CATHERINE GOLDSTEIN

Descente infinie et analyse diophantienne : programmes de travail et mises en œuvre chez Fermat, Levi, Mordell et Weil

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 2e série, tome 3 (1993), p. 25-49

<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1993_2_3__25_0>

DESCENTE INFINIE ET ANALYSE DIOPHANTIENNE : PROGRAMMES DE TRAVAIL ET MISES EN OEUVRE CHEZ FERMAT, LEVI, MORDELL ET WEIL.

Catherine GOLDSTEIN

La descente infinie est un procédé démonstratif dont le nom, sinon l'emploi, est dû à Pierre de Fermat. Il consiste à montrer qu'on peut déduire systématiquement d'une solution en nombres entiers à un problème donné une autre solution composée de nombres plus petits, et réitérer le procédé jusqu'à épuiser les solutions possibles, ou aboutir à une contradiction, car il n'existe pas de suite indéfiniment décroissante d'entiers naturels. A cause de son emploi fréquent en analyse diophantienne, surtout après Lagrange, cette méthode semble souvent réservée à ce domaine: en fait, son archétype est la preuve de l'existence d'un diviseur premier dans les *Eléments* d'Euclide et elle intervient sous une forme ou une autre dans d'autres secteurs des mathématiques. A l'intérieur même de l'analyse diophantienne, ou de ses avatars ultérieurs, les modalités et l'étendue de l'application de la méthode, son rôle propre, ont varié largement. Le propos de ce texte est d'en témoigner en étudiant quelques exemples, chez Fermat au XVII^{e} siècle, chez trois autres mathématiciens, Levi, Mordell et Weil au début du XX^{e} siècle.

Sélectionner un échantillon si petit et si dispersé peut paraître suspect. Les questions d'analyse diophantienne ont retenu pendant les siècles qui séparent Fermat de Weil l'attention de nombreux mathématiciens, avec des objectifs très variés: il pouvait s'agir d'y exercer ses forces ou d'y vérifier l'efficacité de ses méthodes, il pouvait s'agir d'un penchant idiosyncratique, il pouvait s'agir d'un intérêt collectif important ou marginal par rapport aux développements les plus spectaculaires ou prometteurs des mathématiques à la même époque, etc. Les outils et les leurs démonstrations "par descente infinie", (*cf.* [Weil, 1979] et aussi [Weil, 1983]). Il est donc naturel de se pencher de plus près sur l'analogie ainsi désignée : au premier coup d'oeil, la comparaison se réduit banalement à constater l'immersion complète d'anciens résultats dans les nouveaux. On trouve ainsi, dans des livres de mathématiques contemporains, le théorème "de Mordell-Weil": "le groupe des points rationnels d'une courbe elliptique est de type fini", présenté comme une généralisation naturelle d'un cas particulier, celui de la cubique d'équation $y^2 = x^3 - x$, qui aurait été traité par Fermat.

Or les résultats, même en mathématiques, ne sont pas isolables impunément. Plus précisément, nous verrons que les mathématiciens concernés ont en vue un programme plus ou moins explicite à réaliser, programme chaque fois différent, dans lesquels s'insèrent les preuves réputées analogues[1]. La prise en considération du contexte de travail et des objectifs poursuivis éclaire les identifications possibles et relativise leur validité. Etudier l'intervention de la méthode de descente infinie en analyse diophantienne sur ces quelques exemples doit donc permettre de capter, autrement que lors de l'étude d'une démonstration spécifique, les lignes de regroupement que la méthode opère dans le domaine et, réciproquement, les contraintes qu'elle en subit: comme on le verra, celles-ci sont très différentes selon l'époque et l'auteur considéré. Ces résultats permettent ainsi de tempérer l'impression d'identité structurelle des preuves que le regard rétroactif et l'opinion des acteurs risquent d'induire. Le recours, moins banal, au travail de Levi, dont le contenu n'indique pas directement sa filiation avec les problèmes de Fermat, m'a été inspiré par [Schappacher, 1990]: antérieur à ceux de Mordell et Weil chronologiquement, étranger par le but qu'il affiche, il en constitue par ailleurs un intermédiaire possible quant à son approche et ses techniques et offre à ces multiples titres un aspect supplémentaire de la richesse d'interaction entre une méthode, la descente infinie, et un domaine de recherches, l'analyse diophantienne.

Fermat et la méthode de descente infinie

La présentation publique par Fermat de sa célèbre méthode est en fait assez tardive: elle n'intervient que dans son testament en matière de problèmes sur les nombres, ou ce qui en tient lieu, une lettre à Carcavi écrite en août 1659, six ans avant sa mort. Fermat y explique qu'il a trouvé cette méthode "singulière" pour démontrer les propositions les plus difficiles sur les nombres, l'illustre très succinctement par son théorème que "l'aire d'un triangle rectangle en nombres ne peut être un carré", et donne une liste des problèmes qu'il peut traiter par un usage adéquat de sa méthode. En dehors de ce texte, nous ne disposons en fait que de très peu d'évidences: les problèmes évoqués dans la lettre se retrouvent bien à un endroit ou à un autre

[1] L'étude à la loupe des démonstrations elles-mêmes limite à vrai dire déjà la tentation d'identifier trop vite la nature des résultats, (*cf.* [Goldstein, 1991]).

de la correspondance de Fermat (rappelons que celle-ci, en ce qui concerne la théorie des nombres, ne fut pas publiée avant notre siècle), mais sans démonstrations: il s'agit soit de poser quelques colles à l'interlocuteur, soit de le stimuler dans des recherches sur ces questions. Fermat n'a jamais publié de traité sur ces découvertes, bien qu'il semble l'avoir projeté à plusieurs reprises: le témoignage le plus net est une lettre à Pascal de septembre 1654, où il lui annonce le prochain envoi d'un "Abrégé de tout ce qu['il a] inventé de considérable aux nombres". Nous n'en avons malheureusement pas trace, si toutefois il a vraiment mené à bien cette entreprise. Mais il évoque dans la lettre de 1654 ses problèmes les plus importants, la décomposition de tout nombre en somme de 1, 2 ou 3 triangles, de 1, 2, 3 ou 4 carrés, etc., la possibilité d'écrire tout nombre premier surpassant de 1 (resp. de 1, resp. de 1 ou de 3) un multiple de 4 (resp. de 3, resp. de 8) comme somme de deux carrés (resp. d'un carré et d'un double carré, resp. d'un carré et d'un triple carré), enfin le fait qu'aucun triangle rectangle en nombres ne peut avoir une aire carrée. Plusieurs de ces questions, et d'autres, apparaissent ailleurs dans sa correspondance, mais seule la lettre à Carcavi qui en rassemble la majeure partie nous renseigne sur une classification possible des questions concernées, selon le point de vue de Fermat.

Par ailleurs, seulement deux bribes de preuves par descente ont subsisté: l'une, très brève, transmise à Frenicle de Bessy, et retrouvée par J.E. Hofmann, (*cf.* [Hofmann, 1943]), l'autre, griffonnée dans la marge d'un exemplaire des *Arithmétiques* de Diophante d'Alexandrie — dans l'édition de Bachet de Méziriac de 1621, republiée par Samuel de Fermat avec les notes de son père en 1670 — et qui concerne une fois de plus l'aire des triangles rectangles en nombres[2]. C'est dire les restrictions à une étude directe, par son utilisation dans certaines preuves, du rôle de la descente: nous nous appuierons donc de manière essentielle sur les commentaires de Fermat. Voici la liste des questions qu'il prétend aborder avec la méthode de descente infinie (ou indéfinie, dit-il) d'après la lettre à Carcavi:

Aucun nombre de la forme, moindre de l'unité qu'un multiple de 3, ne peut être composé d'un carré et du triple d'un autre carré.

Aucun triangle rectangle en nombres n'a une aire carrée.

Tout nombre premier qui surpasse de l'unité un multiple de 4 est somme de deux carrés.

Tout nombre est somme d'au plus quatre carrés.

Pour tout nombre non carré, il y a une infinité de carrés qui multipliés par lui font un carré moins 1.

Il n'y aucun cube somme de deux cubes.

---

[2] *Cf.* [Goldstein, 1991] pour un examen de cette démonstration et sa réception par les mathématiciens du XVII^{e} siècle. Le résultat "équivaut" justement au fait que l'équation $y^2 = x^3 - x$ n'a comme solutions (entières ou rationnelles) que (0,0), (1,0), (-1,0).

Il n'y a qu'un seul carré qui augmenté de 2 fasse un cube (c'est 25).
Il n'y a que deux carrés en entiers qui augmentés de 4 fassent un cube (4 et 121).
Toutes les puissances carrées de 2, augmentées de 1, sont des nombres premiers [3].
Il n' y a que 1 et 7 qui sont moindres de 1 qu'un double carré et aient un carré de même nature.

Fermat ajoute d'ailleurs que toutes ces questions sont "de nature diverse et de différente façon de démontrer". Leur niveau de difficulté également est très variable (le premier résultat pourrait être démontré presque immédiatement par examen des restes de division par 3), *cf.* par exemple [Weil, 1983] pour une étude mathématique de l'ensemble. C'est donc pour Fermat la méthode elle-même qui fait leur unité et est responsable de leur rapprochement. Au contraire, dans la suite de sa lettre, il classe d'autres questions sur les nombres par sujets: les "équations simples et doubles du Diophante", la recherche des nombres premiers (on notera qu'il ne rapproche pas cette question de celle sur les puissances de 2), la représentation des nombres figurés. La descente infinie n'est pas considérée simplement comme une méthode d'analyse diophantienne à proprement parler (puisque les équations diophantiennes forment une section différente de la lettre) mais comme un moyen de rapprocher certains problèmes dont l'énoncé, faisant intervenir des aires des triangles rectangles, ou des carrés et des cubes, appartient à la tradition des *Arithmétiques* de Diophante.

Cette manière de rassembler les problèmes peut nous paraître étrange[4]. Elle s'inscrit en fait dans une tradition plus ancienne, où la possession d'une "méthode" permettant de résoudre des problèmes variés assurait aux mathématiciens succès public et reconnaissance sociale (voire alors du pain quotidien) . Fermat présente d'ailleurs à une autre occasion un exemple de "méthode" unifiant des problèmes a priori éloignés, au début de sa carrière: il s'agit d'une technique algébrique, lui permettant, dit-il, de traiter les problèmes de maxima-minima, de centres de gravité et de volumes, de tangentes, de nombres amicaux ou multiples[5].

---

[3] Comme il est bien connu, cette proposition est fausse. Euler a exhibé le facteur 641 de $2^{32}+1$.

[4] On remarque que l'ordre des énoncés cités dans la lettre à Pascal, qu'on retrouve d'ailleurs en grande partie dans celle à Carcavi, évoque davantage une classification par sujets, en particulier la série des énoncés de décomposition en somme de carrés. Le texte me semble trop isolé et trop court pour une interprétation décisive: il est possible que Fermat n'ayant pu combler toutes les démonstrations promises se soit rabattu sur une présentation plus traditionnelle, il est possible que la classification de 54 ne lui ait paru qu'une sous-classification de celle de 59, il est possible que l'amorce de l'étude des formes binaires ait avorté — avec les sommes d'un carré et du quintuple d'un carré, plus compliquées, puisqu'elles se séparent en deux classes — avant d'avoir imprimé son ordonnance au corpus.

[5] *Cf.* la lettre de Fermat à Roberval du 22 Septembre 1636 in [Fermat *Œuvres* II] et l'analyse détaillée de la

Comment la sélection s'opère-t-elle? Il faut pour le comprendre rappeler le rôle crucial des lectures de Diophante dans la mise au point des méthodes algébriques[6]. L'édition gréco-latine des *Arithmétiques* de 1621 n'est qu'une étape, importante par la qualité durable du travail de Bachet, dans la diffusion et la relecture occidentales de Diophante considéré alors comme le père lointain de l'algèbre: de nombreuses publications, par Viète, Stevin, Girard, Billy, pour ne citer que quelques noms, sont consacrées, explicitement ou non, à une transcription algébrique de tout ou partie de l'oeuvre de Diophante. Jusqu'à la fin du XVIIᵉ siècle et au-delà[7], les problèmes diophantiens servent de tests pour le déploiement en puissance des outils algébriques.

Fermat, on le sait, n'a pas été étranger à ce courant dit alors "analytique". Les célèbres notes marginales dans son exemplaire de Diophante, tout comme sa correspondance — dont l'*Inventum novum* de Jacques de Billy, publié en annexe de l'édition de Samuel de Fermat en 1670, est le reflet le plus étendu —, témoignent de son utilisation en analyse diophantienne de notations et de procédés algébriques (hérités en l'occurrence de la tradition de Viète). Ces derniers lui permirent en particulier de fabriquer plusieurs, voire une infinité de, solutions rationnelles là où ses prédécesseurs n'en trouvaient qu'une, ou d'étendre le domaine d'existence des solutions. Mais l'analyse diophantienne lui inspire aussi d'autres questions qui ne lui semblent pas relever des seules techniques algébriques, comme celles que nous avons relevées dans la lettre à Carcavi. On peut rapprocher ce point de vue de celui de Frenicle de Bessy, un de ses principaux correspondants, et en tout cas le plus stimulant sur les questions proprement numériques. Celui-ci se distingue chez ses contemporains à cause de son intérêt pour les nombres et de son ignorance de l'algèbre: la clé de cette liaison entre les deux caractéristiques, *a priori* indépendantes, nous est en partie donnée dans sa correspondance avec Fermat: "Je sais, lui écrit Frenicle le 2 août 1641, que l'Algèbre de ce pays n'est pas propre pour soudre ces questions, ou pour le moins on n'a pas encore ici trouvé la manière de l'y appliquer: c'est ce qui me fait croire que vous vous êtes fabriqué depuis peu quelque espèce d'Analyse particulière pour fouiller dans les secrets les plus cachés des nombres, ou que vous avez trouvé quelque adresse pour vous servir à cet effet de celle que vous aviez accoutumé d'employer à d'autres usages"[8].

En écho réplique Fermat dans la présentation de ses défis aux mathématiciens d'Europe de 1657: "Il est à peine quelqu'un qui propose des questions purement arithmétiques, il est à peine

---

méthode et de sa signification dans [Cifoletti, 1990].

[6] *Cf.* par exemple [Bashmakova-Slavutin, 1977] pour les conclusions globales (je ne partage pas leur interprétation du texte de Viète comme alternative consciente à l'emploi des nombres complexes)

[7] *Cf.* [Rashed, 1988] pour le cas Lagrange au XVIIIᵉ siècle.

[8] *Cf.* [Fermat, *Œuvres* II, lettre XLIX, p. 227].

quelqu'un qui sache les résoudre. Est-ce parce que l'Arithmétique a plutôt été traitée jusqu'à présent au moyen de la Géométrie que par elle-même ? c'est la tendance qui apparaît dans la plupart des Ouvrages tant anciens que modernes et dans Diophante lui-même. Car s'il s'est écarté de la Géométrie un peu plus que les autres en astreignant son analyse à ne considérer que des nombres rationnels, il ne s'en est pas dégagé tout à fait, comme le prouvent surabondamment les *Zététiques* de Viète, dans lesquelles la méthode de Diophante est étendue à la quantité continue, et par suite à la Géométrie.

Cependant l'Arithmétique a un domaine qui lui est propre, la théorie des nombres entiers: cette théorie n'a été que très légèrement ébauchée par Euclide et n'a pas été cultivée par ses successeurs (à moins qu'elle n'ait été renfermée dans les livres de Diophante dont l'injure du temps nous a privés); les arithméticiens ont donc à la développer ou à la renouveler." Les défis portent alors sur plusieurs des problèmes présentés dans la lettre de 1659 sous la rubrique "descente infinie".

Le texte qui précède remplit donc en même temps plusieurs pièces du puzzle: il montre que le regroupement par la méthode obéit en fait à un projet plus vaste (qu'il en soit une trace provisoire ou un pis-aller, l'état des sources m'interdit de le dire), celui d'un travail sur les entiers, dans une lignée euclidienne. La descente infinie s'y inscrit naturellement — en fait, la plupart des résultats précédemment connus qui font appel à un raisonnement de ce type sont de descendance euclidienne[9] —, et permet de prouver des propriétés *générales* sur les nombres, contrairement à la majorité des travaux contemporains, qui, dans la tradition diophantienne, se contentent de chercher une ou des solutions particulières ou d'en donner une construction sans discuter de son caractère général. Il faut souligner à ce propos, parmi les propositions mises en valeur par Fermat, le nombre de celles qui sont "négatives", c'est-à-dire concluent à l'impossibilité d'une propriété donnée; ce type d'énoncés attire particulièrement les foudres des interlocuteurs de Fermat qui les jugent dépourvus d'intérêt (surtout ceux qui se sont épuisés auparavant à trouver des solutions !). Fermat s'est défendu à plusieurs reprises de considérer ce type d'énoncés comme intéressant en soi. Mais la descente infinie fonctionne prioritairement par réduction à l'absurde, pour permettre de limiter ou d'exclure des phénomènes; dans le cas par exemple de la décomposition d'un nombre premier de la forme $4n + 1$ en somme de deux carrés, Fermat insiste sur la difficulté qu'il a eue à appliquer sa technique de descente dans un cas "positif", en ramenant d'ailleurs l'énoncé à un autre, "négatif" celui-ci.

Pour résumer, la descente infinie chez Fermat est typiquement une méthode, au sens de la fin

[9] *Cf.* [Goldstein & Schappacher, 1991]. Une exception notable est le cas de Bachet. Bien que nous ne sachions rien sur l'existence éventuelle d'un projet de sa part comparable à celui de Fermat, des démonstrations "par descente" apparaissent dans ses commentaires des *Arithmétiques*. Les *Porismes* qui les précèdent évoquent aussi une présentation euclidienne du sujet.

du XVI^{e} siècle, à la fois secret décisif du créateur et unificateur de problèmes variés; mais elle est aussi (dans le même temps ou successivement, nous l'ignorons) un outil privilégié pour réaliser le programme de Fermat, une variation euclidienne sur les problèmes de Diophante, restreinte aux propriétés des entiers[10]. Ce démarquage des tendances de ses principaux contemporains est souligné non seulement par la mise à l'écart de la recherche des solutions "à la Diophante" (c'est-à-dire rationnelles) dans la lettre de Carcavi, mais aussi par l'absence de notations algébriques d'aucune sorte dans les résultats concernés par l'emploi de la descente, non seulement dans cette lettre, mais dans l'ensemble de sa correspondance et des notes marginales du Diophante. Si une forme d'algèbre intervient probablement de manière importante dans les preuves, elle est adaptée ainsi à la contrainte originale des entiers[11]: c'est l'"adresse" particulière que réclamait Frenicle de Bessy. Il y a donc séparation opérée sur un corpus de problèmes par l'emploi d'une méthode spécifique, ou plutôt création d'un nouveau corpus, lié étroitement, mais pas complètement immergé, dans celui des *Arithmétiques*. Cette délimitation est fondée en nature — la restriction aux entiers face aux rationnels "première tentation du continu" — et en source — c'est la prolongation d'une problématique euclidienne contre Diophante et surtout les lecteurs algébristes de Diophante au XVII^{e} siècle.

Intermèdes

Le projet de Fermat ne fut ni estimé, ni même pleinement compris de la plupart de ses contemporains et successeurs immédiats. Les arithméticiens purs, comme Frenicle, ne maîtrisaient sans doute pas assez les techniques algébriques pour le développer, les autres ne considéraient les problèmes traités ou mis en avant par Fermat que comme des amusettes ou au mieux des mises à l'épreuve de leurs propres projets et méthodes, sur le calcul infinitésimal ou la mécanique. Aucun ne semble apte à, ou volontaire pour, étreindre les deux brins du programme de Fermat, la méthode de descente et la maîtrise de l'algèbre: la disparition progressive de l'apprentissage euclidien va de pair avec celle de la descente infinie, tandis que s'algébrisent de plus en plus ouvertement les notations et les méthodes. Ainsi Ozanam, dans une lettre à Billy où il annonce avoir eu accès par Carcavi à la lettre de Fermat de 1659, ne

---

10 Le fait que le résultat sur l'aire des triangles rectangles en nombres s'applique à des côtés rationnels ne doit pas faire illusion: comme il apparait très clairement dans les preuves, la descente sert à montrer le résultat pour les entiers, le passage au cas rationnel, par réduction au même dénominateur, est considéré comme une étape indépendante au XVII^{e} siècle.

11 Il ne s'agit pas de sous-estimer l'importance des manipulations, probablement de nature sinon de langage algébrique, dans ces démonstrations, comme en témoigne celle qui nous reste. Fermat dit d'ailleurs dans la lettre à Carcavi que l'obtention d'une solution plus petite est tout le mystère de sa méthode. C'est pour cette raison qu'il ne donne aucun détail là-dessus...; *cf.* sur ce point la Thèse de Weil ci-après.

mentionne que la seconde partie, concernant les solutions rationnelles des équations diophantiennes. Les mathématiciens de la fin du XVII^e siècle qui se sont peu ou prou intéressés au sujet, tel Leibniz, semblent plutôt à la recherche de formules de résolution valides en toute généralité, dont la spécialisation des variables au domaine des entiers ou des rationnels leur fournirait les résultats voulus. La voie dégagée par Fermat ne leur apparaît pas celle d'une stratégie globale, la résolution de problèmes isolés, surtout numériques, a perdu le peu de prestige qui lui restait dans la première moitié du siècle.

La suite du développement de l'analyse diophantienne est bien connue[12], surtout avec la remise à l'honneur du domaine défriché par Fermat à partir des recherches d'Euler. Au cours du XVIII^e siècle, l'analyse diophantienne a fixé son sujet propre, sur un mode mineur: il s'agissait de l'étude des solutions entières ou rationnelles d'équations ou de systèmes d'équations, et la notation algébrique y allait de soi. Les travaux de Lagrange, aisément considéré comme la figure tutélaire de cette tradition, établirent au cours du XIX^e siècle (en fait à partir de la *Théorie des Nombres* de Legendre) une véritable industrie diophantienne, grande fournisseuse d'articles des *Nouvelles Annales* par exemple. Cette vague se mélangeait étroitement, dans ses praticiens et ses méthodes, aux premiers travaux d'érudition historique: en témoigne, dans le *Bollettino* de Boncompagni, la cohabition de textes anciens réédités — c'est là que paraît en 1879 la lettre de Fermat à Carcavi retrouvée par Charles Henry — et de commentaires modernes. Ce milieu servit d'ailleurs de ferment à la publication des *Oeuvres Complètes* de Fermat, par les soins de Tannery et Henry, et les mit donc à la disposition de l'ensemble des mathématiciens: André Weil, entre autres, y puisa.

Le point de vue adopté dans ces travaux diophantiens est aujourd'hui qualifié d'élémentaire; il perdura au moins dans la première moitié du XX^e siècle, en cohabitation plus ou moins pacifique avec d'autres approches des mêmes problèmes, plus prestigieuses, comme nous le verrons. Il est très important par la quantité de textes produits, (*cf.* [Dickson, 1919-1923]) , et la descente infinie, appliquée sur les nombres entiers, y était d'usage banal. Pour éviter les malentendus, il faut insister sur le fait que la multiplication des résultats particuliers et leur apparent éparpillement, souvent cités comme marque de l'amateurisme du sujet ou du manque d'envergure mathématique des auteurs, posent question à ceux-ci mêmes; trouver des modes d'unification est un leitmotiv tout au long de ces textes : la plupart du temps le degré des équations fournissait un mode de rangement qui, au moins en première instance, semblait alors adéquat.

D'autres tentatives pour aborder les questions d'analyse diophantienne sont issues de branches des mathématiques que le XIX^e siècle a vu naître. Pour résumer très grossièrement,

---

12 Voir le texte de Christian Houzel dans ce volume, [Chemla, 1989], [Weil, 1983], et, pour la descente infinie, [Cassinet, 1980], [Goldstein & Schappacher, 1991].

les principales approches dont nous verrons les traces chez Levi, Mordell et Weil relèvent de la théorie des nombres algébriques, de la théorie des invariants, de la géométrie projective et birationnelle et de la théorie des fonctions elliptiques.

Nous avions constaté chez Fermat un intérêt pour les représentations de nombres sous forme de sommes de carrés. La classification des formes quadratiques binaires, entreprise au XVIII[e] siècle, puis complétée par les travaux de Gauss a ramifié dans plusieurs directions. D'une part, la théorie algébrique des nombres: la représentation d'un nombre premier p comme somme de carrés peut s'interpréter comme la factorisation de p dans $\mathbb{Z}(i)$. L'école allemande de théorie des nombres s'est intéressée à la généralisation des propriétés des entiers à des anneaux contenant strictement $\mathbb{Z}$. Par exemple, la factorisation unique d'un entier en éléments irréductibles, encore vraie dans $\mathbb{Z}(i)$, n'est plus valide en général sur les extensions algébriques des nombres rationnels (par exemple dans l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{5}\,)$ ou des corps cyclotomiques) et il faut la remplacer par la factorisation unique en "éléments idéaux" (Kummer) ou plus tard la factorisation unique des idéaux (Dedekind): la descente elle aussi doit alors être adaptée à ces extensions des rationnels. Les principaux résultats de la théorie algébrique ne relèvent pas directement de l'analyse diophantienne comme définie plus haut, bien qu'une portion de celle-ci (comme l'étude des formes binaires) y ait été absorbée; par contre, les études d'analyse diophantienne mirent rapidement à contribution la théorie des idéaux, en utilisant les factorisations des équations étudiées sur des extensions adéquates.

Un autre avatar de la classification des formes est la théorie des invariants, qui met l'accent sur les problèmes de classification. Il s'agit de déterminer et d'étudier, pour des familles d'équations données, des quantités qui restent fixes sous des changements licites des variables, comme le discriminant pour les équations quadratiques. Si les nouvelles variables se déduisent des anciennes par une combinaison linéaire à coefficients entiers, et réciproquement, les deux formes quadratiques correspondantes représentent les mêmes nombres, elles sont dites équivalentes; deux formes équivalentes ont même discriminant et, à discriminant fixé, il n'y a qu'un nombre fini de classes d'équivalence de formes. La généralisation à des systèmes de formes de degré et de nombre de variables supérieurs aboutit également à des résultats de finitude variés, en particulier du nombre de covariants (extension de la notion d'invariants) dont tous ceux du système considéré peuvent se déduire polynomialement, et à la recherche de représentants privilégiés des différentes classes de formes. Ces préoccupations, dont il serait intéressant de déterminer si elles trouvent toutes leur source dans les questions de Lagrange et de ses successeurs, inspirent à leur tour la configuration de l'analyse diophantienne, en donnant un fondement à l'étude de cas particuliers, les représentants choisis, et en proposant d'autres approches à la classification des questions.

Un aspect nouveau et essentiel au XIX[e] siècle (voir le texte de C. Houzel dans ce volume) fut la géométrisation de certains problèmes d'analyse diophantienne: l'équation était interprétée comme celle d'une courbe ou d'une surface (rarement davantage...) dont on cherchait alors les points à coordonnées rationnelles (qu'on appelle simplement comme nous le ferons dans la suite: points rationnels); ainsi, la recherche d'un carré rationnel qui augmenté de 2 fasse un cube rationnel revient à la recherche de points rationnels sur la courbe affine plane $y^2 = x^3 - 2$, ou encore, par homogénéisation, à celle de points à coordonnées entières sur la courbe $y^2z = x^3 - 2z^3$, interprétée comme courbe projective plane, différant de la précédente par ajout d'un point à l'infini (celui pour lequel $z = 0$). Des outils géométriques, ou analytico-géométriques, sont alors appelés à la rescousse: pour une courbe cubique par exemple, la tangente en un point rationnel recoupe la courbe en un autre point rationnel (c'est d'ailleurs une traduction géométrique fulgurante de la majeure partie des résultats de Fermat sur les équations diophantiennes); de même une droite passant par deux points rationnels recoupe la courbe en un troisième point rationnel; c'est la méthode dite "des tangentes et des sécantes" pour fabriquer des solutions rationnelles. Une telle interprétation rassemble et illumine une grande partie des méthodes, d'apparence purement algébriques, qui étaient employées par Fermat, Ozanam, Prestet, Lamy et bien d'autres. D'autre part, les paramétrisations issues de la théorie des fonctions complexes, les fonctions circulaires ou exponentielles pour les coniques, les fonctions elliptiques pour les courbes cubiques, furent utilisées à partir de la seconde moitié du XIX^e siècle pour les problèmes diophantiens: le *Journal de Crelle* abrite des travaux pionniers de ce type. Ainsi, la fonction $\wp$ de Weierstrass, fonction d'une variable complexe doublement périodique, vérifie une équation du type $\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$, où g_2 et g_3 sont liés aux périodes; on en déduit réciproquement que tout point (x, y) sur une cubique non singulière peut être écrit sous la forme $(x = \wp(\alpha), y = 1/2\,\wp'(\alpha))$ en choisissant convenablement les coordonnées et en adaptant selon la cubique les périodes de la fonction de Weierstrass; la construction par tangentes et sécantes peut alors s'interpréter comme formule de duplication et d'addition sur l'argument (complexe) des fonctions de Weierstrass[13].

Ces points de vue attirèrent eux aussi l'attention sur d'autres classifications que celles

13 Nous disons maintenant que l'ensemble des points (rationnels) de la courbe, y compris le point à l'infini qui sert d'élément neutre, a une structure de groupe commutatif, structure qu'on peut décrire analytiquement à l'aide du paramétrage elliptique, géométriquement grâce à la méthode des tangentes et des sécantes, ou algébriquement. Pour une équation du type $y^2 = x^3+ax+b$, l'addition de deux points P et Q correspond à l'addition de leurs paramètres elliptiques dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes ou, géométriquement, au symétrique par rapport à l'axe des abscisses du troisième point d'intersection avec la courbe de la sécante PQ — la symétrie permet au point à l'infini d'être élément neutre. Il est facile de déduire de cette construction une expression rationnelle simple des coordonnées du point-somme en fonction de celles de P et Q.

fournies par le degré de l'équation: c'est en effet dans la seconde moitié du XIX^e siècle que le rapport entre les (groupes de) transformations et les types de géométries (projective, métrique euclidienne, etc.) qui sont préservées par elles fut mis en évidence de manière de plus en plus systématique. Or les paramétrisations rationnelles des courbes, qui conservent les propriétés diophantiennes, peuvent changer leur degré: ainsi le cercle est, par projection stéréographique, birationnellement équivalent (c'est-à-dire transformable par des applications, rationnelles ainsi que leurs réciproques, et définies partout sauf en un nombre fini de points) en une droite, de même que la cubique $y^2 = x^3$ paramétrée par $x = t^2$, $y = t^3$. Le *genre*, invariant inspiré par les travaux sur les fonctions complexes, fournit matière à une nouvelle classification, où toutes les courbes birationnellement équivalentes à une droite sont de genre 0, les cubiques sans singularités de genre 1, etc; le genre dépend non seulement du degré, mais aussi des points singuliers de la courbe: la cubique à rebroussement, $y^2 = x^3$, étant transformable birationnellement en une droite (de coordonnée $t = y/x$), est de genre 0 .

La typographie exacte de ces approches — dont les quelques noms de journaux mathématiques cités ci-dessus ne donnent qu'une bien maigre indication —, les zones et les conditions de leurs interactions, restent à étudier en détail. Un exemple fameux, et très important pour la suite, de combinaison, est le programme sur l'analyse diophantienne de Poincaré, (*cf.* [Poincaré, 1901]). Il s'inscrit dans la ligne d'un travail sur les invariants, mais y mêle une perspective analytico-géométrique: "Je me suis demandé", écrit Poincaré, "si beaucoup de problèmes d'Analyse indéterminée ne peuvent pas être rattachés les uns aux autres par un lien systématique, grâce à une classification nouvelle des polynômes homogènes d'ordre supérieur de trois variables, analogue à certains égards à la classification des formes quadratiques. Cette classification aurait pour base le groupe des transformations birationnelles, à coefficients rationnels, que peut subir une courbe algébrique." Autrement dit, interprétant une équation homogène à trois variables comme une courbe plane projective, il s'agit de classer ces formes, c'est-à-dire ces courbes, à équivalence birationnelle près, c'est-à-dire précisément à transformation près conservant la rationalité des points. Pour notre propos, il est utile de souligner que la perspective géométrique incline vers la considération des solutions rationnelles, et non entières, comme y pousserait l'approche de la théorie des invariants.

En fait, l'application d'une telle classification aux problèmes d'analyse diophantienne remonte à un article de Hilbert et Hurwitz, [Hilbert & Hurwitz, 1890-1891] qui triait ainsi toutes les courbes de genre 0 (les ramenant à des droites ou à des coniques) et déterminait leurs points rationnels. Poincaré, qui ignorait, ou en tout cas ne mentionna pas, ce travail, le reprit en partie et s'intéressa également au cas des courbes de genre 1, qui se ramènent à des cubiques non singulières. Il utilisa la paramétrisation par des fonctions elliptiques de ces courbes : comme mentionné plus haut, la méthode de fabrication des solutions par tangentes et sécantes fournit des points dont les paramètres sont des combinaisons linéaires de ceux de départ. Poincaré suggèra alors d'appeler rang de la courbe le nombre de générateurs indépendants à partir desquels le procédé ainsi décrit fournit tous les points rationnels existant. Il ne semble pas s'être posé la question de son existence (*i.e.* de la finitude du nombre de générateurs indépendants) et nous aurons l'occasion de revenir sur ce point.

Les trois (groupes de) textes du début du XX^{e} siècle que nous allons étudier concernent tous trois un problème diophantien. Tous trois témoignent de leur connaissance de plusieurs des ingrédients que les mathématiques contemporaines pouvaient leur offrir. Tous trois aussi font appel à la descente infinie. Notre but est principalement de décrire le rôle joué par cette méthode dans leur travail et la manière dont elle s'y insère; nous verrons au passage se révéler des dosages très différents des matériaux de base qui traduisent et induisent des perspectives différentes sur les questions diophantiennes. Contrairement au cas de Fermat, ces textes contiennent des démonstrations mathématiques mais pas ou peu d'indication directe sur leur programme: j'essaierai d'appeler à la rescousse non seulement l'évidence interne de ces textes, mais aussi des renseignements extérieurs fournis par les auteurs. Ce que j'ai en vue ne consistant pas en une compréhension mathématique des textes concernés, cet aspect sera à peine effleuré (tout comme dans le cas de Fermat): on peut se reporter à [Schappacher, 1990] pour une étude plus poussée, dans le contexte du développement de la loi de groupe sur une cubique.

Beppo Levi

Au cours de sa longue carrière, Beppo Levi s'est intéressé à de très nombreux sujets; c'est assez tôt, entre 1905 et 1910, que Levi a consacré une série d'articles à la théorie arithmétique des formes cubiques ternaires (c'est-à-dire des expressions homogènes du troisième degré à trois variables): le mot d'analyse diophantienne n'est pas mentionné, mais Fermat, Euler et Legendre sont cités comme précurseurs. En ce qui concerne Fermat, il s'agit d'ailleurs de la partie de son oeuvre qui concerne l'analyse diophantienne classique, et non de celle qui relève de la descente. D'autre part, si le titre élu par Levi le place d'emblée dans la mouvance de la théorie des formes homogènes et des invariants, l'auteur cite explicitement le programme de Poincaré.

Levi remarque d'abord que le rang tel que Poincaré l'a défini n'est pas invariant par transformation birationnelle (ce qui est un comble vu son programme!) et en corrige la définition. Il interprète géométriquement les formes homogènes comme des courbes, cubiques en l'occurrence, et se propose ensuite d'étudier, en mélangeant l'utilisation des paramètres elliptiques et la géométrie projective, ce qu'il baptise des configurations finies de points rationnels. Il arrive en effet que les points rationnels obtenus par applications successives de la méthode des tangentes à partir de l'un d'entre eux soient en nombre fini[14]; Levi cherche à déterminer les conditions sur les paramètres elliptiques correspondants pour qu'il en soit ainsi, selon le nombre de points distincts intervenant dans la configuration: si α est le paramètre d'un point rationnel (donc si $x = \wp(\alpha)$, $y = 1/2\ \wp'(\alpha)$, pour la fonction de Weierstrass correspondante à la courbe), le paramètre du point "tangentiel", c'est-à-dire du point de recoupement avec la courbe de la tangente passant par le premier point, est -2α et il est facile d'en déduire des expressions pour que la configuration obtenue en réitérant le processus soit finie, soit qu'elle revienne sur un point déjà obtenu, soit qu'elle se termine sur un point d'inflexion (où la tangente a un contact d'ordre 3 avec la courbe). Levi montre ainsi l'existence de certaines configurations et donne dans ce cas les équations des courbes correspondantes; il prouve aussi que certaines configurations sont impossibles et c'est là qu'intervient la méthode de descente.

Voici un exemple qui devrait permettre de mettre en évidence l'articulation des divers ingrédients, la démonstration qu'il ne peut exister de point rationnel P dont le 4^e "tangentiel" serait un point d'inflexion[15] (voir le graphe, feuille suivante). Admettant l'existence d'un tel P, Levi choisit un repère du plan projectif tel que les 1er, 2^e, 3^e et 4^e tangentiels de P soient respectivement les points A de coordonnées (1, 0, 0), A_1 de coordonnées (0, 0, 1), A_2 de coordonnées (0, 1, 0), A_3 de coordonnées (1, 1, 1). L'équation d'une cubique passant par tous ces points s'écrit nécessairement $y^2(x-z) - yx[ax-(a+b)z] - bxz^2 = 0$ et le fait que A_3 de coordonnées (1, 1, 1), 4^e tangentiel de P, soit un point d'inflexion, impose que $b = -(a-1)(a-2)$, avec $a \neq 1, 2$. Il n'est par ailleurs pas très difficile de montrer par des considérations géométriques que la sécante passant par A_1 et A_3 recoupe la cubique en un point A'_1 de tangentiel A_2, la sécante passant par A et A'_1 recoupe la cubique en un point A" de tangentiel A_1, la sécante passant par P et A" recoupe la cubique en un point P' de tangentiel A. Tous les nouveaux points ainsi définis sont encore rationnels et, de plus, P, P', A" sont alignés. Des 4 tangentes à la cubique qu'on peut tracer du point A (en dehors de la tangente en A elle-même), deux sont celles en P et P', les deux autres sont des tangentes en certains points Q et Q', qui ne sont pas nécessairement rationnels. Mais dans le faisceau de coniques passant par les quatre points P, P', Q, Q', la conique dégénérée formée des deux droites PP' et QQ' est la seule ayant A" comme point double (car PP' et QQ' contiennent A"), elle est rationnelle et donc la droite QQ' est globalement rationnelle. On peut maintenant traduire analytiquement ces exigences. La conique (rationnelle) ayant A" comme point double a pour équation :

---

[14] Dans ce cas, l'ensemble des points (tous rationnels) obtenus en saturant ceux de la configuration pour la méthode des sécantes et des tangentes est encore fini, et même, comme on le dirait de nos jours, constitue un sous-groupe, cyclique, du groupe de tous les points rationnels de la courbe.

[15] Nous dirions aujourd'hui qu'il n'existe pas de sous-groupe de points rationnels cyclique d'ordre 16.

$$[y - a(1 + \sqrt{a-1})x + (a - 1 + \sqrt{a-1})z][y - a(1 - \sqrt{a-1})x + (a - 1 - \sqrt{a-1})z] = 0$$

ce qui impose au passage que a-1 soit un carré c^2, avec c nombre rationnel, puis, en traduisant les conditions de rationalité déterminées ci-dessus, que l'équation

$$(c^2+1)(c-1)(c^3-c^2-3c-1) = d^2$$

ait des solutions rationnelles. Quelques observations arithmétiques simples (réduction au même dénominateur, parité, factorisation) ramènent alors aisément ce problème à celui de déterminer des solutions entières de

$$\alpha^4 + 8\beta^4 - 4\alpha^2\beta^2 = l^2.$$

Levi conclut alors à son impossibilité par une descente infinie classique, dans la plus pure tradition lagrangienne.

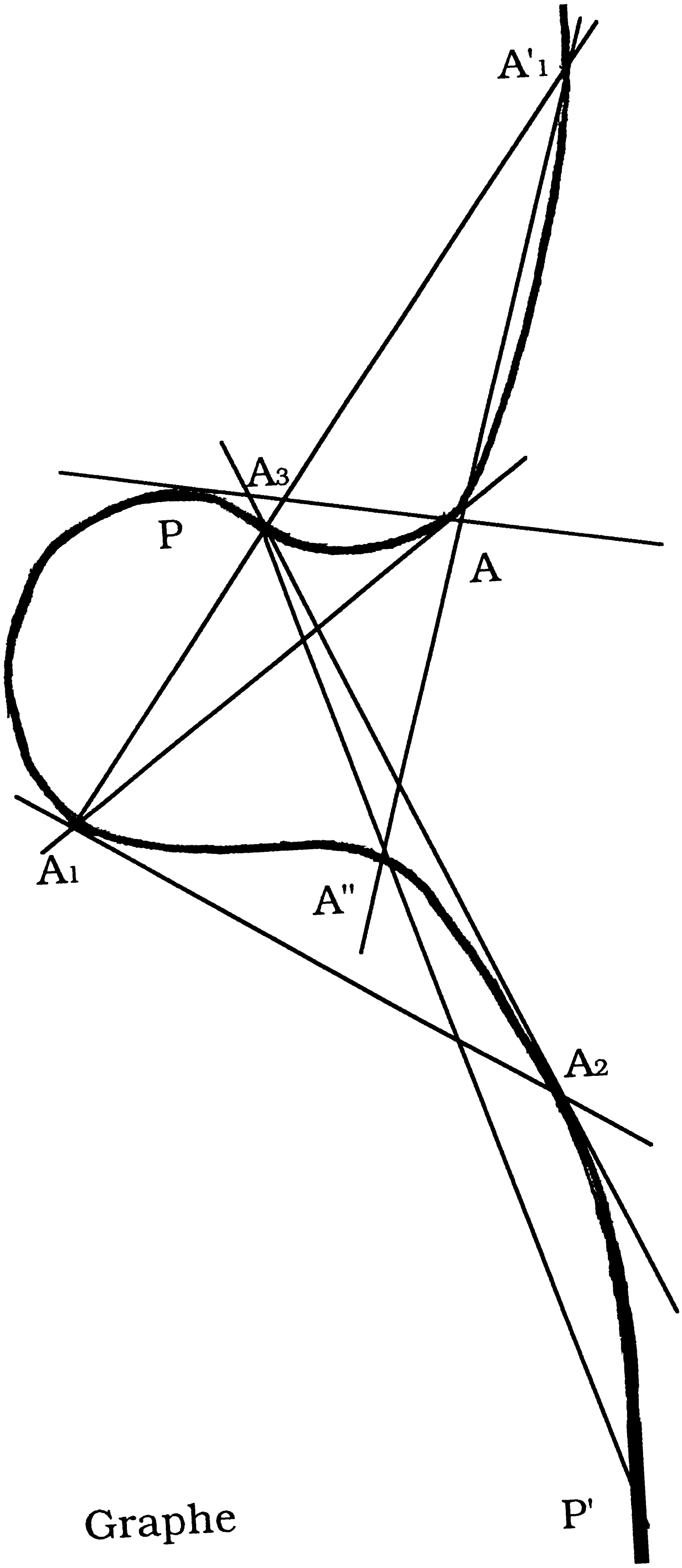
Outre leur intérêt mathématique[16], les travaux de Beppo Levi mettent en évidence une évolution spectaculaire[17] possible de l'analyse diophantienne, l'interprétation géométrique s'accompagnant de questions nouvelles, ou au moins de manières originales de poser les questions. Ils brassent plusieurs méthodes et points de vue, entremêlant fonctions elliptiques complexes, arguments de géométrie projective, arithmétique usuelle. Levi appartient pourtant à la tradition classique en ce que son intérêt de départ concerne les solutions *rationnelles* de certaines équations mais que son emploi de la descente infinie, par ailleurs, est restreint à des problèmes subsidiaires, négatifs, formulés sur les entiers naturels, pour lesquels il procède alors comme toujours par trituration algébrique des équations pour déduire d'une solution une autre plus petite. Nous sommes donc dans un cas de figure où l'évolution de l'analyse diophantienne et du programme d'ensemble suivi (celui de Poincaré, disons), ne s'accompagne pas du tout d'une réévaluation de la procédure de descente ou des enjeux qui y seraient liés.

Ces travaux de Beppo Levi vont nous servir de contre-jour pour observer ceux de Mordell et Weil. Ces derniers en effet absorbent d'office des propositions de Fermat comme cas particulier. Il est donc particulièrement tentant de les installer d'office à la place convoitée de

---

[16] La détermination des groupes de torsion (qui sont toujours finis comme nous le verrons plus loin) des courbes elliptiques définies sur le corps des rationnels n'a été achevée qu'en 1978 par Barry Mazur [1978]. Les seuls groupes cycliques sont ceux d'ordre 1 à 12 (11 exclu), trouvés déjà par Levi; peut aussi apparaître le produit d'un groupe à 2 éléments et d'un groupe cyclique à 2, 4, 6 ou 8 éléments. Mais le travail de Levi peut aussi être relié à d'autres types de résultats intéressants, *cf.* [Lecacheux, 1993] et [Washington, 1991].

[17] Soulignons encore une fois que l'approche "classique" subsiste, à côté de et en connexion partielle avec ce type de travail. Que l'étanchéité entre les différents types de mathématiciens ne soit pas parfaite est attestée par le fait que Levi cite à côté de Poincaré divers articles des *Nouvelles Annales* et comme nous l'avons vu utilise leurs méthodes à certains endroits de ses preuves. Réciproquement, les fonctions elliptiques font de timides apparitions dans les approches élémentaires.



Graphe

réalisateurs du projet de Fermat: nous verrons que la situation est plus complexe et que la perspective des travaux de Levi aide à mieux mesurer l'originalité des démarches et la spécificité des objectifs.

Louis Mordell

Bien avant le papier qui nous intéresse particulièrement, Louis Mordell s'était consacré aux solutions entières d'équations de la forme $y^2 - k = x^3$, pour un entier k donné. Son traitement de ces équations faisait appel à la théorie des invariants (particulièrement des syzygies, c'est-à-dire des identités entre invariants ou covariants de formes associées) et visait en fait une classification des formes cubiques; Mordell conjecturait à ce moment-là qu'il pouvait exister des expressions de la forme précédente avec un nombre infini de solutions entières[18]. La rencontre d'articles issus de la théorie algébrique des nombres, en particulier du théorème d'approximation de Thue et ses conséquences, lui fournit de nouvelles perspectives qui devaient aboutir, par un détour remarquable, au théorème de Mordell que nous avons évoqué au début

Tout d'abord, quel rapport peut-il y avoir entre un résultat d'approximation rationnelle et les solutions entières d'une équation diophantienne ? Voici un exemple très simple, mais suggestif, celui de l'équation $x^3 - 2y^3 = a$. Toute solution pour laquelle $y \neq 0$ vérifie $[x/y - \sqrt[3]{2}][x/y - \alpha \sqrt[3]{2}][x/y - \alpha^2 \sqrt[3]{2}] = a/y^3$, où α est une racine cubique complexe de 1. Les deux termes complexes du membre de gauche sont minorés en valeur absolue par un nombre strictement positif; on en déduit que $[x/y - \sqrt[3]{2}] < C/y^3$ pour une constante C donnée.
Un énoncé typique d'approximation rationnelle (pour le nombre algébrique $\sqrt[3]{2}$) est qu'il n'existe qu'un nombre fini de fractions x/y vérifiant la propriété ci-dessus. On conclut donc immédiatement à la finitude du nombre de solutions entières de l'équation de départ. Axel Thue prouva par des méthodes de ce type que pour tout entier $d > 0$ fixé et toute forme f homogène de degré supérieur à 3, l'équation $f(a, b) = d$ n'a qu'un nombre fini de solutions entières. Thue encore, mais aussi Landau et Ostrowski, (*cf.* [Thue, 1917] et [Landau & Ostrowski, 1920]) utilisèrent alors ces résultats pour aborder les équations non homogènes comme $dy^n = x^2 + bx + c$, où $n \geq 3$, $b^2 - 4c \neq 0$. Les racines β_1 et β_2 de l'équation $x^2 + bx + c = 0$ définissent en général un corps quadratique $\mathbb{Q}(\beta)$ sur $\mathbb{Q}$ (si les β_i sont rationnels, le cas est encore plus facile). L'équation considérée s'écrit alors $(x - \beta_1)(x - \beta_2) = dy^n$; en considérant la décomposition unique en facteurs premiers des idéaux entiers dans $\mathbb{Q}(\beta)$, on déduit que $x - \beta_i = \mu\, \partial^n$, où μ prend un nombre fini de valeurs possibles et où μ et ∂ sont dans l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\beta)$, donc exprimables en fonction de β. En égalant les coefficients de β de

[18] Ce qui est en fait inexact. Il n'y a qu'un nombre fini de point entiers sur une courbe affine de genre 1, cf ci-après. Signalons au passage que malgré les affirmations de [Cassels, 1986], il n'y a pas de vraie loi de groupe définie dans le papier de Poincaré (*cf.* [Schappacher, 1990]).

chaque côté, on obtient des conditions sur des formes à coefficients rationnels (dépendantes de μ, donc en nombre fini), dont chacune n'a qu'un nombre fini de solutions à cause des théorèmes précédents de Thue. Une variante de cette preuve, adoptée par Mordell, consiste à fixer pour chaque μ une solution particulière x_0, le produit $(x - \beta_i)$ $(x_0 - \beta_i)$ étant alors une puissance n-ième exacte dans $\mathbb{Q}(\beta)$, ce qu'on peut traduire par des expressions rationnelles. Mordell semble avoir cherché à appliquer ce type de raisonnement à des équations de la forme:

$x^3 - px^2 - qx - r = az^2$, puis $x^4 - px^3 - qx^2 - rx - s = az^2$, en faisant apparaître des carrés dans le premier membre, toujours à un nombre fixe fini de facteurs parasites près, mais il ne réussit à conclure que dans le premier cas, les familles d'équations rationnelles obtenues ensuite devenant apparemment inextricables, (*cf.* [Mordell, 1947]). Comme il le dit lui-même, il chercha vainement plusieurs mois à compléter sa démonstration, en manipulant les équations, et c'est apparemment ainsi qu'il découvrit qu'il pouvait déduire d'une solution donnée une autre solution, plus nécessairement entière, mais rationnelle cette fois (en fait une solution entière de l'équation homogène associée), dont les coordonnées soient plus petites. Cassels, dans [Cassels, 1986], commente l'événement en ces termes: "To a number theorist stepped, as Mordell was, in the work of Fermat and his followers, the response must have been Pavlovan (the dog psychologist, not the dancer). A descent argument could be invoked and everything will be fallen into place."

En fait, le papier publié par Louis Mordell, en 1922, définit d'office comme son sujet central la question des points rationnels sur des courbes d'équation $y^2 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ (ou encore des solutions de $0 = f(x, y, z)$, où f est une forme cubique ternaire, la liaison entre les deux étant inspirée, chez Mordell, par la théorie des invariants). Il rappelle le processus de construction de points rationnels par tangente et sécante et son interprétation analytique avec les fonctions elliptiques. Il traite alors l'équation comme indiqué plus haut et en déduit la construction d'un point dont les coordonnées s'expriment rationnellement en fonction de celles d'une solution précédente, la taille des cordonnées diminuant dans le processus: il existe donc un ensemble fini de points rationnels à partir duquel se déduisent rationnellement tous les points rationnels de la courbe. Mordell réinterprète ensuite sa démonstration, d'abord en termes purement géométriques (à l'aide d'une conique passant par des points construits successivement)[19], puis en termes des paramètres analytiques. A la fin seulement de l'article, il mentionne que les résultats obtenus par Poincaré permettent d'en déduire que le théorème qu'il vient de prouver est valide plus généralement pour toute courbe de genre 1[20].

---

[19] Une conique (rationnelle) passant par cinq points rationnels appartenant à une cubique la recoupe en un point rationnel: cette construction se ramène en fait à une combinaison des constructions par tangente et sécante.

[20] Il formule aussi diverses conjectures, dont la fameuse "conjecture de Mordell" — toute courbe de genre supérieur ou égal à 2 n'a qu'un nombre fini de points rationnels— démontrée par Gert Faltings en 1983.

On constate donc que la plupart des ingrédients disponibles (fonctions elliptiques, constructions par tangente et sécante, nombres algébriques, connaissance du papier de Poincaré, descente infinie) se retrouvent dans cet article, mais en ordre dispersé, et avec des poids respectifs très différents de ce qui apparaissait chez Levi. Si Mordell connaît une grande partie des travaux les plus récents, son intérêt propre le dirige le long d'une voie spécifique: la classification des problèmes qu'il privilégie est celle de la théorie des invariants, les méthodes qu'il utilise incorporent à la lignée classique élémentaire l'apport de la théorie algébrique des nombres. Mordell, rappelons-le, a été l'un des collaborateurs de Dickson pour sa chronologie détaillée du domaine ([Dickson, 1919-1923]).

Son programme d'origine pourrait être assez proche de celui de Fermat: il s'agit effectivement de la recherche de points entiers sur des courbes particulières. C'est un semi-échec (heureux!) qui le détourne de son but d'origine. On retrouve d'ailleurs tout à fait les prédilections de Mordell dans ses présentations ultérieures du sujet, (*cf.* [Mordell, 1947] et [Mordell, 1969]). La méthode de descente, bien connue dans la tradition où s'inscrit Mordell, ne fabrique pas l'unité du sujet, et le modèle particulier d'équations mis en valeur indique clairement la lignée invariante: par rapport au papier de Beppo Levi, la classification générale des problèmes se fait par formes et degrés, même si des correspondances et transformations sont établies entre ces formes pour sélectionner des représentants particuliers, et ceux-ci ne sont d'ailleurs pas les mêmes que ceux mis en avant par le point de vue analytico-géométrique — l'article de Poincaré n'est mentionné, à la fin, que dans la mesure où il permet de prouver la généralité du théorème de Mordell, mais il n'intervient pas comme programme d'action ou source d'inspiration effective. Son emploi de la descente, central et original en ce qu'il permet d'atteindre globalement l'ensemble des solutions *rationnelles*, est dans son mode d'application, sinon dans son contexte, tout à fait standard, la procédure consistant à transformer des équations algébriques — notons quand même le souci d'interprétation géométrique de ces manipulations mêmes, qui semble rajouté après coup.

André Weil

La thèse d'André Weil, publiée en 1928, contient la généralisation du théorème de finitude de Mordell aux courbes de genre quelconque, définies sur un corps de nombres, c'est-à-dire une extension de degré fini sur $\mathbb{Q}$; outre ses propres commentaires rédigés au moment de la publication de ses *Œuvres*, en 1979, nous disposons aussi d'un texte écrit en 1929, intitulé "Sur un théorème de Mordell"; Weil confie dans ses commentaires qu'il l'écrivit d'une part afin de mieux faire comprendre ses idées sur ce cas particulier, d'autre part parce qu'il espérait aussi en donner une version effective, c'est-à-dire un moyen de déterminer explicitement le rang exact de la courbe[21]. "Je ne prétends pas", écrit Weil au début de ce court article, "que la démonstration qu'on va lire soit essentiellement différente de celle de Mordell." Comme nous allons le voir, les variations entre les deux preuves sont justement d'autant plus significatives que le théorème prouvé est strictement identique.

Weil part de l'équation générale d'une cubique de genre 1, qu'il écrit directement $y^2 = x^3 - Ax - B$, et rappelle immédiatement l'existence et les propriétés utiles de la paramétrisation elliptique. Le début de la démarche est analogue à celle de Mordell, et consiste à factoriser le second membre de l'équation en "presque carrés", c'est-à-dire en carrés à un ensemble fini possible de facteurs près :

$$y^2 = x^3 - Ax - B = (x - \theta_1)\,(x - \theta_2)\,(x - \theta_3)$$

avec donc $(x-\theta_i) = \mu_i\,\alpha^2$, où μ_i prend un nombre fini de valeurs possibles. La preuve en est donnée par de simples considérations algébriques relatives à la décomposition des idéaux dans l'extension $\mathbb{Q}(\theta_i)$ comme chez Mordell, mais Weil note également que le résultat peut se déduire d'un théorème de décomposition des fonctions rationnelles définies sur une courbe, applicable ici aux fonctions $(x-\theta_i)$ à pôle et zéro doubles, théorème utilisé dans sa Thèse pour accéder au cas des courbes de genre quelconque. Weil définit ensuite des classes de points rationnels : deux points rationnels sont dans la même classe si les facteurs μ_i intervenant dans la factorisation sont les mêmes; il n'y a donc qu'un nombre fini de telles classes. Le point crucial est l'affirmation que "les classes forment, par rapport à l'addition [des paramètres elliptiques correspondants aux points rationnels d'une classe] un groupe abélien fini dont tous les éléments sont d'ordre 2". De plus, tout point de la classe unité est le double (au sens toujours des paramètres elliptiques) d'un autre point rationnel; la preuve revient à résoudre des équations très simples, dans lesquelles on "reconnaît" bien sûr celles qui intervenaient chez Mordell, cf note 13. "Le groupe des classes", écrit Weil , "n'est autre que le quotient du groupe de tous les points rationnels par le sous-groupe des points de la forme 2u". Choisissons alors des représentants a_i de chaque classe (qui correspondraient aux x_0 de Mordell), tout paramètre u_0 d'un point rationnel s'écrit donc:

$$u_0 = a_0 + 2\,u_1,$$

pour un a_0 convenable représentant la classe de u_0 et u_1 un nouveau point rationnel.

De même, $u_1 = a_1 + 2\,u_2$, et en réitérant, on fabrique ainsi, à partir d'un point rationnel, une suite "indéfinie" de points rationnels, u_1, u_2, etc., obtenue par quasi-dédoublement; leur taille descend[22], ce qui permet de conclure à la finitude des générateurs du groupe des points

---

21 On ne dispose toujours pas à l'heure actuelle d'un tel procédé!

22 La mesure de la taille chez Mordell d'un point rationnel n'est pas des plus limpides... Il semble que cela soit le sup des valeurs absolues de x et z (noté y chez Mordell) ou de leurs racines carrées. Weil appelle xz, y, z^3 les coordonnées homogènes d'un point et choisit comme mesure le sup de la valeur absolue de x et de z^2.

rationnels.

Si les preuves de Weil et de Mordell sont donc comparables étapes par étapes, voire termes à termes, leur contexte et l'inspiration qui les anime sont très différents. Weil, dans l'introduction de sa thèse, se place d'emblée dans la lignée du programme de Poincaré. Dans ses commentaires, il laisse d'ailleurs entendre que cette approche a pu lui être suggérée, non par Poincaré lui-même, mais par une lecture directe de Riemann, père fondateur s'il en est de la géométrie birationnelle: "Jeune normalien, j'avais étudié Riemann, puis Fermat", écrit-il "(...) Il n'est donc pas étonnant qu'il me soit venu, comme à tant d'autres, l'ambition d'apporter ma contribution à l'étude des équations diophantiennes en général, et de celles de Fermat en particulier; mais il y fallait, pensais-je, un point de vue nouveau, qui ne pouvait être que celui de l'invariance birationnelle." Quoi qu'il en soit, cette perspective est première et organise l'ensemble du travail: l'étape principale en est en effet le théorème de décomposition énoncé sur des fonctions rationnelles de la courbe, qui transpose au point de vue privilégié les résultats de factorisation sur les nombres utilisés dans l'approche classique. Bien qu'elle ne soit pas alors mentionnée, se dessine en filigrane ce qui sera dans l'oeuvre de Weil une inspiration essentielle, dans la continuation de Kronecker: l'analogie entre corps de fonctions et corps de nombres. La version, terre-à-terre, proposée en 1929 pour les cubiques et lisible directement sur les nombres, vient clairement après coup comme une simplification et non a priori comme source d'une réflexion à généraliser. Le récit que donne Weil de l'élaboration de sa thèse, est à cet égard aussi significatif: tout d'abord la lecture de Riemann et Fermat et la transcription birationnelle de la factorisation dès 1925; un ralentissement de son intérêt mathématique pour cette question les mois suivants, puis, le retour au sujet avec un objectif mieux défini: le théorème de finitude pour les courbes de genre quelconque, par le hasard d'une lecture, celle de l'article de Mordell suggérée par la bibliographie d'une "mathématicienne de Chicago" — il s'agit sans doute de M. Logsdon—: "Je le lus aussitôt", explique Weil du mémoire de Mordell, "et reconnus sans peine, dans la descente infinie telle que la pratiquait Mordell une application du principe même dont je m'étais aperçu l'été précédent. "Il est crucial de relever que le fondement de la descente est vu ici dans la transformation qui permet de passer d'une solution à une autre, et qu'il s'agit d'introduire à cet endroit le "point de vue nouveau", en l'occurrence birationnel, tout comme peut-être, le "mystère de la méthode" de Fermat résidait en une application fine des techniques algébriques disponibles à son époque. Les ingrédients disponibles sont aussi chez Weil nettement hiérarchisés: les fonctions elliptiques interviennent dès le début, et s'avéreront un outil commode pour les formules d'addition, bien que Weil souligne à ce propos qu'elles pourraient être remplacées par le point de vue purement géométrique qu'offre la méthode de la sécante. La classification par genre et l'emploi des paramètres elliptiques privilégient une forme particulière de l'équation d'une cubique générale, qui ne frappe les lecteurs modernes, habitués à elle, que s'ils y confrontent d'autres textes de la même époque (y compris celui de Mordell).

L'autre nouveauté est le recours systématique à la notion de groupe, que ce soit pour les points rationnels ou pour les classes modulo 2. Rappelons à ce propos que ce point de vue n'est pas du tout explicité dans Poincaré — contrairement à ce que des histoires parfois hâtives du sujet peuvent laisser entendre —, encore moins chez Mordell et ne se trouve chez Levi que sous une forme discrète mais pertinente (et uniquement pour les points rationnels). Cette intervention de concepts qui, pour n'être pas nouveaux en 1928, n'étaient certainement pas alors évidents, permet à la descente infinie d'opérer directement dans son cadre d'action, sur la loi de groupe: la démarche correspond simplement à une version analytico-géométrique, sur les points rationnels, de l'algorithme de division euclidienne sur le groupe des entiers naturels. L'outil est ici mis au service d'un programme, qui est d'emblée, point de vue birationnel oblige, celui de l'étude des points rationnels sur une courbe.

La suite des commentaires de Weil, retraçant la chronologie de son résultat, décrit les pérégrinations des années correspondantes, à Rome d'abord, où il apprend auprès de Severi, d'Enriques et leurs élèves, le point de vue de la géométrie italienne et rencontre au passage, via M. Logsdon, le travail de Mordell, à Berlin et Göttingen, ensuite, lieux de contact avec l'école algébrique allemande, intéressée par les théorèmes structuraux. Le périple européen reflète donc géographiquement les composantes mathématique de son travail [23].

Conclusions

Notre premier objectif était de témoigner de la diversité des interventions possibles d'une méthode donnée, en l'occurrence la descente infinie, en analyse diophantienne. Chez Fermat, nous l'avons vu, elle réordonne, voire crée, un corpus spécifique, tout en permettant d'y aménager une technique de pointe pour l'époque, l'algèbre. Ce n'est pas un mince paradoxe, vu le devenir du domaine, que le rapport de la descente infinie à son sujet de prédilection soit plutôt au départ un rapport de conflit, l'une servant à maîtriser l'emballement algébrique de l'autre. La démonstration par descente utilisée par Levi, limitée à des cas particuliers, est assez proche dans son fonctionnement de ce qu'elle était chez un Fermat révisé par Lagrange, mais elle n'occupe plus qu'une place marginale dans l'ensemble des problèmes et n'est pour rien dans leur classification thématique. Si par ailleurs les connaissances diophantiennes de Mordell et de Levi sont comparables, et la descente infinie dans ce cadre un réflexe commun, le projet initial du

[23] Je ne suis pas en train de prétendre à des influences directes. Weil mentionne le peu d'intérêt du cercle d'algébristes de Göttingen pour ces questions. Mais les milieux décrits sont significatifs. En particulier, la phrase de Severi "reconnaissant" que son théorème de la base pour les courbes sur une surface procède du même esprit, est instructive.

premier, l'étude des solutions entières, le rapproche bien davantage de Fermat alors que la généralité de son résultat obtenu par descente donne à celle-ci une nouvelle ampleur. Quant à Weil, s'il est un héritier de Fermat, c'est peut-être moins par son programme que par la manière dont il a intégré l'usage de la descente infinie aux techniques d'ensemble de sa preuve, issues ici de la géométrie birationnelle: mais chez lui, la classification (et le projet donc) sont premiers à l'emploi de la méthode et conditionnent le type de solutions cherchées. Ce panorama est évidemment loin d'être exhaustif et d'autres cas de figures peuvent être et ont été effectivement réalisés.

L'étude de ces exemples met pourtant déjà en évidence des lignes de partage en analyse diophantienne: la distinction entre entiers et rationnels, bien sûr, prégnante tout au long de ce texte, et, liée à elle mais non confondue, la distribution fluctuante et si difficile à saisir entre arithmétique, algèbre, géométrie, analyse.

La première anime encore les présentations du sujet par Mordell, (*cf.* [Mordell, 1947] et [Mordell, 1969]). L'équivoque qui semble s'être produite sur le travail de Fermat me semble venir de ce que ce dernier s'est effectivement intéressé à plusieurs types de questions, qu'une partie de ses efforts ont consisté à les séparer aussi nettement que possible mais que la postérité variée de son oeuvre en a recombiné différents aspects, mélangeant a posteriori les desseins de Fermat et réinterprétant en les fléchissant les composantes de son travail.

Pour illustrer ce point, notons que l'un des problèmes mentionné par Fermat dans la lettre à Carcavi est la recherche des carrés égaux à un cube moins 2: il n'y a effectivement qu' un point à coordonnées entières positives sur la courbe $y^2 = x^3 - 2$, le point (3, 5); il existe bien sûr aussi un point (3, –5)[24], mais aussi une infinité d'autres obtenus par le procédé habituel de la tangente et de la sécante à partir de celui-ci (le groupe des points rationnels est infini cyclique). Ce procédé aurait pu être mis en oeuvre par Fermat dans ses études diophantiennes, mais il ne me semble pas qu'il ait rêvé de se servir de la descente pour étudier l'ensemble des solutions qu'il obtenait dans ce cadre. Par ailleurs, la question de l'intégralité, telle qu'elle s'est posée pour Mordell par exemple, sera résolue en toute généralité (en l'occurrence pour toutes les courbes algébriques de genre > 0) non par la seule descente, mais aussi grâce au théorème de Thue, développé par Siegel, c'est-à-dire une approximation des nombres algébriques par des rationnels. Que la démonstration dans le cas de certaines courbes étudiées par Fermat puisse se faire élémentairement par seule descente est un hasard mathématique. L'achèvement du programme de Fermat serait plus à chercher dans les travaux de Siegel que dans ceux de Weil,

---

[24] La question des points négatifs est souvent oubliée dans ces questions; elle n'est pourtant pas si innocente. Fermat se vante à plusieurs reprises d'obtenir à partir d'une fausse solution, c'est-à-dire une avec des nombres négatifs, une vraie, par son procédé. C'est souligner à quel point la recherche de solutions dans une structure de nombres, *a fortiori* une loi de groupe ou une représentation unifiée de ces points, lui est étrangère.

mais la descente ne fournit plus alors un instrument suffisant. Mentionnant à la fin de sa Thèse le travail sur les points entiers de Siegel, Weil écrit justement: "Il est vrai que les points à coordonnées entières ne sont pas invariants par transformations birationnelles, de sorte que ce résultat ne ressortit pas de ce que nous avons appelé l'arithmétique des courbes algébriques et se distingue essentiellement des questions que nous avons essayé d'aborder ici." La méthode n'étant plus déterminante pour décider du sujet à traiter, c'est au contraire le point de vue d'ensemble, birationnel, qui l'organise.

Quant au second aspect évoqué, le redécoupage entre les grandes divisions territoriales des mathématiques, je me contenterai, outre les mentions faites dans ce texte aux différentes hiérarchies et utilisations des fonctions complexes, des arguments géométriques, de la descente, des équations, etc., de suggérer une piste supplémentaire, à laquelle n'ont été faites ici que de brèves allusions: selon la forme de l'équation priviliégiée, une solution rationnelle est parfois donnée implicitement, ou non. Une part importante des techniques de Fermat consistait à fabriquer de nouvelles solutions à partir de l'une d'elles. Dans [Weil, 1929], Weil souligne par contre que "la question sur [l'existence d'une] solution rationnelle est d'un caractère essentiellement arithmétique, alors que le théorème de Mordell (ainsi que sa généralisation pour les courbes de genre quelconque) est avant tout de nature algébrique". Il s'agirait donc, dans chaque cas, de repérer les caractéristiques sous-jacentes aux classifications des auteurs et les rapprochements ou séparations qu'elles induisent.

L'évolution de la descente infinie et de l'analyse diophantienne ne sont donc pas liées de manière incontournable: le travail sur les courbes de genre 0 de Hilbert et Hurwitz était encore considéré en 1929 comme un grand achèvement d'analyse diophantienne (que nous avons tendance à oublier parce qu'il a clos le sujet); des décalages sont aussi possibles entre les évolutions du domaine et celle de la méthode. Le triomphe de la classification géométrique a eu tendance à élire comme son sujet une partie du domaine ouvert par Fermat en la redécoupant: elle y intègre des travaux que Fermat n'y incluait pas, mais elle en exclut d'autres (ou leurs généralisations naturelles). Il y a donc redistribution des problèmes plutôt que développement "naturel" englobant le passé. Leibniz par exemple, voyait pour sa part dans l'étude commune d'équations diophantiennes classiques (exprimables par des polynômes) et d'équations exponentielles (du type $x^y - y^x$ = cte) le futur du sujet. Le développement de l'analyse diophantienne ne paraît donc pas si inéluctable: s'il est vrai que la stricte et précise relecture de la démonstration de Fermat sur l'aire des triangles rectangles en nombres peut être faite pratiquement terme à terme dans le langage d'André Weil, et y gagne ainsi une puissance, une simplicité et une généralité si frappantes qu'elles en paraissent prédestinées, la relecture plus fine des buts fixés par Fermat montre qu'ils n'ont pas été réalisés et pris en compte par ce développement particulier du domaine.

Bibliographie

I. G. Bashmakova & E.I. Slavutin, "*Genesis triangularum* de François Viète et ses recherches dans l'analyse indéterminée", *Archive for History of Exact Sciences*, XVI (1977), 289-306.

J.W.S. Cassels," Mordell's finite basis theorem revisited", *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 100 (1986), 31-41.

R. Cassinet, "Histoire de la descente infinie de Campanus à Hilbert", *Cahier-Séminaire d'Histoire des Mathématiques de Toulouse*, n°2 (1980), B1-B25.

K. Chemla, "Démarches Mathématiques", in *Encyclopédie Philosophique*, t II, Paris, 1989.

G. Cifoletti, *La méthode de Fermat: son statut, sa diffusion*, Cahiers d'Histoire et de philosophie des sciences, Belin diff., 1990.

L. E. Dickson (and coll.), *History of the Theory of Numbers*, 3 vol., Carnegie Institute of Washington, Washington, 1919-1923; reprinted Chelsea, New York, 1971.

P. de Fermat [I-IV]: *Œuvres complètes*, éditées par Paul Tannery et Charles Henry. Tome I 1891: Œuvres mathématiques diverses et Observations sur Diophante; tome II 1894: Correspondance; tome III 1896: Traductions des pièces latines; tome IV 1912: Compléments (avec un supplément de C. de Waard, 1922), Gauthier-Villars, Paris.

C. Goldstein, "L'aire d'un triangle rectangle n'est pas un carré. Etude comparative de preuves au XVII[e] siècle", prépublication, Orsay, 1991.

C. Goldstein & N.Schappacher , "The History of Descent: A Project", 1991, preprint.

D. Hilbert & A. Hurwitz, "Über die diophantische Gleichungen von Geschlecht Null.", *Acta Math.,* 14 (1890-1891), 217-224 (= Hilbert, *Ges. Abh.* II, 258-263; = Hurwitz, *Math. Werke*, II, 116-121.)

J. E. Hofmann [1943], "Neues über Fermatszahlentheoretische Herausforderungen von 1657", *Abhandlungen der Preuss. Akad. der Wissens., Math-Naturwiss. Klasse 1943*, 9, Berlin, 1944.

E. Landau & A. Ostrowski, " On the diophantine equation $ay^2+by+c = d x^n$ ", *Proc. London Math. Soc. (2),* 19 (1920), 276-280.

O. Lecacheux, "Familles de corps de degré 4 et 8 liés à la courbe modulaire X_1 (16)", *Séminaire de Théorie des Nombres de Paris 1991-1992,* Birkhäuser, Boston, 1993 (à paraître).

B. Levi, "Saggio per una teoria aritmetica delle forme cubiche ternari", *Atti R. Accad. Sc. Torino,* 41 (1906), 739-764; 43 (1908), 99-120, 413-434, 672-681.

B. Mazur, "Rational isogenies of prime degrees", *Inventiones Math.*, 44 (1978), 129-169.

L. J. Mordell, "On the rational solutions of the indeterminate equations of the third and the fourth degrees", *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 21 (1922), 179-182.

L. J. Mordell, *A chapter in the Theory of Numbers*, 1947, rep. in *Two papers in number theory*, VEB Deutscher Verlag der Wiss., 1973.

L. J. Mordell, *Diophantine Equations*, Academic Press, London, 1969.

H. Poincaré, "Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques", *J. math. pures appl.*, (5), 7 (1901), 161-233. (= *Œuvres* 5, 483-550).

R. Rashed, "Lagrange, lecteur de Diophante", *Sciences à l'époque de la Révolution française — Recherches Historiques*, Blanchard, Paris, 1988, 39-83.

N. Schappacher, "Développement de la loi de groupe sur une cubique", *Séminaire de Théorie des Nombres de Paris 1988-1989,* Birkhäuser, Boston, 1990.

A. Thue, "Über die Unlösbarkeit der Gleichung $ay^2+by+c = d x^n$ in grossen ganzen Zahlen", 1917, *Selected Mathematical Papers*, 561-564.

L. Washington, "A family of cyclic quartic fields arising from modular curves", *Math. Comp.* 57 (1991), 763-775.

A. Weil, "L'arithmétique sur les courbes algébriques", *Acta Math.* 52 (1928), 281-315 (= *Collected Papers* I, 11-45).

A. Weil "Sur un théorème de Mordell", *Bull. Sci. Math.*(2) 54 (1929), 182-131 (= *Collected Papers,* I, 467-56).

A. Weil, *Œuvres Scientifiques .Collected Papers*, Springer, 1979, 3 vol.

A. Weil, *Number Theory : An Approach through History*, Birkhäuser, Boston, 1983.

URA 752, Bat 425
Université de Paris Sud
91405 Orsay Cedex

(*texte reçu le 12 décembre 1991*)