invariante la forme quadratique Q forment le groupe orthogonal $O(Q)$;

– les transformations linéaires de E qui laissent invariant le réseau Λ forment un groupe arithmétique $GL(\Lambda)$ isomorphe[2] à $GL_d(\mathbb{Z})$.

On se trouve dans la situation du diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} & GL_d(\mathbb{R}) = GL(E) & \\ \nearrow & & \nwarrow \\ O(Q) & & GL(\Lambda) = GL_d(\mathbb{Z}). \end{array}$$

On introduit ensuite l'intersection de ces deux groupes, formant le vrai groupe de symétrie, constitué des transformations linéaires *qui conservent à la fois la forme quadratique et le réseau.* Si l'on applique à ξ une transformation qui laisse invariante la forme quadratique Q, le terme $Q(\xi)^{-s}$ est conservé; si cette transformation laisse invariant le réseau Λ, le terme

[1] Elle est donnée par l'expression $\Theta(\tau) = \sum_{\xi\in\Lambda} \exp \pi i \tau Q(\xi)$.

[2] Pour tout anneau commutatif A, et tout entier $d \geq 1$, on note $GL_d(A)$ le groupe des matrices carrées d'ordre d, à éléments dans A, dont le déterminant a un inverse dans A.

$Q(\xi)^{-s}$ est transformé en un autre terme de la même série; on risque donc de répéter une infinité de fois le même terme. Pour éviter cela, on sommera donc les termes $Q(\xi)^{-s}$ où ξ parcourt l'intersection du réseau Λ et d'un domaine fondamental du groupe Γ dans E.

Ce qu'a fait Siegel avait déjà été fait par Dirichlet pour les formes quadratiques binaires; ceci constituait pour ce dernier un grand tour de force par rapport au jeu d'enfant qu'était pour lui le cas des formes quadratiques définies positives. Pour les formes quadratiques définies positives, la généralisation de Dirichlet à Epstein (*i.e.* de deux à plusieurs variables) était assez immédiate; mais il a fallu presque 100 ans pour réaliser, avec Siegel, l'extension analogue pour les formes quadratiques indéfinies.

4. Fonctions ζ et corps de nombres algébriques (Dedekind).

L'autre généralisation, due à Dedekind, consiste à partir d'un corps de nombres algébriques K de degré $[K : \mathbb{Q}] = d$. On lui associe une fonction, qu'on appelle fonction ζ de Dedekind, par la formule

$$Z_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} N(\mathfrak{a})^{-s},$$

où $\mathfrak{a}$ parcourt les idéaux non nuls de l'anneau $\mathcal{O}_K$ des entiers de K (on voit que cette définition généralise la somme $\sum\limits_n n^{-s}$); Dedekind exprime également cette fonction sous la forme d'un produit eulérien

$$Z_K(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - N(\mathfrak{p})^{-s}},$$

où $\mathfrak{p}$ parcourt tous les idéaux premiers de $\mathcal{O}_K$. L'égalité de ces deux expressions (série de Dirichlet et produit infini eulérien) vient essentiellement de la factorisation unique d'un idéal en produit de facteurs premiers, ce qui est la contribution fondamentale de Kummer, puis de Dedekind à la théorie des nombres: Kummer a ouvert la voie et Dedekind (1879) a exploité la théorie dans toute sa force et dans sa généralité optimale.

Dedekind et d'autres après lui étudient, pour cette fonction, des propriétés analogues à celles de la fonction ζ de Riemann: domaine de convergence absolue (pour Re $s > 1$), prolongement analytique en une fonction méromorphe (Landan (1903) pour le prolongement à un demi-plan, Hecke (1917) pour le prolongement au plan complexe tout entier), détermination des pôles et calcul des résidus, localisation des zéros. Dedekind conjecture pour cette fonction l'analogue de l'hypothèse de Riemann. Mais, à cause du même type de difficulté que celui auquel s'est affronté Siegel pour les formes quadratiques indéfinies, Dedekind n'est pas en mesure de démontrer l'équation fonctionnelle pour cette fonction ζ. C'est Hecke qui, en 1917, la démontrera: $Z_K(s)$ et $Z_K(1-s)$ sont la même chose, pourvu qu'on corrige $Z_K(s)$ par un produit convenable $\gamma(s)$ de facteurs gamma analogue à celui que j'ai donné dans le cas de Riemann, *i.e.*

$$\gamma(s)\ Z_K(s) = \gamma(1-s)\ Z_K(1-s).$$

On a vu que lorsqu'on passe de la dimension 2 à la dimension supérieure, la théorie de Dirichlet bifurque d'un côté vers les formes quadratiques d'Epstein et de Siegel, de l'autre vers les corps de nombres algébriques de Dedekind. Aujourd'hui, la seconde théorie est beaucoup mieux comprise que la première; car si, pour les formes quadratiques définies positives, on a de nombreux renseignements, pour les formes indéfinies en revanche, il reste encore, malgré les efforts de Siegel, beaucoup de travail à fournir.

5. Fonctions ζ d'Artin et Schmidt.

J'en arrive maintenant au cœur du sujet de mon exposé, à savoir un autre type de généralisation de la fonction ζ, introduite par E. Artin dans sa thèse (soutenue en 1921, publiée en 1924) et développée par F.K. Schmidt (1931).

Artin remplace, dans la définition de la fonction ζ de Dedekind le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels par un corps qui est tout à fait analogue, à savoir le corps $\mathbb{F}_p(t)$ des fractions rationnelles sur un corps $\mathbb{F}_p$ à p éléments. Une grande partie de la théorie d'Artin-Schmidt consistera à développer l'analogie entre le corps des nombres rationnels et les corps $\mathbb{F}_p(t)$, de la façon suivante:

Théorie de Dirichlet-Dedekind		*Théorie d'Artin-Schmidt*
Dirichlet prend une extension quadratique $\mathbb{Q}\left(\sqrt{D}\right)$	$\leftrightarrow$	Artin prend une extension quadratique $\mathbb{F}_p(t)\left(\sqrt{D}\right)$
Dedekind prend un corps de nombres quelconque K, *i.e.* une extension finie de $\mathbb{Q}$	$\leftrightarrow$	Schmidt prend une extension finie K de $\mathbb{F}_p(t)$

La théorie d'Artin-Schmidt se développe donc en parallèle avec celle de Dirichlet-Dedekind, et elle s'efforce de calquer les résultats acquis: définition par série de Dirichlet et par produit eulérien, équation fonctionnelle, prolongement analytique.

Quelle est la signification géométrique de cette généralisation? La théorie des formes quadratiques (définies et indéfinies) était déjà, en un sens, de la géométrie: géométrie d'un réseau, d'un hyperboloïde. Mais, à partir d'Artin, la géométrie acquiert un tout autre sens: il s'agira de la géométrie des courbes sur un corps fini $\mathbb{F}_p$ ou sur une extension $\mathbb{F}_q$ de $\mathbb{F}_p$. Mais, percevoir ces problèmes comme des problèmes géométriques en ce sens, sera en fait le tournant le plus difficile à prendre. C'est vraiment A. Weil qui l'effectuera vers 1940. Avant lui, on reste surtout motivé par l'analogie entre l'arithmétique des corps de nombres et celle des corps de fonctions algébriques.

6. Fonction ζ d'une variété algébrique sur un corps fini (A. Weil).

Le prolongement naturel des travaux d'Artin est fourni par ceux d'A. Weil que couronne son article au premier Congrès International des Mathématiciens après la seconde guerre mondiale (Harvard, 1950). Une fois qu'il a bien mis au point, de 1941 à 1948, la géométrie des courbes et introduit une fonction ζ dans ce cas, il se hasarde à remplacer les courbes qui sont des variétés algébriques de dimension 1 par des variétés algébriques de dimension supérieure, et il définit la fonction ζ d'une variété algébrique sur un corps fini, disons un corps de Galois $\mathbb{F}_q$ à q éléments.

Remarquons à ce propos à quel point la notation q est extraordinaire; il se trouve que q est à la fois l'*uniformisante* dans les fonctions automorphes et le *nombre d'éléments* du corps de Galois. J'ai vérifié que la notation q est employée dans ce sens chez Artin (dans les années vingt) et chez Hasse (dans les années trente). Je ne suis pas remonté au-delà, mais Jacobi doit aussi l'utiliser (mais sans doute pas Gauss). La présence de q est un peu fortuite: c'est la lettre qui suit immédiatement p, déjà utilisée pour désigner un nombre premier. De la même manière, A. Weil introduira la lettre ℓ (dans ℓ-adique) quand il aura besoin d'un autre nombre premier. Mais je ne sais pas s'il y avait vraiment, en 1920, une raison substantielle de subodorer un rapport entre corps finis et fonctions automorphes[1].

A. Weil définit la fonction ζ d'une variété algébrique (pour les courbes algébriques et en dimension supérieure) par une somme et par un produit. Mais les propriétés de ce produit et de cette somme sont fort différentes du produit infini eulérien et de la série de Dirichlet par lesquels on définissait les fonctions ζ précédentes. De plus, la théorie des idéaux ne fonctionne plus à ce niveau: il faut remplacer, dans cette somme et dans ce produit, "idéaux" par "cycles de degré 0" et "idéaux premiers" par "cycles primitifs". Aujourd'hui, après les travaux de Grothendieck et de Deligne, on comprend mieux le sens de ces notions. Mais, bien que les premiers résultats dans ce domaine soient dus à Deuring (1953) et à Eichler (1963) dans les années trente, on est encore très loin d'une compréhension complète des cycles sur une variété algébrique.

L'une des stratégies essentielles de l'approche de Weil – qu'on trouve déjà chez Hasse, mais Weil est le premier à en faire un usage systématique – consiste à distinguer dans une variété algébrique, d'une part le domaine où les équations prennent leurs coefficients, d'autre part le domaine où l'on cherche les solutions de ces équations. Cette dichotomie qui est sans doute l'idée fondamentale de Galois, sera utilisée avec des fortunes diverses en géométrie algébrique par les successeurs de Weil: Grothendieck, Deligne et les autres.

Décrivons cette stratégie dans le langage des variétés de Weil. Si X est une variété algébrique définie sur un corps $k = \mathbb{F}_q$ à q éléments, on considère l'ensemble $X(\overline{k})$ des points de X à coordonnées dans une clôture algébrique $\overline{k}$, qui sont les solutions dans $\overline{k}$ des équations fondamentales qui définissent la variété X. On en déduit un plongement $X(k) \subset X(\overline{k})$. L'idée fondamentale que Hasse et Weil exploitent ici est l'existence d'une transformation

$$\varphi : X(\overline{k}) \to X(\overline{k})$$

correspondant à l'automorphisme $\lambda \mapsto \lambda^q$ du corps $\overline{k}$. Alors, de même qu'à l'intérieur de $\overline{k}$ l'ensemble des solutions de l'équation $\lambda^q = \lambda$ est précisément le corps $k = \mathbb{F}_q$ dont on est parti, de même $X(k)$ est l'ensemble des points de $X(\overline{k})$ qui sont invariants par cette transformation φ. Hasse lui-même écrit x^q l'action de φ sur un point x de la variété. De la

[1] Cependant, Gauss connaît bien le lien entre fonctions théta et sommes de Gauss; c'est le fondement de l'une des démonstrations de la loi de réciprocité quadratique.

sorte $X(k)$ est le sous-ensemble fini de $X(\overline{k})$ défini par l'équation $x^q = x$ (qui s'écrit aussi $x_i^q = x_i$ en termes de coordonnées).

Dans le langage des schémas qui est le nôtre aujourd'hui en géométrie algébrique, cela s'exprime très simplement et de façon naturelle. Si X est un schéma défini sur un anneau (ou sur un corps) de base k, on définit, pour toute algèbre commutative A au-dessus de k, l'ensemble $X(A)$ des points de X à coefficients dans A. L'idée fondamentale de Galois revient à dire ici que $X(A)$ est un *foncteur.* Tout homomorphisme $\psi : A \to B$ d'algèbres commutatives définit une action $X(\psi) : X(A) \to X(B)$, de la façon suivante: si $X(A)$ est l'ensemble des solutions à coefficients dans A d'un certain ensemble de polynômes (qui définissent X), l'action $X(\psi)$ transforme chaque point de $X(A)$ en un point de $X(B)$ en agissant par ψ sur chaque coordonnée. Avec ces définitions, si $A = B = \overline{k}$, et si $\psi(\lambda) = \lambda^q$ pour tout λ dans $\overline{k}$, la transformation φ définie plus haut n'est autre que $X(\psi)$.

7. La fonction ζ dynamique (Artin et Mazur).

B. Mazur et M. Artin ont donné, dans les années soixante, une définition très générale de fonction ζ. Partant de la formulation que Weil donne de sa fonction ζ, ils remarquent que la structure formelle de cette fonction ne dépend que de la transformation φ. La formule sommatoire qui définit la fonction ζ de Weil est

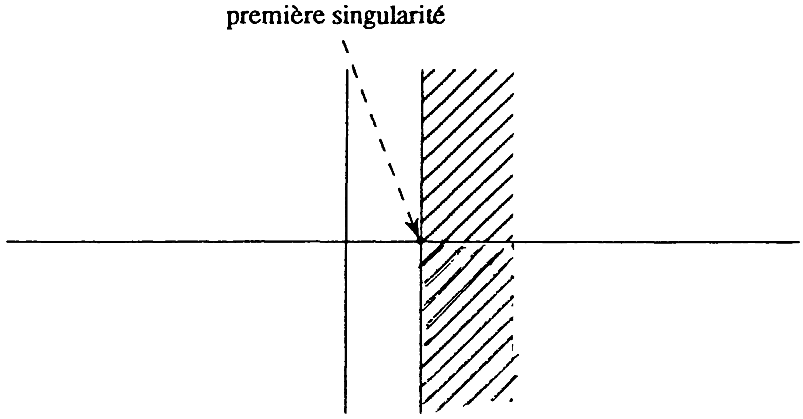
$$t\,\frac{Z'_X(t)}{Z_X(t)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, t^n,$$

où c_n est le nombre de solutions de l'équation $\varphi^n(x) = x$, *i.e.* le nombre de points fixes de la fonction itérée φ^n; le premier membre de l'égalité contient la dérivée logarithmique de la fonction ζ de Weil[1].

La remarque de Mazur et d'Artin permet de généraliser cette définition de la fonction ζ de Weil. Pour toute fonction φ opérant sur un ensemble, on peut définir par l'équation ci-dessus une fonction ζ associée, pourvu que, pour chaque n, il y ait un nombre fini c_n de points satisfaisant à l'équation $\varphi^n(x) = x$. Or en théorie ergodique, en théorie du signal, dans la théorie des processus aléatoires, notamment les chaînes de Markov, on peut définir une transformation φ ainsi que la fonction ζ associée. En général, la fonction φ correspond au décalage d'une unité dans le temps, et considérer les solutions de l'équation $\varphi^n(x) = x$ revient à s'intéresser aux évolutions du système qui sont périodiques dans le temps, de période n. Lorsqu'on peut définir cette fonction ζ, le domaine de convergence absolue est un demi-plan; alors, la position de la première singularité donne des invariants

[1] La fonction ζ de Weil est une fonction d'une variable complexe s, qui s'écrit en fait sous la forme $Z_X(q^{-s})$, si X est une variété algébrique définie sur un corps à q éléments. La fonction $Z_X(t)$ est développée en série de puissances de t; un des objectifs de la théorie a été de prouver que $Z_X(t)$ est une fonction rationnelle de t.

topologiques du processus, par exemple l'entropie topologique.



Il y a eu là une source énorme d'inspiration en mécanique statistique; par exemple, les deux ouvrages de D. Ruelle sur la mécanique statistique, surtout le second, utilisent des idées très voisines. Nous voilà donc bien loin des motivations initiales d'arithmétique.

8. Valeurs propres d'opérateurs.

Considérons, sur une variété différentiable M de dimension d, un opérateur D pseudo-différentiel elliptique, disons un opérateur aux dérivées partielles elliptique que l'on peut supposer, pour simplifier, auto-adjoint et même positif. Cet opérateur D a une suite de valeurs propres $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \lambda_{n+1} \cdots$, et si zéro n'est pas valeur propre, on peut définir une fonction ζ généralisée; suggérée par les travaux d'Hermann Weyl en 1912, elle est construite explicitement par Minakshisundaram et Pleijel (1949). Voici la définition de cette fonction ζ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s} = Tr(D^{-s}).$$

Avec quelques précautions, on évite l'hypothèse que D est positif. Bien entendu, si l'on a $\lambda_n = n$, on retrouve la fonction ζ de Riemann; on peut considérer, par exemple, dans le cas d'une dimension, l'opérateur $i\frac{d}{dx}$, avec des conditions aux limites périodiques, qui admet une suite de valeurs propres multiples d'une valeur fondamentale (elles correspondent aux vibrations d'un oscillateur simple). On a beaucoup étudié ces fonctions ζ liées aux opérateurs, avec des propriétés analogues aux fonctions ζ dynamiques: la série ci-dessus converge dans un demi-plan; il y a une singularité; le plus souvent, il y a un pôle sur l'axe du demi-plan de convergence: ce pôle donne des invariants topologiques. Toute une partie de la théorie de l'index (le théorème d'Atiyah-Singer) est basée là-dessus.

Vers 1970, Singer a défini un déterminant généralisé de certains opérateurs différentiels en partant de la fonction ζ généralisée. Ce déterminant joue, depuis une dizaine d'années, un rôle fondamental dans toute sorte de problèmes de topologie, de K-théorie, d'algèbre et de physique mathématique. C'est une retombée indirecte des développements liés aux fonctions ζ.

9. La fonction ζ de Selberg.

A la fonction ζ précédente on peut adjoindre comme cas particulier – historiquement un prédécesseur – la fonction ζ de Selberg (1956). Elle est définie par un produit infini, analogue à celui qui représente la fonction ζ de Riemann, à ceci près que l'on y remplace les nombres premiers par les géodésiques fermées sur une surface de Riemann compacte. On a alors toute une structure analogue: prolongement analytique sur tout le plan complexe, localisation[1] des zéros non triviaux sur la droite critique $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, équation fonctionnelle. Les derniers résultats, obtenus il y a deux ou trois ans, ont permis d'exprimer cette fonction ζ comme un déterminant. En sens inverse, les idées développées à propos de la fonction ζ de Selberg ont conduit Kurokawa et Dehninger à proposer des constructions de la fonction ζ de Riemann au moyen de déterminants; il y a peut-être là l'amorce d'une direction nouvelle.

Ceci conclut le panorama des principales fonctions ζ que l'on a introduites, par analogie, à partir des propriétés essentielles de la fonction ζ de Riemann.

II. DE LA THÈSE D'ARTIN (1921) À A. WEIL (1950)

Passons maintenant en revue les grandes étapes qui ont conduit de la thèse d'Artin aux travaux d'A. Weil sur la fonction ζ en géométrie algébrique.

1. La thèse d'Artin (1921).

Dans l'introduction de sa thèse, E. Artin cite un élève de Landau, Kornblum, dont on ne sait rien, si ce n'est que sa thèse a été publiée en 1919; le malheureux élève meurt sur le front en 1915, mais il s'était intéressé aux problèmes qu'Artin reprend dans sa thèse.

Comme je l'ai dit plus haut, Artin raisonne par analogie. S'appuyant sur les nombreuses propriétés que partagent l'anneau $\mathbb{F}_p[t]$ des polynômes sur le corps fini $\mathbb{F}_p$ à p éléments, et l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers, il étend la théorie de Dirichlet des extensions quadratiques de $\mathbb{Q}$ au cas d'un corps $\Omega = K\left(\sqrt{D}\right)$ extension quadratique du corps $K = \mathbb{F}_p(t)$ définie par une racine carrée du polynôme $D(t)$.

La thèse d'Artin se compose de deux parties indépendantes et publiées séparément: l'une arithmétique et l'autre analytique.

La première partie, arithmétique, transpose les résultats classiques que Dirichlet avait établis pour les extensions quadratiques: définition de l'anneau des entiers dans K comme

[1] A l'exception éventuelle d'un nombre fini d'entre eux, compris entre 0 et 1.

clôture intégrale de $\mathbb{F}_p[t]$ dans Ω, définition et factorisation des idéaux, classes d'idéaux, finitude du nombre de classes, etc. Artin reconnaît que cette transposition est assez mécanique, car il insiste dans l'introduction sur le fait qu'il emploie délibérément la même notation et la même terminologie que dans la théorie classique, pour la commodité et pour en faire ressortir l'analogie, sans que cela risque de conduire à des ambiguïtés puisqu'il ne considère qu'une seule des deux situations. Cette partie arithmétique est en quelque sorte un exercice d'écolier d'un futur maître.

La seconde partie, analytique, est beaucoup plus originale. En procédant par analogie avec le cas classique des corps de nombres, Artin introduit sa fonction ζ sous la forme d'une somme

$$\zeta_\Omega(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s},$$

et il montre aussitôt qu'on peut la représenter également par un produit

$$\zeta_\Omega(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}},$$

où $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{p}$ parcourent respectivement les idéaux et les idéaux premiers de l'anneau des entiers, $N(\mathfrak{a})$ désignant comme chez Dedekind la norme de l'idéal $\mathfrak{a}$.

Faisons à ce propos deux remarques qui approfondissent l'analogie entre la fonction ζ de Riemann et la fonction ζ d'Artin et de Dedekind.

D'abord, pourquoi se limite-t-on, dans la définition de la fonction ζ de Riemann comme somme, $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, aux seuls entiers positifs, au lieu de considérer les entiers de signe quelconque ? Cela s'explique très bien *a posteriori* du point de vue de la théorie des idéaux: l'ensemble des multiples de n est aussi l'ensemble des multiples de $-n$ et il n'y a pas d'autres paires de nombres distincts qui aient les mêmes multiples que ceux de même valeur absolue et de signe opposé. C'est pourquoi on regroupe les paires $\{-n, n\}$, ce qui revient à considérer les idéaux plutôt que les entiers qui les représentent; choisir le nombre n positif revient à normaliser l'idéal. On procède pareillement avec les polynômes; la normalisation des idéaux revient, dans ce cas, à considérer des polynômes $P(t) = t^m + a_1 t^{m-1} + \cdots$, dont le coefficient dominant est 1. Artin accentue d'ailleurs dans son exposé l'analogie entre les deux situations: il appelle signe d'un polynôme son coefficient dominant.

Dans la série qui définit la fonction ζ d'Artin comme celle de Dedekind, on ne peut pas, bien entendu, élever le polynôme (représentant l'idéal) à une puissance donnée, comme on le fait pour la fonction ζ de Riemann, car cela n'a pas de sens. Mais, cette fois, on peut considérer que l'entier n est donné par $|\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = n$, et cet entier joue alors deux rôles dans la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-s}$: comme symbole pour indexer les idéaux (lorsqu'il figure sous le signe somme) et comme taille de l'idéal (lorsqu'il est élevé à une puissance donnée). C'est ainsi que l'on procède dans le cas des polynômes. Si L est un corps de nombres ou un corps de fonctions sur $\mathbb{F}_q$ (on changera souvent p en q, suivant la coutume plus récente) et si $\mathcal{O}_L$ est l'anneau des entiers du corps L, pour tout idéal $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_L$ sa norme $N(\mathfrak{a})$

est précisément $N(\mathfrak{a}) = |\mathcal{O}_L/\mathfrak{a}|$. Dans le cas de $\mathbb{F}_q(t)$, la norme de l'idéal engendré par $P(t) = t^m + a_1 t^{m-1} + \cdots + a_m$ sera q^m. Pour calculer la fonction ζ d'Artin du corps $K = \mathbb{F}_q(t)$, on effectue une somme étendue à tous les polynômes unitaires de tout degré; comme la contribution d'un polynôme unitaire de degré m sera un terme $(q^m)^{-s} = q^{-ms}$ et comme il y a précisément q^m polynômes de degré fixé m et de terme dominant 1, on aura donc (pour le corps $K = \mathbb{F}_q(t)$)

$$\zeta_K(s) = \sum_{m=0}^{\infty} q^m q^{-ms};$$

c'est une série géométrique qui se somme immédiatement

$$\zeta_K(s) = \frac{1}{1 - q^{1-s}}.$$

On voit aussitôt que s n'est pas la bonne variable dont dépend la fonction ζ, mais que c'est $t = q^{-s}$. Il faudra attendre A. Weil, à partir de 1940, pour faire explicitement ce changement de variable. Il est implicite chez Hasse, chez Deuring et chez leurs émules allemands; mais leurs formules sont compliquées parce qu'ils s'obstinent à garder la variable s. Il est plus simple du point de vue analytique d'écrire la fonction $\zeta_K(s)$ sous la forme $\frac{1}{1-qt}$. Ce qui explique le succès qu'ont eu ces nouvelles fonctions ζ, c'est que les bases de cette théorie sont vraiment très simples.

Lorsqu'on passe de ce corps $\mathbb{F}_q(t)$ à une extension quadratique Ω, on peut répéter les résultats (et les démonstrations) de Dirichlet. On a vu plus haut que Dirichlet avait factorisé la fonction $\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{D})}(s)$ sous la forme $\zeta(s)L_D(s)$, avec un facteur important $L_D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) n^{-s}$; on note $\left(\frac{D}{n}\right)$ le symbole de Jacobi qui vaut $0, 1$ ou -1. De la même manière, lorsque D est un polynôme dans $\mathbb{F}_q(t)$, Artin définit, en calquant ces résultats classiques, une série $L_D(s)$ telle que l'on ait $\zeta_\Omega(s) = \zeta_K(s)L_D(s)$.

Dès lors, l'intérêt va se porter, dans l'étude de la fonction $\zeta_\Omega(s)$, sur le facteur $L_D(s)$. L'une des contributions les plus importantes d'Artin, dans sa thèse, est que $L_D(s)$ est un polynôme en q^{-s} et qu'il y a une équation fonctionnelle pour $L_D(s)$. A vrai dire, $L_D(s)$ n'est pas la bonne fonction pour exprimer de façon simple l'équation fonctionnelle. Dans le cas de la série de Dirichlet $L_D(s) = \sum \left(\frac{D}{n}\right) n^{-s}$, où D est un nombre entier sans facteur carré, l'équation fonctionnelle s'écrit sous la forme $\xi_D(s) = \xi_D(1-s)$, où la fonction $\xi_D(s)$ s'obtient en multipliant $L_D(s)$ par un facteur qui est $\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ dans le cas réel et $\pi^{-\frac{s+1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$ dans le cas imaginaire. Artin procède de manière analogue, en introduisant deux cas: “réel” et “imaginaire”; la fonction $\Gamma(s)$ est à remplacer par une fraction rationnelle en q^{-s} convenable.

Dans le cas classique des corps quadratiques, Dirichlet déduisait, des propriétés de cette fonction $L_D(s)$, des formules très intéressantes sur le nombre de classes et sur les sommes de Gauss. C'était un des grands succès de sa méthode analytique. Artin répète, bien entendu, les arguments de Dirichlet; mais, pour prouver l'équation fonctionnelle de sa fonction ζ, il procède dans l'autre sens: alors que traditionnellement, depuis Dirichlet, on déduisait du calcul des résidus de ζ et de la fonction L des formules sur les sommes de Gauss (essentiellement la loi de réciprocité quadratique ou des variantes de cette loi), Artin part d'identités sur les sommes de Gauss et raisonne en sens inverse pour prouver l'équation fonctionnelle.

L'autre contribution essentielle de la thèse d'Artin concerne l'hypothèse de Riemann. Artin, comme je viens de le dire, exprime $L_D(s)$ comme un polynôme en $t = q^{-s}$:

$$L_D(s) = P_D(t) \text{ avec } P_D(t) = t^{2g} + a_1 t^{2g-1} + \cdots + a_{2g},$$

et il fait deux remarques importantes sur cette expression polynomiale.

Tout d'abord, en traduisant l'équation fonctionnelle, il remarque que ce polynôme $P_D(t)$ a des racines $\omega_1, \ldots, \omega_{2g}$. Il démontre qu'on peut les regrouper en g paires ω_j, ω_{j+g} dont le produit vaut $\omega_j \omega_{j+g} = q$ pour $j = 1, \ldots, g$; mais il n'interprète pas encore ce nombre g.

La seconde remarque d'Artin aura une grande fortune: les zéros de cette fonction $L_D(s)$ sont sur la droite critique $\mathrm{Re}\ s = \frac{1}{2}$, ce qui se traduit pour les ω_j, où $j = 1, \ldots, 2g$ par l'égalité $|\omega_j| = \sqrt{q}$. Pour la démonstration, Artin se contente de le vérifier dans certains cas, pour $p = 2, 3, 5, 7$, le degré du polynôme P étant 3 ou 4, au moyen de tables qu'il donne dans le §23 de sa thèse. Il dit dans l'introduction que cela démontre l'hypothèse de Riemann pour une quarantaine de corps quadratiques. Vu les moyens de calcul de l'époque, c'était très méritoire. Aujourd'hui, avec les moyens dont nous disposons, une exploration de ce genre pourrait se faire très rapidement et dans des zones beaucoup plus vastes. Mais les cas qu'Artin a vérifiés ont suffi pour le convaincre de la vérité de l'hypothèse de Riemann pour sa fonction ζ. On comprend qu'il a dû éprouver une certaine satisfaction, car c'était la première fois qu'on rencontrait des fonctions ζ dont on pouvait prouver rigoureusement qu'elles satisfont à l'hypothèse de Riemann.

Dans sa thèse, Artin ne considère comme corps de base que les corps premiers $\mathbb{F}_p$ à p éléments; mais ses raisonnements sont absolument généraux et valent aussi pour un corps de Galois à q éléments, comme on le fera systématiquement plus tard. C'est pourquoi j'ai raisonné par anticipation sur le corps $\mathbb{F}_q$ pour exposer les contributions d'Artin.

2. L'intervention de F.K. Schmidt (1931).

F.K. Schmidt opère vis-à-vis de la théorie d'Artin le même type d'extension que celle qui avait conduit, au XIX^e^ siècle, dans la théorie classique des nombres, de Dirichlet à Dedekind. Il part d'un corps $K_0 = \mathbb{F}_q(x)$ de fonctions rationnelles à une variable (qu'il écrit maintenant x plutôt que t) sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ et il considère un corps $K \supset K_0$ qui est une extension algébrique finie. Pour la commodité ,on prendra pour K une extension algébrique séparable.

Les travaux de Schmidt sont l'aboutissement d'un autre courant d'idées qui remonte aussi à Dedekind (tout comme l'idée de prendre une extension algébrique du corps de base), à savoir l'arithmétisation de la théorie des surfaces de Riemann et des corps de fonctions algébriques. Cette tendance au remplacement progressif de la notion topologique de surface de Riemann d'une fonction algébrique par le corps des fonctions algébriques, s'inscrit dans une longue lignée ouverte par Dedekind et Weber, poursuivie par Landsberg et Hensel, et qui ira jusqu'à Deuring; il s'agit de remplacer les arguments topologiques de Riemann dans l'étude des surfaces de Riemann (la ramification, etc.) par une étude purement algébrique du corps des fonctions algébriques, *i.e.* de formuler les propriétés directement en termes de ce corps.

C'est ainsi que lorsqu'on lit, par exemple, les articles de Hasse et de Deuring à cette époque (dans les années trente), les premières pages sont toujours consacrées au même plaidoyer. On y part d'un corps de coefficients $\mathbb{F}_q$ et d'une équation $f(x,y) = 0$, où $f \in \mathbb{F}_q[x,y]$ est supposé irréductible; mais ce qui est fondamental dans ce courant d'idées, c'est le corps que cette équation définit au-dessus de $\mathbb{F}_q$: on considère x comme une variable, $f(x,y) = 0$ comme une équation de dépendance algébrique de y par rapport à x, et on engendre un corps $\mathbb{F}_q(x,y)$ qui est une extension de $\mathbb{F}_q(x)$, que l'on suppose séparable pour des raisons techniques. On suppose même que le polynôme f est absolument irréductible, *i.e.* qu'il ne peut pas se factoriser si l'on étend le corps $\mathbb{F}_q$ à un corps fini plus grand. Ensuite, on formule autant que possible toutes les notions et tous les énoncés, de telle façon qu'ils se réfèrent au corps $\mathbb{F}_q(x,y)$ et non pas à une manière particulière de l'engendrer.

Dedekind et Weber limitaient le corps des constantes au corps des nombres complexes, alors même qu'ils travaillaient avec des méthodes purement algébriques. Artin d'abord un peu implicitement, puis, tout à fait explicitement, Schmidt, et plus tard, Hasse, Deuring, Teichmüller, partent d'un corps de base plus général, à savoir un corps de constantes parfait de caractéristique 0 ou p. Ce point de vue s'impose dans les années trente et se reflète parfaitement dans l'*Algebra* de van der Waerden. Cela oblige, bien entendu, à remanier quelque peu les démonstrations classiques, et c'est ce qu'entreprend F.K. Schmidt.

Ses contributions les plus importantes sont au nombre de deux.

La principale découverte de F.K. Schmidt concerne l'équation fonctionnelle de la fonction ζ. Etablie jusqu'alors au moyen d'identités ingénieuses sur les sommes de Gauss, elle est démontrée par Schmidt à partir d'une version du théorème de Riemann-Roch. Ce théorème est un *théorème de dualité*: si on appelle W le diviseur canonique (le diviseur d'une forme différentielle), il y a une dualité entre les caractéristiques numériques associées à un diviseur Δ et au diviseur $W - \Delta$; il y a, par exemple, une symétrie concernant la dimension du système linéaire associé, le degré, etc., et c'est vraiment F.K. Schmidt qui a vu que l'équation fonctionnelle de la fonction ζ n'était que l'expression analytique de cette symétrie plus générale exprimée dans le théorème de Riemann-Roch. L'intérêt de cette découverte est que cette symétrie ne suppose pas que le corps de base soit fini. On obtient dès lors un théorème géométrique et l'on voit se manifester ici l'une des premières apparitions de la tendance à la géométrisation dans l'étude de la fonction ζ.

La seconde contribution importante de Schmidt concerne également l'équation fonctionnelle. Afin de lui donner une forme simple, on était obligé, depuis Riemann, de rajouter un facteur au produit qui définit la fonction ζ, de façon à avoir une fonction

$$\xi(s) = \underbrace{\pi^{-s/2}\,\Gamma(s/2)}_{\text{facteur } \infty} \underbrace{\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}}_{\zeta(s)}.$$

Progressivement, on va s'habituer à considérer ce facteur comme un facteur local attaché à un nombre premier parmi les autres, que l'on appelle le nombre ∞. Autrement dit, Hensel d'abord, puis Schmidt, Teichmüller et bien d'autres, introduisent des places (pour chaque nombre premier p et à l'infini) et attachent un facteur local à cette place à l'infini.

Transcrivons cette idée dans le langage des fonctions algébriques. Dans la définition qu'il donnait de sa fonction ζ, Artin partait d'un corps $K_0 = \mathbb{F}_q(t)$ de fonctions rationnelles sur un corps de base fini $\mathbb{F}_q$ et d'une extension algébrique $K \supset K_0$. Le corps K_0 contenant l'anneau $\mathcal{O}_0 = \mathbb{F}_q[t]$ des polynômes en la variable t à coefficients dans le corps fini de base, il prenait la clôture intégrale $\mathcal{O}$ de $\mathcal{O}_0$ dans K. Cette situation s'exprime par le diagramme

$$\begin{array}{ccccccl} \mathbb{F}_q(t) & = & K_0 & \subset & K & & \text{extension algébrique} \\ & & \cup & & \cup & & \\ \mathbb{F}_q[t] & = & \mathcal{O}_0 & \subset & \mathcal{O} & & \text{extension intégrale} \end{array}$$

De ce fait, la fonction ζ d'Artin était liée au choix de cet anneau $\mathcal{O}$, qui n'est pas une notion invariante à l'intérieur de K. Du point de vue de la géométrie algébrique, le corps K définit une courbe algébrique, tandis que l'anneau $\mathcal{O}$ définit un ouvert de Zariski dans cette courbe. Voici la découverte de Schmidt: de même que, pour avoir une bonne équation fonctionnelle, il faut modifier la fonction ζ par un facteur à l'infini, on peut également définir de manière invariante la fonction ζ en l'associant directement au corps. Les facteurs correspondant à l'infini traduisent les "points à l'infini" de la courbe, une notion familière en géométrie depuis le début du XIX$^{\text{e}}$ siècle.

F.K. Schmidt formule aussi très explicitement les propriétés de base de la fonction ζ; outre l'équation fonctionnelle, il mentionne une propriété fondamentale vraie, non seulement dans les corps quadratiques, mais aussi dans tous les corps de fonctions, à savoir la représentation

$$\zeta_K(t) = \frac{L(t)}{(1-t)(1-qt)},$$

où L est un polynôme en t avec $t = q^{-s}$. Ce polynôme correspond au facteur $L_D(s)$ de la thèse d'Artin. Schmidt obtient alors $\deg L = 2g$, où maintenant ce nombre g, pas vraiment interprété chez Artin, est vu ici de manière invariante comme le *genre* du corps de fonctions algébriques. Cette notion algébrico-géométrique traduit une notion bien connue dans la théorie des surfaces de Riemann, à savoir le genre topologique de la surface de Riemann correspondante (le nombre de trous des "bretzels").

3. H. Hasse et les courbes elliptiques (1931-1936).

Dans ses recherches sur la fonction ζ d'Artin-Schmidt, Hasse n'obtient des résultats définitifs que dans le cas du genre $g = 1$, qui correspond aux fonctions elliptiques. Hasse connaissait très bien les fonctions elliptiques, ainsi que Deuring. On leur doit beaucoup de contributions à ce domaine. C'est en traduisant de manière algébrique les résultats analytiques sur les fonctions elliptiques qu'ils sont arrivés à résoudre le cas $g = 1$; l'essentiel vient de Hasse, mais Deuring y apporte des améliorations importantes. C'est ainsi qu'on voit paraître, dans les années trente, toute une série de démonstrations qui se simplifient, s'améliorent progressivement et se généralisent.

La première démonstration de l'hypothèse de Riemann que donne Hasse part des vraies fonctions elliptiques, celles à coefficients complexes. Par une réduction modulo p ingénieuse, il réduit le théorème à démontrer (*i.e.* l'hypothèse de Riemann pour la fonction ζ d'Artin associée) à une propriété de la multiplication complexe des fonctions elliptiques. Les résultats seront ensuite améliorés par M. Deuring. On les trouve très bien exposés, par exemple, dans le livre de M. Eichler sur les nombres et fonctions algébriques (1963). Ce sont encore aujourd'hui des résultats importants ; car, à une variété X définie sur un corps de nombres, A. Weil a associé une fonction ζ_X. Or le seul cas où l'on sache vraiment calculer la fonction ζ_X de Weil, c'est lorsque X est donnée par une courbe elliptique, définie sur un corps de nombres, en supposant que X est à multiplication complexe. Ce calcul repose de manière fondamentale sur des résultats de Hasse et Deuring qu'on vient de citer.

Toutefois, à cette époque, la méthode (de réduction modulo p) introduite par Hasse conduisait à des difficultés; elle n'avait pas encore la souplesse qu'elle a acquise aujourd'hui, avec la théorie des schémas notamment. Aussi, Hasse se contente-t-il de présenter un résumé de ses résultats; il esquisse la méthode de la réduction modulo p, mais il n'en publiera jamais les détails. Assez curieusement, il ne revient qu'en 1966 sur sa première démonstration de 1933, dans un article franchement anachronique, même si ses outils ont été quelque peu améliorés. Il y explique d'abord que, s'il n'a jamais publié les détails annoncés de sa première démonstration, c'est qu'entre-temps lui était venue une seconde démonstration plus simple et beaucoup plus générale. Il motive son retour tardif à sa première démonstration par le fait que celle-ci reposait sur une formule-clé qui garde selon lui un grand intérêt et mérite d'être généralisée. Mais, dans cet article de 1966, il ne présente que la partie proprement arithmétique. Quant à la partie correspondant à la géométrie algébrique, qui aurait été la théorie de la réduction modulo p, il n'était pas en mesure de la traiter avec ses outils. Cela avait d'ailleurs déjà été fait amplement par les japonais G. Shimura et Y. Taniyama (1961), et d'autres.

La seconde démonstration, par Hasse, de la conjecture de Riemann dans le cas du genre $g = 1$ sera progressivement simplifiée. Il en publie plusieurs versions :

– d'abord, un résumé issu d'un exposé au séminaire de Hambourg (1934);

– puis une série de trois articles, en 1936, portant le titre général "Sur la théorie des corps de fonctions elliptiques abstraits", numérotés de I à III (la troisième partie porte le sous-titre: "L'hypothèse de Riemann");

– enfin, un article de présentation, dont nous n'avons que la traduction italienne, écrit en 1939 pour un congrès en Italie qui n'eut point lieu à cause de la guerre, et publié seulement en 1943. Cet article magnifique fait le pont entre les méthodes algébriques de l'école allemande et les méthodes géométriques de Severi (de l'école italienne). Mais tout donne à croire que le traducteur italien y a rajouté du sien dans l'hyperbole.

Je me bornerai, pour la présentation de cette seconde démonstration, aux trois grands articles de 1936. On y trouve un exposé extrêmement complet et fort bien écrit de la théorie. Hasse redémontre toutes les propriétés de base de la fonction ζ, reprenant ainsi à son compte tous les résultats de Schmidt (1931), à l'exception de ceux qui sont proprement géométriques (comme, par exemple, le théorème de Riemann-Roch qu'il admet).

Il introduit l'idée, tout à fait fondamentale, des endomorphismes de la courbe elliptique X, *i.e.* l'anneau des correspondances. L'anneau des endomorphismes, vus comme fonctions elliptiques, est une version abstraite de la multiplication complexe. Si $\overline{\mathbb{F}}_q$ est une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$, la loi d'addition des fonctions elliptiques munit l'ensemble $X(\overline{\mathbb{F}}_q)$ d'une loi de groupe abélien (rappelons qu'on est ici dans le cas du genre $g = 1$). Hasse considère alors l'anneau des endomorphismes du groupe $X(\overline{\mathbb{F}}_q)$ qui proviennent des transformations algébriques (y compris la transformation identique), qu'il voit en sens inverse comme des endomorphismes du corps de fonctions sur X.

Dans le cas particulier du genre $g = 1$, le polynôme $L(t)$ mentionné à la fin du n^{0}2 est de degré 2 : on peut l'écrire $L(t) = 1 - c_1 t + qt^2$. Or le coefficient q de t^2 est fourni par l'équation fonctionnelle, tandis que $L(1)$ est le nombre de points de la courbe elliptique dans le corps de base : $N_1 = |X(\mathbb{F}_q)|$. On peut donc écrire ce polynôme sous la forme

$$L(t) = (1-t)(1-qt) + N_1 t = (1-\omega t)(1-\overline{\omega} t)$$

où ω, $\overline{\omega}$ sont deux nombres complexes tels que $\omega\,\overline{\omega} = q$.

Hasse introduit une transformation $\pi : X \to X$ de la courbe elliptique, que j'ai appelée φ plus haut, à savoir la transformation de Frobenius qui élève chaque coordonnée à la puissance q-ième. Alors, le nombre N_1 n'est autre que le nombre des points fixes de π, *i.e.* $N_1 = |X(\mathbb{F}_q)| = |\mathrm{Ker}(\pi - 1)|$; on est ainsi conduit à introduire une norme $N(\pi - 1) = N_1$.

Le théorème fondamental de Hasse revient alors à écrire $L(t) = N(1 - \pi t)$, *i.e.* interpréter $L(t)$ comme le polynôme caractéristique de π. Ensuite, il se sert du fait que la norme de n'importe quel endomorphisme $\varphi \neq 0$ est le nombre de points de son noyau; elle est donc positive par définition: $N(\varphi) = |\mathrm{Ker}(\varphi)| > 0$. Le nœud de la démonstration consiste à montrer que lorsque φ parcourt l'anneau $\mathcal{O}$ des correspondances, on obtient une forme quadratique par rapport à φ. Cette forme quadratique étant définie positive, il lui est très facile d'obtenir les majorations qu'il faut: on a deux nombres ω et $\overline{\omega}$ dont le produit est q, et comme ces deux nombres sont complexes et de même module, chacun a pour module $\sqrt{q}$.

Hasse tire de ce résultat fondamental un corollaire dont il est très fier; il peut écrire la formule $N_1 = q + 1 - \omega - \overline{\omega}$, où l'on a $|\omega| = \sqrt{q}$, d'où il tire la majoration $|N_1 - q - 1| \leq 2\sqrt{q}$. Cette majoration est l'aboutissement d'une longue histoire. Mordell, Davenport et Landau avaient progressivement amélioré le terme d'erreur dans la formule $N_1 = q + 1 + O(q^\theta)$; on était passé de $\theta = \frac{3}{4}$ à $\theta = \frac{2}{3}$. Mordell avait suggéré à Hasse que si ses méthodes algébriques étaient si puissantes, elles devaient permettre de passer de $\theta = \frac{2}{3}$ qu'il savait démontrer par des méthodes relativement élémentaires de théorie des nombres, à ce qui devait être la borne optimale, à savoir $\theta = \frac{1}{2}$. C'est le contenu du résultat de Hasse.

4. A. Weil (1940-1950).

André Weil a rapporté excellemment, dans les commentaires à ses Œuvres Complètes, le cheminement de ses idées. On se reportera plus spécialement aux pages 546 à 551, 555 à 557, 564 à 567, 568 à 569, et 574 à 576 du tome 1. Je me contenterai donc de quelques commentaires, illustrant les méthodes et les métaphores de Weil.

Dans toute l'œuvre de Weil, l'un des fils directeurs est le lien entre les méthodes de la géométrie (topologie, géométrie différentielle) et celles de la théorie des nombres. Dans les raisonnements de Hasse, pour établir l'hypothèse de Riemann pour les corps de fonctions algébriques de genre 1, les deux idées essentielles sont :

– l'introduction de la transformation de Frobenius φ et le décompte de ses points fixes;

– la positivité de la forme quadratique "norme" sur l'anneau des correspondances.

Pour Weil, le décompte des points fixes doit se faire par une formule décalquée sur la formule des points fixes de Lefschetz en Topologie Algébrique. Par un calcul formel simple, on déduit de cette dernière l'expression suivante de la fonction $Z_X(t)$ introduite par Weil :

$$Z_X(t) = \frac{\det(1 - tF)}{(1-t)(1-qt)}.$$

Dans cette formule, F est l'endomorphisme induit par φ sur le groupe de cohomologie $H^1(X)$ associé à la courbe algébrique de genre g. Si l'on se fie aux résultats connus depuis Riemann, ce groupe de cohomologie est de dimension $2g$ sur l'anneau des coefficients, et le polynôme $L(t) = \det(1 - tF)$, auquel il a été souvent fait allusion plus haut, est de degré $2g$. Bien entendu, Weil ne dispose pas d'une cohomologie associée à une courbe définie sur un corps fini $\mathbb{F}_q$; il faudra environ 30 ans pour la construire (M. Artin, A. Grothendieck...). Weil remplacera le groupe $H^1(X)$ par la considération des points d'ordre fini dans la variété jacobienne $J(X)$ associée à X.

Weil se fixa ce programme très tôt, vers 1938 selon ses affirmations. L'urgence de la guerre le poussa à publier un résumé (Weil 1940) aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris. Là, il esquissera aussi la méthode pour établir le résultat de "positivité" généralisant celui de Hasse.

Dans Weil (1940) il y avait beaucoup de points obscurs. Sur une courbe de genre g, le nombre de classes de diviseurs d'ordre n est n^{2g}, ce qu'affirment Deuring et Hasse, sans pouvoir le démontrer. C'est une traite tirée sur l'avenir; Weil n'a pas à l'époque les moyens techniques de démontrer ce point. C'est en 1948 qu'il y arrive, dans son livre *Courbes algébriques et variétés abéliennes* (Hermann).

Entre temps, il lui aura fallu faire un énorme détour. La difficulté conceptuelle la plus importante consistait à renverser le point de vue sur les courbes algébriques qui s'était développé depuis Dedekind, essentiellement dans l'Ecole allemande. On y met l'accent sur le corps des fonctions algébriques sur une telle courbe. Ceci est justifié par le fait qu'on sait, avec Dedekind-Weber, puis Hensel, trouver dans la notion de "place" (ou de "valuation") d'un corps le substitut algébrique aux points de la surface de Riemann. Rien de tel ne subsiste en dimension supérieure: s'il existe un unique "modèle" projectif et non singulier d'un corps de fonctions algébriques d'une variable, il existe de nombreux modèles d'un corps de fonctions de plusieurs variables. Les distinguer nécessite les outils de la Géométrie Algébrique. Dans l'approche de Hasse et Deuring, la théorie des correspondances entre une courbe X et elle-même repose sur l'introduction de la surface algébrique[1] $X \times X$. Par ailleurs, la détermination des classes de diviseurs d'ordre fini repose sur la construction de la variété jacobienne $J(X)$, qui est de dimension g. Lorsque $g = 1$, on peut confondre X et $J(X)$ et ceci explique le succès de Hasse et Deuring dans ce cas (qui est celui des fonctions elliptiques).

Weil achève son programme grâce à une ambitieuse reconstruction de la Géométrie Algébrique, qu'il présente dans ses *Foundations*. Il peut ainsi tenir les promesses de la Note de 1940, et prouver l'équivalent de l'hypothèse de Riemann pour les courbes de genre g quelconque sur un corps de constantes fini.

Les développements ultérieurs culmineront avec sa définition, en 1950, de la fonction ζ associée à une variété de dimension $d \geq 2$ sur un corps de constante fini. Il y est conduit, d'une part par une réflexion approfondie sur la formule des points fixes de Lefschetz, et par une étude soignée de bons exemples: variétés de Grassmann entre autres. L'expérience de Weil dans la manipulation des sommes de Gauss lui est fort utile pour élucider les exemples, et formuler des conjectures générales. C'est le début d'une autre histoire...

[1] En fait, dans le cadre de la théorie des schémas, si k est le corps des constantes, et K le corps des fonctions algébriques sur X, les correspondances en question relèvent de l'étude du spectre de l'anneau $K \otimes_k K$. A posteriori, ceci explique que Hasse et Deuring aient pu partiellement s'en sortir sans introduire de modèle pour $X \times X$.

BIBLIOGRAPHIE

[E1737] L. Euler: "Varia observationes circa series infinites", *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* **9** (1737), 1744; pp. 166-188; dans: *Opera Omnia*, série 1, Vol. XIV, pp. 216-244.

[E1748] Euler: *Introduction à l'analyse infinitésimale*, Chap. XV, "De seriebus ex evolutione factorum actis", réimpression ACL-éditions, Paris, 1987.

[R1859] B. Riemann: "Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse", *Monatsberichte der Berliner Akademie des Wissenschaften*, Novembre 1859; dans: *Gesammelte mathematische Werke*, 2e éd., 1892, réimpression Dover (1953), pp. 145-153.

[L1788] A.-M. Legendre: "Recherches d'analyse indéterminée", *Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris* (1788), pp. 465-559.

[G1849] C.F. Gauss zu Encke (24. December 1849), in: *Werke*, Göttingen, Vol. 2 (1876) pp. 441-447.

[H1896] J. Hadamard: "Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques", *Bull. Soc. Math. France* **24** (1896); dans: *Œuvres de Jacques Hadamard*, C.N.R.S., 1968, Tome 1, pp. 189-210.

[VP1896] C. de la Vallée Poussin: "Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers", *Ann. Soc. Scient. Bruxelles* **20/21** (1896-7).

[Di1837] G. Lejeune-Dirichlet: "Beweis eines Satzes über die arithmetische Progression", *Bericht über die Verhandlungen der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften*, Jahrg. 1837, pp. 108-110; dans: G. Lejeune-Dirichlet: *Mathematische Werke*, 1889, réimp. Chelsea, 1969, pp. 307-312.

[Di1837] G. Lejeune-Dirichlet: "Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeintschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält", *Abh. Kön. Preuss. Akad. Wiss.* von 1837, pp. 45-81; dans *ibid.*, pp. 313-342.

[Di1838] G. Lejeune-Dirichlet: "Sur l'usage des séries infinies dans la théorie des nombres", *J. reine angew. Math.*, **18** (1838) pp. 259-274; dans: *ibid.*, pp. 357-374.

[Di1840] G. Lejeune-Dirichlet: "Recherches sur les diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres", *J. reine angew. Math.*, **19** (1839) pp. 324-369; **21** (1840) pp. 1-12, 134-155; dans: *ibid.*, pp. 411-496.

[E1903-1907] P. Epstein: "Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen", I, II. *Math. Ann.* **56** (1903) pp. 615-644; **63** (1907) pp. 205-221.

[S1938-1939] C.L. Siegel: "Über die Zetafunktionen indefiniter quadratischer Formen", I, II, *Math. Z.* **43** (1938) pp. 682-708; **44** (1939) pp. 398-426; dans: C.L. Siegel: *Gesammelte Abhandlungen*, Springer, 1966, 1979, Vol. II, pp. 41-67, 68-96.

[De1877] R. Dedekind: "Sur la théorie des nombres entiers algébriques", Gauthier-Villars, 1877, pp. 1-121, Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, 1ère série, t. XI, 2ème série, t. I, 1876,1877; dans R. Dedekind: *Gesammelte Mathematische Werke*, Braunschweig, (1930, 1931, 1932: 3 volumes), Réimp.: Chelsea, 1969, pp. 262-296.

[De1871] R. Dedekind: "Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen", (Supplement XI von Dirichlets *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 3. Aufl., pp. 515-530 (1879)); dans: *ibid.*, pp. 297-314.

[L1903] E. Landau: "Über die zu einem algebraischen Zahlkörper gehörige Zetafunktion und die Ausdehnung der Tschebyscheftschen Primzahlentheorie auf das Problem der Vertheilung der Primideale", *J. reine angew. Math.* **125** (1903) pp. 64-188.

[H1917] E. Hecke: "Über die Zetafunktion beliebiger algebraischer Zahlkörper", *Nachr. Königl. Gesellschaft Wiss. Göttingen*, pp. 77-89; dans E. Hecke: *Mathematische Werke*, Vandenhoeck et Ruprecht, 1959, pp. 159-171.

[H1918-1920] E. Hecke: "Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehung zur Verteilung der Primzahlen", I, II, *Math. Z.*, **1** (1918) pp. 357-376, **6** (1920) pp. 11-51; dans: E. Hecke: *Mathematische Werke*, Vandenhoeck et Ruprecht, 1959, pp. 215-234, 249-289.

[A1921-1924] E. Artin: "Quadratische Körper im Gebiete der höheren Kongruenzen" I (Arithmetischer Teil), II (Analytischer Teil), *Math. Z.* **19** (1924) pp. 153-246; dans: *The collected papers of Emil Artin*, Addison-Wesley, 1965, pp. 1-94.

[S1931] F.K. Schmidt: "Analytische Zahlentheorie in Körper der Charakteristik p", *Math. Z.* **33** (1931) pp. 1-32.

[D1937-1941] M. Deuring: "Arithmetische Theorie der Korrespondenzen algebraischer Funktionenkörper" I, II, *J. reine angew. Math.* **177** (1937), pp.161-191; **183** (1940), pp.25-36.

[MP1949] S. Minakshisundaram et A. Pleijel: "Some properties of the Laplace operator on a Riemannian manifold", *Canad. Journ. Math.* **1** (1949), pp. 242-256.

[H1933] H. Hasse: "Beweis des Analogons der Riemannschen Vermutung für die Artinschen und F.K. Schmidtschen Kongruenzzetafunktionen in gewissen elliptischen Fällen" (Vorläufige Mitteilung), *Nachr. Ges. d. Wiss. Math. Phys. Kl.* Göttingen (1933), pp. 253-262; dans: H. Hasse: *Mathematische Abhandlungen*, W. de Gruyter, Berlin, 1975, vol.2, pp. 85-94.

[H1934] H. Hasse: "Abstrakte Begründung der komplexen Multiplikation und Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern", *Abhandl. Math. Sem. Hamburg* **10** (1934), pp. 325-348, dans: *ibid.*, vol.2, pp. 109-132.

[H1936] H. Hasse: "Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper" I, II, III, *J. reine angew. Math.* **175** (1936), pp. 55-62, pp. 69-88, pp. 193-208; dans *ibid.*, vol.2, pp. 223-266.

[H1943] H. Hasse: "Punti razionali sopra curve algebriche a congruenze", *Atti del convegno di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali* (IX Convegno Volta, designato per 1939, però non tenuto a causa della guerra), R. Accad. d'Italia, Roma 1943, 85-140; dans *ibid.*, vol.2, pp. 295-350.

[E1963] M. Eichler: *Einführung in der Theorie der algebraischen Zahlen und Funktionen*, Birkhäuser, 1963; traduction anglaise: *Introduction to the theory of algebraic numbers and functions*, Academic Press, 1966.

[H1966] H. Hasse: Modular functions and elliptic curves over finite fields, *Rendiconti di Matematica, Serie V* **25** (1966), pp. 248-266, dans *ibid.*, vol.2, pp. 351-369.

[S-T1961] G. Shimura et Y. Taniyama: "Complex multiplication of Abelian varieties and its applications to number theory", *Publ. Math. Soc. Japan*, $n^0 6$, 1961.

[W1943] A. Weil: "On the Riemann hypothesis in function-fields", *Proc. Nat. Ac. Sci.* **27** pp. 345-347; dans André Weil: *Œuvres scientifiques, Collected papers*, 3 volumes, Springer, Corrected second printing (1980), Vol. I, pp. 277-279.

[W1940] A. Weil: "Sur les fonctions algébriques à corps de constantes finies", C.R. Acad. Sci. Paris **210** (1940), pp. 592-594 (Vol. I, pp. 257-259).

[W1949] A. Weil: "Numbers of solutions of equations in finite fields", *Bull. Am. Math. Soc.* 55 (1949) pp. 497-508 (Vol. I, pp. 399-410).

[W1950] A. Weil: "Number-theory and algebraic geometry", *Proc. Intern. Math. Congress, Cambridge, Mass*, Vol. II, pp. 90-100 (Vol. I, pp. 442-452).

[W1954] A. Weil: "Abstract versus classical algebraic geometry", *Proc. Intern. Math. Congress Amsterdam*, (Vol. III, pp. 550-558).