Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques

Jean-Bernard Pecot

Le problème de l'ellipsoïde et l'analyse harmonique : la controverse entre Legendre et Laplace

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 2e série, tome 3 (1993), p. 113-157

<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1993_2_3__113_0>

LE PROBLEME DE L'ELLÏPSOIDE ET L'ANALYSE HARMONIQUE : LA CONTROVERSE ENTRE LEGENDRE ET LAPLACE

Jean-Bernard PECOT

Introduction

Thomas Kuhn [1990,p.232] souligne à quel point il est difficile d'attribuer une date et un auteur à une découverte scientifique. En revanche, il semble plus aisé de cerner la prise de conscience de découvertes auparavant irréductibles l'une à l'autre lorsqu'un savant les fait entrer en résonance. Dans les années 1780, deux savants d'envergure, Legendre et Laplace, procèdent à une synthèse de plusieurs techniques d'analyse harmonique pour déterminer les figures d'équilibre possibles d'une planète fluide en rotation uniforme autour d'un axe. La controverse qui en a résulté est moins connue que celle des cordes vibrantes mais aussi passionnante et certainement plus riche en conséquences sur l'analyse harmonique. C. C. Gillispie [1978,section 16,p.316 à 322] [1979,p.257 à 264] évoque le contenu des écrits de Legendre et de Laplace, livre des éléments sur cette querelle sans toutefois exhiber avec précision l'entière portée de leurs calculs. Dans sa description très fine des théories mathématiques de la figure des planètes, I. Todhunter [1873] ne révèle pas non plus le fin mot du grand mémoire de Legendre [1790], sur la démarche duquel nous insisterons particulièrement.

L'aspect géodésique de l'histoire de la figure de la Terre a suscité récemment deux livres importants : "Mesurer la Terre, 300 ans de géodésie française" par J. J. Levallois [1988] et "La figure de la Terre du XVIII^e siècle à l'ère spatiale" publié sous la direction de H. Lacombe et P. Costabel [1988], dans lequel Francis Mignard [1988,p.285 à 289] présente les calculs mathématiques de certains savants sur le problème de la figure des planètes, sans toutefois aborder ceux de Legendre et de Laplace.

Tout en apportant quelques informations sur l'histoire des notions mises en jeu, nous voudrions exposer plus succinctement que Todhunter et plus précisément que Gillispie les contributions successives de Legendre et de Laplace, afin de mettre en évidence non seulement leurs techniques d'analyse harmonique promises à un grand avenir, mais aussi la teneur exacte de leurs principaux résultats sans trahir la complexité de leurs calculs et de leurs conclusions. En fin d'exposé, nous évoquons brièvement le traitement du problème de la figure des planètes par Poincaré.

Ce travail est inspiré d'une thèse intitulée "Histoire des relations d'orthogonalité en analyse" écrite sous la direction de Jean Dhombres, que nous remercions pour le suivi de ses corrections et la pertinence de ses conseils. Nous avons aussi bénéficié des remarques d'Irène Passeron, de Jacques Gapaillard et de Jesper Lützen que nous remercions vivement.

- 1/ Une brève histoire des recherches mathématiques sur l'attraction des sphéroïdes et la figure des planètes

Jusqu'à l'époque de Newton, les savants ne connaissaient qu'une seule manière de déterminer la figure d'une planète fluide : faire des expériences et les interpréter (longueur du pendule qui bat la seconde, triangulations, observations de la figure des astres au télescope, etc.). Dans ses "Principia Mathematica" [1687,prop.XIX,prob.III,livre III], Newton suppose que, sous l'effet de la force centrifuge, la mer prend autour de la Terre la forme d'un ellipsoïde de révolution, c'est-à-dire d'une surface d'équation ci-dessous lorsqu'elle est centrée à l'originedans un repère cartésien :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ .$$

a, b et c désignant les trois demi-axes de l'ellipsoïde. Si deux des trois demi-axes sont égaux, l'ellipsoïde est une surface de révolution ; sinon, l'ellipsoïde est dit "quelconque", "de Jacobi" ou "à trois axes". Par un calcul intégral, en raisonnant sur l'équilibre d'une colonne d'eau coudée à angle droit au centre de la Terre, Newton déduit un aplatissement égal à $\frac{5}{4}\varphi$ où φ désigne le rapport entre la force centrifuge et la gravité à l'équateur. Huygens [1690] reprend le raisonnement de Newton avec une colonne d'eau formant un angle d'amplitude quelconque au centre de la Terre : en supposant la pesanteur constante à l'intérieur ou à la surface de la Terre, sans passer par un calcul intégral, Huygens obtient que la méridienne d'équilibre est une courbe algébrique du quatrième degré, qu'il assimile à une ellipse, moins aplatie que celle de Newton. Les textes de Newton et de Huygens marquent le début du calcul théorique de la figure des planètes : la nouveauté des travaux de Newton et de Huygens tient à la prise en compte de la force centrifuge qui déforme les planètes fluides.

Or, en 1720, Jacques Cassini publie les résultats de la mesure de la méridienne française de Dunkerque à Perpignan : Cassini montre que les degrés de méridien décroissent à partir de l'équateur, ce qui géométriquement implique une figure de la Terre allongée aux pôles. Une polémique bien connue oppose Cassiniens et Newtoniens sur l'aplatissement de la Terre. Les missions de Maupertuis, Clairaut, Camus, Le Monnier, Renaud et Outhier en Laponie en 1736 et 1737 et de Godin, Bouguer, Jussieu et La Condamine en Équateur de 1735 à 1743, montrent que dans ces régions, la Terre s'aplatit vers les pôles. En l'absence de relevés géodésiques sur toute la surface de la planète, le calcul mathématique constitue le meilleur recours pour décider de sa forme.

Dans les années 1730, des savants comme Maupertuis essaient d'éclaircir les raisonnements de Huygens et Newton. Loin de réussir à faire progresser le problème de la figure des planètes fluides, Maupertuis a cependant le mérite de poser ce problème aux académiciens : il montre notamment que la loi de gravitation universelle ne suffit pas pour déterminer la figure d'une masse fluide en rotation. Il faut aussi se fixer un principe de comportement d'un fluide en équilibre : or, dès 1687 au moins, Huygens avait observé que la pesanteur, c'est-à-dire l'effet conjugué de la gravitation universelle et de la force centrifuge, devait être perpendiculaire à la surface, ou, dit en termes modernes, au plan tangent en chaque point de la surface d'équilibre ; sinon, un petit corps solide placé sur cette surface dériverait et la masse fluide cesserait donc d'être en équilibre. Cette loi, dont Huygens [1690] ne s'était pas servi pour mener ses calculs, fait toucher du doigt la délicatesse du problème : pour déterminer la figure d'équilibre d'une planète fluide, il faut calculer son attraction*1 à la surface alors que cette attraction dépend de la figure de la planète. D'où l'obligation de déterminer l'attraction à la surface d'un sphéroïde quelconque, c'est-à-dire d'une masse dont la surface diffère plus ou moins d'une sphère.

En 1737, par une méthode purement géométrique, Maclaurin démontre qu'un ellipsoïde de révolution est une figure d'équilibre, quel que soit sont aplatissement : mais pour une vitesse de rotation donnée, il ne détermine pas combien il peut en exister. En analysant une relation établie par Maclaurin qui lie l'excentricité d'un ellipsoïde de révolution en équilibre à sa vitesse de rotation, Simpson [1743] observe que pour une faible vitesse de rotation, il existe deux ellipsoïdes en équilibre, dont l'un diffère peu d'une sphère. Par des changements de variables très habiles dans les intégrales de force, Lagrange [1773] continuera l'œuvre des Britanniques en calculant la valeur de l'attraction exercée par un corps de surface algébrique d'ordre deux en son intérieur. Lagrange évalue aussi l'attraction d'un ellipsoïde en un point extérieur situé sur l'un de ses axes et retrouve les formules établies par Maclaurin. En revanche, le problème du calcul de l'attraction en un point extérieur situé en dehors d'un axe reste ouvert.

En 1743, Clairaut publie sa "Théorie de la figure de la Terre, tirée des principes de l'hydrostatique". Comme l'observe Irène Passeron, Clairaut fournit une nouvelle grille de lecture du problème de la figure de la Terre et des planètes fluides, sans pour autant utiliser des principes hydrostatiques clairement identifiables*2, ni en reprenant la loi de Huygens qui n'est qu'une condition nécessaire à l'équilibre alors que Clairaut recherche des conditions nécessaires et suffisantes. Comme point de départ à son analyse du problème, Clairaut énonce toutefois un

---

*1 Les savants du XVIIIe utilisent les mots "attraction" ou "gravité".

*2 Todhunter aurait tendance à mésinterpréter le texte de Clairaut. Todhunter [1873,p.178] pense que pour définir le comportement dynamique d'un fluide, Clairaut fait dériver de la pression p, la force f agissant le long d'une ligne r sur un fluide de densité ρ :

$$f = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr}.$$

Or, Irène Passeron insiste sur le fait que ce type de formule ne figure en aucun cas dans le livre de Clairaut : Clairaut ne conçoit pas la notion de pression au sens actuel. De telles relations n'ont été établies que par Euler dans ses travaux sur la mécanique des fluides dans les années 1750.

principe - souvent appelé "principe fondamental de l'hydrostatique" - dont l'équilibre des colonnes de Newton et la loi de Huygens sont chacune une conséquence :

"Pour qu'une masse fluide soit en équilibre et dans un état permanent, il faut que dans un canal quelconque, soit rentrant en lui-même, soit terminé de part et d'autre à la surface, les efforts des parties de fluide qu'il contient se détruisent mutuellement." (citation de Mignard [1988,p.302]).

Á partir de ce principe, sur un sphéroïde peu différent d'un ellipsoïde de révolution, Clairaut obtient des relations entre la pesanteur comme fonction de la latitude, l'aplatissement et la force centrifuge, qui confirment l'hypothèse de Newton selon laquelle la pesanteur croît du sud au nord avec le carré du sinus de la latitude. Avec Levallois [1988,p.53], on peut estimer que Clairaut fait une synthèse des rapports entre la pesanteur et la forme d'une planète. Clairaut considère différents modèles de figure planétaire, qui tiennent compte des variations de densité à l'intérieur de la planète : à dessein, il introduit la notion de couche de niveau, dont la loi dépend d'une équation intégro-différentielle. Il se fait aussi fort d'éliminer par le calcul l'hypothèse d'un ellipsoïde oblong. Bref, Clairaut se démarque nettement de l'approche anglo-saxonne des années 1730 et 1740, basée uniquement sur l'étude des figures d'équilibre ellipsoïdales : il exhibe la multiplicité de figures sphéroïdales d'équilibre.

Dans ses recherches sur la figure des planètes, d'Alembert [1754,1756] souhaite améliorer les résultats de Clairaut. Toutefois, d'Alembert déçoit en mélangeant théorie pure et interprétation scientifique des mesures. Plus que des résultats, d'Alembert fait une synthèse des voies possibles pour le calcul mathématique des figures d'équilibre d'une planète fluide ou solide recouverte d'une lame fluide. La technique marquante qui se dégage de ses analyses est celle du développement du rayon de la planète en série de cosinus multiples entiers de l'angle polaire. Auparavant, cette technique du développement en série n'intervenait que sporadiquement dans le traitement du problème de la figure des planètes.

Quelques années plus tard, d'Alembert [1773] restreint la fourchette des figures d'équilibre possibles jusqu'à conjecturer qu'une planète fluide en rotation uniforme lente autour d'un axe qui passe par son centre ne puisse prendre que deux formes d'équilibre : un ellipsoïde de révolution presque sphérique et un autre très aplati. Dans les années 1780, l'assertion de d'Alembert suscite une controverse animée entre deux mathématico-physiciens majeurs : Adrien Marie Legendre et Pierre Simon Laplace.

En fait, Laplace avait déjà abordé le sujet dans "Additions aux recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde" [1776] et "Mémoire sur l'inclinaison moyenne des orbites des comètes, sur la figure de la Terre, et sur les fonctions" [1776a]. Laplace y développe en série entière le rayon d'une planète peu différente d'une sphère pour en calculer l'attraction, applique la condition de Huygens en se servant d'une équation différentielle auxiliaire qui lie les composantes de l'attraction de la planète à sa surface. Il conclut qu'une planète fluide en rotation uniforme prend nécessairement la forme de l'unique ellipsoïde de révolution de Newton, à condition que l'on sache qu'une planète au repos est nécessairement sphérique : or, Laplace n'arrive pas à démontrer cette condition, si bien qu'il reste insatisfait de son résultat.

- 2/ La controverse entre Legendre et Laplace

Les avis sont partagés sur la controverse entre Legendre et Laplace : sur la foi des observations de Legendre dans ses textes publiés, Todhunter [1873,vol.2,cha.XIX à XXV] laisse entendre que Laplace se serait inspiré des travaux de Legendre sans toujours le reconnaître. Contre Todhunter, Gillispie [1979,p.257 à 264] publie un rapport favorable de Laplace daté du 15 mars 1783, sur le premier mémoire de Legendre, "Recherches sur l'attraction des sphéroïdes homogènes" [1783], et conteste le bien-fondé des protestations de Legendre contre l'attitude de Laplace. En nous appuyant sur les registres des procès-verbaux de l'Académie des Sciences, nous allons procéder à une datation des textes de Legendre et de Laplace, datation que nous enrichirons par d'autres pièces à verser au dossier de la controverse. Ce décompte des événements nous semble indispensable pour rendre à chacun des deux savants ce qui lui appartient et surtout, pour comprendre les enjeux scientifiques et académiques des problèmes de l'attraction des sphéroïdes et de la figure des planètes.

La controverse entre Legendre et Laplace s'explique non seulement par des différends mathématiques mais aussi par le choc de deux personnalités radicalement opposées, brossées par Nicole et Jean Dhombres [1989]. En 1782, Laplace, trente-trois ans, est reconnu comme le mathématicien le plus brillant de sa génération : il a abordé presque tous les sujets de pointe de la physique mathématique. Son caractère ambitieux et difficile l'ont heurté à plusieurs savants comme Cousin, Vandermonde ou Condorcet. Élu adjoint en 1773, Laplace n'est toujours pas associé : sa carrière académique piétine.

De trois ans et demi plus jeune que Laplace, Legendre est un homme de l'ombre qui, entre 1770 et 1782, s'est retiré du milieu scientifique parisien, sans rien publier. Avant que son mémoire "Recherches sur la trajectoire des projectiles dans les milieux résistants" ne gagne le prix de balistique de l'Académie de Berlin en 1782, ni d'Alembert, ni Lagrange, ni Laplace n'avaient entendu parler de lui. Tandis que Laplace a dû énormément publier pour asseoir sa notoriété, Legendre se trouve projeté sur l'avant-scène avec un seul mémoire à son actif.

Dans une Lettre datée du 15 septembre 1782, Lagrange, alors à Berlin, introduit chaleureusement Legendre auprès de Laplace. Dès l'automne 1782, celui-ci commence à collaborer avec Legendre sur les problèmes de l'attraction des sphéroïdes et de la figure des planètes. Nul doute que Legendre devait étudier ces questions depuis plusieurs années. L'entente entre les deux savants est d'autant plus cordiale que le 25 janvier 1783, la carrière de Laplace connaît un nouveau départ avec sa promotion au poste d'associé mécanicien. Á la même époque, Legendre présente six mémoires sur des sujets variés à l'Académie des

Sciences, dont deux d'entre eux seront publiés sous la forme d'un seul texte : "Recherches sur l'attraction des sphéroïdes homogènes".

- 2.1/ Le mémoire de Legendre de 1783

Dans ce mémoire, Legendre calcule l'attraction exercée par un sphéroïde homogène de densité unité, supposé de révolution et symétrique par rapport à l'équateur, en un point extérieur S. Legendre adopte les coordonnées sphériques et place le centre de gravité C du sphéroïde à l'origine des coordonnées. Il considère S dans le plan de méridien nul : les coordonnées de S seront (r : distance de C à S, ω : angle polaire, 0 : angle méridien). Il calcule la force d'attraction élémentaire exercée en S par un élément de masse dM du sphéroïde situé au point M de coordonnées sphériques (z,ψ,θ), si bien que $dM = z^2 \sin\psi \, dz \, d\theta \, d\psi$. Par la loi de gravitation universelle, si l'on désigne par MS la distance entre M et S, cette force d'attraction élémentaire est, en valeur absolue, égale à dM divisé par MS^2. Comme le sphéroïde est de révolution, la force totale exercée en S par le sphéroïde est nécessairement dans le plan du méridien de S. Legendre décompose cette force totale en (P) dirigée vers C, et (Q) dirigée perpendiculairement à SC et orientée vers le pôle le plus proche du sphéroïde. Si l'on désigne par Z la distance entre C et la surface du sphéroïde*3, posant $\cos\mu = \cos\omega \cos\psi + \sin\omega \sin\psi \cos\theta$, (P) et (Q) s'expriment par les intégrales définies suivantes :

$$(P) = \int_{-Z}^{Z} \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{(r - z\cos\mu)\, z^2}{\left(r^2 - 2rz\cos\mu + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \, dz \, d\theta \, \sin\psi \, d\psi$$

$$(Q) = \int_{-Z}^{Z} \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{(\cos\psi \sin\omega - \cos\omega \sin\psi \cos\theta)\, z^3}{\left(r^2 - 2rz\cos\mu + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \, dz \, d\theta \, \sin\psi \, d\psi.$$

- 2.1.1/ La méthode des séries

Legendre a virtuellement fini le calcul de l'attraction du sphéroïde. Toutefois, laissées sous cette forme, les intégrales qui expriment (P) et (Q) ne sont pas exploitables. Chaque auteur des XVIIIe et XIXe siècles se distingue par son traitement analytique des intégrales de force. Pour transformer avantageusement l'expression de (P), Legendre développe en série de Taylor de z/r la fonction sous le signe intégral de (P) pour ensuite l'intégrer terme à terme en z, θ et ψ. En omettant les puissances paires de z/r qui disparaîtront après l'intégration en z, Legendre obtient la série suivante de puissances paires de z/r :

---

*3 Legendre suppose que Z est une fonction de θ, ce qui déjà impose une forme particulière pour le sphéroïde. Comme celui-ci est symétrique par rapport au plan équatorial, Legendre peut intégrer de - Z à Z.

$$(1)\qquad \frac{(r - z\cos\mu)\, z^2}{\left(r^2 - 2rz\cos\mu + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) \frac{z^{2n+2}}{r^{2n+2}} P_{2n}(\cos\mu),$$

où P_{2n} désigne la suite des polynômes de Legendre de degré pair :

$$P_0(x) = 1 \;\; , \;\; P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \;\; , \;\; P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8} \;\; , \;\; \ldots .$$

Legendre n'étudie pas la convergence de la série (1) qui peut poser problème lorsque par exemple r est inférieur au plus grand rayon du sphéroïde. Les polynômes de Legendre peuvent être définis au moyen de la formule de dérivation suivante, démontrée par Rodrigues [1815] :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n(n!)} \frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n} .$$

Ces polynômes ne sont pas nouveaux puisque Louville [1722,p.132] les avait obtenus dans le cadre d'un problème de tautochronie au moyen d'une formule génératrice semblable à celle de Legendre mais sans alternance des signes dans leur expression développée. Pour résoudre un problème de probabilités, Lagrange [1770-1773,p.175] les exhibe toujours au moyen d'une formule génératrice, à la valeur près de quelques paramètres.

En développant l'attraction élémentaire en série de Taylor, Legendre suit une voie déjà explorée par Simpson, Clairaut, d'Alembert et Laplace. Seulement, Legendre a choisi un système de coordonnées très simple, les coordonnées sphériques, qui lui permet d'effectuer facilement l'intégration de l'élément de force : par la formule (1), d'une série de Taylor, Legendre fait naître une série de polynômes éponymes. L'intégration de (1) en z ne pose aucun problème. Pour intégrer en θ, Legendre établit le "théorème d'addition intégral" des polynômes de degré pair qui portent son nom :

$$\int_0^{\pi} P_{2n}(\cos\omega \cos\psi + \sin\omega \sin\psi \cos\theta)\, d\theta = \pi\, P_{2n}(\cos\omega) P_{2n}(\cos\psi).$$

Cette égalité est aussi valable pour les polynômes de degré impair. Appelant M la masse du sphéroïde et introduisant les coefficients suivants :

$$\alpha_n = \frac{4\pi}{3M} \int_0^{\pi/2} Z^{2n+3} P_{2n}(\cos\psi) \sin\psi\, d\psi,$$

obtenus après intégration en ψ, Legendre obtient la valeur de (P) ci-dessous :

$$(P) = \frac{3M}{r^2} \left(\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2n+3} \frac{\alpha_n}{r^{2n}} (P_{2n}(\cos\omega)) \right).$$

- 2.1.2/ Le potentiel

Pour calculer l'autre composante (Q) de l'attraction, Legendre pourrait aussi développer en série la fonction sous le signe intégral de (Q) et intégrer terme à terme. Mais il préfère utiliser la "fonction potentiel" V, appelée ainsi par George Green [1828,p.9] :

$$V = \int_{\text{sphéroïde}} \frac{dM}{MS} .$$

L'histoire de la notion de potentiel est sujette à controverse : on peut en localiser l'expression dans les œuvres de Huygens et de Newton et de plusieurs de leurs successeurs comme Bouguer, Maclaurin, Maupertuis, Clairaut et Euler. Á un deuxième niveau, Todhunter interprète délibérément le calcul par Clairaut [1743,p.233 à 243] de l'attraction d'un sphéroïde de révolution comme la dérivation du potentiel induit par ce sphéroïde. Comme nous l'a fait observer Patricia Radelet, la fonction potentiel a été clairement introduite par Lagrange [1777,p.402] sur le cas de masses ponctuelles. Legendre indique que c'est Laplace qui lui a soufflé le fait que la fonction V pourrait lui être utile pour le calcul de (Q), Laplace l'ayant vraisemblablement empruntée à Lagrange. Par dérivation directe sous le signe intégral de V, Legendre obtient les formules suivantes :

$$(P) = - \frac{dV}{dr} \qquad (Q) = - \frac{1}{r}\frac{dV}{d\omega}.$$

Pour calculer (Q), il suffit d'intégrer terme à terme en r la série qui exprime (P). En inversant le signe, Legendre obtient :

$$V = \frac{3M}{r}\left(\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}\frac{\alpha_n}{r^{2n}}(P_{2n}(\cos\omega))\right).$$

Dérivant terme à terme en ω, divisant par - r, il exprime (Q) par un développement en série. Naturellement, de ce que $P_{2n}(1) = 1$, si l'on connaît non pas la valeur de V en un point extérieur situé sur l'axe polaire ($\omega = 0$) comme le dit Todhunter [1873,tome 2,p.27], mais le développement de V en une série en 1/r pour un tel point, alors on peut calculer V pour n'importe quel point extérieur puisque l'on possède la valeur des coefficients α_n. Legendre applique cette technique sur le cas d'un ellipsoïde de révolution de demi-grand axe a et de demi-petit axe b mais se fourvoie dans ses calculs et déduit fautivement le fait exact selon lequel un ellipsoïde de révolution homogène exerce la même attraction en un quelconque point extérieur qu'un ellipsoïde de révolution homogène plus petit, de même masse et dont les ellipses génératrices sont décrites des mêmes foyers (les deux ellipsoïdes sont alors dits confocaux).

En développant l'attraction élémentaire en série de Taylor, Legendre applique ce que ses contemporains appellent la "méthode des séries", méthode typiquement analytique par opposition à une transformation "synthétique" des intégrales de force par des changements de variables.

- 2.1.3/ La compétition entre Legendre et Laplace

Avec d'Alembert et Bézout, Laplace est chargé de rédiger un rapport sur ce mémoire de Legendre. Dans ce procès-verbal, dont Gillispie [1979] a publié l'original, Laplace décrit en termes élogieux la méthode analytique de Legendre :

"Le théorème qui forme le principal objet de ces deux mémoires, est fort intéressant. C'est un nouveau pas fait dans la théorie des attractions des sphéroïdes ; l'analyse en est très savante ; elle est d'ailleurs présentée avec beaucoup d'élégance et de clarté et elle annonce un talent distingué dans son auteur." (Gillispie [1979,p. 264]).

Le 30 mars 1783, six mois après sa prise de contact avec le milieu académique, Legendre devient adjoint mécanicien en remplacement de Laplace. Mais l'amitié première se métamorphose rapidement en une concurrence acharnée : le premier signe extérieur de cette tension se manifeste lorsque, le 24 mai 1783, Laplace généralise par un calcul exact le théorème de Maclaurin pour n'importe quel point extérieur à un ellipsoïde à trois axes. Dans une Lettre à Lagrange du 21 août 1783, Laplace se targue d'avoir réussi à étendre le résultat de Legendre et promet de publier incessamment "un petit Ouvrage élémentaire sur l'Astronomie physique, dont l'impression est déjà commencée". Laplace fait probablement allusion à son livre "Théorie du mouvement et de la figure elliptique des planètes" [1784a], pourtant encore loin d'être sous presse et financé par un de ses amis, Bochart de Saron, l'un des douze membres honoraires de l'Académie des Sciences, président du Parlement de Paris. En effet, le calcul de l'attraction des sphéroïdes est le passage obligé vers la détermination de la figure des planètes fluides. Or, dans son premier mémoire, mais avec un ellipsoïde de révolution, Legendre a prouvé le succès de la méthode des séries qui pourrait être appliquée à la détermination de la figure des planètes. Dès lors, s'engage une course poursuite entre Laplace et Legendre pour adapter la méthode des séries au problème de la figure des planètes.

Le 3 décembre 1783, Laplace demande à l'Académie un rapport sur le brouillon de son livre. Le 31 janvier 1784, Borda, Dionis du Séjour et Cousin présentent un procès-verbal. Cousin et du Séjour comptent parmi les opposants de Laplace, Cousin depuis qu'il lui avait été préféré pour un poste d'associé et du Séjour, depuis qu'en 1776, il avait siégé dans la commission qui reprocha à Laplace son attaque contre les recherches de Boscovich sur l'orbite des comètes. Les commissaires approuvent la publication du livre de Laplace par l'Académie mais émettent la réserve suivante :

"La figure elliptique ne doit être considérée que comme une solution particulière du problème général où l'on se propose de déterminer la figure que doit prendre une masse fluide homogène dont toutes les parties s'attirent mutuellement et qui tourne sur elle-même. Le problème envisagé dans toute sa généralité présente des difficultés peut-être insolubles. Il n'a pas même été résolu dans le cas où l'on peut supposer que la masse fluide diffère très peu de la sphère. M. Laplace croit s'en être beaucoup occupé et n'avoir pas complètement réussi ... " [Reg.,vol.102,f° 25].

Piqué au vif par cette remarque, Laplace présente dès le 21 février 1784 une version rénovée de son livre qui n'est pas commentée par les académiciens. Parallèlement, il annonce qu'il rédige un mémoire sur les thèmes de l'attraction des sphéroïdes et de la figure des planètes qu'il entend absolument faire imprimer dans les mémoires de l'Académie pour l'année 1782. Laplace souhaite résoudre le problème de la figure des planètes fluides peu différentes d'une sphère, jugé insoluble par Borda, du Séjour et Cousin. Á l'adresse de Laplace, l'Académie décrète :

"Il a été arrêté que les mémoires de 1781 et 1782 seront remis en totalité avant le 24 avril de cette année, sans quoi ils ne pourront être imprimés que dans les années suivantes." [Reg.,vol.103,f° 37].

Le 24 avril 1784, Laplace n'a pas fini la rédaction de son mémoire. Le 7 juillet, Legendre, qui ne s'était pas manifesté depuis presque un an et demi, commence à lire à l'Académie un mémoire intitulé "Recherches sur la figure sur des planètes".

- 2.2/ Le mémoire de Legendre de 1784

Dans le mémoire de 1783 sur l'attraction des sphéroïdes homogènes, le raisonnement de Legendre reposait sur le théorème d'addition intégral des polynômes de Legendre de degré pair. Or, ce théorème cache bien d'autres propriétés remarquables propres à ces polynômes. En prélude à son deuxième mémoire, Legendre établit sept théorèmes préliminaires qui portent sur les polynômes P_{2n}. Parmi ces sept théorèmes, on relève les suivants, devenus classiques :

- la formule génératrice des polynômes de degré pair :

$$\frac{1}{2\sqrt{1-2tx+t^2}} + \frac{1}{2\sqrt{1+2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n}(x)\, t^{2n} .$$

- les relations d'orthogonalité et les formules de normalisation entre 0 et 1 :

$$\int_0^1 P_{2m}(x)\, P_{2n}(x)\, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \dfrac{1}{4n+1} & m = n \end{cases} .$$

Legendre établit ces formules par une méthode pesante qui consiste à calculer les moments suivants :

$$\int_0^1 x^m\, P_n(x)\, dx .$$

- Legendre démontre par un algorithme aujourd'hui bien connu, que les polynômes $P_{2n}(x)$ ont 2n racines réelles simples toutes situées entre - 1 et 1 strictement : de plus, pour x entre 0 et l'unité, $P_{2n}(x)$ ne surpasse pas l'unité en valeur absolue.

- 2.2.1/ L'équation de la méridienne

Legendre cherche à déterminer la figure d'une planète fluide de masse M, de densité homogène égale à l'unité, en rotation uniforme lente autour d'un axe qui passe par son centre, dont la figure d'équilibre est supposée de révolution et symétrique par rapport à l'équateur. Il s'agit de trouver l'expression du rayon z de la planète en équilibre en fonction de l'angle polaire φ et seulement en fonction de cet angle polaire puisque la planète est supposée de révolution, et seulement pour des valeurs de φ entre 0 et $\pi/2$, puisqu'elle est supposée symétrique par rapport à l'équateur.

Or, Legendre dispose de la valeur de l'attraction d'une telle planète en un point extérieur, voire même en un point de sa surface si l'on accepte que les séries qu'il avait obtenues pour un point extérieur dans le précédent mémoire sont encore valables à la surface. Legendre peut donc appliquer la loi de Huygens de perpendicularité de la gravité en tout point de la surface d'équilibre et qui s'exprime par l'équation suivante :

$$V + \frac{1}{2} Mfz^2 \sin^2\varphi = H^1 ,$$

où V est le potentiel à la surface du sphéroïde, H^1 une constante indéterminée, M la masse de la planète et M.f la force centrifuge à la distance unité de l'axe de rotation. Legendre obtient donc une équation purement fonctionnelle, ce qui est rare au XVIII^e^ siècle. En posant $x = \cos\varphi$ dans l'équation ci-dessus, il aboutit à l'équation de la méridienne d'inconnue z fonction de x :

$$H = \frac{1}{2} fz^2 (1 - x^2) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{z^{2n+1}} P_{2n}(x)$$

où :

$$\beta_n = \frac{4\pi}{(2n+3)M} \int_0^1 z^{2n+3} P_{2n}(x)\, dx$$

et où H est une certaine constante indéterminée. Apparemment, cette indéterminée H compromet toute chance de résolution. Cependant, Legendre réussira à exprimer H en fonction de M et Mf lorsque le méridien est elliptique et à l'évacuer lorsque le méridien ne l'est pas.

Avant de se lancer dans la résolution de l'équation de la méridienne, Legendre démontre la convergence de la série du second membre. Il pose :

$$z(x) = 1 + kp(x)$$

où p est une fonction quelconque de x et k un très petit coefficient. Bien qu'il fasse jouer les lemmes préliminaires sur les polynômes qui portent son nom, Legendre commet des fautes de rigueur en confondant la convergence d'une série avec celle de son terme général vers 0. Mais ce besoin de prouver la convergence d'une série fonctionnelle est assez rare au XVIII[e] siècle pour être signalé.

- 2.2.2/ Les deux ellipsoïdes d'équilibre

Comme nous l'avons déjà précisé, Legendre articule la résolution de l'équation du méridien en deux temps. Premièrement, il suppose que y réponde à l'équation d'une ellipse, de demi-grand axe équatorial a, de demi-petit axe polaire b et d'excentricité e ($e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$). Après un long calcul basé sur la formule génératrice des polynômes P_{2n}, il obtient l'égalité suivante, appelée "loi de Legendre" :

$$\frac{Mf}{2\pi} = \psi(3\cot^3\psi + \cot\psi) - 3\cot^2\psi$$

où :

$$\psi = \text{Arcsin } e\ .$$

Posons :

$$\frac{Mf}{2\pi} = W(\psi)\ .$$

Cette loi donne la variation des caractéristiques des ellipses méridiennes en fonction de la force centrifuge. Le graphe de W se compose d'une partie croissante puis d'une autre décroissante, avec les approximations suivantes :

pour ψ proche de 0 : $$f(\psi) = \frac{4}{15}\psi^2$$

pour ψ proche de $\pi/2$: $$f(\psi) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right).$$

Pour une petite valeur de la force centrifuge Mf, il existe donc deux valeurs de e c'est-à-dire deux valeurs de ψ telles que l'ellipsoïde satisfasse à l'équilibre. La première correspond à ψ proche de 0 c'est-à-dire à une ellipse méridienne peu aplatie dont l'aplatissement est exactement celui de l'ellipse génératrice de l'ellipsoïde de Newton, la seconde à ψ proche de $\pi/2$, c'est-à-dire à une ellipse extrêmement aplatie que Legendre rejette empiriquement pour des raisons d'instabilité. Lorsque la vitesse de rotation est telle que e = 0,93 (cette valeur a été calculée par Thomson et Tait [1869,p.327]), ces deux ellipsoïdes de révolution se réduisent à un seul ; au-delà de cette valeur, aucun ellipsoïde de révolution stable ou instable ne peut satisfaire à l'équilibre.

- 2.2.3/ Les séries de Fourier-Legendre

Il reste à savoir si des figures de révolution et symétriques par rapport à l'équateur autres qu'un ellipsoïde pourraient satisfaire à l'équilibre. Pour cela, il faut introduire dans l'équation de la méridienne l'expression d'un rayon z qui décrive un sphéroïde de révolution que Legendre choisit peu différent de la sphère de rayon unité et symétrique par rapport à l'équateur, le plus général possible. Prenant a = 1, il développe l'inverse du carré du rayon en la série suivante :

$$\frac{1}{z^2} = 1 + k(x^2 + p_1(x)) + k^2p_2(x) + k^3p_3(x) + \text{etc.}$$

où $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$, ... etc. sont des fonctions de $x = \cos\varphi$ qu'il s'agit de calculer et où le terme $1 + kx^2$ seul donne l'inverse du carré du rayon de l'ellipse de Newton. La constante k est égale à :

$$\frac{e^2}{1 - e^2} = \frac{1 - b^2}{b^2}$$

Un tel développement est difficilement compréhensible pour un lecteur moderne. En effet, k est une constante : z n'a donc pas d'expression analytique en fonction de k. Alors, pourquoi Legendre s'autorise-t-il un tel développement ? C'est un stratagème de calcul qui le conduit à l'annulation des fonctions $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$, ..., et ce faisant, seul l'ellipsoïde de Newton sera figure d'équilibre*4. En introduisant ce développement de $1/z^2$ dans l'équation de l'équilibre, Legendre obtient une égalité du type suivant :

$$H = \sum_{n \geq 0} c(p_n(x))\, k^n ,$$

où H est une constante indéterminée et où $c(p_n(x))$ est un coefficient qui dépend de $p_n(x)$. Considérant k comme une variable, Legendre annule alors les coefficients $c(p_n(x))$ pour $n > 0$. La nullité de $c_1(x)$ produit l'égalité suivante :

$$p_1(x) = \alpha + 3 \sum_{n \geq 1} P_{2n}(x) \int_0^1 p_1(x)\, P_{2n}(x)\, dx ,$$

où α est une constante. Legendre compare ce développement avec la série de Fourier que l'on déduit des relations d'orthogonalité et des formules de normalisation sur les polynômes de degré pair :

$$p_1(x) = \sum_{n \geq 0} (4n + 1)\, P_{2n}(x) \int_0^1 p_1(x) P_{2n}(x)\, dx .$$

Legendre arrive à une nouveauté théorique essentielle en établissant l'unicité du développement d'une fonction en polynômes $P_{2n}(x)$ entre 0 et 1 par cette même "méthode d'orthogonalité" : si

$$\sum \alpha_n P_{2n} = \sum \beta_n P_{2n}$$

alors, en égalant terme à terme :

$$\sum (\alpha_n - \beta_n)\, P_{2n} = 0 .$$

Si l'on multiplie par P_{2j} et que l'on intègre terme à terme entre 0 et l'unité, seule l'intégrale correspondant à P_{2j} subsiste et l'on a :

$$\alpha_j = \beta_j$$

*4 Legendre a peut-être aussi suivi un conseil de Lagrange [1773,p.646] qui préconisait le développement de l'attraction exercée par un ellipsoïde à trois axes en un point extérieur en série entière de k. Legendre extrapole la série entière suggérée par Lagrange valable a priori seulement pour un ellipsoïde à trois axes peu excentré, à n'importe quel sphéroïde de révolution, symétrique par rapport à l'équateur.

et ce pour tous les j. D'où, en comparant les deux séries qui expriment p_1, Legendre obtient que p_1 se réduit à une constante dont il démontre la nullité. L'annulation des autres coefficients $c(p_n(x))$ conduit de la même manière à la nullité de la fonction p_n pour n quelconque. Legendre a donc faussement démontré que l'ellipsoïde de révolution était la seule figure d'équilibre possible.

Les séries de Fourier ne sont pas nouvelles : Euler en 1750, Clairaut en 1757 et Lalande dans les années 1760 développaient certaines classes de fonctions en série de Fourier trigonométriques. En revanche, on peut penser que c'est Legendre qui pour la première fois conçoit une série de Fourier de polynômes orthogonaux et lui fait jouer un rôle actif dans la résolution d'un problème d'analyse. Avec ce mémoire, Legendre opère la transition entre l'analyse taylorienne et l'analyse orthogonale.

- 2.3/ Le mémoire de Laplace de 1784

Legendre n'a pas goûté très longtemps au plaisir d'avoir résolu un cas important du problème de la figure des planètes. Le 11 août 1784, soit cinq semaines après la lecture du mémoire de Legendre, Laplace présente le texte qu'il destinait aux "Mémoires de l'Académie des Sciences" pour l'année 1782 mais qu'il n'avait pas réussi à mettre sous presse dans les délais impartis. Vis-à-vis de Legendre, Laplace fait à la fin de son mémoire de nombreuses hypothèses autres que celle d'un fluide homogène en étudiant les figures d'équilibre de planètes à noyau solide recouvert d'un fluide soumis à la pression de ce noyau, constitué de couches de densités différentes, mais aussi en envisageant des corps extérieurs qui exercent une influence gravifique sur le fluide. Cependant, le raisonnement de Laplace est plus complet lorsqu'il s'agit d'étudier l'équilibre de planètes qui ne sont pas a priori supposées de révolution, homogènes, entièrement fluides, peu différentes d'une sphère, de masse fixée, en rotation uniforme lente autour d'un axe qui passe par le centre de masse : ce problème généralise donc celui que Legendre avait "résolu" dans ses "Recherches sur la figure des planètes".

- 2.3.1/ La méthode des cascades

Pour déterminer ces figures d'équilibre possibles, Laplace commence par calculer le potentiel V(S) exercé par un sphéroïde quelconque en un point extérieur S. Comme Legendre, Laplace choisit de se repérer en coordonnées sphériques dont l'origine est le centre de gravité du sphéroïde, par lequel passe nécessairement l'axe de rotation. Si (r,θ,ω) désignent les coordonnées de S et (R,θ',ω') celles d'un point quelconque M du sphéroïde, V(s) s'exprime de la façon suivante :

$$V(S) = V(r,\theta,\omega) = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_s} T \, dR \, d\omega' \sin\theta' \, d\theta'$$

où :

$$T = \frac{R^2}{\sqrt{r^2 - 2rR\,(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\omega - \omega')) + R^2}}$$

et où R_s désigne le rayon du sphéroïde. Autant Legendre évitait tout recours au langage des équations différentielles ou aux dérivées partielles, autant Laplace cherche à introduire de telles équations pour résoudre le problème de la figure des planètes. En dérivant directement le radical T qui figure sous le signe intégral de V et en supposant que V se comporte comme T relativement à une dérivation partielle, posant $\mu = \cos\theta$, Laplace obtient l'équation suivante :

$$0 = \frac{\partial\left[(1 - \mu^2)\dfrac{\partial V}{\partial \mu}\right]}{\partial \mu} + \frac{\dfrac{\partial^2 V}{\partial \omega^2}}{1 - \mu^2} + r\,\frac{\partial^2 (rV)}{\partial r^2}\,.$$

On reconnaît, en coordonnées sphériques, l'équation de Laplace :

$$\Delta V = 0\,,$$

où Δ désigne l'opérateur laplacien. Contrairement à Legendre, Laplace reste dans un cadre plus classique en résolvant une équation aux dérivées partielles. Pour cela, il met en œuvre la "méthode des cascades", qui consiste à résoudre des équations déduites les unes des autres. Dans un premier temps, il développe V en une série entière de 1/r :

$$V(r,\theta,\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{U^{(i)}}{r^{i+1}}\,,$$

et remplace V par sa série dans l'équation de Laplace. Cette expression lui permet de séparer la variable r des autres et ainsi de mettre en place sa "méthode des cascades". Il obtient alors la nullité d'une série en puissances négatives de r, dont il déduit, sans explications, la nullité de chacun des coefficients. Laplace suppose implicitement que 0 n'a qu'un seul développement en série de 1/r, développement dont tous les coefficients sont nuls. Posant $\mu = \cos\theta$, il exhibe l'équation des harmoniques sphériques de degré i :

$$0 = \frac{\partial\left[(1 - \mu^2)\dfrac{\partial U^{(i)}}{\partial \mu}\right]}{\partial \mu} + \frac{\dfrac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial \omega^2}}{1 - \mu^2} + i\,(i + 1)\,U^{(i)}\,. \tag{2}$$

Une surface harmonique sphérique de degré i (ou un harmonique de surface sphérique de degré i) est une fonction sphérique, c'est-à-dire une fonction des angles polaire θ et méridien ω, qui est solution de (2) : c'est une fonction propre associée à la valeur propre $- i\,(i + 1)$ du laplacien sphérique Δ_S :

$$\Delta_S = \frac{\partial\left[(1 - \mu^2)\dfrac{\partial}{\partial \mu}\right]}{\partial \mu} + \frac{\dfrac{\partial^2}{\partial \omega^2}}{1 - \mu^2}\,.$$

L'équation des harmoniques sphériques apporte un renseignement décisif sur les coefficients $U^{(i)}$. Au lieu de l'utiliser a priori, Laplace établit par intégration par parties, la "symétrie" de Δ_S au sens moderne du terme :

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} u\,\Delta_S v\,d\omega\,d\mu = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} v\,\Delta_S u\,d\omega\,d\mu\,.$$

En remplaçant u par $U^{(i)}$ et v par $U^{(j)}$, Laplace obtient l'égalité suivante :

$$j\,(j+1)\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} U^{(i)}\,U^{(j)}\,d\omega\,d\mu = i\,(i+1)\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} U^{(i)}\,U^{(j)}\,d\omega\,d\mu\,,$$

d'où l'orthogonalité sur la sphère de deux surfaces harmoniques de degrés i et j différents. C'est la première fois qu'est démontrée l'orthogonalité de deux fonctions propres associées à un opérateur symétrique correspondant à deux valeurs propres différentes. Pour parvenir à ces relations d'orthogonalité, Laplace s'est certainement inspiré de la méthode des séries orthogonales de Legendre, réussissant à la généraliser au moyen des séries de surfaces harmoniques ordinaires dont les polynômes de Legendre sont les prototypes unidimensionnels.

Dans le deuxième temps de cette "méthode des cascades", Laplace cherche d'autres renseignements sur la nature de la surface harmonique $U^{(i)}$ de degré i : en effet, si l'on développe le radical T en une série entière de R/r :

$$T = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{Q^{(i)}\,R^i}{r^{i+1}}$$

alors, $Q^{(i)}$ est une surface harmonique sphérique de degré i qui est un polynôme de degré i des variables μ, $\sqrt{1-\mu^2}\sin\omega$ et $\sqrt{1-\mu^2}\cos\omega$: $Q^{(i)}$ est ce que l'on appelle une "surface harmonique sphérique ordinaire" (c'est-à-dire polynomiale) de degré i. $Q^{(i)}$ est lié à $U^{(i)}$ par l'égalité suivante :

$$U^{(i)} = \frac{1}{i+3}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2\pi} (R_s)^{i+3}\,Q^{(i)}\,d\omega'\,\sin\theta'\,d\theta'\,.$$

La symétrie de $Q^{(i)}$ en ω et ω' d'une part, et en θ et θ' d'autre part, assure le fait que $U^{(i)}$ est aussi une surface harmonique sphérique ordinaire. $Q^{(i)}$ étant une telle surface, Laplace peut écrire $Q^{(i)}$ de la manière suivante :

$$Q^{(i)} = \sum_{n=0}^{i} \beta_n \cos n(\omega - \omega')$$

où β_n est une fonction de μ. Pour calculer β_n, Laplace remplace $Q^{(i)}$ dans l'équation (2), et obtient l'équation des fonctions de Legendre associées de degré i et d'ordre n :

$$0 = \frac{\partial\left[(1-\mu^2)\frac{\partial\beta_n}{\partial\mu}\right]}{\partial\mu} - \frac{n^2\beta_n}{1-\mu^2} + i\,(i+1)\beta_n\,.$$

Il cherche à intégrer cette équation mais commet une erreur combinatoire si bien qu'il se méprend sur les valeurs de $Q^{(i)}$ et $U^{(i)}$; elle n'aura pas d'incidence sur son raisonnement quant aux figures d'équilibre possibles. Cette équation ne sera entièrement intégrée que par Olinde Rodrigues [1815]. Laplace aurait voulu établir le théorème d'addition des polynômes de Legendre dont le théorème d'addition intégral de Legendre est un corollaire :

$$Q^{(i)} = P_i(\cos\gamma) = P_i(\cos\theta)P_i(\cos\theta') + 2\sum_{n=1}^{n=i}\frac{(i-n)!}{(i+n)!}P_i^n(\cos\theta)\,P_i^n(\cos\theta')\cos n(\omega-\omega')$$

où :

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\omega-\omega')$$

et où P_i^n est la fonction de Legendre associée de première espèce de degré i et d'ordre n sur [- 1,1] :

$$P_i^n(x) = (-1)^n\,(1-x^2)^{\frac{n}{2}}\,\frac{d^nP_i(x)}{dx^n}\,.$$

P_i^n est la première partie de l'intégrale de l'équation des fonctions de Legendre associées.

- 2.3.2/ Le calcul du potentiel induit par un sphéroïde peu différent d'une sphère

Laplace cherche à calculer le potentiel exercé par un sphéroïde dont la surface r (ou si l'on préfère le rayon) est donnée par la formule suivante*5 :

(3) $$r = a(1+\alpha y)\,,$$

où a est le rayon de la sphère de même volume que la planète, où α est un coefficient constant donné de l'ordre de la force centrifuge, dont il négligera systématiquement les puissances supérieures ou égales à deux, et où y est une fonction sphérique connue qui décrit le relief de la planète. En dérivant V sous le signe intégral puis en égalant r au rayon de la planète donné par (3), Laplace obtient l'équation suivante valable à la surface du sphéroïde :

(4) $$-a\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2}{3}\pi a^2 + \frac{1}{2}V\,.$$

Laplace avait déjà eu recours à cette équation dans ses précédents traitements du problème de la figure des planètes. Dans (4), il remplace V par la série suivante :

*5 Rappelons que ce type de formule était déjà envisagé par Clairaut [1743]. D'Alembert considérait aussi systématiquement des planètes de révolution de rayon $a(A + \alpha y)$, où y est une fonction de l'angle polaire uniquement.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{U^{(i)}}{r^{i+1}} .$$

En négligeant les puissances de α supérieures ou égales à deux, il obtient l'égalité ci-dessous :

$$y = \frac{U'^{(0)}}{4\alpha\pi a^3} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2i+1}{4\alpha\pi a^{i+3}} U^{(i)} \tag{5}$$

où $U'^{(0)}$ est une constante de l'ordre de α. Sans rien supposer sur la fonction sphérique y, sollicitant simplement les ressources du calcul du XVIII^{e} siècle où la notion de limite n'est pas pensée, Laplace obtient que y est développable en une série de surfaces harmoniques sphériques ordinaires.

Á présent, y étant connue, il la développe en surfaces harmoniques sphériques ordinaires $Y^{(i)}$. En comparant la série (5) avec cette série des $Y^{(i)}$, il obtient par égalisation terme à terme des surfaces harmoniques sphériques ordinaires de même degré, et ce sous couvert implicite*[6] de l'orthogonalité de deux surfaces harmoniques sphériques de degrés différents, la valeur suivante de V en un point extérieur :

$$V = \frac{4\pi a^3}{r}\left(\frac{1}{3} + \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i}{(2i+1)\, r^i} Y^{(i)}\right). \tag{6}$$

Finalement, Laplace a su généraliser l'orthogonalité des polynômes de Legendre à celle des surfaces harmoniques sphériques pour lui faire jouer le rôle clé : montrer l'unicité du développement en série harmonique.

- 2.3.3/ L'équilibre d'une planète fluide

Laplace souhaite déterminer la figure d'une planète fluide qu'il ne suppose ni de révolution, ni symétrique par rapport à l'équateur, mais simplement homogène, peu différente d'une sphère, en rotation uniforme autour d'un axe qui passe par son centre. Pour cela, il fait intervenir une condition plus générale pour l'équilibre des fluides : la résultante des forces appliquées à une couche intérieure à la planète de densité constante doit être orthogonale à la cette couche. Pour un fluide homogène, Laplace observe que l'on peut toujours imaginer des "couches de niveau" de façon que cette condition soit toujours satisfaite à l'intérieur du fluide si bien que seule la loi de Huygens doit être prise en compte ; g désignant la force centrifuge à la distance unité de l'axe de rotation, en tous les points de la surface de la planète en équilibre, on doit avoir :

$$V + \alpha r^2\left(\frac{g}{3} - \frac{g}{2}\left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right)\right) = \text{const.}$$

---

*[6] Dans son texte, Laplace ne démontre l'orthogonalité qu'après l'unicité du développement.

Il remplace V par la série (6), égale r au rayon $a(1 + \alpha y)$, néglige les puissances de α supérieures ou égale à 2. Toujours en faisant jouer les relations d'orthogonalité, Laplace obtient la nullité de tous les $Y^{(i)}$ de degré i > 3 ainsi que la valeur de $Y^{(2)}$ suivante*7 :

$$Y^{(2)} = -\frac{15g}{16\pi\alpha}\left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right).$$

En plaçant l'origine des coordonnées au centre de masse de la planète, Laplace obtient la nullité de $Y^{(0)}$ et $Y^{(1)}$. Finalement, en ayant négligé α^2 ou si l'on préfère le carré de la force centrifuge, Laplace obtient l'unique rayon planétaire suivant :

$$r = a\left(1 - \frac{15g}{16\pi}\left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right)\right)$$

où μ désigne le cosinus de l'angle polaire et a le volume de la planète. Le rayon r ne dépend plus de l'angle méridien et décrit exactement l'ellipsoïde de révolution de Newton. Laplace a démontré le résultat qu'il cherchait à obtenir depuis une dizaine d'années : seul l'ellipsoïde de Newton*8 satisfait à l'équilibre des planètes fluides homogènes peu différentes de la sphère. Qui plus est, il n'a pas fait les hypothèses restrictives de Legendre qui supposait que la figure d'équilibre était de révolution et symétrique par rapport à l'équateur. Mais, comme celui de Legendre, le raisonnement par lequel Laplace conclut à une seule figure d'équilibre possible est contestable. En effet, s'il n'avait pas négligé les puissances de α supérieures ou égale à 2, il aurait obtenu bien d'autres figures d'équilibre que l'ellipsoïde de Newton, figures qui auraient répondu au critère fixé de ne pas s'écarter trop de la sphère.

- 2.4/ Analyse et synthèse

Le mémoire de Laplace de 1784 est typique des deux grandes formes de raisonnement mathématique, l'analyse et la synthèse. Entendons par analyse, non pas l'analyse mathématique, mais la décomposition d'un tout en ses éléments, et par synthèse, l'opération intellectuelle qui recompose un tout à partir des éléments distingués par l'analyse. Laplace a décomposé le problème de la figure des planètes à l'aide de la méthode des séries en trois étapes principales : résolution jusqu'à un certain point de l'équation de Laplace, résolution de l'équation différentielle valable à la surface d'un sphéroïde, résolution de l'équation de Huygens. Ces trois mouvements ont été partagés en plusieurs sous-mouvements, plus ou moins nécessaires, comme le calcul du potentiel en un point intérieur au sphéroïde, ou encore la mise en place d'une méthode de réduction d'un polynôme sphérique en surfaces harmoniques sphériques ordinaires. Laplace a mis en mouvement un appareil théorique sans précédent,

---

*7 En fait, Laplace commet une erreur de calcul : il oublie que $Y^{(0)}$ est une constante si bien qu'il se fourvoie dans l'annulation des coefficients de la série de surfaces harmoniques qu'il obtient. Il corrigera cette imprécision dans sa "Mécanique Céleste" dont nous extrayons le résultat exact.

*8 Contrairement à celui de Legendre, le raisonnement de Laplace ne fait pas apparaître un deuxième ellipsoïde de révolution très aplati et instable.

beaucoup plus efficace que le traitement des équations purement fonctionnelles par Legendre. Cette mise en mouvement demande à de nombreuses reprises un franchissement de barrières théoriques : à chaque fois que son raisonnement semble ne plus pouvoir progresser, Laplace doit introduire un nouvel élément qui lui permette d'avancer. L'analyse est le moteur de sa créativité.

Toutefois, par sa complexité, l'analyse ne satisfait pas entièrement Laplace : un grain de sable ne se serait-il pas immiscé dans les rouages de son raisonnement ? De peur de ne pas avoir exhibé toutes les figures d'équilibre possibles, il éprouve le besoin de se délester de la méthode des séries : "Nous allons ainsi déterminer ces figures directement et indépendamment des suites." (Laplace [1784,p.393]). Dans les quatre pages qui suivent, il traite le problème de la figure des planètes d'une manière synthétique, c'est-à-dire sans utiliser la méthode des séries et en ne retenant que les techniques les plus indispensables de son raisonnement analytique. Seulement, cette synthèse nécessite une concession : Laplace doit supposer la planète de révolution alors que le raisonnement par la méthode des séries ne le réclamait pas. Á partir de l'expression intégrale du potentiel, il sélectionne deux moments de sa démarche analytique :

1) il considère que le rayon de la planète de révolution est exprimé par $a(1 + \alpha y)$, où y ne dépend plus que de l'angle polaire.

2) il ne retient que l'équation de Huygens, qui est la seule équation indispensable pour l'équilibre de la planète fluide.

Finalement, sans utiliser d'équations différentielles ou de développements en série, par des transformations simples de l'intégrale de potentiel, Laplace obtient que l'ellipsoïde de Newton est la seule figure d'équilibre possible, mais, insistons encore sur ce point, en faisant l'hypothèse supplémentaire d'une figure planétaire de révolution :

"Nous voilà ainsi parvenu à déterminer directement et indépendamment des suites la figure d'un sphéroïde homogène de révolution qui tourne sur son axe, et à faire voir qu'elle ne peut être que celle d'un ellipsoïde qui se réduit à une sphère lorsque $\varphi = 0$, en sorte que la sphère est la seule figure de révolution qui satisfasse à l'équilibre d'une masse fluide homogène immobile." (Laplace [1784,p.396]).

Ce mémoire de Laplace résume le dilemme du mathématicien du siècle des Lumières : une confiance en la méthode synthétique pour la fiabilité de ses résultats, mais une préférence pour la méthode analytique qui prospecte dans des voies avancées que la méthode synthétique n'arrive pas à restituer. En fait, Lagrange est le seul mathématicien suffisamment doué pour obtenir des résultats aussi puissants par la méthode synthétique que par la méthode analytique : c'est par une démarche synthétique qu'il avait calculé l'attraction d'un ellipsoïde dans son mémoire "Sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques" [1773]. Moins habile, Laplace a la plupart du temps recours à la démarche analytique : Legendre en abuse encore plus.

Après 1784, Laplace ne cessera de se servir des harmoniques sphériques pour résoudre divers problèmes de mécanique céleste. Il envisage même d'autres figures d'équilibre planétaire que l'ellipsoïde de révolution, étudiant en détail les anneaux de Saturne engendrés par la révolution d'une ellipse extrêmement aplatie à l'extrémité d'un axe. Comme tous les savants du siècle de Lumières, Laplace s'interroge sur la concordance entre le résultat théorique, l'ellipsoïde de révolution, et les observations que l'on a effectuées sur le globe terrestre. Dès 1785, il lit à l'Académie un "Mémoire sur la figure de la Terre", dans lequel il s'inquiète de l'absence de conformité entre les mesures du méridien terrestre et l'ellipsoïde de révolution qu'il prévoit, allant jusqu'à modéliser le géoïde par un ellipsoïde à trois axes.

- 2.5/ L'ascension académique de Laplace

Laplace a "résolu" un cas important du problème de la figure des planètes que Cousin, du Séjour et Borda estimaient insoluble quelques mois plus tôt. Son analyse a d'autant plus de retentissement sur le monde mathématique qu'il a su formaliser le problème de la figure des planètes dans le langage des équations aux dérivées partielles. Dans le livre "Théorie du Mouvement et de la Figure Elliptique des Planètes", Laplace [1784a] met en résonance la forme elliptique de l'orbite des planètes et la figure elliptique de révolution d'une planète fluide en rotation uniforme. L'harmonie entre les lignes orbitales du second degré et les surfaces d'équilibre du second degré répondrait aux équations différentielles et aux dérivées partielles du second ordre auxquelles satisfont le potentiel et les fonctions qui lui sont associées dans la méthode des cascades. Après un traitement mathématique moins fouillé que dans son mémoire [1784], il conclut abusivement qu'une planète fluide peu différente d'une sphère en rotation uniforme autour de son axe polaire, ne peut prendre que la forme d'un ellipsoïde de révolution.

1784 est l'année-clé de la carrière de Laplace : la "vieille garde" ne peut plus résister à son accession au statut officieux de maître de l'Académie des Sciences. Le 23 avril 1785, le directeur annuel de l'Académie, Lavoisier, promulgue un nouveau règlement qui fait passer de six à huit le nombre de classes. Laplace est enfin élu pensionnaire de la classe de mécanique, de loin la plus prestigieuse de toutes au XVIII^{e} siècle.

- 2.6/ La querelle d'antériorité

En 1785 commence entre Legendre et Laplace une controverse au sujet de la priorité de leurs découvertes. Alors qu'il aurait dû rendre son mémoire le 24 avril 1784 pour qu'il soit publié dans le recueil de l'Académie pour l'année 1782, Laplace profite de sa mainmise sur l'Académie pour le faire paraître dans le recueil pour l'année 1782. En revanche, le premier mémoire "Sur l'attraction des sphéroïdes homogènes" que Legendre avait présenté au début de l'année 1783 ne sera publié qu'en 1785 dans le dixième volume des "Savants Étrangers". Beaucoup plus grave : le deuxième mémoire de Legendre "Recherches sur la figure des planètes" lu quelques semaines avant celui de Laplace ne sera pas publié dans le recueil pour l'année 1782, ni dans celui pour l'année 1783 mais seulement dans les mémoires pour l'année 1784 qui ont été édités en 1787. Dans une notule infrapaginale, Legendre [1784,p.370] déplore ce retard de publication :

"La proposition qui fait l'objet de ce Mémoire, étant démontrée d'une manière beaucoup plus savante & plus générale dans un Mémoire que M. de la Place a déjà publié dans le volume de 1782, je dois faire observer que la date de mon Mémoire est antérieure, & que la proposition qui paraît ici, telle qu'elle a été lue en juin & juillet 1784, a donné lieu à M. de la Place, d'approfondir cette manière, & d'en présenter aux Géomètres, une théorie complète.".

Entre 1785 et 1790, ses relations avec Laplace se tendent d'autant plus que Legendre connaît une période d'intense créativité pendant laquelle il publie les meilleurs mémoires de toute son œuvre. Sur le plan des honneurs académiques, Legendre est élu associé à la section de géométrie lors de la réorganisation du 23 avril 1785 et membre de la Royal Society à la suite d'une collaboration entre les observatoires de Paris et de Greenwich sur des relevés géodésiques.

Après quatre années de tassement de la controverse, dans un "Mémoire sur les intégrales doubles" [1788], Legendre contre-attaque en démontrant, d'une manière selon lui plus rigoureuse, le théorème de Maclaurin pour des points extérieurs à un ellipsoïde à trois axes. Mais les calculs compliqués de Legendre ne convainquent pas. Cette nouvelle démonstration d'une proposition déjà établie par Laplace [1784] n'est qu'un acompte sur la riposte qu'il prépare : le 28 août 1790, Legendre lit à l'Académie un mémoire de quatre-vingt-trois pages : "Suite des recherches sur la figure des planètes".

- 2.7/ Le mémoire de Legendre de 1790

Le mémoire de Legendre fait la synthèse de deux courants théoriques majeurs : d'une part, celui initié par Clairaut*9 dans la "Théorie de la figure de la Terre" en multipliant les hypothèses sur les constitutions planétaires avec la notion prépondérante de surface de niveau (que Legendre appelle tout simplement "couche") et d'autre part, la méthode des séries orthogonales. Dans son introduction, Legendre règle ses comptes avec Laplace auquel il reproche de ne pas l'avoir cité dans le mémoire "Théorie des attractions des sphéroïdes et de la

---

*9 Legendre raffine quelques relations que Clairaut avait obtenues dans sa "Théorie de la figure de la Terre" [1743].

figure des planètes" ; Legendre regrette aussi que ce mémoire ait été publié avant les siens. En juste retour, il va utiliser et perfectionner les analyses de Laplace.

Le mémoire de Legendre se divise en six parties principales :

- partie 1 : du § (1) au § (9) : présentation de quelques résultats sur les harmoniques sphériques (prouvés dans la partie 5), établissement de l'équation générale de l'équilibre pour une planète de révolution.

Suivent trois parties dans lesquelles Legendre résout l'équation de l'équilibre pour des planètes de révolution avec différentes hypothèses :

- partie 2 : du § (10) au § (17) : planète de révolution solide recouverte d'une lame fluide mince et composée de couches semblables à la surface.
- partie 3 : du § (18) au § (34) : planète de révolution, entièrement fluide avec des couches de différentes densités qui suivent une certaine loi ; Legendre applique ses résultats à trois lois de densité spécifiques (§ (37) à § (34)).
- partie 4 : du § (35) au § (37) : planète solide de révolution, composée de couches elliptiques dont les excentricités suivent une loi quelconque, recouverte d'une mince lame fluide.
- partie 5 : du § (38) au § (47) : démonstration de théorèmes sur les harmoniques sphériques.
- partie 6 : du § (48) au § (54) : planète fluide quelconque et planète solide quelconque recouverte d'une mince lame fluide.

Dans ce qui suit, nous réorganisons le découpage que fait Legendre de son mémoire, afin de présenter ses résultats de la manière la plus cohérente possible.

- 2.7.1/ Les nouveaux résultats sur les harmoniques sphériques

Comme ni lui-même ni Laplace ne l'avaient fait auparavant, Legendre démontre l'orthogonalité de toute la suite des polynômes qui portent son nom sur [- 1,1]. Pour cela, il élimine la variable r dans l'intégrale du produit des développements en série des deux pseudo-génératrices suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{\sqrt{1-2rzx+r^2z^2}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n z^n P_n(x) \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{2zx}{r}+\dfrac{z^2}{r^2}}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{r^n} P_n(x) \end{array}\right. .$$

Or :

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-2rzx+r^2z^2}\sqrt{1-\dfrac{2zx}{r}+\dfrac{z^2}{r^2}}} = \frac{1}{z}\log\frac{1+z}{1-z} = 2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{2n+1} .$$

Il déduit :

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{pour } m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{pour } m = n \end{cases} .$$

Dans "Théorie des attractions des sphéroïdes et de la figure des planètes" [1784], Laplace n'avait pas tiré le maximum de la méthode des cascades : il avait commis une erreur combinatoire lors de la résolution de l'équation des fonctions de Legendre associées, n'avait exploité que l'orthogonalité de surfaces harmoniques sphériques ordinaires de degrés différents sans en exhiber l'expression générale. Á un facteur près vis-à-vis des conventions modernes, Legendre exprime les fonctions de Legendre associées de première espèce. Il fait jouer le fait que les polynômes qui portent son nom sont valeurs propres d'un opérateur symétrique :

$$\frac{d\left[(1 - x^2)\dfrac{dP_i(x)}{dx}\right]}{dx} + i\,(i+1)\,P_i(x) = 0$$

pour déduire par plusieurs intégrations par parties successives, l'orthogonalité de deux fonctions associées de première espèce de même ordre et de degrés différents :

$$\int_{-1}^{1} P_i^n(x)\, P_j^n(x) dx = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ \dfrac{(i+n)!}{(i-n)!}\,\dfrac{2}{2i+1} & i = j \end{cases} .$$

Legendre peut alors facilement établir le théorème d'addition des polynômes qui portent son nom :

$$P_i(\cos\gamma) = P_i(\cos\theta)P_i(\cos\theta') + 2\sum_{n=1}^{n=i} \frac{(i-n)!}{(i+n)!}\, P_i^n(\cos\theta)\, P_i^n(\cos\theta')\, \cos n(\omega - \omega')$$

où :

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\omega - \omega') .$$

$P_i(\cos\gamma)$ est un cas particulier de surface harmonique sphérique ordinaire : de la forme de $P_i(\cos\gamma)$ donnée par le théorème d'addition, Legendre déduit la formule développée générale d'une surface harmonique sphérique ordinaire $Y^{(i)}(\theta,\omega)$ de degré i, fonction des angles polaire θ et méridien ω :

$$Y^{(i)}(\theta,\omega) = Y_{0,0}P_i(\cos\theta) + \sum_{n=1}^{i} \frac{d^nP_i(\cos\theta)}{d\mu^n}\, \sin^n\theta\, (Y_{0,n}\cos n\omega + Y_{1,n}\sin n\omega)$$

où $Y_{0,0}$, $(Y_{0,n},Y_{1,n})_{1 \leq n \leq i}$ sont des coefficients arbitraires et où μ est égal à $\cos\theta$. En multipliant terme à terme deux tels développements et en intégrant sur la sphère, Legendre démontre l'orthogonalité de deux surfaces harmoniques sphériques ordinaires de degrés différents mais calcule aussi l'intégrale du produit sur la sphère de deux surfaces harmoniques sphériques ordinaires de même degré :

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y^{(i)}(\theta,\omega)\, Z^{(i)}(\theta,\omega)\, \sin\theta\, d\theta\, d\omega = \frac{4\pi}{2i+1}\left(Y_{0,0}Z_{0,0} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{i} \frac{(i+n)\,!}{(i-n)\,!}\,(Y_{0,n}Z_{0,n} + Y_{1,n}Z_{1,n}) \right).$$

Legendre exhibe une égalité du type de celle de Parseval dix avant la lettre. Dans le cas particulier où $Z^{(i)}$ est égal à $P_i(\cos\gamma)$, Legendre obtient le "théorème polaire" suivant :

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y^{(i)}(\theta,\omega)\, P_i(\cos\gamma)\, \sin\theta\, d\theta\, d\omega = \frac{4\pi}{2i+1}\, Y^{(i)}(\theta',\omega').$$

Legendre en déduit la formule de normalisation sphérique :

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P_i^2(\cos\gamma)\, \sin\theta\, d\theta\, d\omega = \frac{4\pi}{2i+1}.$$

- 2.7.2/ L'équation de l'équilibre

Legendre envisage le cas d'un fluide non homogène formé de couches de densité uniforme, que Laplace [1784] n'avait pas traité clairement : pour que la planète soit en équilibre, l'orthogonalité de la résultante des forces de gravité doit avoir lieu pour toutes les couches fluides et pas seulement à la surface. Legendre ne considère plus que la fonction potentiel en un point P à l'intérieur ou à la surface du sphéroïde, de coordonnées sphériques $(r,\omega,0$ ou $\delta)$. L'origine de ces coordonnées est prise au centre de la planète : l'axe polaire $\omega = 0$ est l'axe de rotation de la planète. Il exprime le potentiel en deux parties : le potentiel V induit en P par les couches inférieures à celles sur laquelle P est située et (V) induit en P par les couches supérieures. En tenant compte de la vitesse de rotation uniforme autour de l'axe polaire qui engendre une force centrifuge F à la distance unité de l'axe, Legendre obtient l'équation de l'équilibre d'une couche fluide quelconque :

$$V + (V) + \frac{1}{2}\, Fr^2 \sin^2\omega = \text{const.}$$

Dans le cas d'une planète fluide, cette équation doit être satisfaite pour toutes les couches, et dans le cas d'une planète solide recouverte d'une lame fluide, seulement à la surface de la planète. Nous n'étudierons que quelques-uns des calculs les plus significatifs de Legendre.

- 2.7.3/ Calcul de l'attraction des planètes de révolution

Pour les planètes de révolution, Legendre calcule V et (V) par la même technique que celle de son mémoire de 1783. Soit P un point de coordonnées sphériques $(r,\omega,0)$, dM un élément de masse du sphéroïde situé en un point M de coordonnées sphériques (z,ψ,θ), R la distance entre P et M. Pour calculer V, Legendre développe l'élément de potentiel en la série suivante :

$$\text{(7)} \qquad \frac{dM}{R} = \frac{\Delta z^2\, dz\, d\theta\, d\psi \sin\psi}{\sqrt{r^2 - 2rz\cos\mu + z^2}} = \frac{\Delta z^2\, dz\, d\theta\, d\psi \sin\psi}{r}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{r^n} P_n(\cos\mu)\right)$$

où Δ désigne la densité de la planète en M et où $\cos\mu = \cos\omega \cos\psi + \sin\omega \sin\psi \cos\theta$. Il intègre en θ, en se servant du théorème d'addition des polynômes qui portent son nom. L'intégration suivante ne se fait pas en z, ni en ψ : Legendre caractérise chacune des couches qui composent la planète par la distance β entre le centre de la planète (sur lequel est située l'origine des coordonnées) et l'intersection de la couche avec l'axe polaire de rotation : il dit que β représente "l'axe de la couche". Pour le point $M(z,\psi,\theta)$, le rayon vecteur z est fonction de l'axe $\beta(M)$ de sa couche et de l'angle polaire ψ. L'intégration de l'élément de potentiel se fait donc en β, puis en ψ. Legendre suppose que Δ est fonction de β uniquement. Si $\beta(P)$ désigne l'axe de la couche sur laquelle est situé P, l'intégration en β fait apparaître les coefficients suivants :

$$\int_0^{\beta(P)} \Delta z^{n+2}(\beta,\psi)\, d\beta = \lambda^{(n)},$$

où $\lambda^{(n)}$ est fonction de ψ. L'intégration en ψ produit finalement :

$$V = \frac{4\pi\alpha}{r}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^{(n)}}{r^n} P_n(\cos\omega)\right)$$

où α et $\zeta^{(n)}$ dépendent seulement de $\beta(P)$ et sont exprimés comme suit, si l'on désigne $\cos\psi$ par x :

$$\int_{-1}^{1} \lambda^{(0)}\, dx = 2\alpha\,, \qquad n > 0 \qquad \zeta^{(n)} = \frac{\int_{-1}^{1} \lambda^{(n)} P_n(x)\, dx}{2\alpha}\,.$$

Legendre suit le même raisonnement pour calculer (V), développant l'élément de potentiel en une série entière de r/z. β_s désignant la valeur de l'axe de la surface de la planète (c'est-à-dire le demi-axe polaire), l'intégration en β fait apparaître les coefficients suivants :

$$n > 1 \qquad v^{(n)} = \int_{\beta(P)}^{\beta_s} \frac{\Delta}{z^{n-1}}\, d\beta = N^{(n)} - \int_0^{\beta(P)} \frac{\Delta}{z^{n-1}}\, d\beta$$

où $N^{(n)}$ sont des constantes prises de manière que $v^{(n)}$ s'annule lorsque P est situé à la surface. $v^{(n)}$ est fonction de ψ. Si l'on désigne toujours $\cos\psi$ par x, l'intégration en ψ donne :

$$(V) = 4\pi\left(\sum_{n=1}^{\infty} r^n \xi^{(n)} P_n(\cos\omega)\right)$$

où :

$$\xi^{(n)} = \frac{\int_{-1}^{1} v^{(n)} P_n(x)\, dx}{2}\,.$$

- 2.7.4/ Figure d'une planète entièrement fluide

Pour ce type de planète qu'il traite dans la partie 3, Legendre exige que l'équation générale de l'équilibre en un point P de coordonnées (r,ω,0) soit vérifiée non seulement à la surface, mais aussi pour toutes les couches de la planète. Legendre suppose donc la gravité orthogonale à toutes les couches de niveau et pas simplement à la surface extérieure : c'est une difficulté théorique supplémentaire vis-à-vis du traitement laplacien de la question. Contrairement à Laplace, Legendre ne néglige pas systématiquement le carré de la force centrifuge mais raisonne par approximations successives.

Dans une première approximation, Legendre suppose le rayon r d'une couche donné par βv_1 où β désigne toujours l'axe de la couche et où $v_1 = 1 + q_1$, q_1 étant une quantité de l'ordre de la force centrifuge fonction de β et de l'angle polaire ω. Pour plus de simplicité, Legendre suppose le demi-axe polaire de la planète égal à l'unité. En remplaçant le rayon r par $(\beta(P))(1 + q_1)$ dans les valeurs de $\zeta^{(n)}$ et $\xi^{(n)}$ calculées précédemment, négligeant les puissances de q_1 supérieures ou égales à deux, par les relations d'orthogonalité sur les polynômes qui portent son nom, Legendre obtient cette expression de q_1 :

$$q_1 = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n + \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n(\cos\omega)$$

où les coefficients A_n, fonctions de β(P), sont solutions des équations (8) suivantes :

$$\begin{cases} 5\,\alpha(\beta(P))^2 A_2 = \displaystyle\int_0^{\beta(P)} \Delta d(\beta^5 A_2) + (\beta(P))^5 \left(N^{(2)} - \int_0^{(\beta(P))} \Delta dA_2\right) - \frac{5g\alpha_1}{3}(\beta(P))^5 \\ n \neq 2 : (2n+1)\,\alpha(\beta(P))^n A_n = \displaystyle\int_0^{\beta(P)} \Delta d(\beta^{n+3} A_n) + (\beta(P))^{2n+1} \left(N^{(n)} - \int_0^{\beta(P)} \Delta d(\beta^{2-n} A_n)\right) \end{cases}$$

où :

$$\alpha = \int_0^{\beta(P)} \Delta\beta^2 d\beta \qquad \text{et} \qquad \alpha_1 = \int_0^1 \Delta\beta^2 d\beta \,.$$

En discutant ces équations, Legendre déduit la nullité de A_n pour n différent de 2. Pour obtenir A_2, il faudra résoudre les équations (8) pour une loi de densité Δ fixée qui dépend de β. Dans tous les cas, le rayon r d'une couche de la planète en équilibre sera donné par la formule suivante :

$$r = \beta v_1 = \beta\left(1 - \frac{3}{2} A_2 \sin^2\omega\right).$$

La planète en équilibre est donc constituée de surfaces de niveau en forme d'ellipsoïdes de révolution d'excentricités différentes puisque le coefficient A_2 dépend de l'axe de la couche. Quant à la surface extérieure d'équilibre, Legendre obtient donc un ellipsoïde de révolution.

Dans une deuxième approximation, Legendre suppose le rayon r d'une couche d'axe β égal à $\beta v_2 = \beta(v_1 + q_2)$ où q_2 est une quantité de l'ordre du carré de la force centrifuge : en substituant cette valeur dans l'équation générale de l'équilibre, il obtient :

$$q_2 = - B_2 - B_4 + B_2P_2(\cos\omega) + B_4P_4(\cos\omega)$$

où les coefficients B_2 et B_4 sont entièrement déterminés par l'axe de la couche et de l'ordre du carré de la force centrifuge. Legendre conclut que la figure d'équilibre est unique pour une vitesse de rotation donnée, mais qu'elle n'est égale à l'ellipsoïde de révolution que si l'on néglige le carré de la force centrifuge.

Dans le cas d'une planète de révolution à noyau solide recouvert d'une mince couche de fluide et dont les couches intérieures sont semblables à la surface traité dans la partie 2, Legendre n'avait négligé aucune puissance de la force centrifuge. Il avait supposé le demi-axe polaire égal à 1 et obtenu l'expression suivante du rayon r de la planète :

$$r = 1 + \varepsilon\sin^2\omega - 3k\varepsilon^2\sin^2\omega\cos^2\omega + \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^{n+1}\sin^2\omega\cos^2\omega \left(\sum_{m=0}^{n-1} a_{n,m}\cos^{2m}\omega\right)$$

où ε est une quantité de l'ordre de la force centrifuge, k et $a_{n,m}$ certains coefficients numériques : la somme des deux premiers termes du second membre donne le rayon d'une ellipse. Donc plus la planète tourne vite, plus l'influence des coefficients $a_{n,m}$ des puissances de ε supérieures à deux se fait ressentir, et plus les reliefs construits sur l'ellipsoïde de révolution s'accentuent.

- 2.7.5/ Les planètes qui ne sont pas de révolution

- 2.7.5.1/ Calcul du potentiel exercé par un sphéroïde qui n'est pas de révolution

Pour calculer V en un point P de coordonnées sphériques (r,ω,δ) lorsque la planète n'est pas de révolution, Legendre intègre le développement (7) de l'élément de potentiel, en z, ψ et θ. Mais comme z est fonction du rayon de la couche β(dM) et des angles polaire ψ et méridien θ, on peut donc intégrer en θ, ψ et β. Legendre développe une puissance $m^{\text{ième}}$ quelconque de z en une série de surfaces harmoniques sphériques ordinaires $\Psi_m^{(n)}$ de degré n :

$$z^m = \beta^m \left(1 + m\sum_{n=0}^{\infty} \Psi_m^{(n)}\right)$$

où les coefficients de $\Psi_m^{(n)}$ dépendent de β. Il en déduit :

$$z^m\,dz = \beta^m d\beta + \sum_{n=0}^{\infty} d\beta^{m+1}\,\Psi_{m+1}^{(n)}$$

Il pose :

$$Z_m^{(n)}(\omega,\delta) = \Psi_m^{(n)}(\psi,\theta)\ .$$

Grâce au théorème polaire, après intégration en β de 0 à $\beta(P)$, Legendre obtient :

$$V = \frac{4\pi\alpha}{r}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma^{(n)}}{r^n}\right),$$

où les coefficients $\Gamma^{(n)}$ fonctions de $\beta(P)$, des angles ω et δ, s'expriment par les formules suivantes :

$$\alpha = \int_0^{\beta(P)} \Delta\beta^2\, d\beta + \int_0^{\beta(P)} \Delta d(\beta^3 Z_3^{(0)}) \ , \quad \Gamma^{(n)} = \frac{1}{(2n+1)\alpha}\int_0^{\beta(P)} \Delta d(\beta^{n+3} Z_{n+3}^{(n)}) \ .$$

De même, pour exprimer (V), Legendre obtient la formule suivante :

$$(V) = 4\pi r \sum_{n=0}^{\infty} r^n \Pi^{(n+1)} ,$$

où les coefficients $\Pi^{(n)}$ s'expriment comme suit lorsque le demi-axe polaire est égal à l'unité :

$$\Pi^{(n)} = \frac{1}{2n+1}\left(N^{(n)} - \int_{\beta(P)}^{1} \Delta\ d(\beta^{2-n} Z_{2-n}^{(n)})\right) = \int_0^{\beta(P)} \Delta\ d(\beta^{2-n} Z_{2-n}^{(n)}) \ .$$

$N^{(n)}$ sont des constantes prises de manière que $\Pi^{(n)}$ s'annule lorsque P est situé à la surface.

- 2.7.5.2/ Planète entièrement fluide

Pour une planète entièrement fluide de demi-axe polaire toujours égal à 1, Legendre réclame que l'équation générale de l'équilibre :

(9) $$V + (V) + \frac{1}{2} Fr^2 \sin^2\omega = \text{const.}$$

soit vérifiée pour toutes les couches de la planète. Il exprime alors le rayon r d'une couche d'axe β par $\beta(1 + q)$ où q est une quantité de l'ordre de la force centrifuge fonction de β et des angles polaire ω et méridien δ. En remplaçant r par $(\beta(P))(1 + q)$ dans (9), il obtient le développement de q suivant :

(10) $$q = C - \frac{n\sigma_1}{3\sigma}(\beta(P))^3 P^{(2)}(\cos\omega) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\Gamma^{(n)}}{(\beta(P))^n} + \frac{(\beta(P))^{n+1}\Pi^{(n)}}{\sigma}\right),$$

où C désigne une constante et :

$$\sigma = \int_0^{\beta(P)} \Delta\beta^2\, d\beta \qquad \sigma_1 = \int_0^{1} \Delta\beta^2\, d\beta \ .$$

Legendre décompose q en la série de surfaces harmoniques sphériques $Z^{(n)}$ de degré n suivante

(11) $$q = \sum_{n=0}^{\infty} Z^{(n)} .$$

Les coefficients de $Z^{(n)}$ sont fonctions de $\beta(P)$. En invoquant l'orthogonalité de deux surfaces harmoniques sphériques ordinaires de degrés différents, Legendre peut comparer terme à terme les séries (10) et (11) et montrer que $Z^{(n)}$ vérifie les mêmes équations (8) établies dans le cas d'une planète de révolution. Legendre conclut que la seule figure d'équilibre possible est un ellipsoïde de révolution si l'on néglige le carré de la force centrifuge, c'est-à-dire que les résultats portant sur les planètes fluides de révolution sont applicables aux planètes fluides qui ne sont pas de révolution. Seulement, dans le cas d'une planète de révolution, les inconnues A_n des équations (8) étaient fonctions de β seul alors que $Z^{(n)}$ dépend non seulement de β mais aussi des angles ω et δ. Si Legendre avait poussé son analyse, il aurait peut-être trouvé d'autres figures que celle qui diffère peu d'un ellipsoïde.

- 2.7.5.3/ Planète solide recouverte d'une lame fluide

Dans l'hypothèse d'un tel modèle planétaire, Legendre pose le rayon z d'une couche quelconque de la planète égal à :

$$\beta\,(1 + \sum_{n=0}^{\infty} Z^{(n)})$$

et la surface de la planète égale à :

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} Z_1^{(n)}\,.$$

Legendre obtient les équations suivantes déduites de l'équilibre de la surface de la lame :

$$(12)\quad \begin{cases} 5\, Z_1^{(2)} \displaystyle\int_0^1 \Delta\beta^2 d\beta = \int_0^1 \Delta d(\beta^5 Z^{(2)}) - \frac{5g}{3} P_2(\cos\omega) \int_0^1 \Delta\beta^2 d\beta \\ n \neq 2 \quad (2n+1)\, Z_1^{(n)} \displaystyle\int_0^1 \Delta\beta^2 d\beta = \int_0^1 \Delta d(\beta^{n+3} Z^{(n)}) \end{cases}$$

où g désigne le rapport de la force centrifuge et de la pesanteur à l'équateur. Legendre observe que les équations (12) ne suffisent pas pour déterminer la surface d'équilibre. Dans le cas de couches semblables ($Z_1^{(n)} = Z^{(n)}$), Legendre montre que le problème est équivalent à celui d'une planète de révolution solide recouverte d'une lame fluide, dont les couches sont semblables.

Afin de résoudre les équations (12) dans un cas plus général, Legendre réclame que l'axe de rotation de la planète soit un axe principal. Pour analyser les conséquences de cette hypothèse sur la figure de la planète en équilibre, Legendre fait appel aux formules développées de $\Psi^{(n)}$ et de $\Psi_1^{(n)}$:

$$\begin{cases} \Psi^{(n)}(\omega,\delta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{d^k P_n(\mu)}{d\mu^k} \sin^k\omega\, (a_k^{(n)} \cos k\delta + b_k^{(n)} \sin k\delta) \\ \Psi_1^{(n)}(\omega,\delta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{d^k P_n(\mu)}{d\mu^k} \sin^k\omega\, (a_{1,k}^{(n)} \cos k\delta + b_{1,k}^{(n)} \sin k\delta) \end{cases}.$$

$a_k^{(n)}$ et $b_k^{(n)}$, $a_{1,k}^{(n)}$ et $b_{1,k}^{(n)}$ sont des coefficients dépendant respectivement de $\beta(P)$ et $\beta = 1$ et où $\mu = \cos\omega$. En utilisant le fait que l'axe de rotation $\omega = 0$ est principal, condition que Laplace envisageait parfois pour se sortir d'une analyse délicate, Legendre obtient la nullité de $Z_1^{(0)}$ et l'égalité suivante :

$$Z_1^{(2)} = a_{1,0}^{(2)} P_2(\cos\omega) + a_{1,2}^{(2)} \sin^2\omega \cos 2\delta$$

avec :

$$a_{1,0}^{(2)} = \frac{\int_0^1 \Delta d(\beta^3 a_0^{(2)})}{5\int_0^1 \Delta \beta^2 d\beta} - \frac{g}{3} \quad \text{et} \quad a_{1,2}^{(2)} = \frac{\int_0^1 \Delta d(\beta^5 a_2^{(2)})}{5\int_0^1 \Delta \beta^2 d\beta}.$$

Quant aux coefficients $a_k^{(n)}$ et $b_k^{(n)}$ pour $n > 2$, ils sont ou bien nuls ou bien tels que :

$$(13) \qquad (2n+1)\, a_{1,k}^{(n)} = \frac{\int_0^1 \Delta\, d(\beta^{n+3} a_k^{(n)})}{\int_0^1 \Delta\, \beta^2 d\beta} \quad \text{et} \quad (2n+1)\, b_{1,k}^{(n)} = \frac{\int_0^1 \Delta\, d(\beta^{n+3} b_k^{(n)})}{\int_0^1 \Delta\, \beta^2 d\beta}.$$

Pour $n > 2$, la valeur des coefficients $a_k^{(n)}$ et $b_k^{(n)}$ est donc indéterminée. Si l'on néglige le carré de la force centrifuge, le rayon z de la planète s'exprime comme suit :

$$(14) \qquad z = 1 + Z_1^{(2)} + \sum_{n\geq 2}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{1,k}^{(n)} \frac{d^k P_n(\mu)}{d\mu^k} \sin^k\delta \cos k\omega + b_{1,k}^{(n)} \frac{d^k P_n(\mu)}{d\mu^k} \sin^k\delta \sin k\omega .$$

Lorsque l'on néglige le carré de la force centrifuge, Legendre ne conclut pas à l'unicité de la figure d'équilibre : il observe qu'il y a cependant de fortes chances pour que les coefficients $a_k^{(n)}$ et $b_k^{(n)}$ soient nuls pour $n > 2$ puisqu'ils ne sont non nuls qu'à la faveur des égalités (13). S'ils sont effectivement nuls, Legendre obtient que le rayon de la planète se réduit à $1 + Z_1^{(2)}$ et décrit un "sphéroïde, dont les méridiens et l'équateur seroient elliptiques" [1790,p.451], et plus exactement un ellipsoïde à trois axes. Il poursuit :

"On voit qu'il s'en faut beaucoup que la figure de la planète ne soit déterminée a priori, comme elle l'est dans le cas d'une entière fluidité. Nous trouvons seulement des conditions pour que la figure des couches, prises à volonté, s'accorde avec l'équilibre de la surface ; mais ces conditions qui font disparaître quelques coefficients de l'équation d'une couche, lorsqu'elle devient l'équation de la surface, ne détermine d'ailleurs entièrement aucun des coefficients restants. Dans ce cas, par conséquent, il n'est pas question de pousser l'approximation au-delà du premier ordre, puisque rien n'est déterminé dans le premier." [1790,p.451].

Legendre a donc exhibé le phénomène d'indétermination : pour une vitesse de rotation donnée, il existe une infinité de figures d'équilibre possibles.

En ne négligeant plus le carré de la force centrifuge, Legendre a obtenu bien d'autres figures d'équilibre que l'ellipsoïde de révolution. Et quoique tout son mémoire démontre que l'ellipsoïde de révolution n'est pas la seule figure d'équilibre possible, Legendre s'empresse d'observer que :

"Tout concourt donc à nous assurer qu'en général la figure d'une planète doit être elliptique, et qu'avant d'abandonner cette hypothèse pour la terre en particulier, il faut avoir des raisons beaucoup plus fortes que celles qu'a fournies jusqu'à présent la mesure des degrés du méridien." [1790,p.375].

Legendre, qui a raffiné les résultats de Laplace, souhaiterait-il se mettre à l'abri des foudres du nouveau maître de l'Académie ? Avec Jean Dhombres, nous pouvons aussi penser qu'il soit mal à l'aise vis-à-vis des symétries que l'on observe dans la nature et qui feraient que l'ellipsoïde de révolution soit la seule figure d'équilibre possible.

La controverse entre Legendre et Laplace continue : quelques mois après la lecture du mémoire de Legendre [1790], Laplace présente à l'Académie un mémoire intitulé "Sur quelques points du système du monde" dans lequel il reprend les techniques de calcul mises en œuvre par Legendre. Or, le texte de Laplace sera publié en tête des "Mémoires de l'Académie des Sciences" pour l'année 1793 : dans une nouvelle note infrapaginale à son mémoire "Suite des recherches sur la figure des planètes", Legendre fait la mise au point suivante :

"On trouve dans un Mémoire de M. de la Place, imprimé à la tête de ce volume, des recherches analogues aux miennes. Sur quoi j'observe que mon Mémoire a été remis le 28 août 1790, et que la date de celui de M. de la Place est postérieure." [1790,p.372].

Afin de parer à d'éventuels débordements de pouvoir de Laplace, le 4 septembre 1790, Legendre lit à l'Académie un plan pour accélérer l'impression des mémoires. On imagine à quel point Laplace a dû essuyer comme un camouflet le projet de Legendre.

Finalement, Laplace a eu le dernier mot en publiant en 1799 les trois premiers tomes de son "Traité de Mécanique Céleste". Quant à la méthode des séries, Laplace n'apporte rien de nouveau par rapport à son mémoire de 1784 : mais, le "Traité de Mécanique Céleste" aura un impact considérable sur le monde savant, tandis que les mémoires de 1790 dans lesquels figurait celui de Legendre, seront interdits de publication car frappés des emblèmes royaux, pour ne paraître finalement qu'en 1796 et ce dans l'indifférence générale.

- 3/ Les successeurs de Legendre et de Laplace

- 3.1/ Liouville : l'ellipsoïde de base

Les successeurs de Legendre et de Laplace sont nombreux : Gauss, Ivory, Green et surtout Jacobi et Liouville. Dans les années 1830 et 1840, Joseph Liouville est le premier à faire progresser les recherches de manière appréciable. Jesper Lützen [1984,1990] commente en détail les contributions publiées et manuscrites de Liouville. Un défi lancé aux savants français par Jacobi éveille l'intérêt de Liouville pour les figures d'équilibre planétaire. En 1834, Jacobi envoie une Lettre à l'Académie des Sciences dans laquelle il annonce, sans le démontrer, qu'un ellipsoïde à trois axes peut être la surface d'équilibre d'une planète fluide en rotation uniforme autour d'un axe. Comme Laplace avait imposé à la communauté scientifique l'ellipsoïde de révolution comme seule figure d'équilibre possible pour une planète peu différente d'une sphère, comme Lagrange avait faussement démontré dans sa "Mécanique analytique" qu'un ellipsoïde en équilibre devait être de révolution, l'annonce de Jacobi jette le trouble dans la mécanique céleste. Legendre n'est plus présent pour rappeler qu'il avait prévu de nombreuses figures d'équilibre autres que l'ellipsoïde de révolution. Liouville [1834] démontre en utilisant la loi de Huygens et les intégrales de force données par Laplace [1784] qu'effectivement un ellipsoïde à trois axes peut satisfaire à l'équilibre.

Cet épisode sur l'ellipsoïde à trois axes ne constitue qu'un préliminaire aux travaux que Liouville [1842,1852] entreprend quelques années plus tard. La première nouveauté apportée par Liouville réside dans la condition d'équilibre d'une planète fluide. Il estime la loi de perpendicularité des forces aux surfaces de niveau fluides insuffisante pour rendre compte de l'équilibre d'une planète, et encore moins pour assurer la stabilité de son équilibre : il la remplace par une loi plus générale, le principe de maximisation de la "force vive" qui assure un équilibre stable. La "force vive" d'un système matériel désigne le double de l'énergie cinétique au sens moderne du terme, c'est-à-dire la somme des éléments de masse de ce système par le carré de leur vitesse. Bien qu'il ne cite pas l'origine de ce principe de maximisation, Liouville l'a peut-être emprunté à la "Mécanique Analytique" [1788,première partie,§5] de Lagrange. Contrairement à Legendre et Laplace, Liouville ne considère que des planètes de densité uniforme. Il envisage deux cas : celui d'une rotation uniforme et celui d'un moment angulaire nul dans le repère tournant. Le premier cas correspond à une fine couche de fluide sur un noyau solide, parce que le moment angulaire total provient presque entièrement du noyau alors que le deuxième cas correspond à l'absence de noyau solide, c'est-à-dire que la planète fluide garde son moment angulaire.

La deuxième nouveauté théorique de Liouville se situe dans le choix de la "figure géométrique de référence" sur laquelle on calcule les figures d'équilibre possibles. Legendre et Laplace prenaient la sphère pour figure de base, sphère (ou cercle méridien dans le cas d'une planète de révolution) sur laquelle (lequel) ils construisaient le relief de la planète par un développement en série de surfaces harmoniques sphériques ordinaires (ou de polynômes de Legendre). Or, en tant que figure d'équilibre d'une planète au repos, la sphère n'apparaît pas pour Liouville comme la figure de référence idéale : à la sphère, il préfère un ellipsoïde en équilibre à partir duquel on puisse déduire d'autres figures d'équilibre. Aux harmoniques sphériques, Liouville substitue des fonctions orthogonales sur l'ellipsoïde, que Gabriel Lamé

[1839] avait introduites*11 pour étudier la propagation de la chaleur à l'intérieur d'ellipsoïdes à trois axes. En développant une surface z prise sur l'ellipsoïde de base, en une somme de produits de fonctions de Lamé, Liouville obtient comme condition de stabilité de cette surface, la positivité d'une suite de coefficients que Poincaré appellera "coefficients de stabilité". Or, dans le cas de la rotation uniforme, ces coefficients sont indépendants de z si z ne s'écarte pas trop de l'ellipsoïde de base.

S'il a conçu le projet d'étudier les figures d'équilibre peu différentes d'un ellipsoïde, Liouville ne semble pas l'avoir réalisé entièrement dans les manuscrits que Lützen a mis au jour. La majorité de ses recherches est restée à l'état de brouillon : Lützen pense que Liouville n'a pas eu le temps d'écrire le livre qu'il projetait sur la figure des planètes. Impubliées, les notes de Liouville n'ont eu dans l'immédiat aucune influence sur le développement de la question des masses fluides en rotation.

- 3.2/ Thomson et Tait : la géométrie des harmoniques sphériques

En 1869, Thomson et Tait publient leur "Treatise on Natural Philosophy" qui fait le bilan des recherches contemporaines en physique mathématique. Thomson et Tait consacrent une section de leur livre [1869,vol.II,p.321 à 390] à l'équilibre d'une masse fluide en rotation. Les deux savants n'apportent rien de fondamentalement nouveau au traitement mathématique du problème. Mais, tout en retraçant l'histoire récente du problème de la figure des planètes, ils dressent de nombreux tableaux numériques sur les harmoniques sphériques et détaillent leurs propriétés géométriques. Ils définissent les trois types suivants de surfaces harmoniques sphériques ordinaires :

- "harmonique zonal" : surface harmonique sphérique qui coupe la sphère en cercles parallèles à l'équateur et symétriques par rapport à l'équateur. Par exemple, si l'on prend $Y^{(i)} = P_i^n(\mu)$ la fonction de Legendre associée de première espèce de degré $i \neq 0$ et d'ordre $n \neq i$, alors $Y^{(i)}$ est un harmonique zonal qui coupe la sphère en $i - n$ cercles parallèles et symétriques par rapport à l'équateur. Si n est non nul, la surface décrite par $Y^{(i)} = P_i^n(\mu)$ rencontre aussi la sphère aux pôles. La latitude de ces cercles dépend des zéros de la fonction de Legendre associée de première espèce : cette fonction n'a que des zéros symétriques par rapport à 0, d'où la symétrie des cercles par rapport à l'équateur.
- "harmonique sectoriel" : surface harmonique sphérique qui intersecte la sphère en méridiens équidistants. Par exemple, si l'on prend :

$Y^{(i)} = P_i^i(\mu) \cos i\omega = \sin^i\theta \cos i\omega$ ou $Y^{(i)} = P_i^i(\mu) \sin i\omega = \sin^i\theta \sin i\omega$ avec $i \neq 0$,

*11 William Hobson [1931,cha.XI] montre comment engendrer les fonctions de Lamé, assez délicates à manipuler.

alors $Y^{(i)}$ est un "harmonique sectoriel" qui coupe la sphère en i cercles qui passent par les pôles, dont les plans se croisent à angles constants : ces i cercles forment 2i fuseaux "équidistants". La disposition régulière de ces fuseaux est due aux zéros de $\cos i\omega$ et respectivement de $\sin i\omega$ qui forment un polygone régulier à 2i sommets inscrit dans le cercle.
- "harmonique tesseral" : surface harmonique sphérique qui intersecte la sphère en méridiens équidistants et en parallèles disposés symétriquement par rapport à l'équateur. Si l'on prend :

$$Y^{(i)} = P_i^n(\mu)\cos n\omega \qquad \text{ou} \qquad Y^{(i)} = P_i^n(\mu)\sin n\omega \qquad \text{avec } i \neq n,\ i \neq 0,\ n \neq 0\ ,$$

alors on obtient un harmonique tesseral qui intersecte la sphère en n - i parallèles et 2n méridiens.

Une surface harmonique sphérique ordinaire est donc une combinaison linéaire d'harmoniques zonaux, sectoriels et tesseraux.

Outre cet aspect géométrique, Thomson et Tait émettent sans les démontrer, plusieurs propositions quant aux figures d'équilibre planétaires [1869,p.332 à 335]. Ils énoncent notamment les faits suivants pour des masses fluides de densité uniforme en rotation uniforme autour d'un axe :
- un ellipsoïde de révolution est stable lorsqu'il diffère peu de la sphère et instable s'il est très aplati.
- pour un moment angulaire suffisamment grand, si la figure d'équilibre est de révolution, il existe un anneau stable et un ellipsoïde instable. Plusieurs anneaux concentriques et de même vitesse de rotation peuvent être stables.
- si l'on impose à la planète d'être ellipsoïdale mais pas nécessairement de révolution, quel que soit le moment angulaire, il n'existe qu'une seule figure de révolution en équilibre. Si le rapport entre l'excentricité de cet ellipsoïde de révolution et son demi-axe de rotation est strictement inférieur à 1,39457, l'ellipsoïde est stable : si ce rapport est strictement supérieur à 1,39457, il est instable.

Les allégations de Thomson et Tait ont motivé au plus haut point les mathématico-physiciens de la fin du XIX^e siècle vers de nouvelles voies de recherche sur la figure des planètes.

- 3.3/ Poincaré

Après quarante années de stagnation dans l'évolution de son traitement mathématique, le problème de la figure des planètes fluides est repris simultanément par deux mathématico-physiciens majeurs : Alexandre Liapounoff et Henri Poincaré. En 1884, Liapounoff soutient une thèse écrite en russe dans laquelle il étudie l'équilibre des ellipsoïdes fluides en rotation autour d'un axe. Nous ne ferons aucune allusion à ce texte remarquable. Sans qu'il ne connaisse le travail de Liapounoff, Henri Poincaré consacre l'année 1884-1885 à l'étude des masses fluides en rotation autour d'un axe. Les recherches de Poincaré aboutissent en septembre 1885 à la publication d'un mémoire monumental intitulé "Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation".

- 3.3.1/ Les séries linéaires

La stratégie de Poincaré consiste à vérifier par le calcul les propositions énoncées sans démonstration par Thomson et Tait. Pour y parvenir, il emprunte à Liouville le développement des surfaces d'équilibre en fonctions de Lamé. Poincaré envisage la condition d'équilibre d'une manière très générale, par la minimisation d'une fonction F de n variables $(x_1, \ldots, x_n)$ et d'un paramètre λ. Le paramètre λ représente la vitesse de rotation de la planète, F son énergie, $(x_1, \ldots, x_n)$ des paramètres qui déterminent sa surface et qu'il s'agit de calculer lorsque la planète est en équilibre. Si F est maximale, l'équilibre est stable, si F est minimale, il est instable. Pour une valeur de λ fixée, l'équilibre se traduit par les n équations suivantes :

$$\frac{dF}{dx_1} = \ldots = \frac{dF}{dx_n} = 0 .$$

Pour une valeur donnée du paramètre λ, ces n équations possèdent un certain nombre de n-uplets dont chacun en est une racine. En faisant varier λ, par le principe de continuité cher à Poincaré, on suppose que ces n-uplets varient d'une manière continue si bien que l'on obtient un certain nombre k de "séries linéaires" de racines :

$$\begin{array}{llll} x_1 = \varphi_{11}(y), & x_2 = \varphi_{12}(y), & \ldots, & x_n = \varphi_{1n}(y) \\ x_1 = \varphi_{21}(y), & x_2 = \varphi_{22}(y), & \ldots, & x_n = \varphi_{2n}(y) \\ & \ldots\ldots & & \\ x_1 = \varphi_{k1}(y), & x_2 = \varphi_{k2}(y), & \ldots, & x_n = \varphi_{kn}(y) \end{array}$$

Poincaré s'intéresse particulièrement au cas où une racine $(x_1, \ldots, x_n)$ appartient à deux ou plusieurs séries linéaires : cela a lieu lorsque s'annule le déterminant fonctionnel des n dérivées de F $\frac{dF}{dx_1}, \ldots, \frac{dF}{dx_n}$ par rapport aux n variables $x_1, \ldots, x_n$. La figure d'équilibre déterminée par $(x_1, \ldots, x_n)$ est alors dite "figure de bifurcation" : en faisant varier λ d'une petite quantité, la planète peut prendre la forme de deux ou plusieurs autres figures d'équilibre. Il arrive qu'en faisant varier λ, une série linéaire bifurque et disparaisse si le n-uplet racine prend une ou plusieurs composantes imaginaires : la série linéaire a alors atteint sa forme limite. Avec cette notion de série linéaire, Poincaré a en main le modèle mathématique qui lui permet d'analyser la manière dont une planète peut évoluer lorsque sa vitesse de rotation varie.

Poincaré propose une méthode très simple pour rechercher les maxima et minima relatifs de F. Il suffit de considérer la forme quadratique suivante des variables $(x_1, \ldots, x_n)$:

$$\Phi = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{d^2F}{dx_i\, dx_k} x_i x_k .$$

Pour que F soit maximale, il faut et il suffit que Φ soit définie négative. Pour cela, il faudrait appliquer à Φ le théorème des axes principaux, c'est-à-dire décomposer Φ en la somme de carrés suivante :

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} a_i Y_i^2 ,$$

où les Y_i sont des fonctions linéaires des variables $(x_1, \ldots , x_n)$. Les valeurs propres a_i de Φ sont les "coefficients de stabilité" : s'ils sont tous négatifs, la planète est en équilibre stable. Mais Poincaré suppose qu'en général on peut donner à F une forme telle que Φ soit directement exprimée en une somme de carrés, c'est-à-dire telle que pour $i \neq k$:

$$\frac{d^2F}{dx_i \, dx_k} = 0 .$$

Les coefficients de stabilité a_i sont alors tels que :

$$a_i = \frac{d^2F}{dx_i^2} .$$

Les coefficients de stabilité dépendent de la vitesse de rotation λ : pour qu'une figure d'équilibre bifurque lorsque λ varie, il suffit qu'un seul coefficient de stabilité s'annule. On assiste alors au phénomène remarquable suivant, que Poincaré appelle "échange de stabilité" : si une figure d'équilibre stable bifurque, elle devient instable et vice et versa. Poincaré suppose que ces préliminaires théoriques restent valables dans le cas d'une infinité de variables $(x_1, x_2, \ldots)$.

Il applique sa théorie à de nombreuses formes de planètes fluides possibles : petites déformations d'une nappe au contour presque circulaire, d'anneaux ou d'ellipsoïdes. La fonction F n'est plus comme chez Liouville la force vive de la planète mais l'énergie mécanique totale de celle-ci, c'est-à-dire la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique. Si dm et dm′ désignent l'élément de masse de la planète, si Δ désigne la distance entre dm et dm′, si r désigne la distance entre dm et l'axe de rotation (O,z) de la planète, alors :

$$2F = \iint \frac{dm\, dm'}{\Delta} + \int \omega^2 r^2 \, dm ,$$

où les intégrales sont à prendre deux fois sur le volume de la planète entière pour l'énergie potentielle et sur la planète entière pour l'énergie cinétique. ω désignant le carré de la vitesse de rotation, Poincaré présente ainsi les figures ellipsoïdales d'équilibre :

- a) $0 < \omega < 4\pi.0{,}093$: il existe deux séries linéaires ellipsoïdales de révolution et une série linéaire ellipsoïdale à trois axes.
- b) $\omega = 4\pi.\ 0{,}093$: la série linéaire ellipsoïdale se confond avec l'une des deux séries ellipsoïdales de révolution.
- c) $4\pi.0{,}093 < \omega < 4\pi.0{,}112$: il reste les deux séries ellipsoïdales de révolution.

- d) $\omega = 4\pi.0,112$: les deux ellipsoïdes se confondent en un seul et atteignent leur forme limite.
- e) $\omega > 4\pi.0,112$: il n'y a pas d'ellipsoïde en équilibre.

Quant à la stabilité, Poincaré confirme le fait que les ellipsoïdes peu aplatis sont stables et que les autres sont instables relativement à un critère précis qu'il détaille [1885,p.113].

Comme Liouville, Poincaré étudie les perturbations stables d'un ellipsoïde à trois axes en se servant des fonctions de Lamé. Il exhibe la bifurcation "piriforme" (c'est-à-dire en forme de poire) d'un ellipsoïde. Par la suite, la stabilité des figures piriformes sera l'un des sujets de recherche sur lequel Poincaré reviendra très souvent sans pouvoir conclure nettement : elles sont en fait toutes instables.

- 3.3.2/ Les hypothèses cosmogoniques

Pour vulgariser l'essence de sa théorie, Poincaré a rédigé un mémoire méconnu intitulé "Les formes d'équilibre d'une masse fluide en rotation" [1892] dans la "Revue générale des Sciences". Dans ce passionnant article, il utilise l'image des damiers pour faire comprendre la nature des figures d'équilibre d'une planète fluide en rotation uniforme autour d'un axe. Sur la figure d'équilibre la plus simple, l'ellipsoïde de révolution, Poincaré trace n parallèles disposés symétriquement par rapport à l'équateur, produisant n + 1 "zones", et p méridiens équidistants, obtenant de fait 2p fuseaux. Poincaré [1892,p.206] écrit :

"Ces parallèles et ces méridiens se coupant à angle droit, déterminent une sorte de damier ; imaginons maintenant que la surface de l'ellipsoïde se creuse ou se soulève, de telle façon que les cases noires de notre damier soient remplacées par des montagnes très peu élevées et les cases blanches par des vallées très peu profondes ; nous obtiendrons ainsi une figure d'équilibre très peu différente de l'ellipsoïde." .

Lorsque la vitesse de rotation de la planète croît, les montagnes s'élèvent et les vallées se creusent jusqu'à ce que la planète bifurque, c'est-à-dire qu'un autre damier aux cases plus nombreuses et plus petites se plaque sur le relief existant. Si la rotation de la planète s'accélère, le premier et le deuxième relief s'accentueront et un troisième damier se superposera aux deux autres etc. Par exemple, si l'on dessine deux méridiens équidistants sur un ellipsoïde de révolution et que l'on colorie les quatre fuseaux obtenus alternativement en noir et blanc, en rehaussant les cases noires et en déprimant les cases blanches, on obtient un ellipsoïde à trois axes. En traçant deux parallèles sur l'ellipsoïde à trois axes, on obtient une figure piriforme. Poincaré n'utilise aucun argument mathématique pour expliquer ses damiers. Toutefois, on peut en trouver l'origine dans le mémoire de Legendre de 1790. En effet, pour une planète solide recouverte d'une lame fluide, Legendre obtenait une figure d'équilibre par superposition d'harmoniques tesseraux, c'est-à-dire de damiers tels que Thomson et Tait les décrivaient dans leur "Treatise on Natural Philosophy". Même si Legendre n'avait pas jugé bon de dépasser la première approximation dans le cas d'une telle planète, on peut néanmoins présager de l'évolution de ces damiers lorsque la vitesse de rotation augmente. En effet, sur le cas d'une planète de révolution, en ne négligeant plus aucune puissance de la force centrifuge, Legendre obtenait le rayon v suivant dépendant de l'angle polaire ω :

$$v = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n+1} \sin^2\omega \cos^2\omega \left(\sum_{m=0}^{n-1} a_{n,m} \cos^{2m}\omega \right) ,$$

où ε est une quantité de l'ordre de la force centrifuge et $a_{n,m}$ certains coefficients. Lorsque la vitesse de rotation augmente, la force centrifuge s'accroît et ε avec : le relief de la planète va donc en s'accentuant, de nouvelles séries de parallèles s'implantent sur les précédentes. Un siècle avant Poincaré, Legendre avait exhibé la nature des figures d'équilibre possibles et compris leur évolution par accumulation de damiers aux "mailles" de plus en plus serrées.

De ce processus, Poincaré déduit une conséquence cosmogonique sur l'évolution d'une planète en refroidissement suffisamment lent, de moment de rotation constant et dont la vitesse de rotation augmente progressivement. Au début très proche de la sphère, la planète prendra la forme d'un ellipsoïde de révolution de plus en plus aplati avant de bifurquer en ellipsoïde à trois axes, d'abord assez proche d'un ellipsoïde de révolution, ensuite de plus en plus oblong et qui cessera d'être stable. La planète prendra alors la forme d'un œuf avec un gros et un petit bout. L'œuf se creusera entre les deux bouts et deviendra une poire. Á mesure que la vitesse de rotation augmente, la poire s'étranglera jusqu'à se scinder en deux masses qui prennent aussi une allure piriforme sous l'effet de leur gravité réciproque. Poincaré ajoute que le refroidissement continuant, les deux masses continuent à se condenser, à tourner de plus en plus rapidement autour d'elles-mêmes et que leur propre vitesse de rotation cesse d'être égale à la vitesse de rotation autour de leur centre de gravité commun. Elle reprennent alors la forme d'un ellipsoïde de révolution si bien qu'elles pourraient continuer à évoluer comme leur planète-mère. Poincaré signale que cette hypothèse cosmogonique expliquerait la formation des étoiles doubles. Mais les astrophysiciens modernes pensent qu'après leur séparation, les deux masses subiraient un effet de fronde sous l'influence de la force centrifuge et s'éloigneraient à grande vitesse l'une de l'autre selon une orbite hyperbolique.

Conclusion

Les recherches de Legendre, Laplace, Liouville et Poincaré sur la figure des planètes suivent le même fil : ces quatre savants se donnent une loi de comportement du fluide en équilibre, la loi de Huygens pour Legendre et Laplace, la maximisation de l'énergie cinétique chez Liouville et la maximisation de l'énergie mécanique totale chez Poincaré. Dans l'expression mathématique de cette loi de comportement du fluide, ils introduisent alors un développement de la surface de la planète fluide, en surfaces harmoniques sphériques ordinaires ou en fonctions de Lamé. Utilisant les relations d'orthogonalité qui caractérisent chacune de ces suites, Legendre et Laplace arrivent directement à l'expression des surfaces d'équilibre possibles tandis que Liouville et Poincaré obtiennent une suite de coefficients de stabilité.

Pour ce qui est de la controverse entre Legendre et Laplace, celui-ci a indiscutablement lésé son adversaire en retardant la publication de ses mémoires, mais plus grave, en ne mentionnant pas le fait qu'il s'était inspiré de ses travaux. En revanche, sur le plan des techniques de calcul, leurs contributions se valent : Legendre a le premier rénové la méthode des séries, développé le rayon planétaire en polynômes qui portent son nom, repris la notion de couche de niveau due à Clairaut. En revanche, Laplace a crée et formalisé l'appareil différentiel par la méthode des cascades, réintroduit la notion de potentiel et découvert les harmoniques sphériques. Sur le plan des résultats, Legendre a été beaucoup plus loin que Laplace en montrant que l'ellipsoïde de Newton n'était pas la seule figure d'équilibre possible des planètes peu différentes d'une sphère ; cinquante ans avant Liouville, Legendre a démontré l'existence d'une infinité de figures d'équilibre possibles et l'indétermination de celles-ci dans le cas d'une planète solide recouverte d'une lame fluide ; un siècle avant Poincaré, il a obtenu implicitement le processus de formation des figures d'équilibre par superposition de damiers dont le relief s'accentue à mesure que la rotation de la planète s'accélère.

Entre la controverse qui opposa Euler, Daniel Bernoulli et Lagrange sur les cordes vibrantes et les recherches de Fourier sur la propagation de la chaleur, la querelle entre Legendre et Laplace sur l'attraction des sphéroïdes et la figure des planètes a enrichi l'analyse harmonique de notions et techniques essentielles : le laplacien, la méthode des cascades, les séries de Fourier, les harmoniques sphériques et le développement d'une fonction sphérique quelconque en une série orthogonale de surfaces harmoniques sphériques ordinaires. Que le débat entre Legendre et Laplace n'ait pas touché aux notions de base de l'analyse, tient beaucoup au fait que les deux mathématiciens n'utilisent pas le principe de superposition de Daniel Bernoulli pour produire les séries orthogonales solutions de leurs équations, mais la série de Taylor : ils jouent sur des séries, qui sont à la fois entières si on les considère par rapport à certaine(s) variable(s) et orthogonales si on les considère vis-à-vis d'autres paramètres ou variables. Après l'impasse de la controverse des cordes vibrantes, les mémoires de Legendre et de Laplace ont inauguré une nouvelle analyse, celle des séries orthogonales. Le mérite revient à Fourier de mettre en place un algorithme de résolution des problèmes de propagation de la chaleur dans différents solides en faisant intervenir de manière systématique l'équation principale découlant du laplacien, les conditions aux limites d'espace et de temps pour la formation des séries de fonctions propres du laplacien, qui expriment la solution du problème. Le souci de précision de Fourier fait qu'il met en lumière certains paradoxes, notamment relativement à la périodicité des séries qui portent son nom. De son œuvre ressort une question : quelles fonctions est-il possible de développer en série de Fourier de fonctions propres d'un opérateur différentiel découlant du laplacien, et en quel sens est-il possible de le faire ? Sturm [1833,1836] met en place une théorie du comportement variationnel des fonctions propres et des valeurs propres d'un opérateur différentiel symétrique d'ordre deux : Liouville [1836] en déduira - de manière non encore rigoureuse - la possibilité de développer une fonction dont il ne précise pas la nature, en série de Fourier des fonctions propres de ces opérateurs. Vis-à-vis de Laplace, Legendre et Fourier, Sturm et Liouville se libèrent du carcan de la résolution au coup par coup de problèmes de sciences physiques pour renouer avec une vocation supérieure de l'analyse qui consiste à attribuer le maximum de généralité aux mathématiques. Legendre et Laplace ont ouvert la voie à la théorie spectrale.

Bibliographie

Anonyme

[Reg.] Registre des procès-verbaux de l'Académie des Sciences, consultable aux Archives de l'Académie des Sciences de Paris

d'Alembert J. le Rond

[1754] "Recherches sur différens points importans du systême du monde", seconde partie, David, Paris

[1756] "Recherches sur différens points importans du systême du monde", troisième partie, David, Paris

[1773] "Sur la figure de la Terre", Opuscules mathématiques, 6, pages 47 à 67

Cassini Jacques

[1720] "De la grandeur de la Terre et de sa figure", daté du 12 novembre 1718, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris 1718, (1720), pages 245 à 255

Clairaut A. C.

[1743] "La théorie de la figure de la terre, tirée des principes de l'hydrostatique", David, Paris, ou Ostwalds klassiker n° 189

Costabel P. & Lacombe H.

[1988] "La figure de la Terre du XVIIIème siècle à l'ère spatiale", Gauthier-Villars, Paris

Dhombres J & Dhombres N.

[1989] "Naissance d'un nouveau pouvoir : science et savants en France 1793-1824", Payot

Gillispie C. C.

[1978] "Laplace P. S.", supplément 1 du "Dictionary of Scientific Biography", 15, section 16, "Attraction of Spheroïds", pages 316 à 322

[1979] "Mémoires inédits ou anonymes de Laplace sur la théorie des erreurs, les polynômes de Legendre et la philosophie des probabilités", Revue d'Histoire des Sciences Appliquées, 32, 1979, n°3, pages 223 à 279

Green G.

[1828] "An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism", imprimé pour l'auteur par T. Wheelhouse, Nottingham

Huygens C.

[1690] "Discours sur la cause de la pesanteur", Œuvres, 21, édition de la Société Hollandaise des Sciences, La Haye, 22 volumes (1888-1950)

Kuhn T.

[1990] "La tension essentielle, tradition et changement dans les sciences", NRF, éditions Gallimard, traduction par Michel Biezunski, Pierre Jacob, Andrée Lyotard-May et Gilbert Voyat de "The essential tension, selected studies in scientific tradition and change", University of Chicago Press, Chicago and London, 1977

Lagrange J. L.

[1770-1773] "Mémoire sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations, dans lequel on examine les avantages de cette méthode pour le calcul des probabilités, et où l'on résoud différents problèmes relatifs à cette matière", Miscellanea, Philosophico-Mathematica Societatis Privatae Taurinensis (Mémoires de Turin) 5, 1770/1773, ou Œuvres, 2, pages 173 à 236

[1773] "Sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques", Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, 1773, ou Œuvres, 3, pages 619 à 658

[1777] "Remarques générales sur le mouvement de plusieurs corps qui s'attirent mutuellement en raison inverse des carrés des distances", Œuvres, 4, pages 401 à 420

[1782] Lettre à Laplace datée du 15 septembre 1782, Œuvres, 14, page 116

[1788] "Mécanique Analytique", 2 tomes, Paris, réédition Blanchard 1965

Lamé G.

[1839] "Mémoire sur l'équilibre des températures dans un ellipsoïde à trois axes inégaux", Journal de mathématiques pures et appliquées, 4, 1839, pages 126 à 163

Laplace P. S.

[1776] "Additions aux recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde", Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris 1772-2, (1776), deuxième partie, pages 533 à 554, ou Œuvres complètes, 8, pages 478 à 501

[1776a] "Mémoire sur l'inclinaison moyenne des orbites des comètes, sur la figure de la terre, et sur les fonctions", Mémoires de Mathématiques et de Physique présentés par divers Sçavans Étrangers à l'Académie royale des Sciences de Paris 1773-1776, pages 503 à 540, ou Œuvres complètes, 8, pages 279 à 321

[1783] Lettre à Lagrange datée du 10 février 1783, Œuvres de Lagrange, tome 14, page 121

[1784] "Théorie des attractions des sphéroïdes et de la figure des planètes", lu le 11 août 1784, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris, 1782, (1785), pages 113 à 196, ou Œuvres Complètes, 10, pages 341 à 419

[1784a] "Théorie du mouvement et de la figure elliptique des planètes", Paris

[1785] "Mémoire sur la figure de la terre", Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris, 1783, (1786), pages 17 à 47, ou Œuvres complètes, 11, pages 3 à 32

[1790] "Sur quelques points du système du monde", Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris, 1789, (1796), pages 1 à 87, ou Œuvres complètes, 11, pages 309 à 411

[1799] "Traité de Mécanique Céleste", 3 tomes, Duprat, Paris.

Legendre A. M.

[1783] "Recherches sur l'attraction des sphéroïdes homogènes", Mémoires de Mathématiques et de Physique présentés par divers Sçavans Étrangers à l'Académie Royale des Sciences de Paris, 10, 1785, pages 411 à 435

[1784] "Recherches sur la figure des planètes", Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris, 1784, (1787), pages 370 à 389

[1788] "Mémoire sur les intégrales doubles", Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris, 1788, pages 454 à 486

[1790] "Suite des recherches sur la figure des planètes", Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris, 1789, (1796), pages 372 à 454

Levallois J. J.

[1988] "Mesurer la Terre, 300 ans de géodésie française", Presses de l'école nationale des Ponts et Chaussées

Liapounoff A.

[1884] "Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation", Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, 6, volume 2, 1904, pages 5 à 116.

Liouville J.

[1834] "Sur la figure d'une masse fluide homogène, en équilibre, et douée d'un mouvement de rotation", Journal de l'École Polytechnique, 14, cahier 23, pages 289 à 296

[1836] "Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre contenant un paramètre variable", Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1, première série, pages 253 à 265

[1842] "Analyse d'un Mémoire sur la stabilité de l'équilibre des mers", manuscrit publié par J. Lützen [1984,appendix 1,p.151 à 158]

[1852] "Formules générales relatives à la question de la stabilité de l'équilibre d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation autour d'un axe", Connaissance des Temps pour 1855, pages 26 à 44 : les brouillons de ce texte datent de 1842.

Louville J. E. (d'Alonville chevalier de)

[1722] "Eclaircissement sur une difficulté de statique proposée à l'Académie", daté du 20 juin 1722, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris 1722, (1724), pages 128 à 142

Lützen J.

[1984] "Joseph Liouville's Work on the Figures of Equilibrium of a rotating Mass of Fluid", Archive for History of Exact Sciences, 30, 1984, pages 113 à 166

[1990] "Joseph Liouville 1809-1882, master of pure and applied mathematics", Springer

Mignard F.

[1988] "La Théorie des Figures", dans Costabel P. & Lacombe H. [1988,p.281 à 320]

Newton I.

[1687] "Philosophiae naturalis Principia Mathematica", jussu Societatis regiae, Londres ; réédition F. Cajori, 2 tomes, University of California Press, Berkeley, Los Angeles, London, 1962

Pécot J. B.

[1992] "Histoire des relations d'orthogonalité en analyse", thèse de doctorat, soutenue le 8 décembre 1992 sous la direction de J. Dhombres, Université de Nantes

Poincaré H.

[1885] "Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation", Acta Mathematica 7, 1885, pages 259 à 380, ou Œuvres, 7, pages 40 à 140

[1892] "Les formes d'équilibre d'une masse fluide en rotation", Revue Générale des Sciences, 3, 1892, pages 809 à 815, ou Œuvres, 7, pages 203 à 217

Rodrigues O.

[1815] "De l'attraction des sphéroïdes", thèse soutenue à Paris le 28 juin 1815, Correspondance sur l'École Polytechnique, 3, 1816, pages 361 à 385, ou triliber de "Divers Saint-Simoniens / 10 pièces diverses / volume de 595 pages / 1815 à 1817", Bibliothèque Nationale, cote 8° Z 8106(1)

Simpson T.

[1743] "A Mathematical Dissertation on the Figure of the Earth" lu à la Royal Society en mars ou avril 1743, dans "Mathematical dissertations on a variety of Physical and analytical Subjects", pages 1 à 30

Sturm C. F.

[1833] "Mémoires sur les équations différentielles linéaires du second ordre", Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1, première série, 1836, pages 106 à 186

[1836] "Mémoire sur une classe d'Équations à différences partielles", Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1, première série, pages 373 à 444

Thodhunter I.

[1873] "A history of the Mathematical Theories of Attraction and the Figure of the Earth from the time of Newton to that of Laplace", 2 tomes, MacMillan, Londres

Tait P. G. & Thomson W.

[1869] "Treatise on natural Philosophy", première édition Oxford 1867, réédition de 1912

Centre d'Histoire des Sciences et des Techniques
Université de Nantes