

HENRI LEBESGUE

Lettres d'Henri Lebesgue à Émile Borel

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1^{re} série, tome 12 (1991), p. 1-506

http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1991__12__1_0

© Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LETTRES D'HENRI LEBESGUE A EMILE BOREL

I

Cher Monsieur,¹

J'ai dit dans ma note qu'il existait des fonctions dérivées non intégrables au sens de Riemann². J'en étais certain, je le suis un peu moins maintenant. Je sais qu'il existe un article de Volterra, *Giornale di Matematiche*, tome 19, page 337, traitant du sujet. Mais je le sais par une citation et le mot allemand *Ableitung* est employé par Lüroth, tantôt dans le sens de dérivée, tantôt pour exprimer les dérivées à droite ou à gauche, tantôt même pour les nombres de Dini³. J'ai donc quelques doutes. Fort peu, il est vrai.

Je vous prie de vouloir bien regarder au tome indiqué s'il s'agit bien de la dérivée ordinaire. Je m'adresse à vous parce que ce livre n'est pas à l'Ecole Normale et que la Société Mathématique le possède évidemment. Mais je n'ai besoin de ce renseignement que pour la tranquillité de ma conscience, laquelle est peu troublée ; je vous prie de ne regarder l'article que lorsque vous aurez l'occasion d'aller à la Bibliothèque.

Vous dites que les définitions de la mesure de Jordan sont plus générales que les vôtres⁴. Oui, Jordan attache à tout ensemble deux nombres, mais ces deux nombres ne me paraissent avoir d'autre propriété que d'exister, que dans le seul cas où ils coïncident et alors ils coïncident avec les vôtres. Dites moi si je me trompe et si, à votre avis, les définitions de Jordan présentent quelque intérêt, autre que de donner une définition plus simple de la mesure, dans le cas d'un ensemble un peu bizarre.

Vous voudrez bien me dire aussi, pour l'époque où je rédigerai, vous voyez que j'y pense, si vous connaissez d'autres définitions de la mesure et si celle que vous adoptez a déjà été employée. Je crois bien évidemment que c'est celle-là la bonne, puisque j'en ai fait une application⁵ ; et il paraît impossible, comme vous le dites, de renoncer à pouvoir additionner les mesures comme les ensembles. Malheureusement, il paraît difficile de démontrer que ce sont les seuls que l'on puisse mesurer ou même que ces autres existent⁶.

Mr Lacour⁷, qui vient d'être nommé ce matin professeur, s'est

très aimablement intéressé à ce que je fais ; je le rase de temps en temps en essayant sur lui mes démonstrations. Je viens de lui soumettre une application des ensembles mesurables qui vous intéressera je pense. C'est une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit une fonction dérivée^{7,31} ; bien qu'elle ne remplisse pas toutes les conditions que l'on imposerait volontiers à une telle propriété, elle fournit immédiatement des conséquences. Par exemple les opérations $f\varphi$, $\frac{f}{\varphi}$, $m\sqrt{f}$, f^φ , $f(\varphi)$, ... appliquées à des fonctions dérivées donnent des fonctions dérivées. Mais voici cette propriété : Il faut que ϵ et A étant donnés on fasse correspondre à chaque valeur x_0 un nombre h_1 tel que si $h < h_1$ l'ensemble des valeurs de x , dans $x_0 - h$, $x_0 + h$, pour lesquelles on n'a pas $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, ait une mesure inférieure à $\frac{h^8}{A}$. Soit ℓ la mesure de cet ensemble, il me semble indiqué d'appeler densité de l'ensemble le nombre $\frac{\ell}{2h}$. Y a-t-il à cela un inconvénient ? Le mot a-t-il déjà été employé ?⁹

Voilà bien des questions. Excusez-moi, personne ici, sauf Mr Lacour par amabilité, ne s'intéresse à ces choses et puisqu'il faut ennuyer quelqu'un je suis obligé de le faire par correspondance.

Recevez tous mes remerciements.

H. Lebesgue

II

Cher Monsieur,

Moins ignorant que Perrin¹⁰, je savais que la poste existait en France, mais pour l'étranger !

J'ai fait la connaissance de Mr Volterra quand il est venu à Paris en 1898 ; je viens de lui écrire¹¹.

C'est à cause des inconvénients que vous dites que je crains d'employer le mot de densité - moyenne d'ailleurs évidemment - telle que je vous l'indiquai.

Pour ce qui est de l'extension au cas de plusieurs dimensions de la notion d'ensemble mesurable, je l'ai faite il y a déjà deux ans lorsque je m'occupais de l'aire dans le plan¹². Je viens d'y

revenir en étudiant les intégrales multiples (généralisées). Tout cela n'a pas d'intérêt, car il n'y a presque rien, sinon rien, de différent quand on passe d'une à plusieurs dimensions.

Il est évident que Jordan dit toujours quelque chose, il vous serait facile d'en faire autant et de parler de mesure extérieure et intérieure¹³. Ce seraient les limites inférieure et supérieure des ensembles comprenant l'ensemble donné ou compris dans cet ensemble. Ces deux nombres sont entre ceux de Jordan¹⁴. S'il est possible de mesurer un ensemble non mesurable de façon qu'on puisse ajouter les mesures, on attribuera à tout ensemble un nombre compris entre ces deux-là¹⁵. Mais tout cela n'a pas d'intérêt, de même que les applications à l'intégrale, car nous ne connaissons aucun exemple auquel s'appliquerait une telle théorie¹⁶.

Je crois avoir fini, pour l'instant, de vous ennuyer ; je vous remercie. Bien à vous.

H. Lebesgue

III

Cher Monsieur,

Nous sommes absolument d'accord, je crois. J'ai très légèrement modifié le langage, voilà tout. Si l'on considère un ensemble E mesurable (à mon sens)¹⁷ et qu'on lui ajoute un de ces ensembles (analogue à celui de la page 67¹⁸) non mesurables à votre sens, mesurables au mien (soit e_1), on a un ensemble $E+e_1$ mesurable à votre sens. e_1 est de mesure nulle (à mon sens). $E+e_1$ a même mesure (à mon sens) que E . De sorte que, avec les remarques des pages 48 et 49¹⁹, E a une mesure au plus égale à celle de $E+e_1$. D'ailleurs, e_1 fait partie d'un ensemble mesurable à votre sens et de mesure nulle, soit e_2 . De sorte qu'en enlevant de l'ensemble $E+e_2$ l'ensemble e_2 , on a un ensemble E' mesurable à votre sens contenu dans E et de même mesure que $E+e_1$, de sorte que E ayant une mesure au moins égale à celle de E' a exactement pour mesure celle de $E+e_1$.

Voilà bien n'est-ce pas ce que vous vouliez me dire. Je me suis peut-être très mal exprimé, mais c'est cette petite démonstration que je voulais indiquer en note. Je n'ai pas le texte de ma note, mais j'espérais avoir été plus clair que je ne l'ai été, je le

vois. Il m'avait semblé utile de bien préciser que les ensembles que je nommais mesurables n'étaient pas tout à fait ceux que vous appelez ainsi. Je crois d'ailleurs qu'il n'y a pas d'inconvénient à appeler mesurables (comme je le fais) même ceux que les remarques des pages 48 et 49 permettent de mesurer. Mais cela modifie quelques énoncés, par exemple celui de la page 110²⁰ : l'ensemble des ensembles mesurables a la puissance du continu²¹. Avec le sens étendu : l'ensemble des ensembles mesurables a même puissance que celui de tous les ensembles de points, puisqu'il existe des ensembles de mesure nulle qui ont la puissance du continu.

Peut-être pourrait-on, cela est même sûr, il me semble, se limiter aux ensembles que vous appelez mesurables, à condition de ne s'occuper que des fonctions de l'ensemble de Baire²² ; c'est une question que je ne m'étais pas posée : elle se résoud évidemment par l'affirmative. En somme, je n'en sais rien.²³

Je me déciderai je l'espère à écrire pendant les vacances. Mais ce doit être si ennuyeux ! Pour le moment, je fais des généralisations faciles relatives au cas où la fonction augmente indéfiniment ou dépend de plusieurs variables. Et puis aussi je fais de magnifiques promenades dans la forêt de Haye²⁴, ce qui vaut pas mal de théorèmes.

J'ai vu ces jours derniers Perrin qui passait tout guilleret pour aller enterrer un de ses oncles. Il devait s'arrêter ici un moment aujourd'hui avec moi. Il ne l'a pas fait, sans doute il est rentré à Paris. Accablez-le d'injures, je vous prie.

Vous êtes aimable de vous intéresser à mes petites affaires. Mille remerciements.

H. Lebesgue

IV

Nancy, 4 janvier 1902

Cher Monsieur,

Je n'ai pu rester qu'un jour à Paris, c'est pourquoi vous ne m'y avez pas vu. Dubesset²⁵ m'a répété ce que vous lui aviez dit, je vous remercie de ces renseignements.

J'ai vu Picard qui m'a semblé très bien disposé à mon égard. Il avait d'ailleurs assez peu regardé ma thèse. Il m'a donné quelques conseils sur la modification de certaines parties à l'usage de Darboux²⁶. Mr Picard m'a parlé aussi tout de suite de l'impression. Il m'a offert les *Annales de l'Ecole*²⁷, m'a dit qu'il ferait une démarche auprès de Gauthier-Villars²⁸ pour que je passe en supplément, ce qui avec la thèse de Clairin²⁹ ferait un supplément de plus de 160 pages. Tout cela s'est passé si vite que je n'ai pas eu le temps de refuser, d'ailleurs je ne l'aurais pas fait, car j'ignorais ce que coûtent les publications scientifiques. J'apprends que c'est horriblement cher, pour moi du moins.

Je viens d'écrire à Mr Picard une lettre³⁰ assez embarrassée pour me dégager³¹. Il faut d'ailleurs avouer que, puisque je suis loin d'être sûr de trouver ailleurs, il est assez hasardé de se dégager. Je ne pense pas que la combinaison Jordan³² puisse marcher, c'est un morceau trop gros à placer. J'avais pensé aux *Annali*, mais Baire avait fait la connaissance des Italiens³³. Je ne sais donc rien ; ce que je sais c'est qu'il m'est impossible de trouver dans ma poche 1200 F³⁴ à remettre à Mr Gauthier-Villars.

Il m'est venu tout à l'heure une idée bizarre. Ma thèse pourrait très bien se scinder en deux parties. L'une serait consacrée aux surfaces applicables sur le plan et aux surfaces minima. Elle ne serait certes pas sans points communs avec l'autre, mais enfin il serait peut-être possible d'en faire deux thèses et cela ne suffirait-il pas pour obtenir $48+48 = 96$ pages des *Annales de l'Ecole* ? Ce raisonnement a un petit air hypocrite qui est assez plaisant.

Je vous remercie de nouveau de ce que vous m'avez fait dire par Dubesset. Je sais que vous croyez ma présence à Paris utile pour les démarches ; j'espère que vous vous trompez, car Nancy est à 42 F de Paris (aller et retour)³⁵. Du moins, si j'y vais, j'aurais le plaisir de vous y rencontrer.

Bien à vous.

H. Lebesgue

J'oublie de vous faire tous les souhaits que j'avais réservé à votre usage. Mais je répare.

H. Lebesgue

V

Cher Monsieur³⁶,

Je ne suis pas candidat³⁷. Je me demande, à supposer que j'ai des auditeurs, ce que je leur dirais, mais je sais que cela est accessoire. La raison principale est que je n'ai pas le sou et que je dois toujours vivre avec moins, notablement, que mon traitement. Avoir autre chose à Paris est très improbable, donc je ne puis être candidat.

Et puis cette nomination à Paris pourrait peut-être m'empêcher d'être nommé ailleurs. Je croyais qu'il devait y avoir un mouvement Wolf-Appell-Painlevé ... ??³⁸ J'avais espéré être le dernier de ces ?. Avez-vous des renseignements sur ce mouvement ? Savez-vous qu'il ne doit pas se faire, ou ne pas aboutir à une nouvelle nomination, ou aboutir à un astronome, ou faire passer Clairin ?

Vous avez l'air, par votre lettre, d'être sûr de me voir encore ici l'an prochain³⁹. Cela me navre. Je ne puis comprendre autrement ce qui est relatif à la suppléance de Baire, si elle a lieu. Ce serait avec plaisir que je le supplérais, au cas où je serais encore ici⁴⁰. Mais il y a question gros sous, vous savez ce que coûte un déplacement de ce genre pour trois mois, pour aller peut-être gagner un peu moins à Montpellier qu'ici ; d'autant qu'il me tarirait les sources aux indemnités, je serais renvoyé de l'Enseignement secondaire au supérieur et vice versa. Je ne suppose d'ailleurs pas que cela puisse influencer sur la nomination de Baire, on s'arrange facilement dans une faculté pour suppléer pendant trois mois ou plus un collègue absent. (Bordeaux l'a surabondamment prouvé.)

Quant à la question du congé dans l'Enseignement secondaire, je ne sais si ça irait tout seul, et la seule solution pratique serait qu'on me nomme à Beauvais en Élémentaire, d'où j'irais à Paris. Je ne serais candidat que dans cette hypothèse, en tout cas pas contre Baire, et sans enthousiasme (quoi dire ?). J'aurais 27 ans le 28 juin prochain. Je serais plus tôt, si on peut prendre congé dans une faculté, candidat, sinon plus tard, au cas où j'aurais quelque chose à dire, ce qui est à voir. Baire est encore malade en ce moment.

Si vous n'avez pas de mathématicien, songez à Langevin qui au

fond l'est plus que physicien, mais je ne sais pas son âge, il ne doit pas avoir 30 ans⁴¹.

Je vous remercie de vos renseignements et d'avoir songé à moi. Bien à vous.

H. Lebesgue

VI

Mon cher Borel⁴²,

Vous ne m'avez pas convaincu, d'ailleurs cela est inutile, car Baire sera certainement candidat.

Je vous ai dit qu'il était malade, mais c'est toujours cette même maladie nerveuse bizarre qui apparaît et disparaît, aussi cela ne peut l'empêcher d'être candidat. Et, s'il était malade au point de demander un congé, ne serait-ce pas une excellente manière de pouvoir vivre pendant ce congé que de s'être assuré la subvention Peccot.

D'ailleurs il me semble bien que vos raisons prouvent ce que l'on veut. Si Darboux ne se désintéresse pas de la prochaine nomination et désire faire passer Clairin, ne serait-ce pas un excellent argument à faire valoir auprès de Liard⁴³ pour empêcher ma nomination que de me montrer déjà retenu à Paris.

Je suis tout à fait d'accord avec vous au sujet de Servant⁴⁴, mais serait-ce moi qui serait nommé ! C'est douteux, les succès, d'ordre scolaire, remportés par Servant auront une grande influence sur les âmes simples ; peut-être y en a-t-il au Collège de France.

Que vous êtes ignorant des choses de l'Enseignement secondaire ! Vous n'avez pas l'air de vous douter que j'ai une mission de confiance, placé au milieu de la Lorraine industrielle, je fais, moi seul contre eux tous, une redoutable concurrence à Duvigneau de La neu⁴⁵ ; et vous voulez que je ne me consacre pas tout entier à mon enseignement, que je fasse chaque semaine des voyages à Paris ! Et si je demandais un congé, on me le donnerait pour toute l'année.

Il me semble qu'il vaudrait mieux consolider mes titres à une nomination par des publications. J'ai à l'usage de Darboux envoyé au *Bulletin* une note stupide sur les surfaces minima⁴⁶. Je pourrais rédiger toute une série de remarques établissant des équivalences

entre problèmes, les ramenant les uns aux autres, sur les histoires de Baire et d'autres analogues. Il serait possible je pense de faire passer cela dans le *Bulletin de la Société mathématique* avant les nominations ; je me mettrais pour la circonstance de cette remarquable Société⁴⁷.

Il me semble aussi que, si j'avais le temps, j'aurais des propriétés concernant les séries trigonométriques, et je les aurai même immédiatement, si vous pouvez répondre à ces questions :

La partie réelle d'une série de Taylor est convergente sur le cercle de convergence et inférieure à M . Peut-on dire que la fonction partie réelle est bornée à l'intérieur (sur le cercle la fonction n'est pas continue) ?

Peut-on dire la même chose si l'on sait simplement que la partie réelle est convergente et inférieure à M pour les points d'un ensemble partout dense sur le cercle de convergence (on ne sait rien pour les autres points) ?

Si ces propriétés sont fausses, je crois pouvoir tout de même arriver à des résultats, mais ce serait peut-être long et difficile⁴⁸.

J'avoue d'ailleurs que tout cela n'est pas dans le goût de Darboux.

J'irai à Paris à Pâques, attendez jusqu'après les vacances pour que je vous donne une réponse définitive ; mais Baire sera candidat avant ce temps.

Bien à vous.

H. Lebesgue

VII

Cher Monsieur⁴⁹,

Je ne bouge pas pour Lille. Je n'ai pas de désir et ne sais où est mon avantage. Comme il semble que beaucoup de vacances soient prochaines, je n'attendrais pas longtemps sans doute pour être chargé de cours, un changement actuellement serait très provisoire. De plus Lacour m'a raconté des potins d'après lesquels j'étais demandé à Nancy. On supprimerait la chaire de Lacour et avec l'argent on paierait un maître de conférences et un chargé de conférences.

Hervieux⁵⁰ le professeur de spéciales de Nancy, en retraite. En présence de telles nouvelles contradictoires je fais le mort.

J'avais écrit à Gauthier-Villars que je lui donnerai le manuscrit fin juillet, ce ne sera pas vrai⁵¹.

Pour le théorème dont je vous ai parlé, je viens d'en recevoir une démonstration de Montel.¹⁰⁷⁵ J'avais dit à Montel la question de Lerch⁵² et je lui avais annoncé que j'étais ramené à ceci : démontrer que si les fonctions $f_n(z)$ bornées dans leur ensemble tendent vers f , les f_n étant analytiques (sur f on ne sait rien), la convergence ne peut qu'être uniforme. Montel, qui avait été conduit antérieurement à un théorème sur cette question, a pu me répondre immédiatement. Voici en effet le théorème de Montel (Arzela l'avait aussi obtenu) : si l'on a une suite de $f_n(z)$ bornées dans leur ensemble on peut en déduire une suite $f_{n'}(z)$ qui tend uniformément vers sa limite⁵³.

Pour l'application qui m'occupe, il suffit de supposer que les $f_n(z)$ ont une limite f . Dans tout domaine intérieur au domaine considéré, le théorème de Cauchy nous apprend que les $f'_n(z)$ sont bornées dans leur ensemble. Cela suffit pour que la convergence soit uniforme.

Vous voyez donc à quoi nous sommes ramenés. Le raisonnement nous donnera en même temps les conditions nécessaires de Baire ; cela n'est pas étonnant puisqu'il s'agit en somme de l'étude des fonctions de classe 1 ou 2.

Voici la propriété fondamentale : Si f_n tend vers f , appelons E_n l'ensemble des points pour lesquels

$$|f_{n+p} - f_n| \leq \varepsilon,$$

quel que soit p positif. L'un des E_n est de seconde catégorie.

Supposons que les f_n soient continues et soit E_n de seconde catégorie. E_n est dense dans un certain intervalle du domaine δ ; s'il ne contenait pas le point A de δ c'est qu'on aurait pour ce point, et un certain p ,

$$|f_{n+p} - f_n| > \varepsilon$$

et cela serait vrai dans tout un domaine δ_1 contenant A . E_n ne serait pas dense dans δ . E_n contient un domaine. Le théorème en question est démontré, puisque dans ce domaine les f_n

sont bornées.

Mais voici pour les histoires de Baire. Dans ce domaine

$$|\delta - \delta_n| \leq \varepsilon$$

et puisque δ_n est continue on peut trouver un domaine dans lequel l'oscillation de δ est aussi petite que l'on veut, cela suffit pour affirmer que δ est ponctuellement discontinue. Bien entendu la même chose se répéterait pour un ensemble parfait.

Ceci est pour les fonctions de classe 1. Pour les autres classes on peut raisonner ainsi : Supposons que les δ_n soient ponctuellement discontinues sur tout ensemble parfait, quand on néglige les ensembles de première catégorie. Alors notre théorème fondamental prouve qu'il en est de même pour δ . Donc toutes les fonctions de l'ensemble de Baire jouissent de la propriété indiquée.

Tout cela est indépendant du nombre des variables.

La démonstration de Montel⁵⁴ ne diffère de celle que je vous donne que par un détail insignifiant. Il me semble cependant que sous la forme qu'il lui a donnée elle ne donne pas les propriétés des fonctions de classe 2, mais il me dit que si⁵⁵.

Vous voyez que le théorème dit "il existe un domaine". Quant à sa détermination effective à l'aide d'un nombre fini d'opérations cela me paraît une question impossible à traiter dans toute sa généralité.

Je ne serai libre que le 30 juillet, vous ne serez sans doute plus à Paris.

Bien à vous.

H. Lebesgue

VIII

Cher Monsieur⁵⁶,

Je pars cette après midi pour Beauvais 14, Esplanade de l'Hôtel Dieu.

Je ne vois aucun inconvénient à ce que vous communiquiez ma note⁵⁷ à M. Lindelöf. Vous me donnerez les renseignements nécessaires pour indiquer en note le travail de Lindelöf. La méthode est, autant que je l'ai comprise, exactement celle que j'emploie. Je n'en

étais pas bien certain lorsque vous m'en avez parlé, car je ne savais pas au juste quelle démonstration j'avais exposée. Je suis heureux que ma note I, dont quelques passages ont besoin d'être modifiés dans la forme, vous satisfasse à peu près.

Si je vous ai bien compris, ce qui vous gêne dans les nombres transfinis c'est la prétention de Cantor de s'élever, par le procédé de construction de ces nombres, à une puissance supérieure au dénombrable. En fait, dans la théorie des dérivés⁵⁸, on n'a jamais besoin de supposer achevée la construction des nombres de la première classe de nombres transfinis, et si parfois dans le raisonnement on fait cette hypothèse c'est pour démontrer qu'elle conduit à une contradiction. Cela n'apparaît pas très nettement dans mon exposition, mais cela s'y trouve cependant si l'on y regarde de près.

Dans cette note il y a quelques longueurs relativement à la définition des dérivés et des nombres transfinis, je n'ai pas vu le moyen de les éviter et je pense que l'on a tort de ne pas montrer que ce sont bien les mêmes symboles qu'on peut employer pour noter les dérivés des différents ensembles. Cela demanderait à être simplifié, mais je ne sais pas comment. Cantor s'est rendu compte lui-même de la nécessité de cette explication, car dans les mémoires traduits par Marotte⁵⁹ il étudie de très près les ensembles bien ordonnés.

Maintenant que vous avez vu toutes les épreuves vous pourriez causer à M. Gauthier-Villars de la longueur du livre. Les suppressions que vous avez faites représentent à peu près deux placards et une page : soit 13 pages. Encore cela suppose-t-il qu'on puisse supprimer les parties laissées sans un mot d'explication et il n'en est presque jamais ainsi à cause de nombreux renvois d'un chapitre à l'autre que j'ai faits. Il est même une suppression sur laquelle je ne suis pas du tout d'accord avec vous, c'est celle concernant la définition du max et du min en négligeant certains ensembles⁶⁰.

Sans doute la définition est très simple et très intuitive, mais il faut cependant dire une fois de quoi il s'agit. Et puis la démonstration qui la suit ne peut, elle non plus, être entièrement supprimée. D'ailleurs, à vous dire vrai, cette notion introduite par Baire, me paraît, avec la définition des ensembles de seconde et de première catégorie, ce qu'il y a de plus important et de beaucoup dans sa thèse. Et en disant cela je ne veux pas diminuer le mérite de Baire ; je pense qu'il faut être plus original pour introduire¹⁰⁶³

une notion nouvelle féconde que pour arriver à des théorèmes précis dans des domaines où tous les principes ont acquis une forme claire⁶¹. Pour cette raison je regretterai trop de faire entièrement suppression que vous dites. Je simplifierai, mais ne gagnerai pas beaucoup de place ainsi. Je regrette d'ailleurs aussi l'autre suppression, relative à Baire, mais cette suppression fait gagner un demi placard, c'est un argument irrésistible.

Je ne sais pas encore au juste non plus ce que je gagnerai sur les fonctions à variation bornée, mais la proposition que vous me proposiez de supprimer est la plus importante de toutes au point de vue de la rectification des courbes.

Je ferai bien, moi aussi, quelques suppressions, mais il faut compter sur 4 pages pour la note 2 (peut-être moins, mais il ne faut pas l'espérer), de sorte que j'arriverai bien près de 140 pages.

Si vous voyiez Gauthier-Villars vous auriez son avis sur tout cela ; il importe de savoir dans quelle mesure il tiendra compte de la composition des pages supprimées pour faire le prix. Et comme il s'établira nécessairement entre le prix de mon livre et ceux des vôtres, il faut que, si Gauthier-Villars fixe le prix à plus de 3,50 F, j'ai nettement plus de pages que dans vos Séries entières⁶². Si Gauthier-Villars croyait ne pouvoir fixer le prix qu'à 4 F, il faudrait, à mon avis, ne faire que les suppressions indiquées nettement, comme celles du début sur les raisonnements classiques et celle sur la courbe d'Osgood⁶³ ; avec deux ou trois autres de détail.

Vous trouverez peut-être que je ne suis pas très accommodant pour les réductions. Ce n'est pas que je ne veuille pas en faire, je puis très facilement réduire à 120 pages, mais il faudrait pour cela pas mal de remaniements et surtout il faudrait que je supprime tout ce qu'il y a de nouveau dans mon bouquin, comme fond, je veux dire ce qui est relatif à la recherche d'une fonction connaissant les nombres dérivés, à l'existence des dérivées des fonctions croissantes, etc.⁶⁴, en somme ce qui se trouve dans les placards 23 et 24. Faisant cette suppression, je pourrais alléger certains chapitres de tout ce qui est préparation à ces résultats.

Je dirai un mot de mon mémoire et des résultats de Montel⁶⁵ qui sont relatifs à l'intégrale. Etant donnée la longueur du volume, on ne peut raisonnablement demander une note à Montel.

J'ai trouvé en marge deux ou trois de vos corrections barrées

en rouge ; je suppose, après les avoir lues, que les ayant crues nécessaires en les écrivant, vous avez changé d'avis dès qu'elles ont été écrites.

Croyez moi votre bien dévoué.

H. Lebesgue

IX

Beauvais⁶⁶, le 3 octobre 1903
14, Esplanade de l'Hôtel Dieu

Cher Monsieur,

Si vous avez vu Baire, ou s'il vous a écrit⁶⁷, vous êtes déjà au courant de ce que je veux vous annoncer. Je dois me marier en novembre prochain avec une Parisienne. Nos situations étant à tous deux plus que modestes et mes charges de famille très réelles, un supplément de traitement m'est fort utile. Je le trouve dans le Collège de France, j'y repose ma candidature⁶⁸. Baire ne m'a pas dit nettement quelles seront ses déterminations, je crois qu'il sera aussi candidat.

Je ne viens pas vous demander votre appui contre Baire, je veux seulement vous prévenir et vous donner quelques renseignements qui suffiront à légitimer mes actes.

Mon mariage n'a pas été bâclé en deux jours, je connais ma fiancée depuis plus de 7 ans et il y a 3 ans que nous sommes décidés à nous marier.

Diverses circonstances, et en particulier l'état de santé de ma fiancée, avaient retardé le mariage. Cet état de santé s'est fort heureusement modifié depuis quelques mois, d'où le dénouement. Il vous paraîtra sans doute que, dans ces circonstances, j'aurai dû faire prévoir à Baire ce qui arrive. Ce n'était pas chose facile.

Dans l'état de déséquilibre de Baire tout lui paraît un passe droit, il se croit volontiers persécuté et lorsqu'un nouvel incident arrive il y repense, le rumine pendant 6 mois. J'ai reculé de jour en jour toute explication jusqu'à ce qu'elle soit devenue indispensable.

Et puis Baire considère tellement cette place comme lui

revenant, elle lui a causé tant de désillusions que j'hésitais à en parler. Déjà il comptait être candidat en 1901-02, il croyait que vous ne feriez pas une troisième année⁶⁹. En janvier ou février 1902 vous avez écrit à Baire et à moi pour nous proposer d'être candidats⁷⁰. J'ai écrit à Baire que je me retirai devant lui, ma lettre s'est croisée avec une lettre qu'il m'écrivait : il me disait qu'il était candidat, il me parlait de ce qu'il ferait comme cours, il n'admettait pas que je puisse être candidat. Vous voyez comme il tenait à cette place. En avril ou mai, je ne sais au juste, il renonce à sa candidature pour cause de santé, mais ne m'en avertit nullement. C'est par votre intermédiaire et par celle de Perrin que je l'appris. A ce moment on m'offrait de prendre la place pour un an ; j'ai refusé ne sachant nullement ce qui arriverait et pendant cette année et après. Ma situation financière ne me permettait pas de supporter de tels aléas, même pour passer une année auprès de ma fiancée. Cela se passait du 1er au 15 juillet à peu près. Ensuite vint ma nomination à Rennes, j'acceptais d'être candidat au Collège de France sans conditions et j'écrivis à Baire que, s'il était mieux portant l'année d'après, je lui céderais la place. De plus, je ne savais pas quels changements se produiraient dans l'année, je ne savais pas un an à l'avance si je désirais encore rester à Paris. Enfin, je ne me savais pas si bavard que je désire parler deux ans de suite.

Lorsque vous avez été en vacances vers Pâques, Baire vous a fait part de son projet d'être candidat⁷¹, il a à ce moment écrit à diverses personnes puis il m'a prévenu qu'il était candidat sans même prendre la peine de me demander au préalable si j'étais toujours dans les mêmes sentiments, si je ne désirais plus moi-même être candidat. Il m'était difficile, alors qu'il prenait ainsi à l'avance possession de cette place, de lui dire ma situation, d'autant que je voulais lui éviter les contrariétés.

Depuis, quand je l'ai vu, et bien que je lui ai écrit : "Surtout, si tu ne te présentes pas, ne fais pas comme l'an dernier, préviens m'en pour que je puisse être candidat", il n'a jamais fait semblant de se douter que je pouvais désirer continuer et il m'a toujours parlé de ce qu'il ferait quand il aurait ce poste.

C'est pourquoi, quand mon mariage a été tout à fait décidé, j'ai dû aller à Paris exprès pour lui apprendre cette nouvelle qui l'a fort étonné.

Si vous faites attention à la conduite de Baire à mon égard

vous y verrez pas mal de sans gêne et un peu d'égoïsme ; comme je sais qu'il est malade⁷² je ne lui en ai pas voulu ; si peu même que j'étais décidé, au cas où je ne me serais pas marié, à lui abandonner sans récriminer et le supplément de traitement et l'agrément de venir à Paris où je suis si attiré. (Vous comprenez maintenant pourquoi j'ai espacé mes cours sur 6 mois.) Mais cet état d'esprit de Baire m'a conduit à prendre à son égard des précautions, peut-être mauvaises puisque je deviens son concurrent alors qu'il se croyait certain d'avoir la place. En désirant ne pas le froisser, je lui ai occasionné encore plus de contrariété.

Il y a cependant dans les conversations de Baire un fait qui m'a choqué et contre lequel j'ai eu bien souvent souvent envie de protester. Mon amour de la paix m'en a seul empêché. C'est que ses titres scientifiques sont tels que je dois nécessairement m'effacer devant lui. Il est toujours puéril de classer les gens linéairement ; pour nous classer, il compare sans doute ce qu'il a en tête avec ce que j'ai publié ; c'est une comparaison qu'il m'est impossible de faire, aussi je me garde bien de tout classement et ne ratifie pas le sien. Si je proteste sur ce point-là, c'est parce que Baire a dit nettement sa façon de penser à plusieurs personnes. C'est encore de la neurasthénie ; comme je ne puis pas admettre cependant qu'on m'impute, sur moi-même, tous les jugements capables de hanter les cerveaux malades, je proteste contre ce propos de Baire.

Je vais aller ces jours prochains à Paris, je dirai à Levasseur et à Jordan⁷⁴ que je suis candidat.

Croyez moi votre tout dévoué.

H. Lebesgue

X

Le 7 octobre 1903

Cher Monsieur,

Je suis pour quelques jours à Paris, je compte aller vous voir d'ici peu.

Je sais bien qu'il y a des choses délicates dans mon cas, mais il faut que je sois candidat. En se plaçant au point de vue financier, Baire se place au même point de vue que moi ; je crois que, dans

la société future où les salaires seront proportionnés aux besoins, à ce point de vue j'aurai gain de cause, mais dans cette vilaine et bourgeoise société actuelle ! Et puis Baire a peut-être des besoins que j'ignore.

Je n'ai pas reçu les épreuves dont vous me parlez. J'ai fait une réclamation au receveur de Beauvais hier matin, elle est restée jusqu'à présent sans effet.

Votre bien dévoué.

H. Lebesgue

XI

2 heures⁷⁵

Cher Monsieur,

Pour faire suite à notre conversation de ce matin voici quelques conclusions :

J'ai été très surpris de la tournure que prenaient les événements. J'avais cru que nous serions jugés sur nos titres scientifiques actuels ou encore sur ceux que nous avons en novembre 1902. Il me semble que ça ne va pas être cela du tout, c'est sur ma conduite que portera le débat. En somme si je n'avais jamais pensé qu'à moi, si je n'avais jamais fait à Baire une promesse qui ne me rapportait rien, mon cas serait bien meilleur. C'est parce que je suis obligé aujourd'hui de penser plus à moi qu'à Baire que ma conduite n'est pas "très loyale". C'est ce genre d'appréciations sur ma conduite que je craignais et qui m'est extrêmement désagréable ; au point qu'il m'est impossible de me défendre avec modération.

La promesse que j'ai faite à Baire, j'en ai certes parlé à d'autres personnes en juillet 1902, mais je prétends que ce n'est pas cette promesse qui m'a fait appuyer auprès des gens du Collège de France. Cette promesse ne m'a rien rapporté, pas même un moment d'hésitation de Baire à se présenter contre moi.

Je suis de l'avis de Painlevé : quand on fait une promesse il vaut mieux la tenir ; mais s'il ne m'est pas impossible de tenir ma promesse, il est un minimum de bien-être que je tiens à essayer de donner à ma femme quel que soit le jugement que l'on portera sur moi

à cette occasion.

Et ce n'est pas parce que je veux une vie luxueuse, parce que je ne puis vivre sans de grandes ressources que je suis candidat ; sans doute j'aurai longtemps encore besoin d'argent, mais c'est surtout en ce moment que j'en ai besoin ; c'est cette année que je suis candidat.

Maintenant puisque nous avons parlé de la dépendance entre mes travaux et ceux de Baire⁷⁶, j'insiste sur ce fait que cette dépendance est très faible et que si j'ai cité souvent Baire c'est plus par camaraderie que par nécessité. Il est vrai que je n'ai pas à me plaindre de la réciproque. Lorsque Baire a publié sa thèse, il connaissait ma note du *Bulletin* sur l'approximation des fonctions. J'y démontrerais d'une façon très simple qu'une fonction de n variables continue par rapport à chacune d'elles est de classe $n-1$ au plus⁷⁷. Baire démontre dans sa thèse la même chose (ou au moins une partie de cette chose) pour $n = 3$ par un procédé très compliqué⁷⁸ ; il ne me cite aucunement et cependant nous avons parlé ensemble de ma démonstration.

Je pourrais citer d'autres cas analogues ; sans doute tout cela n'a pas d'importance, c'est de la neurasthénie. Je *devais* n'y pas faire attention. Mais puisque je ne suis pas neurasthénique, dois-je être aux petits soins vis-à-vis de Baire jusqu'à m'oublier moi et ma famille ?

Autre chose. Il ne manque rien dans ma note I. Il n'y a qu'une erreur de numérotage et une de ces phrases bizarrement elliptiques dont j'ai le secret. Cela m'est très agréable, car dans l'état de nervosité où je suis il m'eût été très pénible qu'il y ait ce que vous avez appelé une "coïncidence bizarre"⁷⁹.

Votre bien dévoué.

H. Lebesgue

J'ai reçu toutes les épreuves.

XII

Cher Monsieur⁸⁰,

La phrase sur la "coïncidence bizarre" ne m'avait nullement choqué quand vous l'avez prononcée. Mais en déjeunant et repensant

à ce que nous avions dit elle m'a déplu, j'ai regretté que vous l'ayiez prononcée, que les événements vous aient conduit à la prononcer, bien que *j'étais tout à fait certain que vous l'aviez prononcée sans intentions*. Cela ne m'empêchait pas, vu ma nervosité, de regretter que les faits soient tels qu'elle ait pu être prononcée ; et alors j'ai été heureux de voir qu'elle aurait pu n'être pas prononcée. J'en ai été heureux, je vous l'ai dit et je vous ai dit, bien que je n'ai aucun reproche à vous faire, ce qui m'avait choqué. Ma franchise stupide m'empêchait de cacher le sentiment que j'avais éprouvé, c'est un peu par humilité que je vous l'ai dit.

Mes sentiments sont assez bizarres pour qu'on les comprenne difficilement, mais ce que je voudrais que vous sachiez bien c'est que je ne vous ai rendu à aucun moment responsable de la phrase que vous avez dite. D'ailleurs je ne l'aurais pas pu, car vous l'aviez très bien expliquée en me disant que vous aviez pensé que j'avais retiré de chez Gauthier-Villars une partie du manuscrit.

Pour ce qui est de ma maladresse à écrire des lettres, elle est connue de tous mes amis et elle m'a été mainte fois signalée ; mais je ne sais pas écrire autrement. Je ne puis commencer une phrase en sachant comment elle se finira ; je ne sais pas peser mes mots, je ne puis préciser ma pensée en l'exprimant sous une forme parfaite, mais seulement par des phrases successives qui expriment toutes, séparément, mal cette pensée. J'ai bien compris votre intention en me parlant de la conversation de Painlevé et je vous en remercie. Je sais qu'elle doit rester entre nous, mais vous ne pouvez empêcher qu'elle m'ait été désagréable, d'une part, et que, d'autre part, elle m'ait confirmé dans mon intention de ne pas faire de visite à Jordan et autres. Ma "franchise brutale" - et si je mets des guillemets ce n'est nullement parce que je vous reproche cette expression, mais seulement parce que je la trouve fort exacte - m'empêcherait, à la moindre phrase pouvant prêter aux sous-entendus, de parler avec la modération qu'on est convenu de trouver bonne.

Je me rends parfaitement compte que, sans cette modération, la vie est parfois difficile, mais je pense que sans une franchise exagérée on ne peut avoir de vrais amis. Pour cette raison, ou plutôt parce que cela m'est naturel, j'ai toujours dit à mes amis ce que je pensais d'eux. Aussi soyez sans crainte, votre opinion sur Baire et moi ne m'indispose en aucune manière contre vous. Vous me l'avez d'ailleurs dite très franchement depuis longtemps⁸¹. J'ai

une opinion différente de la vôtre, mais ce n'est pas une raison pour croire votre jugement sans fondements, pour le croire inspiré par la haine à mon égard. Je suis susceptible sur certaines choses, mais je ne crois avoir ni la folie des grandeurs ni celle de la persécution. Je trouve votre attitude très correcte et naturelle, je regrette seulement, et ce regret n'est pas récent, que vous nous jugiez comme vous le faites.

Je suis susceptible sur certaines choses, sur toutes celles qui concernent la question argent. J'ai toujours eu peu d'argent et je me suis contenté de ce peu. Cela n'empêche que, à plusieurs reprises, ma situation financière a influé sur ma manière d'agir. Chaque fois cela m'a été très pénible, car il est impossible de dire aux gens : c'est par besoin d'argent que je fais telle chose, sans qu'ils croient qu'on leur demande l'aumône. Je ne pouvais, cette fois encore, cacher que c'était le besoin d'argent que me faisait agir. Il m'a semblé, et il me semble encore, impossible de ne pas prévenir Appell, Picard, Painlevé, Tannery, qui s'étaient occupés de moi, que je me représentai. Pourrais-je le faire sans leur dire que c'était pour des raisons d'argent ? Je ne le crois pas. Il est vrai que je pouvais le faire plus habilement, mais c'est beaucoup demander. Et puis je ne voulais pas cacher que j'avais promis à Baire de me retirer ; le disant j'ai voulu dire aussi, en deux mots, que je méritais les circonstances atténuantes. Mais je n'ai voulu apitoyer personne. *Je ne veux pas* que mon besoin d'argent soit un argument en ma faveur et c'est pour cela que je n'ai donné de détails à personne et que j'ai parlé moins de ce besoin à Jordan et Levasseur qu'à tout autre. Je vous en ai parlé à vous plus qu'à personne, parce que c'est vous qui m'aviez proposé le Collège de France et qui l'aviez proposé à Baire. Je vous ai dit à vous certaines choses sur les besoins comparés de Baire et de moi que je n'aurais dites à personne d'autre. Car je vous l'ai dit, la question doit, à mon avis, être placée sur le terrain scientifique ; que l'on tienne compte de nos âges, du tort que j'ai fait à Baire avec Lille⁸², etc., rien de plus juste, mais mon besoin d'argent n'a rien à voir dans la nomination.

C'est seulement parce qu'il m'est pénible de me savoir jugé par certains que j'en ai dit le moindre mot ; et si j'ai poussé ma justification avec vous plus loin qu'avec tout autre, en vous parlant par exemple du bien-être que je désirais pour ma femme, c'est que

très franchement vous m'avez dit les paroles de Painlevé et que j'ai compris ce qu'on pouvait soupçonner.

Je sais d'ailleurs que les pontifes, surtout ceux qui n'ont jamais passé par ma situation, et tous ceux auxquels je fais allusion sont dans ce cas, ne peuvent comprendre mes besoins d'argent. Je ne m'en plains pas, s'il ne s'agit que des recommandations pour la nomination, mais je m'en plains s'il s'agit du jugement qu'ils porteront sur moi au point de vue moral.

Une anecdote qui vous prouvera que je connais les opinions à ce sujet :

A la fin de ma 2^{ème} année de bourse (1500 F), en juin, Tanné¹⁰⁷⁶ ry voulait m'envoyer faire une suppléance à Tours pour deux mois ; il ne l'a pas pu, ce qui a d'ailleurs bien fait mon affaire, parce que Berthelot⁸³ n'a pas voulu que je cumule.

Quant à l'attitude scientifique de Baire, je ne vous en ai parlé que parce qu'il faut peut-être y réfléchir quand on veut penser aux rapports entre les travaux de Baire et ceux des autres. Je ne m'en suis pas étonné et j'en ai seulement souri, d'autant que je n'étais pas particulièrement favorisé par son oubli. Je ne veux pas faire une nomenclature facile, je vous rappelle seulement ce que vous me disiez sur la *définition par un nombre fini de mots*.

Encore un mot, ce n'est pas, je ne le crois pas du moins, par gêne que je ne vous ai pas tout dit hier matin, c'est, d'une part, que j'ai été entraîné par la conversation, d'autre part, parce qu'il était midi et 1/4. Il n'y a que sur la "coïncidence bizarre" que vous puissiez avoir des doutes, j'espère les avoir dissipés. Soyez sans crainte, si j'avais cru à une allusion, à un sous-entendu, je me serai rebiffé.

Et voici encore une lettre non relue et écrite au courant de la plume, sans poids et balance. Je pense que vous ne la comprendrez pas moins pour cela et que vous serez persuadé que je vous suis cordialement dévoué.

H. Lebesgue

XIII

Beauvais, 14 Esplanade de l'Hôtel Dieu

Cher Monsieur⁸⁴,

Je viens de finir la correction des épreuves. J'ai supprimé au moins 11 pages, ce qui réduit l'étendue du livre à 137 pages. Je serai donc bien dans les limites assignées par Gauthier-Villars. Je vais revoir une fois encore les épreuves et je referai quelques réductions de détail. Je n'écrirai pas de note II ; j'expliquerai en 4 ou 5 lignes ce que j'y aurais dit et je renverrai à ma thèse. Quant à ce que j'y aurais mis de nouveau, je le publierai ailleurs.

J'ai supprimé le grand théorème de Baire, j'ai abrégé ce qui a rapport aux fonctions à variation bornée et ce qui est relatif aux limites à certains ensembles près.

Je ferai 1 page ou 1 1/2 de préface, je vous la communiquerai.

Si vous en avez l'occasion, envoyez moi les renseignements bibliographiques suivants :

A quel livre, je n'en ai aucun ici, peut-on renvoyer pour l'intégration géométrique des fonctions continues et l'intégration analytique ? A Picard⁸⁵, je crois ?

Année où la thèse de Drach est parue aux *Annales*. Année du mémoire de Hilbert sur les fondements de la géométrie dans les *Annales*⁸⁶.

Numéros des *Mathematische Annalen* où se trouvent la courbe de Peano et celle de Hilbert. La courbe de Hilbert dans Picard 2^e édition ?⁸⁷

Ce que vous m'avez dit du Collège de France ne me surprend nullement. J'ai toujours pensé que quelques précautions qu'ait prises Tannery, et je suis certain qu'il en a beaucoup pris, sa lettre⁸⁸ serait interprétée comme une intervention en faveur de Baire simplement parce que, pour mettre les choses au point, il était obligé de lutter contre ma situation acquise. Aussi j'ai toujours pensé que Levasseur ne me serait pas favorable. Que ce soit pour la raison que j'indique ou pour toute autre, il semble bien qu'il me soit, en fait, défavorable.

En somme, je doute fort que je sois nommé⁸⁹. Quoi que vous disiez, je ne pense pas que le fait de me tenir tapi dans mon trou fasse du bien à ma candidature ; mais je sais bien que si je faisais des démarches je me nuirais encore plus.

Merci de vos renseignements et bien cordialement à vous.

H. Lebesgue

La réunion du Collège de France aura lieu le 8 novembre m'annonce Abel Lefranc⁹⁰ qui me demande pour l'annuaire si je suis OI ou OA⁹¹. Comme je ne suis aucun de ces deux oies l'annuaire va être déshonoré.

XIV

Paris, jeudi soir⁹²

Cher Monsieur,

Je répons d'abord à la question sur les ensembles. La démonstration à laquelle vous faites allusion ne conduit à aucun procédé permettant d'atteindre effectivement b ⁹³. A ce sujet je ferai quelques remarques évidentes, qui sont assez rarement faites, mais que votre question soulève.

D'abord, si l'on veut qu'une construction soit possible, il faut qu'elle dépende non pas d'une infinité dénombrable d'opérations, mais d'un nombre fini. C'est grâce à une habitude plus ou moins légitime que l'on considère une construction comme possible lorsqu'elle ne dépend que d'une infinité dénombrable d'opérations dont la loi est donnée, mais je ne vois nullement en quoi il est plus légitime de concevoir effectuée la suite d'opérations $0_1, 0_2, \dots$ que de concevoir effectuée la suite des opérations 0_x , où x est un nombre rationnel ou irrationnel quelconque ; car il est tout aussi impossible de parcourir la suite $1, 2, \dots$ que l'ensemble des x . Sans doute, on pourra énoncer des différences notables entre les deux cas, mais cela ne me satisfait pas entièrement. Je considère qu'il est possible de parler de $0_1, 0_2, \dots, 0_n$, quelque grand que soit n , parce que j'espère vivre très vieux, mais quand je parle de $0_1, 0_2, \dots$ je suis moins difficile envers moi-même, je prononce peut-être quelque peu des mots qui n'ont plus de sens et alors j'aime autant parler de 0_x .

Dès lors, pour qu'une démonstration me satisfasse pleinement, il faut qu'elle n'entraîne qu'un nombre fini d'opérations. Je ne crois pas que vos deux démonstrations satisfassent à ce *desideratum*⁹⁴.

Si l'on est moins difficile, on peut préférer aux autres les démonstrations qui supposent effectuées une infinité dénombrable d'opérations. Votre démonstration de la note de votre thèse répond à cette demande, vous avez besoin d'un ensemble bien ordonné, dénombrable d'opérations.

Ma démonstration ne donne rien de semblable⁹⁵ et je ne crois pas qu'il soit possible de donner un procédé opératoire tout à fait général permettant de faire effectivement la réduction à un nombre fini d'opérations. Cela après tout n'a rien d'étonnant si l'on songe qu'il est en général impossible d'atteindre par une infinité d'opérations la limite supérieure d'une fonction ; cela n'est possible que si l'on sait reconnaître s'il existe ou non des valeurs de la fonction supérieures à un nombre donné. D'ailleurs, on peut dire qu'il est impossible de rien *faire* de général sur les fonctions. On ne peut pas reconnaître si un point est point de continuité ou de discontinuité, si une fonction est intégrable ou non, etc. Seulement ce qui est impossible pour le cas général l'est heureusement le plus souvent pour les cas que l'on rencontre et vous avez personnellement assez insisté sur cette différence entre le général et l'utile pour que je ne vous répète pas ce que vous avez dit⁹⁶.

Pour ma démonstration, on peut donner un procédé opératoire déterminé toutes les fois qu'on sait faire correspondre à x un des intervalles donnés contenant x . Au fond, ce n'est plus ma démonstration, mais plutôt la vôtre, de votre thèse. On part de a , avec l'intervalle h qui lui correspond. Soit x_1 son extrémité, δ_1 l'intervalle contenant x_1 , x_2 son extrémité et ainsi de suite. Si l'on n'arrive pas en b , on arrive à x_ω ⁹⁷. δ_ω contenant x_ω supprime certains des δ_n , ceux qui sont intérieurs à δ_ω . $x_{\omega+1}$ est l'extrémité de δ_ω , d'où $\delta_{\omega+1}$, etc. On arrivera en b après un ensemble bien ordonné d'opérations et on aura les intervalles en nombre fini indiqués dans l'énoncé.

Or, dans beaucoup de cas, les intervalles primitifs entre lesquels il faut choisir sont donnés comme correspondant à certains des

points qui leur sont intérieurs. Par exemple, dans la démonstration de la continuité uniforme dont j'ai parlé dans mon livre⁹⁸ : à chaque point x est associé le plus grand intervalle de milieu x et dans lequel l'oscillation ne dépasse pas ϵ , et c'est entre ces intervalles qu'il faut choisir. De même, dans les questions que j'ai traitées dans ma thèse, grâce à votre théorème⁹⁹, les intervalles étaient définis comme correspondant à certains de leurs points intérieurs.

C'est d'ailleurs pour éviter les difficultés dont vous parlez que j'ai modifié dans mon livre les démonstrations par lesquelles j'ai obtenu les résultats que j'énonce. C'est pour cela que j'ai introduit ce que j'ai appelé des chaînes d'intervalles¹⁰⁷⁷. Mais si la considération de ces chaînes est commode elle est artificielle, et votre théorème complété, que je n'ai jamais employé dans mon livre, donne à mon avis, bien mieux que ces chaînes d'intervalles, la raison profonde des faits que j'ai obtenus. Mais ce théorème ne donne pas le moyen de faire les constructions dont on parle et il y a là à coup sûr une difficulté philosophique sérieuse.

J'ai appris la nomination de Baire par Abel Lefranc auquel j'ai écrit, ne voyant venir aucune nouvelle. Lefranc m'a dit que la question d'âge avait été la raison déterminante. Je comprends cela d'autant plus qu'aucun des membres du jury n'ayant lu ni Baire, ni moi c'étaient sur des raisons de cet ordre qu'ils pouvaient se décider. Mais il paraît qu'une autre raison a été mise en avant ; c'est du moins ce qui ressortirait d'une lettre de Brillouin¹⁰⁰ à Lacour qui m'avait *recommandé* à Brillouin. La commission aurait trouvé que mes deux cours étaient trop identiques. Cela se serait compris si la commission n'avait eu d'autres renseignements que les titres, mais j'avais dit à Jordan et ce que j'avais fait et ce que je désirais faire. Cela est une raison pour que, après avoir publié mon cours, je publie celui que j'aurais fait si j'avais eu l'honneur etc. La commission s'est donc préoccupée de motifs d'ordre scientifique et si l'on songe que ni les membres de la commission ni la plupart de ceux qui sont intervenus ne connaissent que par ouï-dire nos histoires à Baire et à moi, on peut se demander d'où viennent les réputations.

Je pense que chacun peut aider beaucoup à la sienne et qu'il est imprudent de travailler à faire celle des autres. Dorénavant, je ne parlerai des travaux des autres que pour montrer combien les

miens sont importants, combien ils ont d'applications possibles, combien ils éclairent ce qui était resté obscur ; mais je ne m'aviserai plus de parler de la conception d'un autre uniquement parce que je la trouve belle et qu'à mon avis elle mérite d'être connue. Et puis je tâcherai d'être habile et d'attirer l'attention sur ce que j'ai trouvé. Vous m'avez dit jadis qu'avec trois certaines lignes d'une note des *Comptes Rendus*, que je n'ai jamais développées d'ailleurs, Mittag-Leffler¹⁰¹ aurait écrit dix pages, je tâcherai maintenant d'écrire 3 pages avec aussi peu de chose que ces 3 lignes. Vous m'avez dit aussi, bien avant que je passe ma thèse, que j'avais assez de choses. Là encore vous aviez raison et une thèse plus un mémoire c'eût été bien mieux qu'une thèse seule. Encore une autre faute : j'ai mis des choses nouvelles dans mon cours sans les publier ailleurs auparavant, de manière que personne ne les verra ou ne se doutera qu'elles sont nouvelles.

A l'occasion des citations et des publications, je vous dirai que j'ai trouvé peu nouvelle la note de M. Lindelöf¹⁰², j'en ai été d'autant plus surpris qu'il m'avait semblé ne publier jusqu'à présent que des choses un peu neuves et non pas des remarques assez immédiates. Et puis s'il a lu la note¹⁰³ que vous lui avez envoyée, il aurait pu la citer, car sa fameuse démonstration est *identique* à la mienne.

Je me suis occupé ces temps-ci de recherches de logements et non de mathématiques. Je vous enverrai prochainement une préface, mais cela m'ennuie de l'écrire, car je pense que les gens qui prétendent connaître et juger mes leçons auront lu tout au plus cette préface.

Votre bien dévoué.

H. Lebesgue

J'allais oublier de vous dire combien je trouve étrange la phrase de Jordan que vous me rapportez. Qu'il juge devoir nommer Baire c'est très bien, mais si son intention de me présenter l'an prochain a influé sur sa décision, je ne comprends pas qu'il ne m'ait pas consulté. Que cette invention de ma candidature l'an prochain vienne de Jordan ou d'un autre je la trouve bizarre¹⁰⁴. Je me présentais cette année, voilà le fait ; mais que Jordan ou un autre dispose de moi pour l'an prochain, je suis trop entêté pour l'admettre. Si Jordan m'avait parlé de sa solution j'aurais pu lui dire ma façon de penser, mais les choses ne se sont pas passées de cette

façon.

Vous trouverez peut-être que j'ai mauvais caractère ; je n'ai pas la prétention d'être accommodant.

Cordialement.

H. Lebesgue

XV

Cher Monsieur¹⁰⁵,

Je me suis marié jeudi ; j'ai été touché par vos deux lettres vendredi et samedi, ne vous étonnez pas de la concision de ma réponse.

1° Votre rectification est exacte. Je crois qu'il faut la faire ainsi :

Une fonction est continue à l'intérieur d'intervalles en nombre fini ou dénombrable. Numérotons ceux, $\delta_1, \delta_2, \dots$, relatifs à $f(x)$.

1° Supposons A_k et A_l à distance finie.

A. Entre x_k et x_l n'existe aucun intervalle où $f(x)$ reste continue ; traçons A_k, A_l .

B. Entre x_k et x_l il existe des intervalles où $f(x)$ est continue ; soit $x' x''$ celui des intervalles δ_i , d'indice le plus petit, contenu entre x_k et x_l ; etc.¹⁰⁶

Je n'attache aucune importance à cette démonstration, c'est pourquoi je ne me suis jamais étonné que Baire ne l'ai pas citée : ceci à cause de votre (avant la thèse de Baire). Un italien, Severini, l'a reprise¹⁰⁷, il m'avait même écrit pour me signaler une erreur, je n'ai pas compris ce qu'il voulait me dire, peut-être était-ce ce dont vous me parler.

En relisant ce que vous venez de m'écrire, je m'aperçois que votre rectification est plus simple que la mienne. Je ne vois d'ailleurs pas pourquoi vous dites que c'est moi qui ai rectifié, alors que c'est vous. Vous faites cela pour ménager ma susceptibilité, merci ; mais je désire seulement qu'on reconnaisse ce que je fais et non pas qu'on m'attribue ce que je n'ai pas fait. Je n'ai aucune disposition à être pape, je me trompe fort souvent et je le reconnais volontiers.

Voyez au sujet de ces histoires une note de Painlevé où il traite un cas particulier (lequel?) du problème¹⁰⁸.

Le théorème général de Baire peut être obtenu sans nombre transfini.¹⁰⁹

2° Je ne connais pas votre I, la démonstration m'en paraît immédiate. Quant au II, c'est une vieille connaissance, c'est ceci : toute fonction mesurable est continue en chacun de ses points, sauf pour un ensemble de points de mesure nulle, aux ensembles de mesure nulle près¹¹⁰. C'est l'une des formes de mon théorème sur l'existence de dérivées¹¹¹. Votre II s'applique donc à toutes les fonctions mesurables et par suite à toutes celles de Baire et à d'autres.¹¹²

3° Quant à l'introduction de la définition de la continuité à l'aide de $\frac{1}{f(x)}$, je l'ai rencontrée souvent, en particulier pour donner toute la généralité possible aux recherches de Baire. Vous savez en effet que Baire suppose implicitement les fonctions dont il s'occupe *finies* et *bornées*. Cela introduit des restrictions qui, toutes implicites qu'elles soient, n'en ont pas moins besoin d'être levées. Je l'ai rencontré aussi dans des histoires sur l'existence des dérivées pour une fonction continue *quelconque* que je n'ai pas publiés.

4° Ma démonstration du théorème : *Tout ensemble fermé est la somme d'un parfait et d'un dénombrable* ne suppose pas l'existence, ni le mot, nombre transfini, est identique à celle de Lindelöf. Mais je démontre à la fois ce théorème, que j'ai appelé VIII¹¹³ je crois, et cet autre : *Tout ensemble a l'un de ses dérivés parfait*, et celui-là suppose connus les nombres transfinis; il faut désenmêler les deux démonstrations par une lecture attentive.

Cordialement.

H. Lebesgue

Je n'ai pas encore écrit une ligne de préface.

XVI

Cher Monsieur¹¹⁴,

J'estime, en effet, assez le public mathématique pour croire qu'il juge seulement après avoir lu, mais s'il faut que je le

méprise, j'accepte, d'une part, que vous mettiez à mon compte votre rectification très simple et, d'autre part, je modifierai ainsi, à peu près, la note terminale de mon bouquin¹¹⁵ :

On pourra remarquer que la démonstration du théorème VIII ne suppose connus ni la notion, ni même le mot de nombre transfini. Cette démonstration a été obtenue indépendamment par M. Ernst Lindelöf, voir *Comptes Rendus*, etc.¹¹⁶

Quant à l'énoncé que je vous ai donné, je ne l'ai publié nulle part ; ce que vous trouverez dans mes leçons c'est ceci : toute fonction mesurable bornée est la dérivée de son intégrale indéfinie, sauf en un ensemble de mesure nulle de valeurs de x ¹¹⁷.

Cet énoncé n'est nullement équivalent à celui que je vous ai donné, mais la démonstration s'appuie sur cette propriété que je démontre incidemment¹¹⁸.

Pendant les vacances j'avais eu l'intention de la mettre en évidence en publiant quelques remarques à ce sujet, mais j'y ai renoncé, car je serai devenu plus que jamais un élève de Baire¹¹⁹. Pour la même raison, je n'ai nullement l'intention de publier ce que j'ai relativement aux recherches de Baire. J'ai même publié autrefois des énoncés dans les *Comptes Rendus* (c'est ma première note¹²⁰) relativement aux travaux de Baire, mais je n'ai pas cru encore utile d'en donner la démonstration.

Votre bien dévoué.

H. Lebesgue

XVII

Cher Monsieur¹²¹,

C'est Gauthier-Villars qui a pris l'initiative de l'envoi dont vous me parlez. Comme j'ai déjà donné le bon à tirer pour ces pages, si vous voyez quelques rectifications à faire, et je vous donne toute latitude pour les faire, prévenez-en vite Gauthier-Villars. J'ai écrit la préface, vous l'aurez sans doute sous peu.

Vous m'avez mal lu ou mal compris. Il n'y a qu'une chose que j'ai trouvée naturelle, c'est qu'on ait tenu compte de l'âge, de l'argent, etc. Ce que je n'ai pas compris, c'est qu'on ait osé parler de raisons scientifiques. D'abord, je ne reprends pas l'histoire

fondée ou non des deux cours successifs et trop identiques. Mais la commission s'est basée sur notre *équivalence*. Malheureusement ce n'est pas elle qui nous a jugé équivalents on lui a dit que nous l'étions. Qui on ?

Ce n'est pas l'un des membres de la commission : Jordan seul aurait pu intervenir, or Jordan m'a dit en décembre 1902 qu'il ne connaissait pas la thèse de Baire et qu'il n'avait regardé dans ma thèse que la définition de l'aire qui seule l'intéressait.

C'est donc quelqu'un d'extérieur à la commission. Je sais qui est cet on ; ce sont tous les gens qui sont intervenus pour moi l'année d'avant, ce sont tous ceux qui croient devoir juger alors qu'ils ne connaissent pas la cause. Combien de gens la connaissent la cause. J'admets que vous, Picard, Hadamard, Montel nous aient lu Baire et moi. Croyez-vous qu'il y en ait d'autres ? Croyez-vous que ceux-là seuls aient exprimé une opinion et que ce ne soit que le reflet exact de leur opinion qu'ait connu la commission. Ne croyez-vous pas que la lettre de Tannery a eu une influence décisive (et j'en dirai autant de celle d'Appell, si Appell a écrit¹²²) ?

Croyez-vous Tannery compétent ? Que Tannery ait écrit que c'était des raisons de santé qui avaient empêché Baire de se présenter l'année d'avant, bien. Mais qu'il préjuge de ce qui se serait passé si, cette année-là, Baire et moi avions été candidats, qu'il nous déclare équivalents¹²³, je ne l'admets pas. Or c'est cependant ce qu'il fait et cela me paraît piquant venant après ces deux incidents :

1° Analysant le livre de la Vallée Poussin¹²⁴, Tannery m'écrit pour me dire qu'à son avis ma définition de la mesure est identique à celle de Jordan, alors que je m'étends longuement sur la différence, alors que je démontre que, avec la mesure de Jordan je n'intégrerais que les fonctions intégrables d'après Riemann. Je ne cite qu'une des hérésies de Tannery ; leur ensemble fini mais fort grand prouvait qu'il ne connaissait pas ma thèse.

2° Ayant à analyser la thèse de Baire, c'est à moi que Tannery demande de le faire, ce qui prouve qu'il ne connaît pas personnellement cette thèse. (Et à cette occasion j'espère que vous me rendrez cette justice que j'ai bien mis en lumière, dans cette analyse, toutes les choses importantes et belles dans la thèse de Baire.)¹²⁵

Si la sortie de Painlevé m'a mis en colère¹²⁶, l'affaire Tannery m'a profondément peiné. J'avais toute confiance en Tannery, je ne le croyais capable que de jugements personnels et raisonnés, cela n'est pas. Et puis Tannery m'avait écrit qu'il n'interviendrait pas, il intervient, très légitimement en un certain sens, et il ne croit pas utile de m'en prévenir. J'en conclus que le désir qu'on lui fiche la paix fait agir Tannery comme n'importe qui et qu'il faut le pousser avant de s'en servir. J'avais jugé que ses actes avaient des motifs plus élevés.

Ce que vous avez vu dans mes lettres c'est mon dégoût de tout ce public mathématique qui juge en regardant l'effet que vont produire les paroles qu'il prononce et non parce qu'il exprime ce qu'il pense. La mode, le snobisme peuvent être mathématiques.

Sans doute il y a de ma faute dans le jugement que l'on a porté sur moi et ce jugement aurait pu être autre, si j'avais consacré trois fois plus de place aux matières de ma thèse, en gardant 1/3 seulement comme thèse. Mais je n'avais jamais cru que la concision claire puisse être un défaut, je ne pensais pas qu'on ait la prétention de lire des mathématiques comme un roman, qu'on se contente de la compréhension vague que donne une lecture hâtive et qu'on juge d'un mémoire sans l'étudier.

C'est pourquoi je m'étonne que chacun dans ma thèse ne voit que la partie qui l'intéresse. Pour Jordan j'ai défini l'aire d'une surface. Pour Picard j'ai fait des surfaces applicables et des surfaces de Plateau. Pour vous j'ai appliqué intelligemment la notion de mesure¹²⁷. Je serais heureux qu'il existe quelqu'un pour qui j'ai fait à la fois ces 3 choses. Je voudrais ne pas avoir besoin de dire que ma thèse a 6 chapitres et que chacun d'eux contient pas mal de choses nouvelles. Qui s'est aperçu que dans le chapitre sur la longueur des courbes se trouvait pour la première fois complètement résolu le problème : x', y', z' existant, quelle est la longueur de la courbe x, y, z ?¹²⁸ Sans doute mes énoncés n'ont rien de révolutionnaire ; j'ai si bêtement généralisé la notion d'intégrale que tous les anciens théorèmes restent vrais avec seulement une compréhension plus grande, mais j'avais cru que cela n'était pas une bêtise.

C'est sans doute pour la même raison que personne ne s'est aperçu que, avant ma thèse, j'ai donné aux *Comptes Rendus* un théorème

sur les séries trigonométriques qui, j'ai le droit de le dire, transforme complètement la théorie de ces séries¹²⁹. Et le mémoire correspondant paraîtra sans que personne ne s'en aperçoive, sans que l'opinion de personne en soit modifiée¹³⁰. Et quand, vous-même, vous me parlez des fluctuations de l'opinion, vous ne prévoyez pas que ce mémoire puisse influencer, je suis de votre avis.

Quant à mes recherches relatives à Baire, elles sont toutes très simples, mais elles s'enchaînent et je ne sais pas actuellement s'il est possible de séparer le théorème dont vous me parlez du reste. D'ailleurs je ne suis pas en veine de publications de cet ordre. Cela demande un travail de rédaction qui m'assomme et n'amène aucun résultat pratique ni scientifique, personne ne lisant. Je fais des mathématiques parce que ça me plaît, quant à publier ce ne pourrait être que dans un but d'avancement et puisque l'on m'a confiné à Rennes j'y reste, j'y suis bien. J'ai le bonheur d'avoir en Lacour un titulaire qui était d'avis à Nancy qu'on ne doit pas s'occuper du cours des autres et qui à Rennes me dit conférence par conférence ce que je dois faire. C'est très agréable, cela supprime toute initiative fatigante et je fais par ordre des choses stupides avec une grande sérénité d'âme, ce qui est un élément de bonheur.

Ce que vous me dites sur Weierstrass ne m'étonne pas. La démonstration de Weierstrass est la plus facile à exposer, celle de Volterra est la plus jolie, la mienne est la plus élémentaire, celle de Mittag-Leffler est fautive (je n'ose dire la plus)¹³¹. Quand je l'ai faite, j'ai cherché à démontrer ce théorème en ne me servant que de ce qui est connu dès qu'on parle de fonctions continues. Cela a un avantage comme je le fais voir dans une note que j'envoie au *Bulletin des Sciences Mathématiques*¹³², cela permet de suivre dans les cours d'analyse de licence, où l'on ne définit l'intégrale que pour les fonctions continues, un ordre inverse, en un certain sens, de l'ordre habituel, et l'on gagne ainsi en simplicité.

Il y a une question d'apparence élémentaire qui n'a jamais été résolue, et relative au théorème de Weierstrass. Les polynômes d'approximation peuvent-ils être obtenus à l'aide de la formule d'interpolation?¹³³

Croyez-moi votre bien dévoué.

H. Lebesgue

XVIII

Rennes, le 20 décembre 1903

Cher Monsieur,

Je n'ai pas reçu votre "long topo", je l'aurai demain matin probablement. Je n'ai pas dit qu'il y avait une définition nouvelle, parce que, d'accord avec vous, je pense qu'on a peur des nouveautés et que cela me paraissait un mauvais moyen de me faire lire.

Je tiens à *identique*, parce qu'à mon avis c'est en effet identique¹³⁴. Si Lindelöf faisait la publication que vous dites, il me suffirait de dire : je démontre à la fois 2 propriétés que j'énonce à la fois, cela ne veut pas dire que tout ce qui précède les deux énoncés soit indispensable aux deux. Je barrerais ce qui n'est pas utile pour le théorème en question et il resterait juste 8 lignes. On douterait peut-être après cela que ma démonstration soit identique à celle de Lindelöf, mais parce qu'on trouverait je pense mon exposition plus simple que celle de Lindelöf. Il y a en effet une différence entre Lindelöf et moi, c'est pour le cas de plusieurs variables, il me suffit de faire appel à l'emploi de la courbe de Peano (1^{ère} note de ma note) pour tout ramener au cas d'une variable.

Et puis je trouve Lindelöf incorrect. Lorsque vous m'avez parlé de la démonstration de Lindelöf je la connaissais, mais, si vous vous le rappelez, ne me souvenant pas de l'exposition que j'avais adopté, je n'ai eu aucune idée de partage de priorité. Une telle réclamation aurait très bien pu ne pas être fondée apparemment, car j'ai adopté successivement plusieurs ordres différents pour ma note. C'est même pour cela qu'il y avait, comme vous le savez, une erreur de numérotage pour les théorèmes de ma note. Lorsque, tout de suite, en lisant ma note, dont vous aviez les épreuves sans que j'ai encore reçu celles qui m'étaient adressées, je me suis aperçu de l'identité de la méthode de Lindelöf avec celle que j'avais fait imprimer, je n'ai pas eu idée de soulever de question de priorité. J'attachais même si peu d'importance à cette note que je vous ai proposé de la supprimer.

Mais où je trouve Lindelöf incorrect c'est quand il publie, après ce que vous lui avez envoyé, sa démonstration sans parler de

la mienne. Même alors je n'ai pas eu idée de parler de priorité, j'ai simplement modifié la note de ma note, comme vous l'avez vu sur les épreuves. Maintenant la question n'est plus la même, vous avez indiqué dans une de vos notes l'existence de ma démonstration et ce qui est, à vos yeux, une différence entre celle de Lindelöf et la mienne¹³⁵. Je n'avais pas vu votre note à cause de mon mariage, j'en connaissais cependant l'existence depuis quelques temps, je ne sais plus par quelle voie. Je l'ai lue et je juge utile de rectifier ce qu'elle contient à mon sens d'inexact. C'est la véritable raison de la note que je vous envoie ci-joint et que j'adresse en même temps à M. Picard¹³⁶. Je pense que vous trouverez ma rectification de forme acceptable. Si vous avez quelque chose à me dire au sujet de ma note écrivez moi vite pour que j'ai le temps de vous répondre avant mercredi, si toutefois M. Picard la présente lundi.

Vous verrez que je profite de l'occasion pour énoncer quelques propriétés dont je me suis déjà servi sans les énoncer explicitement et qu'il est peut-être intéressant de mettre en lumière¹³⁷. Ce sera sans doute votre avis, si j'ai bien compris ce que vous m'avez écrit, il y a quelques lettres, sur l'inconvénient de supposer que tout le monde considère comme évident ce que soi-même on trouve immédiat.

Je ne veux pas continuer la polémique relative aux jugements des mathématiciens. Je n'ai jamais dit que quelqu'un soit malhonnête, j'ai trouvé des gens un peu moins difficiles envers eux-mêmes, pour les jugements qu'ils portent, que je ne l'avais pensé.

Nul de nous ne peut dire ce qu'il ferait en d'autres circonstances, il me semble cependant que si j'avais à juger entre deux candidats ayant publié chacun un mémoire, je lirai "tous les mémoires" et que, du moins si je n'étais pas obligé de juger, je m'abstiendrais de le faire sans lire. Il est évidemment possible de se documenter par des conversations, encore faut-il que l'un des deux interlocuteurs ait lu, et j'ai énuméré dernièrement les gens qui nous ont lu Baire et moi.

Je ne veux pas discuter, surtout avec vous¹³⁸, la compétence de M. Appell ; mais si je me rappelle la conversation à laquelle j'ai assisté entre Appell et Baire la veille de la thèse de Baire et ce que Baire m'a dit à cette occasion de l'intérêt qu'Appell avait

porté à ses travaux, je ne puis m'empêcher de penser qu'il n'avait pas *alors* la compétence que vous lui prêtez aujourd'hui et que vous semblez faire remonter antérieurement à la thèse de Baire.

Un mot encore ; vous n'avez jamais dit que j'avais appliqué intelligemment la notion de mesure ; je crois qu'il n'y avait dans ma phrase¹³⁹ qu'intelligemment, que vous soulignez, de trop. Ce n'est pas votre pensée je le sais, mais pour ceux qui lisent comme vous me dites que lisent les mathématiciens, dire comme vous le faites que j'ai fait des *applications* de la mesure à l'intégration c'est dire que mon intégrale se déduit immédiatement de votre mesure et cela sans effort. Ce que vous voulez dire est exact, mais le mot application a reçu en mathématiques un sens que vous connaissez mieux que moi. Au reste, voici quelles sont mes prétentions : Je me reconnaissais une certaine part dans la mesure des ensembles, tout dans l'intégration des fonctions ψ ¹⁴⁰ et des fonctions quelconques. Je ne trouve pas que la recherche d'une fonction primitive d'une dérivée non bornée, la recherche de \int connaissant Λ_{\int} ¹⁴¹, la démonstration de l'existence des dérivées soient des applications faciles ; je ne les ai pas trouvées facilement du moins. La difficulté à mon avis, comme au vôtre, est plutôt un reproche qu'un mérite.

Maintenant, si Baire est plus lu, c'est qu'à mon avis il est paru 2 ans 1/2 plus tôt. Assez tôt pour que Schoenflies en parle¹⁴². Et puis si vous comparez la place qu'il réserve à son grand théorème vous comprendrez qu'on l'ait lu plus facilement que moi ; mais je ne crois pas que ce soit cela. Baire arrive à un énoncé, moi je n'ai que de vieux énoncés usés. J'en avais un, celui sur l'intégration, je n'en ai pas usé.¹⁰⁷⁸ Croyez-moi que si je l'avais publié seul, dans une note des *Comptes Rendus*, je ne serais pas plus souvent cité ?

Je n'ai pas de résultat sur l'interpolation, celui que vous dites me paraît très intéressant.¹⁰⁷⁹

Cordialement.

H. Lebesgue

XIX

Rennes, dimanche¹⁴³

11 boulevard de la Liberté

Cher Monsieur,

Je vous envoie une épreuve corrigée avec le bon à tirer signé, je pense que vous pourriez faire sur la même épreuve les corrections que vous désirez et signer le bon à tirer sur la même feuille. De cette façon les typographes n'auront qu'à s'occuper d'une feuille et les chances d'erreur en seront diminuées.

Au bas de la page VI, j'ai supprimé "fait mon cours et" que j'avais mis sur votre conseil, à cause du mot "lecteur" qui suit et qu'il faudrait remplacer par "auditeur et lecteur", ce qui serait un peu bizarre¹⁴⁴.

Pour le titre il y a bien des corrections à faire. J'avais demandé, d'une façon aussi peu claire que possible, il est vrai, de petites modifications dont voici la raison. Le titre, sur l'épreuve qui m'a été envoyée le 16 décembre et que je vous fait parvenir, comportait déjà 4 lignes; comme je voulais faire ajouter : professeurs au Collège de France, j'ai indiqué vaguement, trop vaguement, une disposition permettant de supprimer 1 ligne. Ce que je voulais n'a pas été compris du tout. La disposition qui résultait de l'addition pure et simple de : professeurs au Collège de France, au titre de l'épreuve du 16, vaudrait beaucoup mieux que la disposition adoptée. Dans tous les cas le mot important est Intégration, c'est lui qui doit être en gros caractères.

Quant à

maître de conférences à la Faculté des Sciences de Rennes
ou de l'Université de Rennes,
ça m'est à peu près indifférent, je préfère cependant le premier n'étant pas admirateur de la fondation des universités depuis que j'en vois une fonctionner.

Je n'ai pas fait sur l'épreuve les corrections que j'indique parce que, d'une part, elles m'ont paru difficiles à indiquer clairement et que, d'autre part, j'ai pensé que, s'il vous était possible de passer à l'imprimerie, vous éviteriez en quelques minutes tout malentendu.

En même temps vous pourriez vous occuper de l'Index et de la Table des matières, je n'ai rien envoyé à Gauthier-Villars à ce sujet ; il vous serait possible de faire tout cela à l'imprimerie en 1/4 d'heure. Je ne tiens d'ailleurs pas du tout à l'Index plus la Table, mais ils sont prévus par Gauthier-Villars et ce sera ainsi plus conforme à vos livres¹⁴⁵.

Si vous ne pouvez passer chez Gauthier-Villars, voulez vous marquer sur l'épreuve ce qui est nécessaire avant de la retourner à l'imprimerie.

Pour ce qui est d'un livre de moi sur les séries trigonométriques, il sera toujours temps de l'annoncer plus tard, je suis en ce moment en humeur de flemmard.

J'ai oublié de répondre à quelques questions que vous m'aviez posées.

Nous n'avons pas ici les *Rendiconti* de Palerme, je n'ai pu me reporter à la démonstration de Mittag-Leffler¹⁴⁶. Autant que je me rappelle, l'un des développements qui lui servent est non uniformément convergent et il le suppose uniformément convergent.

Je n'ai pas vu d'inexactitudes dans Tannery sur Baire¹⁴⁷, s'il y en a c'est que je devrais être responsable, mais l'un des mérites de la documentation par conversation est de faire passer cette responsabilité sur le dos de Tannery. Cependant, si Tannery m'avait envoyé, comme il me l'avait dit, les épreuves de cette analyse, j'aurais modifié certains points. Mettant Tannery au courant de l'état actuel de la question, je lui ai dit tout ce que je savais, en lui *faisant bien remarquer* que mon but était de l'empêcher de paraître ignorer les développements ultérieurs au mémoire qu'il étudiait, mais j'aurais élevé quelques objections à l'utilisation de ce que je savais par des conversations avec Baire sans qu'il en soit référé à Baire lui-même. D'ailleurs, je suis certain que Baire n'aurait été satisfait par aucun compte rendu¹⁴⁸.

Quant à ce qui est de l'opinion de Baire sur la priorité de Schoenflies sur Lindelöf¹⁴⁹, opinion que je considère très volontiers comme fondée, elle prouve combien j'avais raison d'attacher peu d'importance à la démonstration de ma note qui me paraît seulement une exposition meilleure que celle de Cantor et Bendixson de leurs travaux¹⁵⁰. C'est seulement à cause du sans gêne exagéré de Lindelöf que j'ai réclamé. Je n'ai pas pris la peine de modifier ma note, le bon à tirer était parti et du reste elle ne peut intéresser que vous et Lindelöf.

Autre chose. Je ne voudrais pas que ce que je vous ai dit de Lacour puisse faire croire à Paris que nous ne nous entendons pas. Lacour n'est pas toujours très content de moi, mais moi je suis très content de lui. Si je vous ai parlé du fait en question, c'est

parce que je le trouvais singulier, mais non pas parce que je le trouvais mauvais, ayant, en dépit des apparences, le caractère le plus accommodant qui soit.

A propos de Lacour. Il se montrait fort étonné de la nomination de Wirouboff¹⁵¹ ; j'ai essayé, mais en vain, de lui faire comprendre que la documentation par conversation étant admise, sans qu'il soit absolument nécessaire de s'assurer de la compétence des interlocuteurs, la documentation politique s'en suivait naturellement.

Des deux résultats que vous m'énoncez, le premier sur les fonctions dont on n'approche pas par interpolation¹⁵² me paraît très intéressant. Pour le deuxième, il ne me paraît pas très intéressant en tant qu'il ne donne qu'une forme normale très artificielle du développement, cependant il est assez intéressant si sa démonstration ne repose pas sur le théorème de Weierstrass ou quelque chose d'approchant et si elle permet d'arriver à ce théorème. Autrement ce n'est qu'un énoncé fort joli, mais immédiat du théorème de Weierstrass. Pour m'expliquer je vous envoie une démonstration, peut-être peu différente de la vôtre, de votre théorème, et avec laquelle il me paraît peu intéressant.

Dans la formule¹⁵³

$$\Pi_q(x) = \sum_0^q \binom{p}{q} f\left(\frac{p}{q}\right) P_{p,q}(x),$$

je remplace $P_{p,q}$ par une fonction nulle pour $|x - \frac{p}{q}| > \frac{1}{q}$, égale à 1 pour $x = \frac{p}{q}$ et linéaire dans $(\frac{p-1}{q}, \frac{p}{q})$, $(\frac{p}{q}, \frac{p+1}{q})$;

à la place de $\Pi_q(x)$ j'ai $B_q(x)$ égale à la fonction $\varphi(x)$ de ma note du *Bulletin des Sciences mathématiques* sur Weierstrass¹⁵⁴ représentée par un polygone inscrit dans $y = f(x)$ et de sommets d'affixes entiers. Il suffit de faire voir que $A_{p,q}$ peut être remplacé à moins de $\frac{\epsilon}{q}$ près par un polynôme. Or cela résulte soit du théorème de Weierstrass soit de ce que

$$A_{p,q} = \frac{1}{2} [|px - q + 1| + |px - q - 1| - 2|px - q|]$$

et d'artifices analogues à ceux de ma note citée. La décomposition de $\varphi(x)$ que j'ai adoptée dans cette note conduit bien entendu aussi, mais moins facilement, à votre forme de Π_q .

Avec toute démonstration de ce genre ce n'est que le théorème

de Weierstrass élégamment énoncé. En avez vous une démonstration algébrique, simple ou non, c'est là pour moi l'intéressant.

Croyez moi votre bien dévoué.

H. Lebesgue

XX

Rennes, le 15 janvier 1904

Cher Monsieur,

Je croyais que les indications que vous donneriez à l'imprimerie suffiraient. Pour ce qui est de la phrase de la préface, je croyais que votre interversion ne pouvait aller en même temps que mes corrections, je verrai sur l'épreuve. Il m'avait semblé d'ailleurs que votre interversion ne suffisait pas pour alléger quelque peu cette phrase mauvaise.

Je me doutais, mais sans être certain parce que vous me parliez auparavant d'interpolation, que votre démonstration différerait peu de celle que je vous ai envoyée. Je n'ai pas été surpris d'apprendre qu'elles étaient identiques. Le mal que je vous ai dit de ce théorème peut être dit de n'importe quoi : je lui ai reproché de ne pas être autre que ce qu'il est. Tel qu'il est, il a cependant un certain intérêt, peut-être même pourrait-on s'en servir pratiquement (?) si l'on avait des $P_{p,q}$ assez simples. Avez-vous remarqué que la série des Π_q représente la fonction si elle n'a pas de points de discontinuités irrationnels. Et cela donne la démonstration la plus simple souhaitable de la possibilité du développement des fonctions qui n'ont qu'une infinité dénombrable de singularités. A la vérité, cette démonstration diffère peu de celle que j'ai donnée, telle que vous l'avez corrigée ; mais cela fait voir que l'exposition que j'ai adoptée est inutilement compliquée. L'exposition qui en résulte est d'ailleurs celle qui résulte de l'application, à ce cas particulier, d'une des méthodes de démonstration que je possède pour le théorème de Baire. Ce n'est pas, cependant, de celle-là que je veux vous parler.

Je vous avais bien dit que je ne voulais pas m'en occuper ; mais, en écrivant ma dernière lettre, j'ai relu, pour voir ce à quoi je n'avais répondu, quelques-unes de vos lettres précédentes. Et

vous êtes si ennuyeux que vous m'avez obligé de réfléchir de nouveau à ces questions ; je n'ai pas pu m'empêcher d'y penser ces jours-ci et voici à peu près ce à quoi j'arrive en me débarrassant des choses accessoires. Je ne m'occupe que de la réciproque et je ne cherche pas à montrer ce que les raisonnements ont de général¹⁵⁵.

J'admets que I : si une fonction est de première classe dans $(a, a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_{n-1}, a_n)$ elle est de première classe dans (a, a_n) , quelle qu'elle soit en a, a_1, \dots, a_n .

II : si f est de première classe sur E fermé, c'est-à-dire égale sur E à φ de première classe partout, et est de première classe sur chaque intervalle contigu à E , elle est de première classe.

Cela est dans Baire, se démontre facilement ; I est cas particulier de II. Les démonstrations de Baire sont trop compliquées.¹⁵⁶

III Une série uniformément convergente de fonctions de classe 1 est une fonction de classe 1. Je démontre à l'aide d'un artifice :

α . Si $f(x, y)$ est continue en x et en y , $f(x, x)$ est de première classe. (Voir Bulletin des Sciences mathématiques.)¹⁵⁷

β . Si $f(x)$ est une fonction de première classe, on peut l'obtenir comme $\varphi(x, x)$, où $\varphi(x, y)$ est continue en x et en y .

En effet, soit dans $(0, a)$ $f = \lim s_n$, s_n continue, soit h_n tel que

$$|s_n(x+h_n) - s_n(x)| < \epsilon_n,$$

quel que soit x . Je suppose ϵ_n et h_n tendant vers zéro.

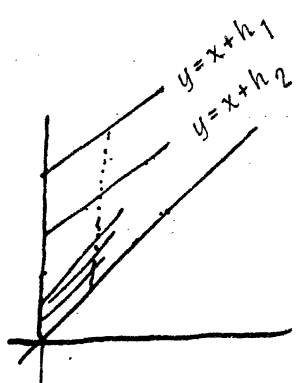
$\varphi(x, y)$ est définie par $\varphi(x, x) = f$,

$\varphi(x, x+h_n) = s_n(x)$, pour $x+h_n < y < x+h_{n-1}$.

$\varphi(x, y)$ est linéaire en y . Enfin $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.

Remarque : si on a toujours $\ell \leq f \leq L$, on peut aussi supposer $\ell \leq s_n \leq L$, d'où

$$\ell \leq \varphi(x, y) \leq L.$$



γ . Soit $f = \lim s_n$, s_n de première classe et la convergence étant uniforme. On peut choisir les n_i croissants tels que le

maximum de $|\delta_{n_i} - \delta_{n_{i-1}}|$ soit le terme général d'une série convergente. Soit $u_i(x, y)$ la fonction de deux variables attachée à $\delta_{n_i} - \delta_{n_{i-1}}$, en tenant compte de la remarque précédente.

La série des u_i est uniformément convergente, donc définit $\varphi(x, y)$ continue en x et en y et telle que $\varphi(x, x) = f$.

Ces préliminaires posés, je dis qu'une fonction est de classe 1 en x_0 s'il est possible, quel que soit ϵ , de trouver $(x_0 - h, x_0 + h)$ dans lequel la fonction ne diffère que de ϵ d'une fonction de première classe. Si cela n'est possible que pour une certaine valeur de ϵ , je dis qu'elle est de classe 1 à ϵ près en x_0 . Vous voyez aussi ce que c'est qu'une fonction de première classe à ϵ près dans un intervalle. En somme, je donne des définitions analogues à celle des points de continuité et celles qui permettent de cataloguer les degrés de discontinuité.

I, II sont vrais s'il s'agit de fonctions de première classe à ϵ près.

Théorème. Une fonction de première classe en tous les points est de première classe.

α . Démonstration pour les fonctions de première classe à ϵ près en tous leurs points.

Chaque point est intérieur à un intervalle dans lequel f ne diffère d'une fonction de classe 1 que de ϵ au plus. D'après votre théorème¹⁵⁹ complété, il suffit d'un nombre fini de ces intervalles pour tout couvrir et d'après I f est de première classe à ϵ près.

β . Si f est de première classe en tous ses points, d'après α elle est de première classe à ϵ près dans tout intervalle, quel que soit ϵ et d'après III elle est de première classe.

Conséquences. Une fonction qui n'est pas de première classe a des points où elle n'est pas de première classe. Et des points A_ϵ où elle n'est pas de première classe à ϵ près, si ϵ est assez petit.

On a évidemment les deux propriétés suivantes, ϵ étant assez petit : 1° un point A_ϵ ne peut être isolé (I) ; 2° un point limite de A_ϵ est un A_ϵ . L'ensemble E des A_ϵ est parfait.

Soit M un de ces points, f n'est pas de première classe à ϵ près en M sur E , sans quoi elle serait de première classe à ϵ près en M d'après II.

En particulier, f est totalement discontinue sur E .

La seconde démonstration, que j'ai, permet de se passer de III, elle est moins jolie, mais plus intéressante. Celle que je vous indique fournirait, bien exposée, une note de 5 pages au plus. Voyez si vous voulez cette note, et, si vous la voulez, dites-moi ce qu'il y aura dans le texte sur ce sujet.

Cordialement.

H. Lebesgue

11, boulevard de la Liberté

XXI

Rennes, dimanche¹⁶⁰

Cher Monsieur,

Evidemment cette histoire de Lerch-Picard est bonne, car elle prouve la légèreté avec laquelle Lerch et Picard jugent les gens. Je pense que vous n'avez pas été fâché de me la raconter, car c'est à peu près à vous et à Picard seuls que j'avais consenti à attribuer quelques connaissances des travaux de Baire et de moi. Je perds encore une de mes illusions, car je croyais, en entendant parler de toutes les besognes que Picard assumait en entrant dans le *Bulletin*, qu'il s'occupait attentivement de ce qui s'y publiait¹⁶³.

Seulement je vais vous faire regretter de m'en avoir parlé en "en abusant". Vous comprenez que j'admets difficilement que, puisque Lerch est idiot, je passe pour avoir commis une erreur grossière. Et, en passant, Lerch a une fichue opinion de Darboux, Tannery et Picard s'il les suppose capables d'avoir laissé passer, sans s'en apercevoir, l'erreur qu'il croyait avoir relevée. Comment dois-je m'y prendre ? Je vous propose différentes choses.

1° Ecrire d'ici quelque temps à Picard : Dans une lettre que m'a écrit M. Borel, il me dit incidemment : "J'ai eu l'occasion dernièrement de causer avec M. Picard de l'erreur de Lerch au sujet de votre article du *Bulletin des Sciences mathématiques* et dissiper

un malentendu qui s'était fait dans l'esprit de M. Picard." (C'est pas français, mais vous m'indiqueriez ce que vous me permettez.) Je partirais de là pour lui dire ce qui s'est passé entre Lerch et moi et je pourrais même faire état d'une lettre de Lerch heureusement conservée, quoique bien par hasard :

"Vous avez victorieusement répondu à mes objections au sujet de l'exactitude de votre développement que je regrette beaucoup d'avoir attaqué" etc.

2° Attendre le retour de ma note et écrire à Picard : Je me doute des vraies raisons du retour etc.

3° Ecrire à Tannery : M. Borel m'a dit, ou bien je reçois de Picard une note que je lui avais envoyée pour le *Bulletin des Sciences mathématiques* ; je pense que c'est à cet idiot de Lerch que je dois d'être rayée de la liste des rédacteurs possibles du *Bulletin* etc.

4° Profitant de ce que Lerch m'a demandé s'il était possible de représenter x à l'aide d'un développement de polynômes en z , et subsidiairement s'il était possible qu'une telle série de polynômes en z , convergente dans un domaine, n'y soit nulle part uniformément convergente, et de ce que j'ai montré à Lerch l'impossibilité de cela, faire paraître dans la Société Mathématique de France une note commençant à peu près ainsi :

Considérations sur ce fait que les travaux de Baire montrent la continuité eulérienne de toutes les fonctions connues de variables réelles¹⁶⁴.

Riemann pensait que toutes les fonctions de z représentables analytiquement étaient analytiques. Weierstrass a montré que cela n'était pas et l'on devait se demander jusqu'où allait la puissance de ces représentations¹⁶⁵. J'ai montré dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* qu'elle s'étendait à toutes les fonctions connues de x et y (réelles) en démontrant que : toute fonction continue en x, y est représentable par une série uniformément convergente de séries de polynômes en z .

M. Lerch trompé par une lecture trop rapide avait cru qu'il s'agissait d'une série uniformément convergente de polynômes ou, ce qui revient au même, d'une série uniformément convergente de séries uniformément convergentes de polynômes, ce qui aurait été

inexact d'après un théorème bien connu de Weierstrass¹⁶⁶.

L'épreuve de la note rectificative que voulait publier M. Lerch m'ayant été communiquée, il m'a été facile de lui prouver que lui seul se trompait (ou autre chose d'équivalent). (¹)

(¹) La note de M. Lerch publiée dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* du t.27(1903) est la note dont il est question ici, modifiée après mes observations.

A cette occasion, M. Lerch (ou le savant géomètre) (ou le savant professeur de l'Université de Fribourg, ou etc.) a bien voulu me poser quelques questions intéressantes ...

5° Cette note pourrait même être l'occasion d'une lettre à Picard, dans laquelle je la lui proposerais naïvement pour le *Bulletin*.

Je ris beaucoup en vous écrivant tout cela, car je vois d'ici votre inquiétude (le mot est trop fort) au sujet de ma diplomatie épistolaire que vous avez en médiocre estime. Je ne vous en veux pas.

Il est probable que c'est 4° que vous préféreriez (je serais très sage et vous montrerais l'épreuve), mais il y a un cheveu. La démonstration qui répond aux questions de Lerch est celle qui me donne rapidement les conditions nécessaires de Baire et que j'avais mise dans mon bouquin (elle a été coupée). Cela n'a rien de drôle, car la réponse à la question de Lerch est le commencement de la recherche des conditions pour qu'une fonction soit de classe 1 en z .

Vous vous rappelez peut-être que, dans la page coupée de mon bouquin¹⁶⁷, Montel était cité. Voici les faits : après avoir reçu la lettre de Lerch, je dis à Montel : je crois bien que je pourrais dire à Lerch que ce qu'il me demande est impossible si j'avais tel théorème. Montel me dit immédiatement : "Voici comment ce théorème se démontre, j'en avais eu besoin et l'avais démontré, et j'ai découvert depuis qu'il était dans Arzela." Avec le théorème de Montel, rentrant chez moi, j'ai pu répondre de suite à Lerch. A quelque temps de là, Montel, qui ne connaissait que la démonstration, encore trop compliquée, des conditions nécessaires de Baire que j'avais donnée au Collège de France, m'envoie une démonstration de ces conditions et de Lerch qui est identique à celle que j'avais. Ce que j'aurais à publier serait donc autant de Montel que de moi.¹⁶⁸ C'est un petit inconvénient, car nous pourrions publier Montel et moi.

Seulement, je crois que Montel essaie en ce moment de trouver les fonctions de classe 1 en z ¹⁶⁹. Ce que j'ai fait n'est qu'un appoint très petit ; mais nous savons comment l'on juge les jeunes et, si je publiais, Montel passerait facilement pour n'avoir rien fait. Si nous publions ensemble, à cause de cette habitude stupide qu'on a, dans les collaborations, de tout rapporter à celui qu'on connaît déjà, alors que ce devrait être plutôt l'inverse, Montel sera encore frustré. Et s'il trouve la solution générale, on admettra volontiers qu'il n'y avait qu'à poursuivre avec habileté ce que nous avons fait ensemble.

Répondez moi, sur ce point, si vous voyez Montel, *et que vous le jugiez bon*, vous pouvez d'ailleurs lui en parler. Il y a seulement à craindre qu'il ne se rende pas compte assez de l'inconvenient de déflorer un sujet avec un autre et qu'il ne juge déraisonnable d'attacher à cela quelque importance.

Vous ne me dites pas quelle a été votre réponse sur le transfini, je suppose que c'est à peu près ceci : Il n'est pas certain que l'énoncé du théorème II soit raisonnable. Si le transfini est déraisonnable, l'énoncé de II est déraisonnable. A énoncé déraisonnable, démonstration déraisonnable.

Au surplus, je crois que le mot transfini fait plus peur que la chose. Or, il n'est pas indispensable, il fait double emploi avec celui de dérivé, on peut le supprimer.

Mes idées sur la continuité des fonctions infinies sont plutôt rudimentaires, cela se borne à la définition et à des propriétés immédiates des limites qui se conservent. J'ai fait cette remarque évidente que, sans cette définition, $f'(x)$ cessait parfois d'exister sans que la tangente cesse d'exister et toute une série de choses géniales de cet ordre. D'ici quelque temps je finirai peut-être ce que j'ai vu sur l'existence de f' , à cette occasion j'aurai besoin de préciser mes idées ; nous pourrons voir alors si nous sommes bien d'accord et reparler de cette idée de mémoire en commun que je vous remercie d'avoir eu ¹⁷⁰.

J'oubliais de vous demander si vous savez mon erreur dans la note à Picard ? Aurais-je oublié un s au pluriel ou un $\frac{1}{2}$ dans une intégration ? ¹⁷¹

Vous ne considérez, pas plus que moi, l'argument de M. X ¹⁷²

des séries trigonométriques comme sérieux.

J'ai mis au point la seconde démonstration, c'est celle que je vous donnerai comme note, elle ne suppose pas les I, II, III de celle que je vous ai envoyée, elle colle avec la démonstration, relative au cas où les discontinuités sont dénombrables, à laquelle j'ai fait allusion. Elle ne suppose pas connues les fonctions de deux variables continues seulement par rapport à chacune d'elles, dont vous ne me semblez pas parler. Enfin, elle se prête facilement à une généralisation pour n fini ou transfini, tandis que l'autre ne va que jusqu'à n fini. Il est vrai que cela suffit si Baire a raison au sujet du nombre 4. Mais il se pourrait qu'il se trompe¹⁷³. Bien entendu dans la note il ne s'agirait que de la classe 1¹⁷⁴. Dans ch. II ou IV parlez-vous des conditions nécessaires de Baire ?¹⁷⁵ Si non, ma note aurait une page de plus à peu près. Si vous ne vous servez pas de votre théorème sur les intervalles qui en couvrent un autre, cela l'allongerait aussi. Avec 5 pages, 6 au plus, ce serait, en tout cas, suffisant.

Si je me rappelle bien ce que vous m'aviez dit jadis, il entrerait dans votre plan de parler des séries de polynômes X_n ¹⁷⁶. A cette occasion je vous rappelle une note, que vous citez dans vos *Séries divergentes*, et dans laquelle M. Leopold Fejer démontre que les séries de Fourier relatives aux fonctions continues sont simplement indéterminées¹⁷⁷. Il résulte de là un développement (si je saisis la nuance entre représentation et développement) des fonctions continues à l'aide de séries finies de Fourier. Il n'entre sans doute pas dans votre plan de parler de cela ; mais il serait bien étonnant que le raisonnement de Fejer ne peut être transporté aux séries de X_n et l'on aurait ainsi un développement uniformément convergent des fonctions continues quelconques. Sans doute ce développement serait très particulier et les X_n ne sont pas bien intéressants au point de vue des fonctions continues quelconques, mais enfin c'est quelque chose.

Je note en passant que la remarque de Fejer appliquée à une fonction bornée mesurable quelconque montre que la série de Fourier correspondante n'est divergente ou différente de la fonction, avec la sommation de Cesaro, que pour le fameux ensemble de mesure nulle pour lequel il faut renoncer à dire quoi que ce soit¹⁷⁸.

Ne vous payez donc pas ma tête avec votre "juge sévère".

Je n'ai pas fait ma liste d'hommages. Je dois avouer que jusqu'ici j'ai très peu envoyé des tirages à part et que je n'en ai jamais fait parvenir qu'aux gens que je connaissais, à ceux avec lesquels j'étais en relations, ou à ceux que je citais. Je dois avoir été fort impoli de ce fait, si j'en crois ce que me dit ma conscience toutes les fois que je reçois un tiré à part d'un inconnu de moi¹⁷⁹.

Cordialement.

H. Lebesgue

XXII

Rennes 20/1/04

Cher Monsieur,

Nous souhaitons, ma femme et moi, que l'indisposition de Madame Borel¹⁸⁰ soit de courte durée et j'espère recevoir de vous dans une prochaine lettre de meilleures nouvelles de sa santé.

Je m'excuse de vous avoir obligé à m'écrire au moment où vous êtes préoccupé et dérangé.

Dites à M. Appell que je le remercie d'avoir pensé à moi. Dites-lui aussi que j'accepte. Il est évident que j'aurais préféré, sans cependant vouloir rendre malades les examinateurs, qu'il s'agisse de quelque chose de moins aléatoire, mais cela ne dépend de personne. L'Ecole Centrale préférera Montel, je pense ; ce choix paraîtrait plus naturel puisque, ce que l'on se propose, c'est d'avoir quelqu'un sous la main en cas d'incidents imprévus.

J'ai parlé de mon absence possible au mois de juillet à Lacour, Le Roux et Moreau¹⁸¹. Ce dernier a été très surpris qu'on puisse se préoccuper d'avoir un motif pour esquiver le baccalauréat. Et en fait, à Rennes du moins, on ne se préoccupe guère de cette petite question. Cavalier¹⁸², qui est du jury d'agrégation, passe tout son mois de juillet à Rennes, il ne s'en dispense pas moins de baccalauréat. De Martone¹⁸³ a, chaque année depuis quelque temps, une mission (?) en Roumanie, il se dispense des bachots. Pour ma part je trouve cela abusif. Mais le service n'étant pas très grand (l'an dernier, malgré Cavalier dispensé et Job¹⁸⁴ non remplacé, j'ai eu 30 copies

à corriger et deux matinées d'oral ; j'étais l'un des plus chargés) il me serait possible de m'arranger avec des collègues que je débarrasserais de tout service en octobre. Et comme la rentrée a lieu maintenant le 15 octobre, ce débarras a quelque avantage.

Je ne pensais pas, et je ne pense pas, que l'administration d'un service aussi peu nombreux, comme fonctionnaires, que l'enseignement supérieur puisse ignorer quelque chose sur son personnel. Toute recommandation me paraît superflue et même un peu insultante pour cette administration. Je n'ai pas l'intention de faire aucune réclamation. "Motivée" dites-vous ; et par quoi ? Par mon désir d'avoir 500 F de plus ? C'est un désir tellement général. Et si je prouvais que j'ai besoin de ces 500 cela serait de peu d'effet auprès de ceux qui croient avoir besoin de beaucoup plus que cela.

D'ailleurs j'ai ici une heure supplémentaire qui m'a valu 500 l'an dernier. Il est vrai que j'ai réclamé à cette occasion, car Le Roux, qui faisait 2 heures n'avait aussi que 500 et que, suivant tous les augures, ma réclamation ne pourrait avoir d'autre effet, si elle en avait, que de diminuer mon indemnité sans augmenter celle de Le Roux. Je crois que Moreau, qui était le plus affirmatif de ces augures, a gardé pour lui et a considéré comme nulle ma réclamation. J'aurai donc probablement 500 de supplément ; de quoi me plaindrais-je ? Ne m'avez-vous pas dit vous-même que les grosses légumes ne pourraient comprendre ma soif d'or, à cause de mon âge, ce qu'à mon tour je n'ai plus compris. Il est certain qu'avec ces 4500 je n'ai pas plus pratiquement qu'à Nancy ; il est vrai que si j'étais resté à Nancy j'aurais peut-être eu une promotion (ayant eu au mois de janvier dernier 6 ans et 3 mois de services sur le papier et effectivement 4 ans et 3 mois), mais la décision du ministère n'a rien de scandaleux qui justifie qu'on en fasse appel.

Cordialement.

H. Lebesgue

XXIII

Lundi soir¹⁸⁵

Mon cher Monsieur,

J'ai été touché par votre lettre ce matin à 11 h en revenant

de la Faculté; comme je venais d'y apprendre que par une faveur administrative je restais à 4000, vous ne serez pas étonné qu'a priori je sois disposé à accepter.

Cependant j'ai besoin d'explications. Qu'est-ce que cette institution d'examineur adjoint ? Est-elle nouvelle ? Les examinateurs de l'Ecole Centrale ont-ils manifesté le désir d'être malades ?

S'il existait déjà antérieurement des examinateurs adjoints, ils me paraissent avoir joué un rôle plutôt effacé. Or je ne suis pas disposé à accepter ce que vous me proposez s'il y a quelques chances sur 100 pour qu'il soit uniquement verbal. Ces petites nominations, quand même elles n'ont aucune conséquence, sont souvent considérées par le ministère comme des compensations. Je ne veux pas que ce titre, s'il n'a d'autre avantage que d'être un titre, puisse m'être opposé à une demande quelconque.

Ces précautions ne sont pas complètement inutiles, le fait que j'ai eu le Collège de France l'an dernier a paru un motif à faire valoir contre mon augmentation et le Recteur m'a fait dire qu'au ministère on lui avait presque promis que ma promotion passerait l'an prochain sans difficultés.

Il ya dans tout cela tant de vague et de réticences que je me garde à carreau, pour ne pas prêter le flanc à un nouveau prétexte. Comme je ne suis pas OA¹⁸⁶, on a déjà ce moyen, ô combien bien choisi, de me satisfaire, je tâche de ne leur en pas donner d'autres.

Je suis occupé ces jours-ci, je vous écrirai dans quelques jours.

A vous.

H. Lebesgue

XXIV

Cher Monsieur¹⁸⁷,

Je viens de recevoir une lettre du directeur de l'Ecole Centrale. Il m'annonce que les examens commencent le 15 juin. Je croyais qu'ils commençaient, comme lorsque j'y préparais¹⁸⁸, le 1er juillet. Du 15 au 30 il y a 6 jours qu'il faut que je passe à Rennes pour les certificats. Je l'en avertis ; il est probable que ma candidature ne pourra être acceptée. Voulez-vous en avertir M. Appell pour

qu'il ait le temps de chercher quelqu'un. Renouvelez-lui mes remerciements¹⁸⁹.

Tous nos souhaits pour le rétablissement de Madame Borel.
Bien cordialement.

H. Lebesgue

Excusez ma brièveté, j'ai mal à la tête.

XXV

Rennes, le 8 février 1904

Cher Monsieur,

Vous voyez par l'élégance de mon papier à lettre qu'il est temps que j'ai une promotion. J'ai appris ce matin que je l'avais. Je n'y comptais nullement et je croyais tout terminé, mais, tandis que je vous écrivais sur l'inutilité de réclamer et de se faire pistonner, on réclamait et on me pistonnait.

Moreau très froissé que, pour ses premières propositions de doyen, il ne reçoive que des refus (car c'était paraît-il l'année où l'on contentait la personne morale Faculté des Lettres) a protesté et a écrit à Thamin¹⁹⁰ : Lebesgue doit avoir sa promotion, voyez Tannery, il vous dira qu'il est considéré comme un mathématicien chic ; Tannery est intervenu et on m'a donné ma promotion.

Il paraît, m'expliquait Moreau, que l'on avait gardé deux ou trois promotions en réserve pour calmer les recteurs et doyens et candidats les plus gueulards. C'est en vérité très humain de garder de quoi se débarrasser des raseurs ; mais, en l'espèce, bien que j'ai eu le bonheur de me trouver parmi ces raseurs, je trouve cela trop humain. Moreau, qui prévoyant le cas de veste ne m'avait pas prévenu de ses démarches, m'a appris le tout ce matin et j'en ai été à la fois très épaté et très content.

Vous savez d'autre part que le directeur de Centrale me considère comme candidat.

Quand vous en aurez le temps, vous me donnerez des tuyaux sur les gens qu'il est possible de faire passer en commun pour hommages avec Gauthier-Villars. Si les futurs rédacteurs de la collection sont dans ce cas, etc.

Bien entendu je ne suis nullement pressé d'avoir ces renseignements et je vous en parle seulement pour que, le cas se présentant, vous y pensiez. Vous devez être fort occupé en ce moment avec votre habitation triple.¹⁰⁸⁰

J'espère que Madame Borel se porte bien, présentez-lui nos voeux.

Cordialement.

H. Lebesgue

Je ne vous ai jamais reparlé de Picard, j'attends, je laisse venir¹⁹¹.

XXVI

Rennes, le 14 février 1904

Cher Monsieur,

Décidément je suis maladroit, me doutant de la haute opinion que vous avez conçue de ma susceptibilité, j'ai pris des précautions qui vous ont persuadé plus que jamais de l'exactitude de votre opinion. Laissez-moi compléter votre cours de tirés à part pour que j'essaie de vous convaincre que vous êtes, parfois, un mauvais psychologue.

Il y a 1° le tiré à part prospectus, envoyé pour qu'il soit lu ; 2° le tiré à part intéressé, envoyé aux puissants, le nom d'auteur seul est à lire ; 3° le tiré à part témoignage de respect ou d'admiration ; 4° le tiré à part témoignage d'amitié, reconnaissance, etc. ; 5° tiré à part simple politesse. Ce dernier est très rare, à mon avis lui seul demande une réponse. Mais je n'attache pas beaucoup d'importance aux deux premiers. Le Monsieur qui voyant le prospectus le lira alors qu'il n'aurait pas lu le périodique est fort rare, sauf si le prospectus n'a que 30 lignes. Je sais le sort des tirés à part ; le plus souvent, après avoir trainé huit jours sur la table de travail, quand cette table est décidément trop encombrée et qu'il faut la ranger, le tiré à part est enfoui dans quelque armoire d'où il ne sortira qu'au prochain déménagement, parfois à la visite de quelque Hermann¹⁹³. Ce dernier sort ou le feu lui est à coup sûr, ou presque, réservé s'il s'agit de la classe n° 2. J'allais oublier de dire qu'un tiré à part peut cumuler et être de

plusieurs classes.

Je ne crois pas à la classe 2 ; fort peu à la classe 1, dans l'un ou l'autre cas je n'attends aucune réponse. Mais, quand il s'agit d'un Monsieur comme Bendixson dont les préoccupations mathématiques actuelles sont fort éloignées des miennes¹⁹⁴, si j'ai un doute de plus sur l'intérêt qu'il porte aux questions qui m'intéressent, je ne crains pas de ne plus lui envoyer de prospectus ne voyant guère d'inconvénient à ne pas placer ma marchandise et à restreindre ma clientèle. C'est un peu pareil pour Osgood¹⁹⁵, seulement, celui-là, étant moins éloigné de moi par ses idées, je l'avais inscrit, avant d'avoir vu votre liste, sur la mienne avec un ? , tandis que je n'avais même pas songé à inscrire Bendixson. Cantor¹⁹⁶ non plus n'a pas répondu, ni bien d'autres. Mais je suis certain que Cantor, s'il était capable de lire autre chose que ce qu'il écrit lui-même, s'intéresserait aux questions que je traite, c'est pourquoi je n'hésite pas pour lui à continuer.

J'ai toujours fait peu d'envois dans les classes 1 et 2 (et même les autres), je n'ai jamais rien envoyé à Poincaré¹⁹⁷ ; j'ai remis à Darboux ma thèse en allant le voir comme membre du Comité consultatif. Et je crois si peu aux tirés à part que je n'ai pas encore envoyé mes séries trigonométriques, ni mon article sur le problème des aires et que je n'ai donné que 10 notes du *Bulletin* (Lerch), presque toutes de la main à la main.¹⁹⁸

Je crois un peu plus à l'envoi de livre, d'abord parce que le livre ne fait pas double emploi avec un périodique et puis aussi parce qu'il est un peu moins souvent brûlé, enfoui ou Hermannisé que le tiré à part. C'est pour cela que j'ai mis tous les noms que vous m'avez dits, c'est par intérêt que j'en ai envoyé à l'Institut et à la Sorbonne. C'est également parce que je connais mon intérêt que j'ai fait le calcul malpropre suivant : Schoenflies me connaît, il cherchera certainement à voir mon bouquin à une bibliothèque, inutile de le lui envoyer. A Schoenflies j'envoie au contraire toutes mes notes, car il pourrait y en avoir qui pouvaient passer à ses yeux inaperçues.

Si Gauthier-Villars accepte la liste, nous pourrons facilement nous arranger, moi j'en veux 7. S'il en reste, vous pouvez en envoyer un à Schoenflies, malgré mon calcul machiavélique.

Moi, j'ai reçu Robin parce que Raffy¹⁹⁹ m'avait rasé avec,

pendant ses épreuves, pour que je déniche les théorèmes faux.

Merlin²⁰⁰ devait aller à Lyon, je ne sais s'il y est.

Nos compliments à Madame Borel.

Cordialement.

H. Lebesgue

Je ne savais pas ce qu'était Phragmen comme rédacteur²⁰¹. Je crois que Darboux et Picard ont mieux fait de faire des travaux ; il est probable d'ailleurs qu'ils ne pourraient pas faire ce que Phragmen fait et que ce dernier n'aurait pu faire ce qu'ils ont fait. L'un et l'autre genre sont très respectables. Il est regrettable seulement que Darboux et Picard assument des fonctions qu'ils ne remplissent pas et qu'il ne se trouve pas en France quelque Phragmen pour assister Tannery trop occupé par les analyses et peut-être aussi d'esprit pas assez rapide. (Ce n'est pas un reproche, il a d'autres qualités.)

XXVII

Rennes, le 17 février 1904

Cher Monsieur,

Il est possible que, n'ayant pas d'ordre, j'admette implicitement que personne n'en peut avoir, et que j'ai tort de ne pas croire aux tirés à part. Je vous accorderai à ce sujet tout ce que vous voudrez, je voudrais seulement que vous sachiez que ma susceptibilité est bornée.

Je viens d'être interrompu par l'arrivée d'un paquet de 10 de mes livres. Gauthier-Villars l'avait expédié le 12, le commis a écrit rue Vaugirard, d'où retard et recherches pour me découvrir ; cela a été d'autant plus difficile que la rue Pougérard ne contenant que 4 numéros (dont l'un correspond à une maison en construction) et n'étant dénommée que depuis 18 mois est inconnue de tous ici. J'allais justement vous écrire que j'avais déjà prévu 2 exemplaires pour l'imprévu et que je n'en avais pas besoin de 10. Puisque je les ai je les garde, mais je ferai moi-même l'envoi à Merlin quand j'aurai son adresse, pour Fatou je suis certain que l'adresse que je vous ai donnée est suffisante. Plusieurs fois déjà je lui ai adressé là des lettres ou tirés à part. Vous pouvez envoyer à Fatou et

G. Cantor et vous savez qu'il m'en restera très probablement pendant quelque temps si vous avez l'idée d'une ou deux personnes. Je me charge de Schoenflies. Pour tout le reste faites comme vous me dites ; prenez en 6, je crois que ça fera le compte.

Ma liste avec Gauthier-Villars +(Fréchet, Mittag-Leffler, Denjoy, Zoretti)	$\frac{24}{2} = 12$
Ma liste (personnelle) (Merlin, Fatou, Mittag-Leffler)	20
Pour vous (dont un pour Cantor et un pour Fatou)	8
Pour moi (dont un pour Merlin)	$\frac{10}{50}$

Sous réserve de l'approbation de Gauthier-Villars pour les 12.

Au moment où je vous ai indiqué une méthode conduisant au théorème de Baire sans nombres transfinis, j'ai étudié pendant quelques jours les différentes manières de l'obtenir et, en particulier, je me suis servi des ensembles mesurables B attachés aux fonctions des différentes classes considérées comme fonctions sommables. A ce moment, je crois bien vous l'avoir écrit, je me suis donné un peu de mal pour que mes résultats et mes raisonnements s'appliquent aux fonctions de classe transfinie. J'avais toujours considéré comme une marque de loufoquerie de la part de Baire de croire qu'il n'y a pas de fonctions de classe supérieure à 4 ou à 3²⁰². Je croyais, car il ne m'avait donné aucune raison de cette limitation, qu'il s'agissait seulement d'un échec, par lui senti, pour former des fonctions de classe 4 ou 5 ou encore que, ayant trouvé des conditions nécessaires pour qu'une fonction soit de classe 3, la difficulté qu'il trouvait à aller plus loin lui faisait espérer que ça s'arrêtait là.

Lorsque vous m'avez dit que la prose de Fréchet était chez Gauthier-Villars²⁰³, je me suis remis à l'étude de ces questions pour avoir des idées nettes au moment d'écrire une note. Je me suis proposé en particulier de former des fonctions de toutes les classes. Or le procédé que j'ai employé s'est arrêté tout net à la 3^e classe ; il m'a été facile de montrer qu'il ne donnait rien de nouveau et, ce qu'il y a de plus curieux, c'est que ma démonstration donnait du même coup la démonstration de l'inexistence de fonctions de classe 4. Le théorème de Baire est donc bien exact²⁰⁴. Je viens de simplifier mes démonstrations ; j'ai les conditions nécessaires pour qu'une fonction soit de classe 1, ou de classe 2, ou de classe 3 et l'inexistence de la classe 4. C'est un raisonnement très simple, sans

transfini, qui m'a donné cela ; les ensembles n'y interviennent pour ainsi dire pas ; c'est un raisonnement analytique tel que Goursat, par exemple, en aurait pu faire un. Ce n'est pas par dédain que je cite Goursat, mais pour préciser la nature de mon raisonnement. Je crois que Goursat n'aurait pas fait ma thèse, je suis certain que je n'aurais pas fait la sienne²⁰⁵.

Une conséquence du théorème de Baire est qu'on peut nommer un ensemble mesurable non mesurable B et une fonction au sens de Riemann qui ne soit pas une fonction au sens de Cauchy²⁰⁶.

Je demande à Baire s'il a ces résultats, si non j'enverrai une note à Picard qui l'acceptera peut-être malgré Lerch²⁰⁷.

Cordialement.

H. Lebesgue

XXVIII

Rennes, le 19 février 1904
11 boulevard de la Liberté

Cher Monsieur,

Je n'ai pas eu de nouvelles de mon livre. Je ne connais pas Mittag-Leffler, Phragmen, Pringsheim. J'ai envoyé ma thèse à Osgood et à Bendixson qui ne m'ont pas répondu. Sans être formaliste, on peut considérer leur silence comme une marque d'indifférence ; mon intention n'était pas de recommencer. Cantor existe-t-il ? N'est-il pas tout à fait fou ?²⁰⁸ Sinon, il faudrait lui envoyer mon bouquin. Mais pour tout cela il faudrait que vous m'aidiez de vos dix. En partie au moins. Si vous le pouvez, voici ce que je proposerai à Gauthier-Villars et ce que vous pouvez lui proposer si vous le voulez. Si vous le voyez, rappelez-lui aussi mon adresse nouvelle.

Je ne connais pas Niewenglowski²⁰⁹. Vous me demanderez pourquoi Raffy, parce que j'ai reçu Robin.

Bien entendu les listes que je vous envoie ne sont que provisoires, elles dépendent de ce qu'acceptera Gauthier-Villars. Je n'ai pas marqué ceux dont j'ai besoin personnellement.

Bien à vous.

H. Lebesgue

Si Gauthier-Villars acceptait ma liste, je pourrais ne vous prendre que 3 ou 4 sur vos dix. Si vous voyez quelqu'un à repasser de l'autre liste sur celle de Gauthier-Villars n'hésitez pas.

J'espère que Madame Borel continue à se mieux porter.

Hommage d'auteur et d'éditeur

Darboux, Membre de l'Institut
Picard, Membre de l'Institut
Jordan, Membre de l'Institut
Painlevé, Membre de l'Institut
Humbert, Membre de l'Institut
Poincaré, Membre de l'Institut
Appell, Membre de l'Institut
Lacour, Professeur à l'Université de Rennes
Tannery J., Sous-directeur de l'École Normale
Molk, Professeur à l'Université de Nancy
Goursat, Professeur à la Sorbonne
Koenigs, Professeur à la Sorbonne
Raffy, Professeur à la Sorbonne
Perrin, Professeur à la Sorbonne
Brillouin, Professeur au Collège de France
Niewenglowski, Inspecteur général
Baire, Professeur à l'Université de Montpellier
Cousin, Professeur à l'Université de
Drach, Professeur à l'Université de Poitiers
Lindelöf, Professeur à l'Université de Helsingfors
Fréchet
Denjoy
Zoretti
Mittag-Leffler²¹⁰

Hommage d'auteur

Phragmen, Professeur à l'Université de Stockholm
Bendixson, Professeur à l'Université de Stockholm
Hilbert, Professeur à l'Université de Göttingen
Volterra, Professeur à l'Université de Rome
Dini, Professeur à l'Université de Pise
Pringsheim, Professeur à l'Université de München

Peano, Professeur à l'Université de Turin
M. l'Administrateur du Collège de France
M. le Secrétaire du Collège de France
M. le Secrétaire du Collège de France (pour la bibliothèque)
Floquet, Université de Nancy
Cotton, Université de Grenoble
Osgood, Harvard University Cambridge, U.S.A.
Merlin à l'Observatoire de Lyon
Fatou à l'Observatoire de Paris
Montel à l'Institut Thiers
Marotte au Lycée Charlemagne
Viellefond au Lycée de Reims
Dubesset au Lycée de Nancy
Hadamard, Professeur à la Sorbonne
E. Humbert, Professeur au Lycée Louis-le-Grand
A. Cauquil, Principal du Collège de Clermont (Oise)

XXIX

Rennes, jeudi²¹¹

Cher Monsieur,

M. Picard doit présenter mes *Leçons* à l'Académie lundi prochain²¹² ; j'ai écrit à Gauthier-Villars.

Ma femme est malade depuis une huitaine ; nous espérons cependant aller à Paris à Pâques, je suis libre ici le 23.

J'ai peu de temps pour travailler ; voilà huit jours que je n'ai rien fait ; je voudrais cependant avoir rédigé les histoires de Baire pour Pâques ; à ce sujet, pouvez-vous trouver le temps de me dire si nous sommes d'accord sur l'existence des fonctions de toute classe, et la nécessité de compléter la démonstration que vous m'avez dite, laquelle est convaincante, mais incomplète pour un puriste.

Bien à vous.

H. Lebesgue

XXX

Cher Monsieur²¹³,

Trouvez le temps, je vous prie, de me dire si, oui ou non, nous sommes d'accord sur l'existence des fonctions de toute classe, afin que je rédige sans remords.

Je crois bien avoir une fonction non exprimable analytiquement²¹⁴. Mais ?

J'ai remarqué que nous étions d'une politesse et d'une amabilité parfaite autant que réciproque. Vous qualifiez d'intégrables (L) les fonctions que j'appelle mesurables B.

Votre dévoué.

H. Lebesgue

Sur les épreuves, que je viens de recevoir, pour justifier une de mes corrections, j'ai dit que j'avais trouvé un des résultats d'Arzela²¹⁵. Ce n'est pas une réclamation de priorité. Arzela devait l'avoir avant moi et moi je n'en ai déduit que ce fait évident: Une série de fonctions continues > 0 ne donne une fonction continue que si elle est uniformément convergente. Et je considère le résultat d'Arzela sur la continuité comme une jolie tautologie.

XXXI

7 mai 1904

Cher Monsieur,

J'attendais d'avoir reçu de Gauthier-Villars l'épreuve, où il est parlé de la méthode de Mittag-Leffler²¹⁷, pour vous répondre, mais je ne vois rien venir.

Vous avez raison, la démonstration de Mittag-Leffler est correcte et même assez simple. Il a seulement le tort, car il faut que ce soit lui et non moi qui ait tort, de ne pas dire qu'il sait qu'il y a difficulté, et où il faut aller pour voir lever cette difficulté. Elle est d'ailleurs si facile à lever qu'il suffisait d'indiquer qu'il y avait difficulté; comme il ne l'a pas fait, j'ai cru qu'il avait fait une erreur grossière et j'ai passé outre. Il faut bien

remarquer que si Mittag-Leffler cite Runge il ne fait pas soupçonner, sauf en ce qui concerne la ligne polygonale, que sa démonstration a une parenté avec celle de Runge et que Runge a développé les points sur lesquels lui, Mittag-Leffler, glisse.

Je suppose qu'il ne faut pas trop en vouloir à Mittag-Leffler puisqu'il s'agissait d'une lettre (distinction subtile) et aussi, soyons méchants, parce qu'il fallait prouver par une concision sans exemple dans les oeuvres de Mittag-Leffler que sa démonstration était plus élémentaire que toutes les autres démonstrations qui ont été publiées. Je prends donc une faible partie de tort que j'attribue à Mittag-Leffler

J'ai vu dans Bertrand les séries de Burmann²¹⁸. On peut en effet rattacher ma démonstration²¹⁹ à ces séries, seulement ce n'est tout à fait comme le fait Bertrand qu'il faudrait opérer. Celui-ci rattache les séries de Burmann à la série de Lagrange²²⁰, je les rattache dans le cas particulier en question aux séries de Taylor. Bertrand dit d'ailleurs à l'occasion de ces séries qu'on peut développer $f(x)$ suivant les puissances de $F(x)$, ce qui n'est pas tout à fait la série de Burmann. Or, dans la démonstration, j'ai besoin du théorème d'Abel pour la convergence uniforme de $\sqrt{T+X}$, depuis -1 jusqu'à +1, y compris -1 et +1, c'est pour cela que j'ai invoqué la série du binôme et non la théorie de l'extraction de la racine carrée. Sans doute que l'on rattache la série que je considère à la racine carrée, ou à la série de Lagrange, on pourra dans tous les cas lever la difficulté, mais elle est toute levée si l'on parle de la série entière²²¹.

En général, si une série de Burmann représente 2 fonctions différentes dans deux intervalles consécutifs, il n'y a pas convergence au point limite commun à ces 2 intervalles ; j'ai besoin d'un cas où il y a convergence et il faut que je sache que la convergence est alors uniforme.

Voici tout simplement ce que je veux dire et ce que vous ne contestez d'ailleurs nullement ; il fallait : 1° voir que le théorème de Weierstrass se ramène au développement de $|x|$; 2° obtenir ce développement par une application assez particulière des séries de Burmann. Par exemple, la série que cite Bertrand²²²

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha^2\beta^2}{(\alpha+\beta)^3} + \frac{4\alpha^3\beta^3}{2(\alpha+\beta)^5} + \frac{6.5\alpha^4\beta^4}{2.3(\alpha+\beta)^7} + \frac{8.7.6}{2.3.4} \frac{\alpha^5\beta^5}{(\alpha+\beta)^9} + \dots$$

qui donne le plus petit des deux nombres α ou β ne fournit pas la solution quand on y fait $\alpha = -x$, $\beta = x$, elle la donne au contraire pour $\alpha = 1-x$, $\beta = 1+x$ et c'est précisément l'application particulière que j'ai, en fait, choisie.

Pour "points de condensation"²²³ je propose "points non énumérables" et "points énumérables" pour les autres. Je ne mets pas dénombrable pour éviter des confusions. J'ai ^{beau} faire, point de condensation veut dire pour moi point limite ; cette acception est vieille, il est vrai, mais il y a dense dans un intervalle, condensé dans un intervalle et tout cela suscite des associations d'idées. Et puis si l'on trouvait des ensembles de points qui n'aient ni une puissance finie, ni la puissance du dénombrable, ni la puissance du continu, il faudrait encore créer des mots nouveaux non seulement pour ces puissances, ce qu'il est difficile d'empêcher, mais aussi pour les points correspondants analogues aux points non énumérables. Vous n'avez peut-être pas peur²²⁴ de cette éventualité, je ne suis pas trop peureux non plus, mais, enfin, qui sait ?

J'espère que vous en avez fini avec vos ennuis domestiques, je vous le souhaite. Cordialement.

H. Lebesgue

XXXII

Rennes, 11 mai 1904

Cher Monsieur,

J'ai reçu une nomination officielle pour l'Ecole Centrale, voulez-vous en remercier M. Appell et le lui annoncer, s'il ne le sait déjà.

Mon intention était de vous renvoyer le Mittag-Leffler avec les épreuves, comme vous le dites. A propos de Burmann, je suis comme vous persuadé qu'il n'y a pas de difficultés, mais je crois qu'on voit plus facilement qu'il n'y en a pas en rattachant ces séries à celles de Taylor, à cause du théorème d'Abel. Je n'ai pas compris l'énoncé général que vous m'avez dit : "point critique qui est un infini d'ordre < 1 "²²⁵, mais cela n'a aucune importance.

Il faudra, un jour où je vous causerai, que je pense à vous demander des renseignements sur le jeune seigneur chrétien R.

d'Adhémar, qui fait valoir sa marchandise à l'aide de tant de caractères typographiques différents sans se préoccuper de savoir s'il ne paraîtra pas quelque peu injuste dans sa critique d'un mémoire de Volterra auquel, après tout, il doit bien quelque peu²²⁶.

Je suis, nous sommes heureux d'apprendre le rétablissement continu de Madame Borel ; je vous félicite de travailler. Pour moi, la paresse est devenue la règle ; j'ai été un peu énervé par les histoires d'arrangements intérieurs à la Faculté, parce que mes démêlés avec Lacour ont amené entre nous une brouille complète ; en somme, je n'ai rien fait. Je vais essayer de suivre votre noble exemple.

Bien cordialement.

H. Lebesgue

XXXIII

Rennes, le 1er juillet 1904

Cher Monsieur,

Il y a déjà longtemps que l'arrêt brusque des épreuves de votre livre m'a paru bizarre ; j'y ai repensé ces jours-ci.

J'ai fini le mémoire, dont vous êtes un peu responsable, dans lequel je mets au point tout ce que j'avais comme résultats sur les histoires de Baire²²⁷. Vous verrez en gros ce qu'il contient par une note que Jordan avait perdue et qu'il vient de retrouver, m'écrit-il. Quant au mémoire lui-même, il paraîtra dans le 2^{ème} fascicule de 1905 du *Journal* de Jordan. (A ce propos, Jordan m'écrit qu'il a lu mon mémoire, ce qui est matériellement possible, car il l'a gardé 10 jours avant de m'écrire ; Jordan lirait-il ce qu'on lui envoie ??!)

Dans ce mémoire, comme je m'occupe de la classe quelconque, j'ai naturellement l'air de faire des démonstrations assez embrouillées et les nombres transfinis ont l'air d'y jouer un rôle alors qu'ils n'interviennent pas pour les classes finies. Je le dis bien²²⁸ mais vous m'avez dit qu'il fallait faire tout, dans cet ordre d'idées, et laissez peu à faire au lecteur. Je crois lui avoir laissé trop d'ouvrage, aussi je n'aurais pas été fâché de publier dans votre livre ce qui se rapporte au cas de la classe 1, comme nous en étions

convenu.

Pour ce motif égoïste, j'ai resongé à vos épreuves et me suis demandé ce qu'il en advenait.

Bien cordialement.

H. Lebesgue

Je ne veux pas vous mêler à ma querelle avec Baire, mais puisque je dois publier une note sur le théorème de Baire j'aurai quelque honte à vous cacher où nous en sommes.

Nous n'avons pas correspondu depuis le moment dont Baire vous a parlé. Avant d'envoyer mon mémoire à Jordan, j'ai envoyé un projet de note à Baire pour ne pas publier ce qu'il aurait trouvé depuis longtemps. Baire m'a répondu sur une carte de visite, sans en-tête, sans employer ni tu ni vous, avec cette formule de politesse : Salutations. Je ne me plains pas de cette rupture, c'est moi qui l'ai voulue ; seulement j'écris toujours : Mon cher Baire, ce qui manque de franchise ; mais, comme la publication dans votre livre de ma démonstration du théorème de Baire lui ferait peut-être quelque peu déplaisir, je vous préviens.

H. Lebesgue

XXXIV

Cher Monsieur²²⁹,

Au moment de rédiger ma note, je suis gêné par ceci. Parlez-vous des fonctions de plusieurs variables ou seulement de celles d'une variable²³⁰. Cela fait peu de changement dans la rédaction, quelques-uns cependant. Je vous rédigerai la démonstration comme pour une note ; je vous ai dit qu'à mon avis cela vaudra mieux, parce qu'il n'en résultera aucune modification dans le texte, mais, si vous le trouvez préférable, cela m'importe peu que vous amalgamiez ce que je vous enverrai avec le texte ou que vous en fassiez une note.

Il est bien entendu que l'amitié que vous pouvez avoir pour Baire ne me porte pas ombrage.

A ce sujet j'ajoute seulement que votre explication de notre brouille (trop de susceptibilité) me paraît insuffisante. Je suis même assez heureux que vous vous soyez mis à vous occuper de ces

questions des développements, cela pourra vous convaincre que je n'ai au moins pas eu de grandes susceptibilités "scientifiques" (?).

Pour ce qui est de Lacour, vous me rendriez service en racontant, si l'occasion s'en présentait, qu'ici personne ne voulait de lui ; tous à cause de ses brouilles antérieures, Le Roux parce qu'il préférerait la chaire d'analyse et qu'il tenait à rester par l'âge le chef incontesté du service de mathématiques, Moreau à cause de décanat.

J'ai fait à tous les louanges de Lacour et, à la réunion du Conseil, les mêmes objections se présentant on y a répondu en disant : M. Lebesgue le connaît, il assure que c'est un homme charmant, etc.

J'ajoute que j'ai fait à cette occasion une démarche suspecte que je m'attends à me voir reprocher un jour ou l'autre : Le Roux, qui comptait sur Cartan pour pouvoir évincer Lacour, s'était bien gardé de prévenir Cartan, ancien élève de Lacour, des événements ; j'ai écrit à Cartan où en étaient les choses. Je suis d'ailleurs certain que Cartan a pris ma lettre plutôt en mauvaise part, je n'ai jamais reçu un mot de lui.

Evidemment j'ai eu tort dans tout cela. Mais, si ces faits étaient connus, on oublierait peut-être moins que Lacour n'a pu rester ni à Saint-Louis, ni à Nancy, ni au jury d'agrégation et l'on considérerait peut-être comme invraisemblable que j'ai eu subitement Lacour en horreur.

J'espère que Mme Borel va mieux, cordialement.

H. Lebesgue

XXXV

Beauvais, vendredi 5 août 1904

Cher Monsieur,

Depuis votre avant-dernière lettre, j'ai quitté Paris pour Beauvais (56, rue Villebois Mareuil) où je vais rester jusque vers le 15 septembre. Je ne vous verrai donc pas à Paris à votre passage pour Heidelberg²³¹. Votre dernière lettre me met dans l'embarras, vous êtes si nomade que je ne sais où vous répondre.

Je vous ai expédié il y a quelques jours l'épreuve corrigée de ma note ; il faudrait supprimer la partie que j'indique à la fin concernant le théorème VII. La note est déjà suffisamment longue sans cela et ce théorème aurait besoin de quelques explications, de sorte que, pour peu que vous trouviez comme moi cette note un peu longue, vous supprimerez cette fin²³².

Je n'ai pas encore reçu l'épreuve que vous m'annoncez (sur la convergence uniforme), je vous enverrai mes explications à Saint-Paul²³³ (comme cette lettre), où je suppose que vous retournerez après le congrès.

Je n'ai pas besoin, pour moi, d'une seconde épreuve de ma note. J'y ai fait très peu de corrections.

Je suis très content si mes corrections vous ont été de quelque utilité. Je regrette seulement de les avoir rédigées avec aussi peu de soin, vous avez dû avoir quelque peine à vous y reconnaître.

Bien à vous.

H. Lebesgue

XXXVI

Beauvais, 6 août 1904

Cher Monsieur,

Je retrouve à l'instant la partie d'épreuve dont vous me parliez, je n'avais pas compris que c'était avec votre carte.

Evidemment, il est faux que la série représentant la dérivée converge uniformément si la dérivée n'est pas continue. Je vous avais indiqué cela parce qu'il y a évidemment deux cas à considérer :

1° Celui où il y a indéfiniment des dérivées.

2° Celui où il y a des dérivées jusqu'à l'ordre n .

On peut, dans ces cas, représenter $f(x)$ et toutes les dérivées qu'elle a par une série de polynômes et les séries des dérivées. Bien entendu, tout cela n'est uniformément convergent que s'il s'agit de fonctions continues, et, dans ce cas, il y a effectivement convergence uniforme.

De sorte que l'on a convergence uniforme autant qu'il est possible.

Bien à vous.

H. Lebesgue

Je reçois à l'instant la note de Painlevé²³⁴ ; il y a pas mal de fautes d'impression, mais comme vous serez deux à les corriger je ne vous envoie pas l'épreuve corrigée.

XXXVII

Rennes, le 15 août 1904

Mon cher Borel,

Je vous remercie de vos tuyaux. Boutroux²³⁵ m'avait prévenu de son côté qu'il avait reçu officiellement sa nomination pour Montpellier ; il m'a annoncé que, dans ces conditions, il désirait ne pas prendre le Collège de France la prochaine année. Je suppose que c'est là mon plus fort atout pour une nouvelle nomination. Si j'ai le cours Peccot, je ferai de l'*Analysis situs*²³⁶.

J'ai été content d'apprendre la nomination de Baire²³⁷ pour plusieurs raisons dont certaines non égoïstes. Mais, pour ne parler que des égoïstes, j'ai été fort charmé que Le Vavas seur²³⁸ ne supprime pas Baire. Il est vrai que Le Vavas seur ayant marqué le pas cette fois a peut-être par cela même acquis plus de droits à être nommé la prochaine fois, mais à tout prendre j'aime mieux qu'il ne fasse attendre que moi ; j'aimerais mieux qu'il attendît lui-même.

Est-ce qu'il faut considérer comme prophétique le remplacement des fonctions analytiques quand même par les fonctions discontinues ?²³⁹

Maurain²⁴⁰ m'avait déjà parlé de Saint-Germain²⁴¹. de Saint-Germain parle de sa retraite depuis force années et personne là-bas n'y croit plus ; Maurain ne savait rien relativement à une demande ferme de mise à la retraite. Cependant, les histoires de la Faculté de Caen étant très compliquées et les querelles étant aiguës, il est possible qu'on ait dit en haut lieu à Saint-Germain d'attendre, s'il avait manifesté des velléités de départ.

J'apprends par hasard qu'un certain Lagrula de Lyon vogue¹⁰⁸¹

actuellement vers l'Observatoire de Quito ; il est peu probable que ça fasse un mouvement quelconque, je pense.

Voici ce que veulent les Allemands²⁴².

1° Compléments de leur article sur les ensembles. Par ex. : Mesure, les catégories de Baire, les aires, les affaires de Schoenflies sur les fondements de l'*Analysis situs*, Young, etc.

2° Intégration et différentiation, avec nous, Osgood, Arzela, Bortolotti ($\frac{0}{0}$). Blumenthal ajoute : "généralisation de M. Borel du théorème de Bernoulli". Qu'est-ce que c'est que cela ?²⁴³

3° Les longueurs des courbes, les aires des surfaces. Lebesgue, Minkowski, Study, Wilson, etc.

4° Développement en série de polynômes et en série voisine, en particulier Fourier.

En somme c'est beaucoup plus vaste que ce que je pensais, étant donné qu'il n'y a là que le squelette. Evidemment ce sont les choses que je connais le mieux, mais ça me sera cependant encore assez difficile de faire l'article. Enfin j'écris à Blumenthal que je le ferai, Dieu sait quand ?

Je fais cahin-caha un peu de jardinage et un article pour Olivier²⁴⁴, article qui se traîne péniblement et me désespère ; ça n'est pas après cet essai que je vais m'embarquer de suite dans des élucubrations pour *La Revue du Mois*. Quand va-t-elle paraître ?²⁴⁵

J'espère que Saint-Paul des Fonts est un endroit où l'on peut être aussi voisin de nature que possible et que vous avez la vie paisible et joyeuse des animaux au vert ; sauf votre respect.

H. Lebesgue

XXXVIII

Beauvais, 17 août 1904

Cher Monsieur,

Quelques objections que l'on puisse opposer aux alephs, je suppose que la démonstration correcte de König²⁴⁷ n'en doit pas moins être convaincante pour les initiés. Je crois qu'il y a là un grand progrès et que cela pose d'une façon actuelle le problème déjà

vieux de la recherche des puissances des ensembles de points. L'ensemble des nombres transfinis de la première classe (en le supposant bien défini) a-t-il une puissance inférieure au continu ? C'est aussi une question qui se pose. Vous savez que je n'admets pas la solution qui consiste à dire : choisissons un point, puis un autre, etc., on n'est jamais arrêté. Je crois que la résolution de ces questions permettrait de voir plus clair dans pas mal de questions d'analyse et, puisqu'on vous demande où je vais, qu'on pourrait délimiter une classe fort étendue de fonctions sur lesquelles on pourrait raisonner comme sur les fonctions dérivables, bien qu'elles ne le soient pas. L'utilité de telles fonctions apparaît parfois dans certaines questions de physique mathématique (Hadamard, plaques vibrantes²⁴⁸), rarement, car on se propose en général avant tout de les éviter. D'autre part, certaines autres propriétés, d'ordre purement formel, ne me paraissent guère servir (il suffit de penser aux belles recherches sur les surfaces minima et le problème initial) de sorte que, à mon avis, on pourrait peut-être porter son attention ailleurs qu'on ne le fait ordinairement. La difficulté c'est de trouver des procédés simples de raisonnement sur ces fonctions, je pense qu'on n'y arrivera qu'en faisant des choses ridiculement compliquées, dont il ne restera rien, mais qui serviront cependant.

Parmi ces choses compliquées, je ne classe pas ma note du *Bulletin* (98)²⁴⁹ et je ne comprends pas qu'elle soit difficile. On peut lui reprocher la concision, mais je crois avoir mis en évidence son principe simple. Quant à la longueur, je pense qu'on écrit assez en mathématiques et qu'il y aurait avantage à ce que la littérature mathématique ne continue pas trop à croître ; et de plus les explications de l'auteur ne suppléant que peu aux réflexions du lecteur je les considère parfois, peut-être à tort, comme accessoires. Je vous remercie d'avoir exporté ma démonstration²⁵⁰.

A ce sujet, il faut que je vous parle des épreuves. Je suis peut-être cause de l'envoi des secondes épreuves ; je n'ai envoyé à Gauthier-Villars mon adresse que peu de temps avant la fin des premières épreuves. Tout d'abord, je n'avais pas envie de les corriger, puis cela m'a paru un bon travail de vacances grâce auquel on a l'air de faire quelque chose à peu de frais. Je suis content de les avoir relues, car j'ai trouvé ou cru trouver quelques inexactitudes. Pour l'une de mes corrections, il m'est venu des remords. A un moment, vous parlez du célèbre ensemble défini à l'aide des

systemes de numération de base 2 et 3 et qui est non dense, de mesure nulle et de la puissance du continu²⁵¹. J'ai dit que la définition était incorrecte ; c'est que j'ai supposé que vous vouliez définir l'ensemble parfait que l'on considère ordinairement ; depuis je me suis demandé si vous désiriez que l'ensemble soit parfait. Si vous ne le désirez pas tout va bien, il faut seulement dans la définition géométrique dire qu'on enlève en même temps que certains intervalles une certaine extrémité de ces intervalles. Au reste, là comme ailleurs, le seul but de mes corrections est d'appeler votre attention sur certains points.

J'arrive à la page 61. On ne peut pas écrire $P(x) = xQ(x)$, car le terme constant k de $P(x)$ est la somme des premiers termes de la série

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1.3}{2.4} - \frac{1.3.5}{2.4.6} - \dots,$$

somme qui n'est jamais nulle. Il faut écrire $P(x) = k + xQ(x)$; et l'on peut alors raisonner à peu près comme dans le texte à la condition de tenir compte de ce que k tend vers zéro quand le nombre de termes de $P(x)$ augmente indéfiniment. Cela complique encore un peu et est au fond assez loin de ma démonstration, qui emploie la ligne polygonale de Volterra et Runge, mais pas le $\alpha(x)$ de Runge.

Si l'on veut déduire du développement de $\sqrt{x^2}$ une démonstration du théorème de Weierstrass par la méthode de Runge, on peut il me semble opérer plus simplement en employant une série dont je parle dans ma note.

Remarquons que $\alpha(x)$ a pour intégrale indéfinie la fonction $A(x)$ égale à x pour $x < 0$ et à 0 pour $x > 0$. Or on a

$$A(x) = \frac{1}{2}(x - |x|),$$

$$A(x) = \frac{1}{2}[x - 1 - \frac{1}{2}(x^2 - 1) + \frac{1.3}{2.4}(x^2 - 1)^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}(x^2 - 1)^3 + \dots].$$

D'après le théorème des séries entières, on en déduit

$$\alpha(x) = \frac{1}{2}[1 - 2x\{\frac{1}{2} - \frac{1.3}{2.4} \cdot 2(x^2 - 1) + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot 3(x^2 - 1)^2 + \dots\}].$$

Il ne faut d'ailleurs pas écrire cela en mettant $2x$ en facteur de façon à éviter la divergence pour $x = 0$ ($\alpha(0) = \frac{1}{2}$) (je dois avoir dit une ânerie à ce sujet dans ma note du Bulletin²⁵²) et alors en prenant assez de termes on a $\beta(x)$, car la série $\alpha(x)$ est

uniformément convergente à l'extérieur de $(-n, +n)$ ou plus exactement dans $(-1, -n)$ et $(+n, +1)$.

On peut aussi faire comme il suit. Vous remarquez dans votre démonstration que

$$\alpha(x) = \frac{x - |x|}{2x},$$

au lieu de cela remarquez que²⁵³

$$\alpha(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{|x|} \right) = \frac{|x| - x}{2|x|}$$

et toute difficulté relative à la division par x disparaît. En effet, on a

$$\alpha(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2|x|} = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} (\sqrt{x^2})^{-\frac{1}{2}},$$

d'où le développement $\alpha(x)$ de la page précédente. Cette dernière méthode est, des trois, la plus simple.

Au sujet de la formule de Lagrange. Lorsque je cherchais à démontrer simplement le théorème de Weierstrass, j'ai beaucoup essayé de l'employer ; et sans succès. Je me rapelle que, la première fois que je vous ai parlé de ma démonstration, vous m'avez dit qu'on devait arriver au théorème de Weierstrass par la formule de Lagrange, et en termes tels que j'ai cru, pendant 2 ou 3 jours, jusqu'à ce que je vous revoie, que vous en aviez une démonstration simple par cette voie. Ce qui m'étonnait fort, je puis le dire sans trop de fatuité, tant j'avais peiné en vain. Je restai persuadé que la formule de Lagrange ne pouvait pas conduire au résultat. L'exemple que vous donnez a été pour moi le bienvenu. Seulement il me semble que vous n'avez pas le droit d'en conclure que cette formule de Lagrange ne peut pas conduire au résultat²⁵⁴.

Il est certain qu'en tant que formule d'interpolation elle ne donne pas une approximation indéfinie, puisqu'alors on doit l'appliquer à partir de valeurs de la variable imposées. Cependant, on peut se demander si en choisissant astucieusement les valeurs de la variable, d'après la nature de $f(x)$ (supposée entièrement connue), on n'arriverait pas à des polynômes d'approximation tels qu'on les désire. A mon avis, il faudrait ajouter à votre remarque de la page 75 : (du moins si on applique cette formule de telle ou telle manière).

Méray a montré l'insuffisance de la formule d'interpolation pour les approximations, dans le cas des variables complexes ; je ne crois pas qu'il y ait rien à tirer de ses remarques quant au réel²⁵⁵.

Je reçois votre note III²⁵⁶, je ne vous l'envoie pas corrigée (je n'ai vu que *tous* nombre). J'y fais toujours une vague objection : vous définissez une fonction qui n'est pas des classes 0,1,2; mais vous ne savez pas si elle est ou non de celles auxquelles s'applique la classification de Baire. Il est vrai que, pour peu qu'on y réfléchisse, on en est intimement persuadé; cependant, j'ai été assez nigaud, vous le savez, pour croire, quand je pensais²⁵⁷ avoir démontré l'inexistence des classes > 4 , qu'on arrivait ainsi à une fonction échappant à cette classification. Un complément me paraît utile pour préciser la nature de la fonction que l'on obtient. Dans le mémoire que j'ai envoyé à Jordan, je prouve la correspondance jusqu'au bout, et avec les correspondances que j'ai choisies on a exactement une fonction de classe 3 (ou de la classe supérieure à celle où l'on s'arrête ; l'existence effective des fonctions de classe α (α de 2^e espèce) est d'ailleurs facile à prouver)²⁵⁸.

Pour ma note. Elle me paraît un peu longue et, pour que l'on voit l'intérêt du théorème final, il faudrait, à mon avis, l'allonger ; tel que je le donne on voit bien qu'il peut servir à reconnaître qu'une fonction est de classe 1, on voit peu qu'il permet d'affirmer que certaines fonctions n'en sont pas. Ce qu'on voit souvent en remarquant que pour qu'un ensemble soit la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés il faut et il suffit que ce soit l'ensemble des discontinuités d'une fonction ; on peut d'ailleurs exclure (grâce à Volterra²⁵⁹) certains ensembles de ces ensembles de discontinuités. Je ne parle pas de tout cela dans le mémoire de Jordan, parce que c'est particulier à $\alpha=1$, de sorte que j'ai l'intention de le publier dans la Société Mathématique ; mais cela n'est pas une raison pour raccourcir ma note si vous voulez la garder.

Excusez ma longueur. Cordialement.

H. Lebesgue

XXXIX

Beauvais, 56 rue Villebois Mareuil, 26 août 1904

Cher Monsieur,

Je ne puis consulter Crelle mais d'après la forme de la phrase de Veblen²⁶⁰ il me semble que la priorité de Heine est contestable. Laissez-moi vous raconter une histoire.

Pendant ma première année d'école (94-95), je m'aperçus que la définition correcte, que nous avait donnée Goursat, pour la convergence uniforme différait de celle donnée dans le Picard²⁶¹. C'est en étudiant ces questions que mon attention a été attirée sur le théorème de Weierstrass d'une part et que j'ai trouvé la condition d'Arzela d'autre part²⁶². La démonstration que j'en avais est la première des deux que vous donnez, seulement, au lieu de m'y appuyer sur votre théorème, je le démontrai²⁶³. Dans ma démonstration je ne donnai d'ailleurs nullement l'énoncé du théorème général ; je l'avais démontré sans l'avoir dégagé du reste de la démonstration et sans m'être douté de son énoncé et de son importance, ce qui est d'autant moins étonnant que j'ignorais alors jusqu'au sens mathématique du mot ensemble.

Remarquez que Veblen ne dit pas que Heine a énoncé votre théorème dans la démonstration de la continuité, mais qu'il est impliqué, compris, inclus, sous-entendu dans cette démonstration. Jusqu'à vérification je crois que Heine a donné pour la continuité uniforme la démonstration de votre livre²⁶⁴ en remplaçant l'emploi du théorème par sa démonstration dans le cas particulier en question, mais sans l'énoncer et sans le dégager du reste. Veblen a peut-être été victime de ceci : une des premières applications que l'on ait faite de votre théorème est celle à la continuité uniforme ; on a ainsi un raisonnement presque identique à celui de Heine qui n'en diffère que par l'amalgamation de deux démonstrations ; de là à conclure que Heine a dissocié l'amalgame il n'y a qu'un pas, mais ??

Pour ma part, je n'ai compris qu'il y avait là matière à énoncé qu'après avoir vu, dans la suite, votre théorème. Alors, naturellement, j'ai remplacé votre démonstration par la mienne, sans m'apercevoir qu'il y avait changement dans l'énoncé. Par la suite, je n'ai plus jamais repensé à votre énoncé et à votre démonstration

de sorte que, quand j'ai appliqué le théorème²⁶⁵, je n'ai pas été arrêté par les difficultés qui proviennent du dénombrable. C'est Montel, après que je venais de donner ma démonstration au Collège de France, qui m'a indiqué la différence entre les énoncés laquelle m'avait tout à fait échappé, bien qu'elle soit fondamentale en un certain sens.

Je ne me suis jamais reporté à la démonstration de la continuité uniforme basée sur votre théorème (modifié) que donne Schoenflies, je ne sais pas exactement où²⁶⁶, je ne connais cette démonstration que par Montel. Je me demande si Schoenflies, ou quelque autre, a fait la faute de sauter sur les difficultés du dénombrable ou s'il a publié, avant moi, la démonstration pour le cas général. Tout cela est de maigre importance.

Autre chose, vous êtes d'une nullité remarquable en alephs. J'ai appris autrefois qu'il y avait des alephs écrits très différents des alephs imprimés, mais ma science ne va plus jusqu'à me souvenir exactement de leurs formes. Je crois que nous pourrions adopter, jusqu'à plus ample informé, le signe

\aleph \aleph \aleph

qui me paraît voisin de celui qu'on m'a enseigné jadis.

Si König n'a pas encore un ensemble de nombres de puissance \aleph , je ne conçois pas du tout ce que peut signifier sa démonstration ; comme vous, j'attends.

Au sujet de \aleph , et de sa comparaison avec le continu, j'ai un petit résultat dans mon mémoire de Jordan²⁶⁷. Pour définir une fonction échappant à toute représentation analytique, j'avais besoin de faire correspondre, par une loi bien déterminée, à chaque nombre transfini de la première classe de nombres transfinis un nombre, au moins, compris entre 0 et 1 qui ne corresponde qu'à un seul nombre transfini. Seulement la correspondance que j'ai trouvée fait correspondre à chaque nombre transfini une infinité de nombres compris entre 0 et 1. Il faudrait savoir choisir dans ces nombres.²⁶⁸ Peut-être n'est-ce pas impossible et l'on aurait ainsi l'ensemble de nombres de puissance \aleph , ce qui ne donne d'ailleurs pas le théorème de König²⁶⁹.

Je ne suis pas si sévère que j'en ai l'air et, bien que je trouve que l'on aurait pu mieux rédiger, je n'ai pas de Fréchet une

trop mauvaise opinion²⁷⁰. Car je n'ai, pour ma part, jamais compris bien les cours que j'ai suivis que fort longtemps après.

Bien cordialement à vous.

H. Lebesgue

XL

Paris, le 15 septembre 1904

Cher Monsieur,

En 1899, Painlevé a publié 2 notes dans les *Comptes Rendus*²⁷¹, ce sont celles qui sont développées dans la note de votre livre. En 1898 Painlevé avait publié toute une série de notes sur la représentation des fonctions à l'aide de série de polynômes et de fractions rationnelles²⁷², où il retrouvait, entre autres, les résultats de Runge ; c'est dans l'une de ces notes *Sur le développement des fonctions réelles non analytiques*, 7 février 1898, qu'il donne le résultat relatif aux fonctions indéfiniment dérivables.²⁷³

Dans la même note, il indiquait, cela n'a qu'un intérêt retrospectif, que toute fonction n'ayant qu'une infinité dénombrable de points de discontinuité (cet ensemble de points étant supposé dense nulle part) est représentable par une série de polynômes (ensemble énumérable condensé dans aucun intervalle).

En voyant la longueur de la note de Painlevé, j'ai prévu que vous auriez des difficultés de mise en page. Je supprimerai donc, si possible, quelques lignes.

La note de Painlevé ne serait-elle pas plus à sa place après le livre sur les fonctions de variables complexes et leur représentation par des séries de polynômes, que vous avez l'intention de faire ?²⁷⁴

Le Veblen (Oswald) est un mauvais plaisant. Voici presque traduite mot à mot la démonstration de Heine²⁷⁵.

Soit $f(x)$ continue en tout point de a à b . On peut trouver x_1 tel que pour $a < x < x_1$ $|f(x) - f(a)| < 3\epsilon$ et prenant x_1 le plus grand possible on aura $|f(x_1) - f(a)| = 3\epsilon$. De même on détermine x_2 par $x_1 < x < x_2$ et $|f(x) - f(x_1)| < 3\epsilon$ et $|f(x_2) - f(x_1)| = 3\epsilon$, et ainsi de suite. On arrive ainsi à b après n opérations,

sinon x_1, x_2, \dots aurait une limite X . Or on peut trouver n tel que pour $X-n < x < X$ on ait $|\delta(x) - \delta(X)| < \varepsilon$, d'où pour x et y ($X-n < y < X$) $|\delta(x) - \delta(y)| < 2\varepsilon$ ce qui est incompatible avec $|\delta(x_n) - \delta(x_{n+1})| = 3\varepsilon$.

Vous voyez, dans tout cela il n'est pas question du tout de couvrir un intervalle avec une infinité d'autres puis de choisir. D'ailleurs en dehors de la démonstration citée rien ne peut justifier même de loin l'affirmation de Veblen.

En résumé. Heine ne parle en rien, rien du tout, ni même de loin, de votre théorème et il donne une démonstration différente de celle qui s'en déduit, différente même quand on suppose amalgamée la démonstration de la continuité uniforme et celle du théorème de Heine-Borel.

C'est bien la gaffe que j'avais supposée mais plus horrible que je ne l'avais prévue.

Cordialement.

H. Lebesgue

XLI

Paris, 21 septembre 1904

Cher Monsieur,

J'ai reçu ce matin une lettre de Montel (nommé à Montpellier²⁷⁶) me demandant pour Boutroux des renseignements sur ma future conduite pour le Collège de France²⁷⁷. Ceci me rappelle que je ne vous ai pas répondu sur le même sujet.

Une des raisons de mon silence est que j'étais peu fixé. Les voyages à Paris n'auront plus pour moi le même intérêt qu'il y a deux ans et d'autre part un séjour de 3 mois ici ne serait guère commode. L'an dernier nous aurions pu, grâce à un abonnement comme celui que j'avais il y a deux ans, nous installer à Paris, maintenant cela n'est plus possible. Pour ces raisons, et d'autres, je n'étais guère disposé à demander le Collège de France, mais il y a les 3000 francs qui sont, comme vous me l'avez fait observer jadis, une raison sérieuse qui ne peut être laissée de côté.

D'autant que, si j'ai été augmenté de 500 F, au premier

janvier, par un juste retour des choses ici-bas, on m'a supprimé l'indemnité de 500 F que j'avais pour une heure de cours supplémentaire. D'où pour moi, grâce à la retenue, l'unique avantage de toucher 25 F de moins. Et d'autre part ma famille doit, selon toute apparence, s'augmenter vers la fin d'octobre.

Pour cette raison galette je suis donc candidat. D'après ce que l'on m'a dit, et ce que vous m'avez dit, cela n'est pas fatigant et consiste uniquement à attendre qu'on se souvienne de mon existence.

Si je suis nommé je ferai mon cours sur les séries trigonométriques et je pourrai vous donner un petit livre. En tout cas je ferai ce livre, moins rapidement si je ne fais pas le cours du Collège de France, et vous pouvez l'annoncer en préparation : *Leçons sur les séries trigonométriques*²⁷⁸.

Je compte encore rester ici une dizaine de jours.

Bien cordialement.

H. Lebesgue

8, rue des Prouvaires, Paris I.

Je n'ai plus reçu d'épreuves, je suppose que c'est par suite de corrections dans la note de Painlevé.

XLII

Rennes, le 11 octobre 1904
11 boulevard de la Liberté

Cher Monsieur,

Un certain nombre de corrections n'ont pas été faites. Les voici²⁷⁹.

Page 152 (milieu) : Au lieu de (Le $p+1$ ^{ième} terme) mettre (Le p ^{ième} terme).

Notes de la page 152 : permuter dans le texte et au bas de la page les (1) et (2).

Dans la note 2, permuter (comme le fait M. Baire) et (l'on excluait de la classe 1 les fonctions continues il faudrait).

Page 153²⁸⁰ (4 et 5 lignes) : au lieu de φ_n mettre φ_n .

Bas de la même page : supprimer Heine.

P.154²⁸¹, ligne 9 : rie \uparrow n ;

ligne 23 : intercaler, comme il est ici indiqué :

f est, à moins de ε près, de classe 1 dans $(-\infty, +\infty)$;

; après la modification, f est, à moins de ε près, de classe 1

P.154, note (2) : La soutenance de la thèse de Baire est de 1899, mais son apparition aux *Annali* n'est-elle pas de 1900 (?)²⁸².

Si oui, mettre soit : soutenue en mars 1899, soit : parue aux *Annali* en 1900.

Note (3) : lui ~~X~~ sont dus.

Page 155²⁸³, note (1) : conten~~y~~s 3 .

J'ai remarqué page 161²⁸⁴, dans la note, qu'en à la place de guère. Cette note me paraissait nécessaire, vous le savez.

Je suppose qu'il s'est produit pour les corrections l'erreur que vous m'aviez déjà signalée. Je ne sais pas si j'ai bien reproduit ici les corrections que j'avais faites, en tout cas je n'ai pas reproduit celles qui avaient pour but de gagner de la place. J'ai fait une ou deux nouvelles corrections, tenez donc compte de cette lettre même si vous avez mes anciennes épreuves.

Page 161²⁸⁵ : n_n 3 .

Je vous remercie pour la préface²⁸⁶.

Bien cordialement à vous.

H. Lebesgue

XLIII

Rennes, le 11 octobre 1904

Cher Monsieur,

J'ai reçu ce matin les 5 exemplaires de votre livre et un exemplaire de celui de Baire²⁸⁷. J'ai coupé les pages de ce dernier et il m'est apparu qu'une réflexion que vous m'avez faite jadis

était fort exacte. Qu'est-ce que le lecteur va trouver qui ne se trouve ni dans vos livres, y compris le dernier, ni dans la note de mon livre²⁸⁸ ; c'est peut-être là l'inconvénient de publier les ouvrages de la collection avec trop peu d'intervalle pour qu'on soit sûr d'éviter les trop grandes répétitions. Je n'ai pas vu qu'il y ait dans Baire de résultats nouveaux, ce qui ne veut pas dire que le livre soit mauvais en tant que livre de vulgarisation et d'exposition, et je lui ai trouvé le grand avantage de mettre, par contraste, bien en évidence la simplicité de ma note de votre livre.

Puisque j'ai l'occasion de vous parler de Baire, je veux vous dire que, contrairement à ce que vous m'écriviez, il y a entre nous quelque chose d'autre qu'un excès de susceptibilité. Ce n'est pas pour que vous preniez parti, mais pour que vous ne me croyiez pas un peu fou.

La discussion épistolaire que nous avons eu l'an dernier était relative à la façon dont jugeaient les pontifes et non pas à Baire. Ce n'est pas parce que Baire a été candidat puis nommé au Collège de France que je me suis fâché avec lui, mais parce que je l'ai jugé tout à coup différent de ce que je l'espérais.

Il m'est apparu que Baire était égoïste et que, s'il admettait que d'autres que lui savaient raisonner sur la théorie des fonctions, c'était à condition qu'il reste le surhomme.

J'avoue que depuis longtemps j'avais été choqué de certaines façons de procéder de Baire. J'avais été étonné de la façon dont Baire jugeait certains faits et je me demandais ce qu'il fallait penser de la façon dont Baire citait les autres.

Baire n'avait fait mystère à personne qu'immédiatement après la publication de sa première note, Volterra, par l'intermédiaire d'Appell qui avait présenté la note, lui avait envoyé les résultats qu'il possédait et qu'il n'avait pas publiés sur les $f(x, y)$ ²⁸⁹. J'avais été très surpris de ne pas trouver mention de ce fait dans la thèse de Baire.

Ceci d'ailleurs m'avait aidé à trouver moins drôle la façon dont Baire m'avait cité. Un ami aimable aurait pu, et peut-être dû, me citer dans sa thèse : 1° Au sujet des fonctions ayant ^{une} infinité dénombrable de discontinuités ; 2° Au sujet des fonctions de plusieurs variables continues par rapport à chacune d'elles. J'avais démontré en effet que ces fonctions, si elles ont n variables,

sont de classe $n-1$ au plus et Baire arrive seulement et par un procédé très pénible à démontrer qu'elles sont de classe $n-1$ sur chaque courbe²⁹⁰.

J'ajoute que j'avais indiqué à Baire un raisonnement simple démontrant *a priori* l'identité de ses problèmes I et II²⁹¹, mais l'emploi de ce résultat aurait diminué la thèse de Baire de près de moitié.

Et bien c'est au sujet du théorème de Weierstrass (sujet distinct du sien) qu'il me cite.

J'avoue qu'après cela j'étais étonné que Baire se plaigne à moi qu'on ne le cite pas assez et qu'il me demande, à Nancy, de faire un compte rendu de sa thèse pour le *Bulletin des Sciences Mathématiques*, ce que j'ai refusé parce que, ai-je dit avec raison, un compte rendu de moi, inconnu, était égal à pas de compte rendu.

J'ai été plus étonné, quand lorsque vous nous avez proposé à l'un et à l'autre d'être candidat en février 1902, que Baire, avant d'avoir reçu ma lettre lui disant que je ne serai pas candidat contre lui, lettre que je lui ai écrit au reçu de la vôtre, m'écrive qu'il traiterai telle et telle chose et qu'il s'arrangerait de telle et telle manière pour le temps. Et tout cela sans un mot relatif à la possibilité de ma candidature. J'ai été plus étonné encore quand, arrivant à Paris en juin de la même année, j'appris par Perrin, qui le tenait de vous, que Baire était décidé depuis plus de deux mois à ne pas se présenter. Il ne m'en avait nullement averti.

Au mois de juillet de la même année, ce qui m'était tout d'abord proposé c'était le Collège de France pour un an. Il me fallait pour cela, car la retraite de Morin²⁹³ était inconnue, abandonner l'Enseignement secondaire et compléter mon traitement avec des colles. J'écrivis à Baire que, dans ces conditions, je regrettais beaucoup de ne pouvoir lui être utile, mais que je ne serai pas candidat.

Baire me répondit qu'il n'y avait pas à s'occuper de ce qui arriverait l'année d'après, qu'il fallait, avant tout, boucher la place à Servant. Alors je fus candidat interprétant cela comme son renoncement dans ces conditions. Ces conditions ne se sont pas réalisées de sorte que je ne puis rien affirmer, mais j'estime que je m'étais mépris sur le sens énigmatique de la phrase de Baire.

Ma nomination à Rennes survenant j'écris à Baire qu'il pourra

être candidat l'an d'après.

Vers Pâques 1903 paraît le compte rendu de ma thèse par Picard. Il me semble alors que Baire interprète comme dirigée contre lui toute phrase aimable pour moi²⁹⁴. Au même moment il se décide à se présenter au Collège de France et, alors qu'il aurait été simplement poli qu'il m'avertisse et me demande quels étaient mes projets, je ne suis prévenu que par vous et après qu'il a déjà fait acte de candidature auprès de Tannery ou d'Appell je ne sais plus.

Cependant je passe sur tout cela et j'admets que son état maladif est seul en jeu. J'abandonne l'idée de me représenter au Collège de France et ce n'est que lorsque mon mariage est fixé et sur les instances de ma belle-famille que je reviens sur ma décision. La première personne que j'en avertis est Baire. Je viens exprès pour cela à Paris, je le vois ; il ne me dit rien et nous causons d'autre chose. J'interprète stupidement, toujours le croyant autre : il ne veut pas s'engager, il veut réfléchir, il m'écrira sa détermination. Sa détermination je l'ai sue par vous en apprenant qu'il faisait des démarches, qu'il faisait écrire par Tannery à Levasseur pour que Levasseur connaisse ses droits. Or je lui avais dit pendant les vacances que j'avais prévenu Levasseur qu'il serait candidat, que seules des raisons de santé l'avaient empêché de l'être l'année d'avant et que, si cela avait été, tous ceux qui m'avaient appuyé l'auraient appuyé.

A partir de ce moment, j'ai commencé à comprendre Baire ; j'avais quelques doutes encore. Avait-il hésité avant de se décider et n'était-ce pas la gêne qui l'avait empêché de m'avertir ? Non, en janvier, février 1903, nous avons, avec Baire, échangé quelques lettres. Il m'a appris qu'"il n'avait pas hésité, qu'il n'avait pas à hésiter". J'ai appris qu'aussitôt que je lui ai fait part de mon changement de détermination j'avais baissé dans son estime (toujours sans hésitation) et que, bien qu'il avait fait son possible pour ne pas parler de moi dans ses démarches, il n'avait pu cacher entièrement ce qu'il pensait de ma façon d'agir.

Enfin il m'a parlé de la Justice et répété, comme l'aurait fait Painlevé, de beaux discours sur l'avantage d'être égoïste et de ne pas s'engager à rien. Alors je n'ai plus eu de doutes et j'ai cessé les relations.

Puisque je veux me défendre d'être atteint du délire de

la persécution, j'insiste sur ce qui est le plus sensible. Ce n'est pas une habitude bizarre de Baire de ne pas citer les travaux qu'il connaît et se rapporter aux siens. Je crois par une phrase d'une de vos lettres qu'elle vous avait semblé bizarre cette habitude de Baire (je parle de "*parue avant la thèse de Baire*" (soulignée) au sujet des fonctions à infinité dénombrable de points de discontinuités) ; mais vous savez de plus quelle importance attache Baire à la priorité (recherche de l'exacte date de l'apparition de définir = prononcer un nombre fini de mots, par exemple).

Dans son nouveau livre je trouve 2 exemples de ce manque de probité scientifique. La première méthode de Baire ne s'appliquait, pour son théorème, qu'aux fonctions d'une variable. Baire ajoute textuellement qu'il ne sait pas si le théorème est exact dans le cas de 2 ou plusieurs²⁹⁶. La semaine où j'ai reçu la thèse de Baire, la semaine de sa soutenance, j'ai indiqué aux *Comptes Rendus* comment tout le théorème s'appliquait au cas général²⁹⁷. Vous ne trouverez nullement cela dans le livre de Baire. Il est vrai qu'il ne dit pas non plus que le cas, le plus original, celui d'une variable est de lui ; mais est-ce la même chose ?²⁹⁸

Vous trouverez à un certain endroit du livre de Baire un petit raisonnement très simple ramenant le cas des fonctions non bornées à celui des fonctions bornées²⁹⁹. Mais Baire ne dit nulle part, ce que je savais depuis longtemps, que ce raisonnement supplémentaire est indispensable pour étendre à tous les cas son théorème, qu'il avait énoncé d'une manière générale³⁰⁰, mais qu'il n'avait démontré que pour les fonctions bornées.

Je me suis abstenu de faire paraître ce complément indispensable, comme je me suis abstenu jusqu'à ces derniers temps de rien publier ou presque relatif aux histoires de Baire. Je ne voulais pas mettre en évidence les lacunes et les complications extrêmes et inutiles des travaux de Baire et vous savez que c'est sur vos conseils que j'ai enfin pris à cet égard un parti raisonnable.

Baire savait d'ailleurs que je possédais, mal mis au point, des résultats sur ces travaux, je le lui avais dit. Peut-être aurait-il dû m'en tenir compte et réagir un peu contre cette idée de Picard et autres que mes travaux procédaient des siens.

Parce que par camaraderie autant et plus que par Justice j'ai souvent cité Baire, on en a conclu que mes travaux procédaient des

siens. Au contraire je n'avais pas, jusqu'à ces derniers temps, publié de tels travaux et je renonçais ainsi à prouver que j'étais capable de m'occuper de sujets un peu différents de ceux de ma thèse. D'ailleurs je prétends maintenant avoir fait beaucoup plus que Baire, mais ce n'est pas la question. En un sens, je le sais, je suis injuste avec Baire puisque je tiens compte non seulement de ses actes mais de leurs conséquences. Mais je crois qu'en gros ces conséquences sont celles qu'il désire.

Puisque j'écris tant de pages sur Baire je puis dire encore que la phrase de Picard qui l'a froissé dans le *Bulletin des Sciences Mathématiques* de juin (absurde en elle-même prise à la lettre) contenait ou précédait un mot aimable pour moi³⁰¹.

Tout cela ne m'empêche pas de rendre à Baire ce qui lui appartient et vous verrez dans mon mémoire du journal de Jordan que malgré tout je le cite parfois³⁰³.

Je ne sais pas (ou plutôt si, je sais bien, c'est en voyant la bonne foi de Baire) pourquoi il m'est venu aujourd'hui le besoin irrésistible de liquider avec vous cette histoire Baire et vous montrer que le rapprochement n'est pas près de se faire.

Je ne veux pas du tout vous mêler à nos disputes, mais j'avoue que, la valeur scientifique étant mise de côté, je ne serais pas fâché de vous avoir conduit à m'estimer plus, au point de vue moral, que Baire. Tout au moins j'espère vous avoir fait comprendre que je ne suis pas fou et que ce n'est pas par envie, par jalousie, par colère d'être évincé que je me suis brouillé avec Baire.

Mais, comme je suis d'autre part brouillé avec Lacour, ma réputation de mauvais coucheur ne s'effacera peut-être pas facilement de votre esprit.

Je crois, de ce côté, il est prudent de ne rien faire pour rendre plus fréquentes les relations et je préfère ne pas offrir d'exemplaire moi-même à Lacour. J'attends pour Lacour et Le Roux ce que vous déciderez. Il faut bien se dire d'ailleurs que Lacour ne sait pas ce que reçoit Le Roux et qu'il est peu probable qu'il apprenne jamais qu'il y a eu de notre part don à Le Roux seul.

Le Roux est trop prudent pour évoquer mon nom devant Lacour.

Je n'ai aucune nouvelle du Collège de France. Pour le cas où je serais nommé je serais heureux de ne pas faire coïncider mes

cours avec ceux du Collège de France, ni avec ceux de la Sorbonne ; surtout avec ceux des élèves de seconde année de l'Ecole³⁰⁴. Pouvez-vous me donner quelques renseignements à cet égard en tenant compte aussi des cours de l'Ecole.

Il est probable que je ne ferais qu'un cours par semaine pour avoir le temps de le préparer.

Pardonnez-moi de m'être vidé sur la question de Baire (j'ai écrit jadis à Baire tout ce que je vous ai écrit³⁰⁵ ; il s'est mal défendu à mon avis) et recevez tous mes remerciements pour les exemplaires et pour les renseignements que je vous demande. J'écrirai un mot demain à Gauthier-Villars.

Bien cordialement.

H. Lebesgue

XLIV

Rennes, le 13 octobre 1904

Cher Monsieur,

Merci pour vos renseignements ; je ne savais pas que les professeurs du Collège de France se réunissaient aujourd'hui, je pensais que c'était proche.

Inutile de dire que j'ai apprécié le livre de Baire³⁰⁶ à un point de vue tout particulier, j'ai réservé son intérêt comme livre d'exposition. Je m'étonne qu'on ne s'aperçoive pas des doubles emplois³⁰⁷. D'ailleurs il est évident qu'entre le livre de Baire et ma note³⁰⁸ par exemple, c'est le livre de Baire qu'on choisira pour apprendre ces questions. Ne serait-ce que parce qu'il a la bonne idée de procéder par échelons³⁰⁹, comme dans sa thèse, et de faire précéder l'étude du cas général, qui suffit au point de vue logique, de l'étude des cas particuliers, indispensables pour la compréhension.

J'avoue que je me résouds difficilement à cela, j'ai tort, je le sais, mais ce n'est pas de cela qu'il s'agit.

Je ne désire nullement que vous me répondiez sur Baire. Si même ce sujet de conversation vous ennuie, il n'a rien d'attrayant, n'en causons pas. Ce n'est pas d'ailleurs que je fuis la

conversation sur ce point.

J'ai été bien content que vous m'avez écrit un mot sur Picard et la mesure³¹⁰, il me semble après ce que vous m'avez écrit là que vous comprenez bien dans quel état d'esprit je vous ai écrit ma dernière lettre.

Moi non plus je n'étais pas cité³¹¹ ; avec cette aggravation qu'il s'agissait d'un livre détaillé et non d'un compte rendu et qu'il s'agissait d'une absence de citation due à la personne directement intéressée. D'où mécontentement grave au reçu du livre de Baire.

J'avoue ne pas avoir vu dans le compte rendu de Picard ce que Baire et vous y avez vu³¹² et, bien que vous soyez plus renseigné que moi qui ne le suis guère sur l'état d'esprit de Picard, je crois difficilement à ce que vous me dites.

Il faudrait que Picard se doute que Baire interprétera ses phrases avec les sous-entendus que vous y voyez ; il faudrait qu'il sache qu'être agréable à moi c'est être désagréable à Baire. Tout cela est compliqué et suppose la connaissance exacte de la mentalité de Baire. Si Picard a vu Baire à Paris cette année il n'avait du moins pas les mêmes renseignements quand il a écrit le compte rendu de ma thèse et celui-ci a été interprété comme le dernier.

Du moins rendez-moi cette justice que je n'ai pas été fâché de ce qu'il y a de flatteur pour Baire dans le compte rendu de sa thèse³¹³.

Je ne vois aucun inconvénient à donner à Le Roux de ma part³¹⁵. Je voulais lui parler de vous parce que vous m'aviez parlé de lui.

Je reprends mes cours ici demain.

Merci de vos renseignements, bien cordialement.

H. Lebesgue

XLV

Rennes, le 29 octobre 1904

Cher Monsieur,

Pour commencer par les choses sérieuses, je vous annonce la

naissance de ma fille arrivée en ce bas monde il y a eu hier vendredi huit jours.

Ma femme et la petite vont bien.

Depuis vendredi je suis transformé en garde-malade et tout mon temps se passe en précautions aseptiques et en baccalauréat. Deux besognes ennuyeuses.

Aujourd'hui je viens de corriger les épreuves de la note de la Société Mathématique de France³¹⁶ ; je me demande laquelle paraîtra la première de cette note ou de celle de votre livre et si les "récentement paru" ou "qui paraîtra prochainement" sont bien exacts. Mais cela a peu d'importance, elles paraîtront presque ensemble.

Je vous remercie de m'avoir réservé des exemplaires, mais je ne voudrais pas que cela vous gêne. Si cela ne vous gêne pas, j'accepterai 4 exemplaires : 1 pour moi, 1 pour Montel, Lycée de Montpellier, 1 pour Fatou, astronome adjoint à l'Observatoire de Paris, 1 pour Dubesset, 8 rue Sainte Marie à Nancy.

Mais seulement si cela ne vous gêne en aucune façon. Si cela ne vous gêne pas, ajoutez ces noms à votre liste et faites faire directement les envois par Gauthier-Villars.

Bien à vous.

H. Lebesgue

Avez-vous regardé le mémoire de Heine ?

XLVI

Rennes, 6 novembre 1904

Cher Monsieur,

Je ne vous ai pas parlé de M. Le Roux à cause de M. Lacour et de sa si connue susceptibilité. Mes affaires avec Lacour ont empiré, ces jours derniers dans une réunion pour décider des sujets de licence M. Lacour s'est mis à crier comme un furieux et j'ai dû quitter la salle dans l'impossibilité où j'étais d'arriver à me faire entendre.

Malgré cela je ne puis m'empêcher de prendre des ménagements

à son égard, j'ai tort parce qu'il les considère toujours comme la reconnaissance implicite de mes torts et parce que j'enrage ensuite pendant deux jours d'avoir fait ces concessions.

L'une de ces concessions était de ne pas offrir un tiré à part à Le Roux, qui les lit, sans en offrir un à Lacour, qui ne les lit pas. Pour cette fois je ferai bien volontiers exception, et je dirai à M. Le Roux que vous m'avez demandé de lui offrir un exemplaire. J'ajouterai, on ne peut toujours respecter la vérité, que j'avais d'ailleurs l'intention de lui en donner un.

Le numéro de juin du *Bulletin de la Société Mathématique* est celui où Picard analyse mon livre ; sauf l'éternelle phrase de Picard "que je ne perds pas de vue entièrement des parties à lui plus sympathiques des mathématiques"³¹⁷, je ne vois rien qui ait pu offenser Baire. Et encore cela est-il anodin et je ne pense pas dirigé contre lui.

Je suppose plutôt que Picard a repris cette phrase de l'analyse de ma thèse pour le ministère³¹⁸, qu'il l'a mise dans le *Bulletin* pour l'analyse de ma thèse³¹⁹, puis de nouveau dans le *Bulletin* pour l'analyse de mon livre. C'est d'ailleurs je crois par ce procédé qu'a été fait l'ensemble de cette analyse.

Je lui fais, vous voyez, le reproche de ne pas être très étudiée ; mais je ne l'ai pas trouvée hostile comme je m'y attendais et au contraire plutôt bienveillante. Autant qu'il est possible, à mon avis, à Picard, d'être favorable à des travaux de ce genre³²⁰.

J'ai appris que Poincaré trouve mon livre bien³²¹ ; je ne sais pas jusqu'à quel point cela est exact, mais j'en ai été tout de même très flatté ; je ne croyais pas que Poincaré sût mon existence.

J'ai reçu ces jours-ci une analyse de d'Ocagne³²² qui a mieux lu, la table des matières au moins, que je ne m'y attendais. De tous ces côtés, je n'ai pas à me plaindre.

Pendant que j'écris ma fille, Suzanne, braille à pleins poumons ; elle s'est imaginée stupidement d'avoir mal aux yeux et cela a fort compliqué mes fonctions. Il n'y a d'ailleurs rien de grave de ce côté.

Bien cordialement à vous,

H. Lebesgue

XLVIII

Rennes, le 17 novembre 1904

Cher Monsieur,

M. Brillouin m'a annoncé ma nomination et, je ne croyais pas que pareille chose pût exister, le Collège de France ayant trop d'argent me donne 4000 au lieu de 3000.

Je ne sais pas encore quand j'irai à Paris.

Bien cordialement à vous.

H. Lebesgue

XLIX

Rennes, le novembre 1904³²³

Cher Monsieur,

Je ne m'étonne nullement qu'un autre que moi ait pensé à la démonstration de ma note³²⁴, le principe - calquer une théorie simple des fonctions continues - en est assez naturel pour cela. Je suis heureux que ce soit "un mineur"³²⁵ qui y ait pensé.

Il est fort possible même que Denjoy ait eu une démonstration convenable du théorème de Baire avant moi, car si j'ai l'idée de cette démonstration depuis Nancy ce n'est que l'an dernier que j'y ai un peu réfléchi et que je l'ai débarassée de propriétés étrangères qui s'y trouvaient mêlées dans mon esprit. Vous pourriez en trouver la preuve dans une de mes lettres de l'an dernier où je vous indiquais une démonstration fort compliquée³²⁶.

Depuis, bien entendu, j'ai réfléchi et je simplifierai encore ma note, il est inutile de s'en occuper, il est probable que Denjoy s'en chargera. Vous pouvez être assuré que je ne soulèverai pas de difficultés³²⁷.

Je ne comprends rien à la partie de votre lettre sur Heine-Borel. Comment peut on "escamoter le Borel au profit de Heine". Il n'y a rien dans Heine, où je n'y suis plus. Je n'ai vu dans Heine à l'endroit indiqué qu'un raisonnement qui est analogue à celui

qu'on peut employer pour démontrer votre théorème quand on a l'idée de ce théorème. Quand on réfléchit qu'il y a là une propriété ; qu'elle peut être utile, etc. Dans Heine ne figure même pas un ensemble, une collection infinie de points. On a des intervalles et l'on démontre qu'ils sont en nombre fini. Je prétends que, sans mauvaise foi, on peut dire que Heine n'a rien fait de plus, dans le sens de votre théorème, que les auteurs d'autres démonstrations sur la convergence uniforme.

A moins que je n'ai pas su regarder Heine ? L'avez-vous regardé ?

Ce matin j'ai ouvert le tome I des *Oeuvres* de Tchebichef et je n'y ai rien vu qui ressemble, d'un peu près, à vos considérations sur l'approximation³²⁸. Alors je me demande si j'ai réellement la berlue.

Bien cordialement.

H. Lebesgue

L

Rennes, le 10 décembre 1904

Cher Monsieur,

Autant que me l'ont permis l'éclairage et mon courage, j'ai vu le Denjoy hier dans le train. Je n'ai rien vu qui justifie les scrupules de Denjoy, de Baire ou de vous, je ne sais, sur la publication³²⁹. Il y a évidemment des mots communs dans Denjoy et moi, mais il n'y a pas de raisonnements ni même d'énoncés semblables. D'ailleurs j'avoue que je n'ai guère suivi les raisonnements, ils étaient trop difficiles pour moi d'autant que j'ignore ceux de Baire. Les résultats de Baire m'ont toujours intéressé, mais il y a bien peu de ses démonstrations que je connaisse.

Je vous remettrai le travail de Denjoy la semaine prochaine. Si vous croyez que cela doive l'encourager dites-lui que j'ai été intéressé par ses résultats. Ce que j'ai vu surtout, ce n'est pas pour Denjoy mais pour vous cela, c'est que, comme vous me le disiez, il nage dans le Baire comme dans son élément naturel.

J'ai réfléchi aussi à la démonstration de Baire³³⁰, et ce n'est

pas parce qu'elle est de Baire que je dis cela, mais il m'a semblé que ce qu'elle a tout d'abord de si séduisant c'est précisément son grand défaut : de faire intervenir un théorème de la théorie des fonctions là où il n'avait rien à faire en apparence ni en réalité. Il est certain que cette démonstration est celle que l'on peut exposer le plus facilement dans la rue à quelqu'un qui connaît les mathématiques, mais elle a cette qualité précisément parce qu'elle emploie des résultats antérieurs. Or à cause de cela elle ne peut plus servir de base à la théorie, je ne dis pas encore tout à fait d'axiome.

Si j'ai bien compris cette démonstration elle consiste en ceci :

1° Etant donné un point P définir le plus grand intervalle Π contenant P et qu'on peut couvrir avec un nombre fini d'intervalles donnés. Cela est commun avec la mienne ; mais tandis qu'il me suffit de considérer l'intervalle partiel donné contenant l'une des extrémités de P pour faire voir que cette extrémité est aussi extrémité de l'intervalle total donné, il faut encore chez Baire :

2° Démontrer (ce qui se conçoit comme évident et se démontre facilement, soit) que la longueur de Π est fonction continue de P .

3° Faire appel au théorème compliqué : une fonction continue atteint son maximum.

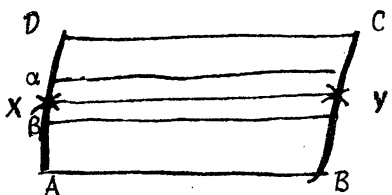
4° Diviser l'intervalle en segments inférieurs à ce maximum.

Bien entendu ma division de la démonstration est arbitraire, j'aurai pu comme Edouard Perrier³³¹ la diviser en un grand nombre de morceaux et en conclure que c'est une colonie, mais je crois que ma division fait bien voir ce qu'il y a de parasite dans la démonstration (très compliquée) de Baire : c'est l'introduction des fonctions, ce sont les 3^e et 4^e parties, La 2^{ème} sur la continuité est au fond celle que je fais pour étudier les extrémités de Π .

L'avantage de la démonstration de Baire c'est que, sans qu'on y change un mot, elle s'applique à tout nombre de dimensions, Et cela m'a fait voir quelles difficultés Baire a cru voir dans ma démonstration que j'ai eu le tort de n'exposer que pour une variable employant pour le reste la courbe de Peano, Elle ne se généralise pas à la manière de celle de Baire, elle se démontre par

réurrence.

Soit à couvrir tout $ABCD$. D'après le cas d'une dimension, on couvre tout de suite XY avec un nombre fini de domaines qui couvrent en même temps toute une certaine bande $\alpha\beta$. Et d'après le cas d'une dimension on couvre tout AD avec un nombre fini de ces $\alpha\beta$.



Pour montrer mieux tout ce qu'il y a d'analogie avec Baire, on peut exposer comme suit. Je prends le cas de 3 dimensions.

Soit P un point, soit Σ la plus grande sphère de centre P telle que toute sphère intérieure à Σ soit couverte par un nombre fini de domaines donnés δ . Je dis que Σ est la plus grande des sphères non extérieures au domaine total donné Δ .

Sinon les points de la frontière de Σ sont intérieurs à des δ qui découpent sur Σ des cercles, d'après le théorème démontré. (Pour le cas de 2 on peut prendre un nombre fini de ces cercles, donc de ces δ , pour couvrir toute la surface de Σ et Σ n'est la plus grande que si elle est la plus grande non extérieure à Δ .)

Cette forme de la démonstration suppose d'ailleurs que l'on ait énoncé le théorème d'une manière un peu générale comme vous le voyez par l'emploi que j'en fais dans le cas de deux dimensions.

Mais tout cela n'a que peu d'importance.

Cordialement.

H. Lebesgue

Je suis très bavard, je reprends.

Pour certaines applications de votre théorème il faut faire une remarque ridicule de simplicité mais utile.

Dans la plupart des applications à la théorie des fonctions les intervalles partiels sont attachés à un point particulier de sorte qu'à tout point P d'intervalle total Δ est attaché un intervalle partiel $\delta(P)$ contenant ce point. Eh bien, si l'on couvre tout Δ avec un nombre fini de δ , que dans ceux qui restent on supprime les inutiles s'il y en a, puis que l'on rapetisse les δ restant de façon qu'ils n'aient plus que des extrémités en commun, alors il se peut que les parties conservées des δ ne

contiennent plus les points auxquels correspondaient ces δ . La remarque stupide dont je veux vous parler c'est qu'on peut faire en sorte qu'au contraire chaque reste d'un δ contienne le point correspondant.

Cela m'a été indispensable dans mes recherches sur l'intégration des dérivées et pourrait être utilisé élémentairement. Par exemple, si on sait que $f'(x) = 0$ toujours, alors à chaque x on fait correspondre un δ le contenant et dans lequel

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| < M.$$

Alors de la remarque stupide résulte que dans tout intervalle on a aussi

$$|f(y) - f(x)| < M|y - x|,$$

donc que f est constante³³².

Ce théorème se déduit ordinairement de théorèmes moins simples et moins fondamentaux : accroissements finis, lequel suppose et le raisonnement de O. Bonnet³³³ et le max. des fonctions continues. J'avoue que cet échafaudage me déplaît ; c'est le simple qui est au sommet.

Lorsque je me suis occupé des nombres dérivées³³⁴, votre théorème ne m'a plus suffi et j'ai dû revenir avec ce que j'ai appelé les chaînes d'intervalles³³⁵ aux considérations de votre thèse. Au fond à ceci : si tout point de Δ est origine d'un δ on peut avec une infinité dénombrable de ces δ mis bout à bout couvrir (dans un autre sens que précédemment) tout Δ . Eh bien, l'avantage principal à mes yeux de ma démonstration, qui n'est pas différente au fond de celle de votre thèse, c'est qu'elle rapproche ces deux propriétés au point qu'elles ne paraissent n'en faire qu'une.

Fin définitive.

H. Lebesgue

LI

Paris, le 14 décembre 1904

Cher Monsieur,

Bien qu'il existe une Mrs Young³³⁶ qui me demande des tirés

à part pour son "husband", je considère Young comme un jeune ou vieil élève³³⁷ qui cherche à glaner de ci de là quelques théorèmes à démontrer.

Dans le *Messenger* il a publié *On an extension of the Heine-Borel theorem* (car il parle depuis longtemps de Heine-Borel)³³⁸. Il y démontre (parfaitement, il faut un raisonnement) que, si chaque point P de AB est "point d'attachement" d'un intervalle le contenant et rétrécissable à volonté, on peut couvrir tout AB à l'aide d'un nombre fini d'entr'eux de manière que les points d'attachement des intervalles conservés ne soient pas couverts par d'autres intervalles conservés. Il dit que son extension : "laquelle, je pense, m'a été souvent utile dans les applications de la théorie des suites de points ou d'intervalles à la théorie des fonctions". Ça me paraît exact et il est toujours bon de se rendre compte de ce qui est important. Peut-être cependant cette importance qu'il prévoit ne justifie pas entièrement le fait de faire de sa remarque un nouveau théorème.

D'ailleurs bien qu'il cite mathèse il ne s'aperçoit pas que j'avais employé dans cette thèse son "extension".

Il s'est encore rencontré avec moi sur l'intégration. Dans les *Proceedings of the London Mathematical Society* il a démontré que³³⁹

$$F = f_1 + f_2 + \dots$$

était intégrable terme à terme si toutes ces fonctions sont intégrables au sens de Riemann et si les restes sont limités en module. Bien qu'il parle des A, B, \dots, X points et qu'ils y soient les indispensables figures genre Osgood³⁴⁰, sa démonstration est claire et simple, car c'est en somme la mienne³⁴¹ qu'il ne connaissait évidemment pas quand il a rédigé cette note.

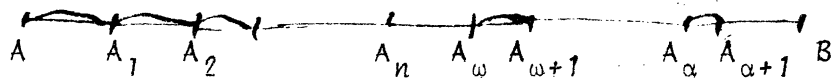
Je le sais encore coupable d'une ou deux autres petites choses, entre autre de cette naïveté des *Comptes Rendus*³⁴² : si

$$f' = u_1' + u_2' + \dots$$

est intégrable terme à terme, tout étant continu, c'est intégrable terme à terme indéfiniment.

En résumé, je n'ai pas d'opinion précise sur Young, je le suppose à ses débuts³⁴³.

Mais je n'ai pas vu qu'il parle de chaîne d'intervalles³⁴⁴ ; j'appelle ainsi



où A_α est le "point d'attachement" de $A_\alpha A_{\alpha+1}$, c'est-à-dire les chaînes de votre thèse³⁴⁵ (avec cette différence que l'on sait qu'à tout point est attaché un intervalle partiel sans aucune donnée sur la puissance de l'ensemble de ceux de ces intervalles qui sont différents).

Pour Denjoy je ne vois pas d'inconvénient à ce que ce soit publié tel quel³⁴⁶ (avec de petites modifications dans la rédaction) sauf peut-être que ça ne l'avancera pas dans les bonnes grâces de Picard, Darboux et peut-être d'autres.

J'ai appris qu'il y avait des difficultés Fréchet-Montel³⁴⁷. Peut-être bien aussi que Fatou et Montel interfèrent³⁴⁸.

Bien cordialement,

H. Lebesgue

LII

Paris, le 17 décembre 1904

Cher Monsieur,

J'avais emporté pour vous remettre les oeuvres de Denjoy et les épreuves de ma note de la Société Mathématique de France³⁴⁹ qui auraient fait voir à Denjoy combien peu nous nous rencontrons ; je n'ai pas trouvé le temps de les porter à l'Ecole Normale et j'ai oublié de les confier à quelqu'un.

Si vous n'en avez pas besoin avant vendredi je les remettrai ce jour-là à quelque auditeur facteur³⁵⁰.

J'ai vu hier Fréchet. Je connaissais son théorème : "toute fonction mesurable ne diffère d'une fonction de classe 1 qu'en un ensemble de mesure nulle de points" ; je ne l'ai indiqué nulle part³⁵¹. Ce n'est d'ailleurs qu'un autre énoncé des propriétés que nous avons données dans les *Comptes Rendus* de décembre 1903³⁵². Si l'on sait que f sommable est la dérivée de sa fonction primitive F , sauf pour un ensemble de mesure nulle, sauf pour cet ensemble

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n[F(x + \frac{1}{n}) - F(x)] ,$$

c'est le théorème de Fréchet.

On peut d'ailleurs aller plus loin. Soit f sommable, formons sa série de Fourier. En la sommant par le procédé de la moyenne arithmétique elle représente f sauf pour un ensemble de mesure nulle³⁵³. Et je crois d'ailleurs arriver à démontrer que, sauf pour un ensemble de mesure nulle, la convergence au sens ordinaire du mot de la série a lieu³⁵⁴.

Le théorème de Fréchet ne m'a donc pas paru très nouveau, ce qui m'a semblé plus intéressant c'est la très jolie remarque par laquelle il y arrive et qui peut-être pourrait être employée dans d'autres circonstances, elle fournit par exemple votre énoncé de décembre 1903 si je ne m'abuse. Malgré cela je lui ai conseillé plutôt de ne pas publier et de ne donner plus tard^{que} le théorème accompagné d'applications de peur que sa généralité nuise à son intérêt.

J'ai reçu de Couturat (le logicien) des remarques qui m'ont semblé stupides quant au fond, prétentieuses quant à la forme. La dernière phrase de ces remarques m'a paru merveilleusement déplacée dans un écrit dont le but paraît être d'intéresser des mathématiciens aux questions de philosophie³⁵⁵.

Votre tout dévoué.

H. Lebesgue

LIII

Rennes, le 13 janvier 1905

Cher Monsieur,

Maurain vient de recevoir ce matin une lettre du doyen de Caen lui disant que dans la séance de présentation qui avait eu lieu hier on avait examiné ses titres qu'on avait jugés des plus sérieux et que la Faculté avait présenté en première ligne M. Guinchant qui avait depuis 8 ans rendu des services à la Faculté et qui est aussi l'auteur de travaux importants (??)³⁵⁶ et en deuxième ligne M. Turpain de Poitiers³⁵⁷.

Je ne sais si Maurain préviendra M. Appell de ce beau résultat, je pense que vous pourriez peut-être lui en parler. Il n'est pas mauvais que les gens du Conseil supérieur sachent quand se produisent les beautés du recrutement régional.

Bien à vous.

H. Lebesgue

LIV

Rennes, dimanche 29 janvier 1905

Cher Monsieur,

Il me semble que Gauthier-Villars a raison ; il est certain que vos livres se sont fait une clientèle qui devient celle de la Collection de monographies etc. ; mais peut-être certains de ces clients cesseront d'acheter les livres s'ils doivent en acheter plusieurs à la fois. Seulement l'effet sur ces clients sera à peu près le même si les livres paraissent à peu d'intervalles comme semblent l'indiquer les dates que vous me donnez. D'ailleurs dès que la collection contiendra pas mal d'ouvrages, ce qui commence à être, il y aura peu de ces clients *a priori*.

Quoi qu'il en soit des raisons de Gauthier-Villars il faut se conformer à son désir.

Je puis donner le manuscrit *avant* le premier janvier 1906. Je ne tiens pas à trop traîner ce sujet qui, comme vous le pensez, commence à perdre pour moi l'attrait de la nouveauté.

Seulement il y a une petite difficulté. Fatou³⁵⁸ m'a communiqué un certain nombre de résultats qui se rapportent de près ou de loin aux séries de Fourier ; je voudrais bien que Fatou se décide à rédiger et soutenir sa thèse avant l'apparition de mes *Leçons*³⁵⁹. Les questions dont il s'occupe sont assez voisines parfois de celles que je traite pour que ceux qui jugent superficiellement ne distinguent pas bien ce qui est à Fatou. Et vous savez avec quelle facilité on attribue à ceux dont on connaît déjà le nom le mérite des propriétés trouvées par d'autres.

Je viens d'écrire à Fatou et j'espère qu'en lui indiquant, comme je l'ai fait, pour janvier 1906 le dépôt de mon manuscrit,

je vais le faire se dépêcher un peu. Je reconnais maintenant que j'aurai mieux fait de passer ma thèse plus tôt, je veux essayer de l'empêcher d'agir comme moi. Si vous avez l'occasion de lui causer, vous pourriez peut-être agir sur lui dans le même sens.

Je n'ai d'ailleurs pas l'intention de me servir des résultats de Fatou dans mon cours. Pour la longueur je crains d'être gêné, je verrai à la rédaction ce que je modifierai. Je veux dans mon cours faire des applications³⁶⁰ ; j'ai déjà parlé de problème de Dirichlet, je veux donner la démonstration de Dirichlet pour les sommes de Gauss, j'aurai voulu parler de quelques applications géométriques. Tout cela ferait beaucoup trop, je couperai plus tard. Je suivrai dans la rédaction ce que je fais en leçons ; ce sera assez élémentaire parce que, comme j'ai cette année des élèves de l'Ecole, je vais à pas lents et furtifs.

Comme il faudra faire des coupures je les ferai larges et j'essaierai d'avoir peu de pages.

Votre bien dévoué.

H. Lebesgue

LV

Rennes, samedi³⁶¹

Cher Monsieur,

J'ai été séparé de vous à la sortie par un remous de l'affluence de jeudi et je n'ai pas voulu vous relancer ensuite.¹⁰⁸⁴

Je désirai m'excuser à l'avance si je ne vais pas chez vous jeudi prochain, j'avais cependant espéré faire en même temps à Mme Borel une visite de digestion mais il est possible que je ne puisse la faire.

De plus je voulais vous parler de Zermelo³⁶². Nous ne possédons pas les *Mathematische Annalen* avec rapidité et je n'ai pas encore vu cet article ; mais Desouches m'en avait parlé et j'aurais été heureux d'avoir par vous des tuyaux. Hier Desouches³⁶³ m'a donné un résumé qu'il avait fait à son usage du Zermelo mais je n'ai rien compris. On m'a dit aussi que König avait fait machine arrière³⁶⁴, mais je suis en dehors de toutes nouvelles.

Je ne crois pas à la possibilité de démontrer le Cantor-Zermelo : "tout ensemble peut être bien ordonné", mais je ne serai pas fâché de savoir s'il y a quelque chose d'établi par Zermelo ou d'autres.

Votre dévoué.

H. Lebesgue

LVI

Rennes, lundi³⁶⁵

Cher Monsieur,

Ce que j'avais considéré comme un résumé fait par Desouches était une véritable traduction. Mais le Π m'était tellement amené³⁶⁶ que je ne croyais pas que Zermelo se soit amusé à présenter de cette façon quelque chose de si puérilement extraordinaire.

Et puis aussi il m'avait semblé qu'il cachait seulement et assez mal le raisonnement auquel vous faites allusion : "Pour bien ordonner, etc."

Je crois d'ailleurs, comme je l'ai dit dans le temps à Tannery au sujet d'une lettre de Cantor à Marotte³⁶⁷, que le A ne peut être démontré. Raisonner sur un ensemble c'est raisonner sur des objets pris dans un sac C ³⁶⁸ sur lesquels on sait seulement qu'ils ont une propriété B en commun n'appartenant pas aux autres objets de C . On ne sait par conséquent rien qui permette d'aborder la définition de l'ordre des éléments ; on ne sait même pas les distinguer.

Tannery m'avait fait observer que mon objection ne s'applique pas au continu car alors on connaît beaucoup de choses sur le contenu du sac C et cela est vrai. Pour ce problème particulier j'ai pu démontrer dans le fameux et invisible mémoire de Jordan que le continu est supérieur au transfini³⁶⁹ ; peut-être, mais c'est bien prétentieux, pourrais-je définir d'une façon précise un ensemble de points ayant la puissance du transfini ?

Il m'avait semblé dans le temps que vous considériez comme prouvée la supériorité du continu sur le transfini par le fameux raisonnement : "on choisit un point, puis un autre, etc. sans

indiquer de loi". Il me paraît probable maintenant que nous nous étions mal compris et que vous êtes d'accord avec moi sur l'insuffisance (et l'absence de sens) de ce raisonnement. A mon avis on peut même douter que tout ensemble non fini soit supérieur ou égal au dénombrable.

Je vous l'ai déjà écrit, je pense que ça n'a pas de sens de parler d'une infinité dénombrable d'opérations sans en donner la loi (ou même d'un nombre fini quelconque), seulement nous savons que notre habileté est presque toujours assez grande pour imaginer une loi définissant de telles suites finies ou infinies dénombrables d'opérations et ce que nous disons n'a de sens que quand ces lois sont données, quand nous appliquons nos raisonnements à des lois précises.

J'avais cru un moment que nous différions d'avis un peu sur ces points, ce qui m'étonnait d'autant plus que tout cela est exprimé à peu près dans vos livres, je serai très heureux si votre opinion confirme la mienne.

Et là-dessus je m'en vais apprendre ma leçon, Mascart m'inspecte ce soir et de là peut-être dépend ma carrière !¹⁰⁸⁵

Bien à vous et merci.

H. Lebesgue

Je vous renvoie vos exemplaires.

LVII

Rennes, mercredi³⁷⁰

Cher Monsieur,

Je crois que nous sommes d'accord sur les points essentiels. Voici mes idées, c'est à peu près ce que je vous ai écrit jadis³⁷¹.

Un raisonnement n'a, pour moi (pour moi, dorénavant sous-entendu), de sens que s'il s'applique à des êtres précis. On peut raisonner sur telle droite ou tel point, un raisonnement sur une droite quelconque et un point quelconque n'a pas de sens. Ou plutôt il n'a qu'un sens latent qui devient réel, visible, actuel quand on l'applique à une droite déterminée et un point déterminé. Tout l'intérêt des mathématiques réside d'ailleurs dans la possibilité de faire

des raisonnements à sens latent ; mais il ne faut pas, par la suite, oublier qu'un raisonnement n'aura de sens que s'il est possible de remplacer les éléments "quelconques" qui y entrent par des éléments "déterminés", sans quoi il n'aurait même pas de sens latent.

Je prends un exemple. Nous raisonnons sur un ensemble E de points et je dis *considérons un point A de cet ensemble E* et le raisonnement se poursuit. Mon raisonnement a un sens latent qui devient réel quand je détermine le point A , quand je choisis le point A . Mais si je ne savais pas choisir A mon raisonnement n'aurait aucun sens. Supposons que l'ensemble E soit l'ensemble des nombres qui, écrits dans un système de numération de base quelconque (je veux dire successivement dans chaque système), emploie tout chiffre de ce système. Un tel ensemble existe, car son complémentaire est de mesure nulle, mais je ne sais, pour ma part, en citer aucun nombre. Un raisonnement fait sur E et comprenant la phrase que j'ai dite n'acquerrait un sens latent que le jour où l'on saurait citer un nombre de E , c'est-à-dire où l'on prononcerait un nombre fini de mots s'appliquant à un point de E et un seul. Je suis d'ailleurs persuadé que ce sens latent sera acquis un jour, mais à la façon dont je suis persuadé que la loi de deux ans³⁷² sera enfin votée avant la fin de la législature, c'est-à-dire d'une façon non mathématique.

La difficulté précédente est fréquente : si les recherches de Cantor étaient parues avant celles de Liouville on aurait su qu'il y avait des nombres non algébriques sans savoir en citer un³⁷³. J'ai défini des ensembles dont les éléments sont des ensembles non mesurables B bien avant de savoir définir un ensemble non mesurable B ³⁷⁴. (Définir égale toujours prononcer un nombre fini de mots, etc.) D'une manière générale toutes les fois qu'on sait que E contient E_1 et qu'une certaine propriété de E n'appartient pas à E_1 (valeur de la puissance, de la mesure, etc.) on peut affirmer l'existence de $E - E_1$, mais on ne sait pas pour cela nommer un élément de $E - E_1$. Il reste même douteux qu'on en puisse jamais nommer un. C'est un fait sur lequel vous avez insisté vous-même, en particulier dans la note III de votre dernier livre³⁷⁵. Et c'est une des raisons qui me font croire à notre accord.

Vous comprenez maintenant que je ne considère pas comme légitime dans tous les cas de dire : je fais telle opération, tel choix, etc. La difficulté principale pour moi n'est pas de faire

l'opération, le choix une infinité plus ou moins compliquée de fois, mais de le faire une fois. Mais je suis d'accord avec vous pour penser que la complication de l'infinité de fois ne fait qu'accroître les difficultés. J'y arrive.

Si dans un raisonnement on dit : je choisis un élément A de l'ensemble donné E , à ce raisonnement j'accorderai presque toujours un sens latent. Si E est, comme les ensembles que j'ai cités précédemment, de nature plus compliquée je refuserai, momentanément tout au moins, un sens latent à ce raisonnement. Si E est quelconque je refuserai pour toujours un sens latent général à ce raisonnement ; je veux dire que le raisonnement n'acquerra pour moi un sens latent qu'à condition de particulariser convenablement E de manière que le choix soit possible. Je dis de particulariser, car définir un ensemble c'est, d'après Cantor et vous aussi je crois, étant donnés des êtres antérieurement définis $\&$, nommer une propriété P appartenant à certains d'entre eux sans appartenir à tous. Quand on raisonne sur les ensembles généraux on sait seulement l'existence de $\&$ et P sans rien de plus ; et cela est, à mon avis, manifestement insuffisant pour qu'on puisse faire choix d'un élément de l'ensemble. Pour cela je considère comme indémontrable toute propriété qui conduit en fin de compte à un tel choix, le théorème de Cantor-Zermelo, par exemple.

Tout raisonnement général sur les ensembles, quand je lui accorde un sens, n'en a, pour moi, qu'un assez particulier. Mais si je lui accorde un sens particulier latent quand il suppose seulement qu'on fait un choix, ou un nombre fini de choix ou une infinité dénombrable de choix, parce que je sais des cas où l'on peut définir les lois de ces choix, je ne lui en accorde aucun, actuellement du moins, quand il s'agit d'une infinité transfinie de choix, parce que jusqu'ici aucun exemple de loi définissant une telle transfinie n'a été donné. Et ici encore je crois que nous sommes d'accord et que je traduis fidèlement votre phrase : "il y a cette grande différence qu'une loi dénombrable *peut* être donnée tandis qu'une loi non dénombrable *ne peut pas* l'être".

Je pense que vous me comprenez assez pour que je n'insiste pas sur l'insuffisance des raisonnements proposés pour démontrer que "tout ensemble non fini contient une infinité dénombrable d'éléments"; si par ensemble non fini on entend celui pour lequel on sait que, quel que soit l'entier n , on ne peut numéroter les éléments de

l'ensemble u_1, u_2, \dots, u_n . Tous les raisonnements supposent qu'à x quelconque on sache faire correspondre une suite v_1, v_2, \dots, v_n d'éléments de l'ensemble et c'est ce qu'on ne sait pas faire par exemple pour le premier ensemble E que je vous ai cité et qui est non fini; il est facile de le démontrer.

A plus forte raison je ne considère pas comme légitime le raisonnement suivant : à 1 faisons correspondre le nombre réel (rationnel ou non) u_1 , à 2 le nombre $u_2 \neq u_1$, à 3 $u_3 \neq u_1 \neq u_2$, etc., à ω $u_\omega \neq u_1, u_2, \dots, \text{etc.}$, on n'est jamais arrêté, donc le continu a une puissance égale au moins au transfini.

Ici, à la difficulté des choix non donnés (et qui ne serait pas sérieuse s'il s'agissait d'une infinité dénombrable de choix), s'ajoute la difficulté relative à la transfinité de ces choix.

Voici comment je démontre, artificiellement d'ailleurs, cette propriété. Vous admettez qu'avec les nombres rationnels κ ($0 < \kappa < 1$) on puisse former des suites ordonnées S_α applicables sur la suite

$$1, 2, \dots, \omega, \omega+1, \dots, \alpha$$

quel que soit le nombre transfini α de la classe II de Cantor. Les κ étant rangés dans l'ordre croissant. Ceci posé, soit un nombre quelconque x ($0 < x < 1$), il s'écrit

$$x = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \dots + \frac{\alpha_p}{2^p} + \dots$$

les α_i étant 0 ou 1. Rangeons les κ en suite simplement infinie $\kappa_1, \kappa_2, \dots$ une fois pour toutes. Alors à x on fait correspondre la suite des κ ayant même indice que des α non nuls. En rangeant ces κ par ordre croissant on a, ou non, une suite S_α relative à un certain α . Si oui, on dit que x correspond à α . Alors x correspond au plus à un α , à tout α correspond une infinité de x , donc l'ensemble des x a une puissance au moins égale à celle des α (à condition de définir convenablement cette relation de grandeur entre puissances). Je ne sais pas si l'on peut aller loin dans une voie artificielle de cette nature. En tout cas vous comprenez que je ne considère pas comme démontré que toute puissance supérieure au dénombrable soit au moins égale au transfini (en admettant que ces mots aient un sens).³⁷⁸

L'idée "suffrage universel" de Baire est amusante venant de

Baire qui pourrait avoir le respect des minorités. J'avais été étonné du tour de votre correspondance avec Baire, je suis heureux d'apprendre que la phrase en question avait été retapée.

Bien à vous.

H. Lebesgue

LVIII

Rennes, samedi³⁷⁹

Cher Monsieur,

Je reçois Lindelöf³⁸⁰. J'aurai quelques parties communes, en particulier pour les chapitre III : Formules sommatoires, Sommes de Gauss, Méthode de Cauchy pour série de Fourier. Pour cette dernière question je renverrai à Lindelöf³⁸¹ et Picard, où c'est vraiment très bien fait ce qui n'était pas facile. Pour les deux premières questions je crois que je les traiterais, le Lindelöf est à mon avis trop inutilement compliqué et général. Je n'ai pas du tout de Schaar³⁸² la bonne opinion qu'en a Lindelöf, il me paraît avoir très peu fait et en particulier dans le mémoire où il donne la formule de la page 75 il copie Dirichlet³⁸³ avec moins de précision, tout en prétendant employer une toute autre méthode.

Tout cela n'a aucune importance.

Nous n'avons pas parlé jeudi de la comparaison de puissances du continu et du transfini. Bien que mon artifice soit baroque (il pourrait sans doute être simplifié) et immédiat, êtes-vous de mon avis qu'il y a progrès et que c'est quelque chose de nouveau que de diviser d'après ma définition précise le continu en une transfinité d'ensembles ? J'avoue que je ne sais que penser à ce sujet, tantôt il me paraît que c'est presque une loi transfinie, tantôt il m'apparaît que ce n'est que l'emploi de la définition des ensembles réductibles et que ma loi n'est définie que virtuellement (voir phrase de Baire³⁸⁴).

Dites-moi votre avis, après les jours consacrés à la pédagogie.

Bien à vous.

H. Lebesgue

LIX

Rennes, mercredi³⁸⁵

Cher Monsieur,

Je vous en veux un peu de m'avoir fait perdre deux jours après le Lindelöf.

Maintenant je vais vous parler de questions d'argent, je crois pouvoir le faire franchement et ce sera en détail, car il est inutile de parler de façon à ne pas être compris.

En temps normal je gagne ici 4500, j'ai eu une promotion l'an dernier ; un certain cours supplémentaire s'il était payé, ce qui est peu probable, me ferait 5000.

Ma mère, veuve d'un typographe quand j'avais 3 ans, nous a élevé, ma soeur et moi, en allant faire de la couture en journées. A ce métier elle n'a pas fait fortune, elle ne possède que des dettes dont nous ne croyons pas avoir à rougir. Elle vit avec ma soeur ; les 1400 qu'a ma soeur pour la classe enfantine du Lycée ne leur suffisent pas, d'autant que ma soeur a une mauvaise santé, il faut que je leur donne au moins 1000 par an.

Ma femme a une situation financière du même genre que la mienne. Ses frères et soeurs vivent en général, au jour le jour, sur ce qu'ils gagnent. Cela ne suffit plus quand, comme cette année, l'un d'eux a besoin de soins. Je ne dois rien attendre de ce côté, au contraire.

C'est avec les 2000 d'économies que j'avais pu faire durant ma première année du Collège de France que je me suis marié. Mobilier, linge, casseroles et le reste, vous devinez qu'ils n'ont pas été loin. D'autant que l'an dernier nous n'avons pas vécu sur les 5000 que j'ai touchés. Voici mon budget minimum : 1000 à ma mère, 12 x 300 + loyer et impôts. Or ceci, qui est considéré par les Parisiens comme gratuit en province, monte pour nous actuellement à 600 et je prévois que cela va monter à 800.

De plus, Mademoiselle Suzanne Claire, ma fille, nous a obligé à prendre une bonne et c'est le déficit très agrandi.

Les 4000 (-700 de chemin de fer) de cette année sont venus à point ; j'espère qu'il nous restera 1000 ou 1500 à la fin de l'année

avec 400 que j'ai actuellement, cela fera une avance presque considérable. Mais qu'un déficit annuel mangera vite ; ce déficit annuel est petit, mais quand il n'y a rien pour le boucher !

Ceci posé : comme je n'ai pu m'empêcher de penser à Lardé³⁸⁶ ces jours-ci, je vous charge de vous rappeler, si je déraillais jeudi prochain, que ma femme aurait pour seule ressource mes 400 de la Caisse d'épargne et que sa famille et la mienne ne pourront rien pour elle et auraient plutôt besoin de secours. Si ma disparition survenait à un autre moment la fortune de ma femme irait peut-être jusqu'à 2000 F, mais c'est une borne supérieure. Par conséquent vous devriez pressurer pour elle cette ridiculement riche association des A.E.N.S.³⁸⁷. Je sais que je puis compter sur vous et tous mes amis, mais encore faut-il que l'un d'eux soit prévenu. Je pense bien à prendre une assurance sur la vie, mais vous ne vous doutez pas combien il est difficile de soutirer 400 d'un budget en déficit.

D'ailleurs je n'ai pas l'intention de dérailler ni de disparaître autrement, alors je dois chercher des ressources. Ici, rien. Il y a le Collège de France ; je n'ai plus rien à y dire. Si vous trouvez quelque chose ce sera le bienvenu. Evidemment l'Ecole Centrale ferait cesser ces ennuis, mais il faudrait empoisonner Combette³⁸⁸.

Maintenant que vous connaissez mieux ma situation financière vous pouvez comprendre certains de mes actes. Par exemple que j'ai demandé le Lycée de Beauvais, que je me sois pas décidé ^{à venir} à Paris avec seulement le 3000 du Collège de France, on me l'avait proposé un instant, quelque honneur qu'il y ait à être au Collège de France, que ma belle-famille ait pu me décider à me présenter contre Baire et que j'ai été à ce moment furieux d'avoir à me présenter contre lui et furieux après moi de ne pas le faire plus énergiquement. Vous comprenez que ma circulaire aux pontifes disait: Je ne suis pas honteux d'avoir à demander de l'argent, je suis en colère d'avoir à le faire.

Vous devinez aussi que je ne pouvais apprendre sans indignation les boutades de Painlevé ou Baire sur les engagements qu'on doit tenir et que je ne pouvais suivre ce dernier sur les discussions abstraites sur la Justice.

Peut-être ne comprenez-vous pas que j'ai refusé Lille.¹⁰⁸⁷ J'ai évidemment eu tort, je croyais avoir le Collège de France et je

sais trop qu'il est difficile d'avoir des ressources pour vouloir toutes les accaparer.

Il est peut être utile maintenant que je vous dise que notre situation n'a rien de tragique, que nous mangeons tous les jours et même que notre vie, bien que très ourse et monotone, n'est pas sans charmes. Mais nous nous connaissons assez maintenant pour que vous me connaissiez vraiment.

Je vous envoie des photographies non visées suivant votre procédé. Bien à vous.

H. Lebesgue

LX

Rennes, le 11 mars 1905

Mon cher Ami³⁸⁹,

Je vous remercie de votre lettre ainsi que des renseignements qu'elle contient et dont plusieurs sont rassurants. J'ignorais le rôle de la Société des amis des Sciences et je ne croyais pas que le ministère fît quelque chose pour les veuves de fonctionnaires jeunes. Aussi, sachant fort bien que mon cas ou des cas analogues sont fréquents, je regardais comme plus difficile, à cause de cette fréquence même, qu'on vînt efficacement en aide aux veuves qui en ont besoin. Et puis, comme ces veuves sont nombreuses, elles paraissent moins intéressantes et moins dignes de secours.

Mais je sais fort bien que mon cas n'est ni unique, ni désespéré. Il ne deviendrait inquiétant qu'en cas de maladie ou de mort et c'est pour ces cas que je vous ai écrit. Après avoir pas mal hésité, je l'avoue, mais votre réponse amicale me prouve que j'ai bien fait d'écrire à l'un de mes amis et que j'ai bien fait de vous choisir.

Je ne me crois pas être le plus malheureux de la terre ; j'ai tout lieu au contraire de me féliciter que les choses aient tourné comme elles l'ont fait, le résultat est plus heureux qu'on aurait pu l'espérer. Autour de moi j'ai pu voir certains de mes camarades, Langevin, Dubreuil³⁹⁰ par exemple, se débattre contre des difficultés bien plus grandes que celles que j'ai rencontrées. Cependant je ne suis pas sans crainte pour l'avenir et bien que j'espère

fermement que tout s'arrangera sans trop de peine je ne puis m'empêcher de temps en temps d'accumuler dans ma pensée les sujets de tristesse.

Parlons donc des moyens d'améliorer ma situation. Prix, place d'examineur, ce sont des choses aléatoires dont nous pourrions remettre à plus tard l'examen. Titularisation, je ne la vois pas aussi rapide que vous. Les prochaines mises à la retraite Saint Germain, Méray³⁹¹ sont encore éloignées, il faut compter sur l'imprévu et que cet imprévu ne se produise pas à Paris, car je suppose que l'entrée des Normaliens à la Sorbonne a bouché pour longtemps tous les vides qui se produiront à Paris. A cette occasion laissez-moi vous dire que vous vous trompez sur mes sentiments. J'estime que Baire *doit* être titularisé avant moi. Quand vous dites que nous sommes équivalents³⁹², je pense qu'une opinion différente pourrait être soutenue, mais je ne pense pas que votre opinion soit manifestement erronée. D'ailleurs quand même il y aurait entre Baire et moi plus de différence que je n'en vois je ne trouverais pas injuste de nous considérer comme équivalents, car j'estime que si l'on veut classer les gens il faut user et abuser des *ex aequo*. Par suite j'accorde que l'on doit tenir beaucoup compte de l'ancienneté. J'ai seulement protesté autrefois non contre la décision qui a été prise pour le Collège de France, non contre les raisons qui l'ont dictée, non contre la méthode de documentation par conversation en général, mais contre l'application qui nous avait été faite de cette méthode, car il m'a semblé qu'étaient intervenus pour documenter le Collège de France pas mal de gens qui n'avaient pas d'opinion personnelle à faire valoir et qui n'avaient que des renseignements de seconde ou troisième main.

Dois-je demander une nouvelle fois le Collège de France ? Cela rapporte tous frais payés 2 ou 3 mille francs et je n'ai pas le droit de les dédaigner, c'est le seul, le gros argument en faveur du Collège de France³⁹³. A ne considérer que mes goûts je n'hésiterais pas et ne le demanderais plus. J'en ai assez de ces voyages, ils me fatiguent un peu, et me prennent tout mon temps ; déduits mes deux jours de cours ici, mes deux jours de voyage et cours à Paris il me reste le samedi (alors que je suis rentré dans la nuit), le dimanche et le mercredi pour travailler. De plus je n'ai plus guère de choses intéressantes à raconter. Enfin je dois penser au dommage que je cause à mes successeurs. Je ne considère pas comme très gros

le dommage causé à P. Boutroux³⁹⁴, mais si celui-ci reste trois ans après que j'aurai pris aussi mes 3 années n'évincerons nous pas par cela même des gens intéressants, comme Zoretti³⁹⁵ par exemple, aux résultats duquel il faudra que j'attèle quelque jour mes talents de simplificateur. Cela doit entrer en ligne de compte, car si je ne puis dédaigner l'argent du Collège de France je dois reconnaître que cet argent m'est moins indispensable si je puis dire que l'année où Baire a été nommé.

Donnez-moi à ce sujet un conseil de plus et donnez-le sans crainte, je ne le suivrai peut-être pas. Et le Collège de France refusera peut-être en prétextant ma vieillesse de me prolonger.

Je vous remercie de nouveau de votre bonne lettre ; j'espère bien faire faire à ma femme la connaissance de Madame Borel et la vôtre ; le bachot de votre neveu en prolongeant votre séjour à Paris prouvera que le baccalauréat sert parfois à quelque chose.¹⁰⁸⁸

Bien à vous,

H. Lebesgue

LXI

Rennes, le 4 avril 1905

Mon cher Borel,

Vous sombrez dans le suffrage universel.¹⁰⁸⁹

J'ai reçu ce matin la lettre d'Hadamard, je réponds vivement et prolixement³⁹⁶.

J'écris à Hilbert pour lui demander d'accepter mon histoire sur les séries trigonométriques que j'ai terminée hier³⁹⁷.

Pompeiu³⁹⁸ me paraît voisin de Zoretti et aussi de Montel qui décidément ne se presse pas assez. Pompeiu m'avait dit avoir rattaché à un théorème général la divergence de certaines séries de Fourier, il devait m'envoyer sa démonstration, je n'ai rien vu. C'eût été intéressant.

Voyez si mon histoire est trop longue ; je pense avoir été clair, non pour vous, pour les autres.

Vous communiquerez à Hadamard, n'est-ce pas ?

Bien à vous.

H. Lebesgue

J'ai reçu, comme hommage gracieux de Lindelöf, ses *Remarques sur un théorème fondamental de la théorie des ensembles* des *Acta* où il persiste à ne pas me nommer³⁹⁹. J'avais commencé un petit truc où prenant prétexte de l'occasion pour dire l'intérêt de conserver le transfini j'essayais de faire comprendre à Lindelöf que le plus bouché reconstruirait sa démonstration s'il remarquait que les points de l'ensemble parfait à obtenir sont caractérisés par le fait d'être les points de condensation et que deux démonstrations qui s'appuyaient là-dessus doivent être jugées identiques au fond.

Je me suis arrêté, mais je crois très fermement que ce serait mutiler très fâcheusement le Bendixson que de le limiter au Lindelöf. Si l'on ajoute au Lindelöf la définition des dérivés, comme le dit Lindelöf lui-même, on a ma note⁴⁰⁰. Sans cependant le théorème : tout E parfait a la puissance du continu, qui est indispensable à bien des égards, inutile à dire à vous.

LXII

Rennes, le 6 avril 1905

Mon cher Borel,

Merci de votre conseil. J'ai cru meilleur de vous demander votre avis, parce que je ne sais pas si l'on s'est occupé de Saint Cyr, et ce que c'est que cette nomination qu'on me propose. Je ne sais s'il s'agit d'un remplacement ou non et il me semble, d'après la dépêche reçue du Directeur de l'Ecole Centrale, qu'il ne s'agit pas du poste dont j'étais le suppléant. Au hasard je vous ai demandé si vous en saviez plus que moi.

J'ai vu ce matin le doyen, le recteur est absent. Il ne prévoit pas d'empêchement, il sera facile de se passer de moi pour les certificats sauf peut-être pour celui d'astronomie pour lequel je suis particulièrement utile et compétent; mais c'est l'affaire d'une journée et il sera toujours facile d'arranger cela d'une manière ou de l'autre. La seule difficulté est due au baccalauréat, Le doyen a demandé au ministère qu'on l'autorise à me remplacer

par un professeur de lycée ; les frais occasionnés seraient à ma charge. Il ne prévoit pas qu'on puisse lui refuser, moi non plus et je viens d'écrire au directeur de l'Ecole Centrale que j'accepte sous réserve de l'autorisation ministérielle et je lui dis ce que le doyen a demandé au ministère.

Je pense et j'espère que cette affaire s'arrangera facilement. Je compte aller à Paris la semaine d'après Pâques, vous y verrai-je?

Bien à vous.

H. Lebesgue

LXIII

Rennes, vendredi⁴⁰¹

Mon cher Borel,

Merci de vos renseignements. Je ne sais si c'est le fait de l'éloignement ou de mon égoïsme, mais il me semble que Darboux n'a pas eu trop à souffrir de Bertrand¹⁰⁹⁰, sauf peut-être quelques épigrammes méchantes auxquelles je ne crois pas qu'il était de taille à répondre. En tout cas il est joli d'entendre dire, par un autre qu'un soldat de la classe : Oh ! j'en ai mangé aussi de la vache enragée ... En fait je ne pense pas qu'il veuille m'en faire manger, je crois qu'il ne ferait rien contre moi (peut-être n'est-ce qu'une illusion juvénile), mais je suis certain qu'il fera toujours tout pour mes concurrents⁴⁰² éventuels, sauf peut-être si ces concurrents se réduisent à Baire qui ne doit guère être en odeur de sainteté.

Vous me disiez jadis qu'on peut bien vivre sans l'estime de Picard ; je me suis dit la même chose de Darboux depuis que, après avoir passé ma thèse, j'avais été le voir pour recevoir de lui cette réponse : "J'appuierai auprès de la Section permanente toute proposition pour qu'on vous inscrive sur la liste des candidats éventuels à une maîtrise de conférences". Ce jour-là j'avais évidemment obtenu et peu et beaucoup. Peu comme résultat, beaucoup comme renseignement sur l'état d'esprit de Darboux à mon égard.

Merci beaucoup de ce que vous avez fait pour Fatou ; je crois bien qu'il a été négligent, mais je pense qu'il y a dans son état de santé des circonstances atténuantes et qu'il eût été exagéré qu'on

l'exécutât.

Vous avez vu, par ma lettre d'hier, que j'ai cru devoir régler à l'avance toutes les questions de remplacement, avec Moreau et mes collègues. Je dois dire qu'en la circonstance Lacour est redevenu l'homme des anciens jours, extrêmement obligeant et aimable. Quant au poste, je sais qu'il s'agit d'une nomination complète pour cette année, c'est tout ce que je sais. Je vais écrire à M. Appell qui d'ailleurs est peut-être au courant de tout cela.

Bonnes vacances,

H. Lebesgue

A Beauvais, 38 esplanade de l'Hôtel Dieu du 8 au 17,
à Paris, 19 avenue de la République, du 17 au 21.

LXIV

16 juin 1905

Mon cher Borel,

J'ai à m'excuser de ne pas avoir répondu ; c'est en surveillant les candidats à l'Ecole et aux bourses de licence que je le fait. Et à ce sujet j'ai fait deux remarques capitales,

D'abord toutes les fois qu'on laisse faire quelque chose par l'Inspection académique, cela est mal fait. C'est ainsi qu'ici l'Inspection académique a choisi la salle. Son choix a porté sur l'amphithéâtre de physique de la Faculté ; sans doute cela a l'avantage de permettre à chaque candidat de vérifier l'exactitude de ses calculs rien qu'en baissant les yeux sur les copies de ses deux cocandidats placés en-dessous, mais cela a aussi l'inconvénient de faire écrire les victimes sur une arête vive. L'amphithéâtre est en effet meublé de tables, presque dernier cri, qui tiennent très peu de place mais ne peuvent servir qu'à appuyer un cahier de notes rigide et indéformable. C'est sur ces tables que les candidats doivent manier leurs textes, leurs brouillons, leurs copies, tous de dimension plus grande, dans tous les sens, que le support. Ça n'est plus une composition de science c'est une composition d'équilibre.

Ma seconde remarque est aussi intéressante. Les textes donnés sont, pour un temps beaucoup plus court, beaucoup plus difficiles que ceux que nous proposons à nos candidats au certificat d'analyse.

Peut-être demande-t-on aux candidats à l'Ecole une rapidité de calcul un peu exagérée ; je n'ai pas fait, naturellement, les questions dont j'ai vu les textes mais je serais assez porté à penser qu'il y a excès dans ce sens. Mais ce qui est incontestable c'est qu'ici, malgré mes efforts, assez faibles parce que je ne veux pas recevoir d'encrier à la tête, les examens de licence deviennent ridicules. Et il faut voir ce dont on se contente comme copie sur des textes trop faciles. Je n'ai pas voulu protester officiellement ou faire connaître publiquement mon opinion d'une façon quelconque car Lacour croirait à la guerre, mais je trouve cela déplorable. Il faudrait que, au moins de temps à autre, Paris envoie les sujets d'examen ; je suis persuadé d'ailleurs que le mal dont je parle existe dans nombre d'endroits. Il a quelque chose de forcé ; il y a très peu de candidats, fort mauvais en général et il faut bien en recevoir quelques-uns de peur de les faire tous sauver. Je persiste à penser qu'il est singulier que l'examen des bourses de licence soit plus difficile que le certificat de mathématiques préparatoires, plus difficile lui-même que le certificat d'analyse.

Ceci épuisé, je passe à un autre genre d'exercice. J'ai tous ces temps-ci cherché un logis, car je dois partir avant le 24 juin et je ne trouvais rien malgré mes efforts. Dans une huitaine j'habiterai 32, rue de Palestine. Cela m'a pris pas mal de temps, j'étais pas mal gâteux en plus je n'écrivais plus. Merci de vos renseignements sur Mèray ; mais prendra-t-il sa retraite pour cause limite d'âge ou sera-ce anticipée ? Cette seconde façon me laisserait sceptique. A Caen il y a de Saint Germain qui dit aussi prendre une retraite anticipée, mais ?

J'ai vu Levasseur au moment de mon dernier cours, mais Barbier de Meynard⁴⁰³ m'a interrompu dans mes explications et Levasseur avait son cours de sorte que la question n'a pas été tranchée ni même nettement posée. En rentrant et en lui envoyant le résumé du cours pour l'Annuaire⁴⁰⁴ je lui ai parlé de la question en ajoutant qu'il me serait agréable d'avoir son opinion. Malgré cette invitation je n'ai rien vu venir depuis un mois.

(J'apprends qu'ils (les candidats) n'ont à faire ce matin que des mathématiques et non aussi de la physique comme je croyais, alors la longueur des textes doit être plus raisonnable.)

J'ai réfléchi à ce que vous m'avez dit relativement aux examens de Polytechnique et Saint Cyr. Malgré le vague qui reste dans

l'arrangement qui sera adopté cela me paraîtrait assez avantageux, surtout au point de vue travail, si le fait d'être mis en congé ne faisait pas diminuer beaucoup les chances de titularisation. Savez-vous quelque chose au sujet de ces nominations, de qui elles dépendent, quand elles se font (peut-être se font-elles, *L'Humanité*⁴⁰⁵ parlait de d'Ocagne ces jours derniers); si vous avez quelques tuyaux ils seront les bienvenus. La situation est tentante, même pour quelqu'un d'aussi peu aventureux que moi ; j'hésite mais en penchant pour la candidature.

J'ai reçu votre annonce de revue qui aura bientôt j'espère un acte de baptême définitif⁴⁰⁶. Malgré mes efforts et sans doute aussi les vôtres je n'ai pas compris ce qu'elle serait, à qui elle s'adresserait, etc., et j'en suis réduit à attendre les premiers numéros pour la connaître. Dois-je ajouter (formule classique) que, ce dont je suis persuadé, c'est qu'elle sera excellente les noms des collaborateurs en étant une garantie. (Cotton et Simon auraient-ils des prénoms indécents ?)⁴⁰⁷

J'ai besoin de vos conseils sur ceci. Il y a quelques années (octobre 1899) on fonda au Lycée de Beauvais une classe dont ma¹⁰⁸⁶ soeur fut chargée. Une ou deux années après, on fonda une classe intermédiaire entre la sienne et celle immédiatement supérieure. Elle fut confiée à un instituteur et ses élèves furent recrutés parmi ceux qui auparavant auraient été mis dans la classe de ma soeur ou l'autre. Du coup la classe de ma soeur fut réduite à l'état de squelette, état lamentable dont elle ne s'est pas relevée. Peut-être bien, je n'en sais trop rien, mais il me semble d'après ce que m'a dit plusieurs fois ma soeur, que ça a empiré et que la classe de son collègue instituteur n'est pas non plus très peuplée. Les élèves de ma soeur sont des externes à de très rares et non à encourager exceptions ; ce sont presque tous des fils de fonctionnaires du Lycée ou d'ailleurs qui bénéficient d'exemption totale ou partielle du prix à payer (5 F par mois). La plupart des mamans petites bourgeoises de la ville s'occupent elles-mêmes de leurs bambins, elles ont raison à mon sens. Celles qui ne s'en occupent pas les envoient soit chez ma soeur ce qui est rare (le Lycée n'est pas au centre de la ville et il s'agit de tout jeunes bambins), soit dans l'une de très nombreuses pensions payantes de la ville. Presque toutes ces pensions **I** sont des pensions de jeunes filles mais toutes reçoivent les petits garçons, même le Collège de jeunes filles. Aucun élève ayant été dans une quelconque de ces pensions ne

va ensuite (au moins directement) au Lycée, tous vont chez les Frères des Ecoles Chrétiennes ou chez les Pères du Saint Esprit. Les seuls externes qu'a le Lycée ou bien ont été éduqués au début par leur mère, ou bien sont venus chez ma soeur, cela paraîtrait suffisant pour qu'on ne songe pas à supprimer la classe enfantine car les quelques mères qui envoient leurs enfants au lycée les confient à une femme, elles ne les confieraient pas à un homme (sauf si cet homme s'habillait en femme, curé).

Cependant le proviseur, pressé par l'administration de faire des économies, veut supprimer cette classe. Il paraîtrait plus naturel de supprimer la classe intermédiaire créée en dernier lieu, mais il faudrait mécontenter un électeur. Et même un gros électeur car l'instituteur en question, qui est d'ailleurs un très brave homme et n'est pas en cause, est le fils d'un entrepreneur de fêtes, loueur de tentes, lequel, par son métier, est en relation avec toutes les municipalités et monte même de temps en temps des tentes pour réunion publique. Ceci est une explication suffisante.

Je suis rentré chez moi au signe **I**, j'en profite pour recopier ce que m'écrivait ma soeur il y a quelque temps : "J'ai eu au Lycée inspection générale Compayré⁴⁰⁸. Il m'a dit qu'il avait été frappé du petit nombre de mes élèves, que si l'on retranchait les fils de fonctionnaires mon effectif serait insuffisant, qu'il fallait tâcher de consolider cette classe, d'amener des élèves, peut-être n'étais-je pas assez mondaine, peut-être devrais-je étendre mes relations.

J'aurais voulu répondre longuement ; j'ai pu seulement dire que je croyais avoir fait pour la réclame ce qui était possible mais qu'il y avait nécessairement des limites et qu'une réclame outrée me paraissait plus nuisible que favorable à l'établissement. Sans doute Mlle vous avez raison, il ne faut pas faire ce que font certaines gens, mais tâchez d'avoir des élèves et de vous bien porter."

Il est inutile de faire observer que Compayré n'a pas remarqué de lui-même le nombre des fils de fonctionnaires, de même il n'a pas su seul si ma soeur avait ou non une santé superbe car elle n'a jamais manqué plus de 4 ou 5 jours par an, je crois, et ce ne sont pas là des choses qui sautent aux yeux d'un inspecteur général,

Il est assez intéressant, au point de vue général, de savoir si les institutrices des classes enfantines doivent avant tout être des sortes d'organe de publicité et au cas où cela serait il y aurait lieu de leur accorder une indemnité de représentation. Je ne sais pas au juste le traitement de ma soeur ; tout compris, ça doit aller dans les 1500 et franchement de la mondanité à 1500 par an ça ne peut pas faire une réclame considérable au Lycée.

Au point de vue particulier, il serait important de parer aux éventualités ; avez-vous un conseil à me donner ?

Ma lettre vient encore d'être interrompue ; j'ai dû aller amuser ma fille, ça a été la principale de mes occupations mathématiques depuis quelque temps. Je voulais aussi vous parler de Picard. Vous avez dû voir une note de moi aux *Comptes Rendus*⁴⁰⁹. C'était un prétexte pour écrire à Picard, je lui ai envoyé une deuxième rédaction de ma note du *Bulletin des Sciences Mathématiques* non parue, peut-être disais-je l'a-t-on perdue, peut-être l'a-t-on jugée insignifiante. Picard m'a répondu qu'elle devait être perdue et qu'il remettrait à Darboux celle que je lui envoyais. Pour compensation à cet enterrement⁴¹⁰ il m'a demandé de la copie pour les *Annales de l'Ecole Normale* 1906⁴¹¹.

Fatou m'a dit que sa thèse était rédigée ; il m'en avait souvent parlé, j'espère qu'au total ça fera une bonne thèse.

Cordialement.

H. Lebesgue

LXV

Rennes, le 18 juin 1905

Mon cher Borel,

Merci beaucoup de vos renseignements.

Ma soeur sort de l'Ecole Normale de Beauvais, elle est du cadre départemental dont elle est détachée en 1899 pour être mise à la disposition de M. le Vice-Recteur de l'Académie de Paris.¹⁰⁹² Elle craint, avec raison, qu'on ne la charge d'une école n'importe où dans l'Oise, ce qui l'éloignerait de la seule ville où elle connaisse quelqu'un et de la seule ville de l'Oise où elle puisse avoir

quelques chances d'avoir des relations lui faisant goûter les plaisirs dits intellectuels qu'elle désire par-dessus tout. Je veux dire par exemple qu'à Beauvais il y a une bibliothèque, qu'il y a d'autres institutions, les professeurs du lycée qu'elle ne voit pas, les professeurs du collège de jeunes filles qu'elle voit assez et les professeurs de l'Ecole Normale qu'elle fréquente beaucoup. De plus, si elle est assez bien portante pour tenir une classe peu nombreuse formée d'enfants gâtés mais bien élevés, elle ne le serait peut-être pas assez pour mener une de ces classes de 50 élèves qui sont la règle dans l'Oise. (Je veux dire qu'il faut qu'il y ait plus de 50 élèves, et beaucoup plus, pour qu'on se décide à créer un poste d'adjointe.)

Merci de vos renseignements examineurs. Je n'ai que 0 piston politique ; et cependant c'est à la politique que je dois ma place actuelle. Cela vaut d'être conté, même en temps de déménagement. Mon père, typographe en dernier lieu, avait été auparavant soldat pendant 7 ans, puis facteur rural ; il avait été préparé à tout cela par 2 ou 3 années passées au petit séminaire où il était entré je ne sais comment. Je n'ai pas connu mon père, mais ça a dû être un homme très remarquable, entreprenant et actif. Il était socialiste et collaborait aux journaux du temps, il a fondé à Beauvais une société d'instruction populaire, une société de secours mutuel, une coopérative de consommation, entre temps il cherchait le mouvement perpétuel et fabriquait un boulier compteur qui lui paraissait préférable à ceux qu'il voyait pour l'enseignement du calcul,

Tout cela bien entendu ne lui a pas servi matériellement beaucoup, je crois qu'il n'en a résulté qu'un enterrement magnifique, du moins au dire d'un vieux bonhomme qui m'en parle avec émotion chaque fois que je vais à Beauvais.

Il est inutile de vous dire qu'il était connu et aimé des ouvriers, mais de ceux-là seulement ; les politiciens l'ignoraient ou le trouvaient dangereux. Cependant le Dr Gérard⁴¹⁷, qui est mort il y a quelques années, après avoir été longtemps maire de Beauvais, et qui était bien supérieur à beaucoup de politiciens régionaux ou nationaux, l'estimait fort. C'est lui qui m'a fait rentrer au Collège de Beauvais, c'est lui qui a fait rentrer ma soeur à l'Ecole Normale.

Ce piston est mort aujourd'hui.

Je suis heureux d'apprendre qu'à première vue vous jugez intéressante la thèse de Fatou. Nous avons causé souvent ensemble et je ne pense pas que nous interférions beaucoup. Il s'occupe surtout de l'intégrale de Poisson et d'une série de Taylor sur son cercle de convergence, ce dont je ne m'occupe pas. Parfois nous tendons à un même but : représenter une fonction la plus quelconque en le plus de points possibles. Fatou y arrive par l'intégrale de Poisson, moi par la sommation de Fejer ; nos énoncés et nos méthodes sont différentes. Au reste je n'ai pour ma part rien de neuf sur ces matières en dehors de ce que j'ai dit à la Société Mathématique⁴¹⁸.

Fatou m'a annoncé un résultat qui me paraît important dans les applications ; c'est l'extension de l'égalité de Parseval aux fonctions non bornées⁴¹⁹. Il est si difficile d'attaquer ces maudites fonctions et dans les applications (genre Hurwitz⁴²⁰ par exemple) c'est une telle diminution de généralité et d'intérêt que de faire les suppositions nécessaires pour qu'on n'ait que des fonctions bornées que j'attache à un tel résultat plus de prix qu'il n'en paraît mériter.

Je ne tiens pas particulièrement à la remarque que vous citez à Hadamard⁴²¹, elle ne doit pas être nouvelle comme forme, elle ne l'est pas comme fond : c'est toujours dire on n'a pas le droit de supposer déterminé ce qui ne l'est pas.

Hadamard vous a-t-il parlé d'une lettre que je lui ai écrite⁴²² (loin de moi la pensée de demander qu'elle soit jointe au dossier fichtre assez long), je vous en parle parce que j'y ai éclairci pour moi-même un point particulier.

Vous vous rappelez l'exemple (un peu troublant on peut l'avouer entre soi) que donnait Hadamard :

A. Quel que soit x il existe des nombres y tels qu'aucun polynôme en x et y à coefficients entiers ne soit nul.

B. Il existe des fonctions $y(x)$ telles que quel que soit x etc.⁴²³

Je n'ai pas hésité à dire que B n'était pas une conséquence de A ; mais cependant dans ce cas particulier "c'est un peu bien dur".

Or en y réfléchissant je me suis dit que A résumait le raisonnement suivant : les nombres y liés à un nombre x de manière

qu'un $P(x, y)$ à coefficients entiers soit nul peuvent être classés en suite simplement infinie de sorte que le raisonnement de Cantor, modifié d'après votre méthode, permet de citer un y tel que $P(x, y) \neq 0$ quel que soit P , c'est ce que l'on exprime par A . Mais alors le raisonnement fournit B pour ainsi dire avant A , c'est A qui est conséquence de B ou du moins énoncé équivalent. Or dans Zermelo A serait :

A. Dans tout sous-ensemble on peut prendre un élément distingué.

B. Il existe des correspondances déterminées entre les sous-ensembles et des éléments distingués.

Ça n'est plus du tout la même chose.

De cela j'ai cru pouvoir conclure que, contrairement à ce que me reprochait Hadamard, il faut tenir compte de la manière dont a été démontré un théorème d'existence dans la manière de s'en servir.

J'ai reçu ce matin une lettre Boutroux-Blumenthal⁴²⁴ dont Boutroux vous parlera je n'en ai pas le temps je déménage et devient muet jusqu'à la semaine prochaine.

Cordialement,

H. Lebesgue

LXVI

Rennes, le 16 juillet 1905

Mon cher Borel,

Nous allons passer au moins une grande partie des vacances ici, si je vais à Paris ce sera fin septembre ; je n'aurai donc pas le plaisir de vous voir en juillet. Je ne m'occuperai pas non plus des affaires de ma soeur mais, en un certain sens, cela ne paraît pas très pressé : ce n'est certainement pas pour octobre prochain qu'on déciderait la fermeture, du moins d'après les renseignements de ma soeur¹⁰⁹³.

Je continue à ne pas comprendre ce que peut être cet article que Blumenthal m'a demandé, j'espérais, après ce que m'avait écrit Boutroux, que vous alliez m'éclairer, mais votre lumière a fait faillite en la circonstance. Je suppose qu'il y a déjà beaucoup de

choses sur les fonctions de variables réelles dans l'Encyclopédie et je ne puis guère admettre que les Allemands aient oublié des choses importantes et anciennes. Ce ne peut donc être, pour faire un tout cohérent, qu'un article sur des choses nouvelles. Or je conçois peu un article, éloge des travaux de Baire et moi, et par raccroc quelques autres, dans l'Encyclopédie.

Je dois écrire un tel article, et je suis même fort en retard, pour la *Revue des Sciences*⁴²⁵, mais je ne vois pas du tout l'article de l'Encyclopédie.

J'ai d'ailleurs écrit à Blumenthal, qui m'a prié d'attendre quelques jours des renseignements détaillés ; j'attends.

Je suis tout à fait disposé à voir les épreuves de Fatou ; je n'ai d'ailleurs pas réfléchi au mode à adopter, cela, pour ma part, m'importe peu, j'y réfléchirai à moins que vous ne tranchiez la question.

Une petite chose amusante. Je vous ai parlé des sujets de licence trop faciles ; or, un certain lieutenant de vaisseau, candidat, ayant dit à Lacour dans le courant de l'année : "En somme, le sujet que vous aviez donné l'an dernier n'était qu'un simple exercice de calcul", le sujet de cette année a été autrement difficile. Et voici comment marche le progrès !

Je suis dans l'abrutissement profond, inséparable des bachots.

Bien cordialement à vous.

H. Lebesgue

LXVII

Jeudi, 27 juillet 1905
Rennes

Mon cher Borel,

Merci de votre luxueux mémoire; l'Institut, l'Imprimerie Nationale et vous aussi, car en ce temps des distributions de prix il faut nommer tout le monde, faites bien les choses⁴²⁶,

Pour l'Encyclopédie, j'ai écrit à Blumenthal qui m'a promis une réponse longue et détaillée qui me renseignera. Boutroux m'avait

dit que vous m'enverriez des détails effrayants et minutieux sur ce qu'on me demandait aussi je vous croyais bien renseigné.

Pour la thèse de Fatou : il m'est indifférent qu'il sache mon rôle, cependant pour éviter toutes difficultés il vaut peut-être mieux le lui laisser ignorer.

Si ces jours-ci vous apprenez quelque chose sur Méray-Baire-Boutroux⁴²⁷, vous savez que ça m'intéresse au plus haut point. Par la même occasion vous me diriez le gîte de Minkowski auquel j'ai envoyé un mémoire à Zurich et qui me revient⁴²⁸.

Je n'ai toujours rien reçu de Levasseur⁴²⁹, il était d'ailleurs évident quand je vous l'ai écrit qu'il ne me répondrait pas et, en cette occasion, il n'est guère vrai que, qui ne dit mot, consente.

Bien cordialement,

H. Lebesgue

LXVIII

Rennes, le 22 août 1905

Mon cher Borel,

Votre ignorance pour tout ce qui touche à Blumenthal est désespérante, voilà que vous ne savez même pas ce que c'est cette oeuvre dont il vous accuse⁴³⁰.

J'ignorais qu'il y eut une controverse entre l'Hospital, Bortolotti et vous⁴³¹; je ne sais d'ailleurs pas ce que contient votre petit livre d'Adhémar⁴³², il manque à ma collection; je vous ferai gagner 7 sous quelque jour. La citation précise m'a étonnée. Savez-vous le contenu de chacune des pages de chacun de vos livres, ou plutôt n'avez-vous pas constitué un petit dépôt de livres à Tournemire (ou à peu près)?⁵⁴⁹

J'ai été heureux d'apprendre la naissance de la joyeuse famille A_α dont le père a fait d'ailleurs une faute de calcul. Votre imagination en vacances trouve le mal et le remède, car je ne crois pas du tout ressembler à A_α .

Toute discussion à ce sujet ne signifie pas grand chose puisque nul n'a d'autre droit que de poser sa candidature et que le

Collège de France est toujours souverain ; il est possible cependant que les professeurs craignent d'être quelque jour obligés de faire un choix embarrassant et qu'ils regrettent alors d'avoir accru le nombre des compétiteurs possibles en créant des précédents.

Mais ce qui est le précédent grave à mon avis, c'est celui qu'ils ont créé pour vous⁴³³. Ma renomination ne crée pas un précédent, si je puis dire, il n'y avait pas à élargir le cadre du règlement Peccot pour me renommer ; il est vrai que si l'on résume les deux faits en disant non pas *prolongation* après trente ans mais *renomination* possible pourvu qu'on ait eu moins de 30 ans à la première nomination on arrive à A_α , mais il faut votre imagination.

Ce qui demande moins d'imagination c'est d'imaginer, non pas le cas extrême A_α , mais le cas Baire dont la nomination me paraît légitime ; pour moi elle découle purement de votre précédent ; de sorte que c'est ce précédent, dont je voudrais profiter, qui pourrait conduire à me faire refuser. En somme je crois que s'il a des candidats sérieux, le jury pensera aux difficultés possibles dans l'avenir et qu'on m'enverra promener ; s'il n'y en a pas on ne pensera pas je crois à établir cette règle que ne pourront profiter de votre précédent que ceux dont les nominations auront été successives sans interruption.

Je crois que le silence de Levasseur s'explique ainsi : remise de la réponse après le moment où il aura eu l'occasion de causer avec quelqu'un, Lefranc par exemple, puis oublié.

Fatou m'avait parlé jadis de la combinaison Gonnessiat⁴³⁴ que vous dites ; on avait offert Quito à Fatou et il s'établit qu'aller en Amérique mérite récompense, il a eu tort de refuser.

J'ai vu avec plaisir que Denjoy était reçu⁴³⁵, j'espère qu'il va avoir quelque moyen de travailler tranquillement.

Mes amitiés à Madame Borel et à vous.

H. Lebesgue

LXIX

Rennes, le 16 octobre 1905

Mon cher Borel,

Il est inutile de vous dire que je m'attendais peu à votre proposition. Ma rédaction n'est pas finie. J'ai fait les chapitres III, IV, V⁴³⁶. Il me reste I, II, VI à faire. VI doit contenir le mémoire de Riemann et ses suites. II sera fort court, c'est la détermination des coefficients. I est un chapitre préparatoire sur ce qu'il est indispensable de connaître en théorie des fonctions.

A cause de cet I je ne vous propose pas d'envoyer de suite à Gauthier-Villars ce qui est rédigé ; mais je pourrai vraisemblablement envoyer le tout dans un mois.

Nous avons à Rennes un grand nombre de librairies sérieuses ; presque toutes le sont si j'en juge par les titres des ouvrages qu'on y trouve : paroissien, bréviaires, livre d'heure, vie de la bienheureuse Sidonie, recueil des sermons de Monseigneur Chapon, etc. Il en est une, moins sérieuse, et qui est dépourvue de ces livres sacrés mais qui est bien pourvue des publications modernes tant scientifiques que pornographiques ; je vous en mettrai l'adresse exacte en postant ma lettre à la poste. C'est, je crois, la seule qui est fréquentée par les universitaires et tous ceux qui veulent connaître ce qui paraît. Je la crois mal tenue, pour ce qui est de la comptabilité⁴³⁷.

Bien à vous,

H. Lebesgue

LXX

Rennes, jeudi 19 octobre 1905.

Mon cher Borel,

Je vais terminer la rédaction avant de rien envoyer ; cela me sera plus commode à tout point de vue, en particulier à celui étendue. Je ne crois pas dépasser, ni atteindre, les 128 pages⁴³⁸ ; j'espère même rester pas mal en deça, rien n'est certain et Gauthier-Villars sera meilleur juge que moi.

J'approuve le point de vue de Baire⁴³⁹ et je crois que, sauf le cas d'entente préalable entre les différents auteurs, il serait bon qu'on s'en tienne aux matières indiquées par le titre, quand celui-ci a un sens. L'article qu'on me demande doit être, au

contraire, une horrible salade sans queue ni tête.

J'ai beaucoup aimé le "vous y êtes nommé en première page"; et cependant ça ne me satisfait pas entièrement. Avez-vous remarqué - non sans doute, car vous êtes meilleur que moi envers Baire - que, dans son mémoire qu'il m'a envoyé, Baire me cite pour un résultat à côté des siens et non pas pour ce que je puis avoir fait concernant ses résultats et méthodes⁴⁴⁰ ? Avez-vous remarqué que la part, petite je l'avoue, à vous, que j'ai eue dans l'établissement de son théorème sur les ponctuellement discontinues n'est pas indiquée. Si j'ai insisté sur cette part dans mes dernières publications c'est que je pardonne peu à Baire de l'oublier. Il est indiscutable que ma petite note des *Comptes Rendus*⁴⁴¹ n'a pas suggéré à Baire la démonstration du cas général, mais il est certain aussi qu'à l'apparition de cette note Baire l'a jugée intéressante car il ne savait pas alors, il me l'a dit à ce moment même, si son théorème était vrai des fonctions de plusieurs variables. Et puis je pourrais dire que cette petite note contient sur les fonctions des classes α des propriétés que Baire n'a pas encore.

Ce procédé général de Baire m'irrite de plus en plus et je sens qu'ayant certainement raison au départ je finirai par être injuste. Je ne puis m'empêcher de me demander comment il serait possible que Baire, dans sa thèse, m'ait cité sans parti pris au sujet du théorème de Weierstrass et pas à d'autres moments. Et cependant la note qu'il citait⁴⁴² contenait, vous vous en êtes aperçu depuis, avec une faute la représentation d'une classe étendue de fonctions. Elle contenait sur les $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ des résultats dont Baire ne démontrait dans sa thèse que des conséquences particulières. Et pourtant Baire ne m'a cité que pour ce qui n'était pas ses recherches.

Baire n'admet pas qu'un autre pense sur ce qu'il touche⁴⁴³. Il n'admet pas qu'un autre ait eu les mêmes pensées que lui, que quelqu'un ait eu une influence quelconque sur lui et, s'il consent à nous dire que Volterra lui avait fait connaître une fonction de classe > 2 ⁴⁴⁴, il ne nous dit pas quelle elle est. Ce qui serait très intéressant, car elle n'a pas été obtenue par ce procédé d'exclusion que nous employâmes depuis, et elle fut construite à une époque où Baire n'avait aucune propriété appartenant à la classe 2 sans appartenir à toutes les classes.

Je crois qu'il est grand temps de m'arrêter.

Bien à vous.

H. Lebesgue

LXXI

Rennes, mercredi⁴⁴⁵

Mon cher Borel,

Je vous envoie le manuscrit de mes Leçons sur les séries trigonométriques, vous le donnerez à Gauthier-Villars quand vous le jugerez bon. J'ai fini par être très long et je n'ose plus rien affirmer sur les 128 pages. Ou bien il faut prendre son parti de la longueur et dépasser si besoin est les 128 pages ou bien, s'il apparaît que les 128 seront certainement dépassées ou très probablement dépassées, on peut dire à Gauthier-Villars de ne pas imprimer, au moins provisoirement, les parties suivantes : partie II du chapitre IV, § 4, III chapitre III, § 2, IV chapitre V⁴⁴⁶. Je préférerais que le tout paraisse.

Je ne vous ai pas répondu plus tôt parce que je voulais vous envoyer cela et que, alors que j'allais terminer vendredi dernier, j'ai été pris d'un vague air de grippe qui n'a d'ailleurs pas duré.

J'ignorais même que la séance du Collège de France ait eu lieu. Blanc, successeur de Maurain, m'a dit de la part de Picavet que ma nomination avait amené beaucoup de tirage l'an dernier⁴⁴⁷. Partant de là, n'étant pas aussi radical que Brillouin et cherchant une raison à la décision du ministère, j'avais cru, à l'inverse de M. Appell, que la décision avait été prise à cause du congé de Baire qui, dans l'idée des bureaucrates, avait pu désorganiser Montpellier.

J'ai reçu une charretée de brochures de Young et en particulier des choses amusantes et pontifes sur l'intégration où il me félicite d'avoir aperçu quelque chose d'équivalent à sa théorie générale, qui date de l'an dernier⁴⁴⁸. Ça prouve que la vérité est en marche. On y voit aussi l'*extended Heine-Borel theorem*⁴⁴⁹.

Je finis par croire que ces gens-là sont inconscients et qu'ils croient de bonne foi avoir fait des choses énormes⁴⁵¹. Je finirai par comprendre Lindelöf.

Mes relations avec Lacour s'améliorent parce que, par suite de remaniements, j'ai moins de contacts avec lui. Mais Le Roux en a plus et par là la situation se tend.

Avez-vous vu ma note (innocente) du *Bulletin*⁴⁵², avec de la patience elle a fini par paraître. J'ai oublié d'en demander des tirés à part ; vous avez dû recevoir ma note des *Mathematische Annalen*⁴⁵³.

Bien à vous.

H. Lebesgue

LXXII

Rennes, le lundi 20 novembre 1905

Mon cher Borel,

Je vous remercie de penser aux combinaisons qui pourraient m'intéresser.

Pour la *Revue du Mois*. Vendredi, à une assemblée officielle de la Faculté, Moreau a fait de la réclame et, ce qui peut-être vous étonnera, d'une façon adroite. Vous êtes bonne presse ; seulement quand on dit aux gens de répandre les prospectus on envoie des prospectus. Vous avez eu tort aussi de ne pas envoyer (faire envoyer) des prospectus à tous les gens de la Faculté, il y a de justes susceptibilités. Je ne vous en envoie pas la liste, un annuaire quelconque le fera.

Il y a aussi des gens (sinon tous) de la Faculté des Lettres qui méritent de recevoir le prospectus. Je cite un peu au hasard : Loth, Basch, Dottin, Bourdon, Sée, Le Braz, Vacher⁴⁵⁴. Les littéraires ont cet avantage qu'ils peuvent considérer *La Revue du Mois* comme une revue de fond dont l'achat doit être demandé à la Bibliothèque universitaire, tandis que les scientifiques, qui ne peuvent arriver à faire acheter leurs revues techniques, combattraient l'achat de votre revue. Quelqu'intéressante qu'ils la trouvent,

On arrive même à cette magnifique conclusion que, pour les raisons indiquées, ils combattent l'achat de la revue à la Bibliothèque mais que, très probablement, deux laboratoires vont l'acheter sous le prétexte juste, autant que fallacieux, que ça constitue

une très bonne lecture pour les étudiants. Seulement au lieu d'être sur les frais de la Bibliothèque ce sera sur des frais du laboratoire.

La librairie que je vous ai indiquée, et que je continue à vous recommander, manque tout à fait de l'ordre apparent qui attire le flaneur et lui fait connaître l'apparition des nouveautés. Il y a au contraire une librairie que je puis vous indiquer, si vous ne craignez pas trop le voisinage des *Miracles de Sainte Eulalie* : Librairie Dubois, 3 ou 5 place du Palais. Très bien située, elle est très bien tenue. C'est là et là seulement que l'on voit régulièrement en devanture les revues au fur et à mesure de leur apparition. Je ne sais pas par qui elle est fréquentée ; on y voit les Revues bleues et roses, la Revue Générale des Sciences, l'Enseignement mathématique, la Revue des Revues, la Revue des Idées, le Correspondant, etc.

Bien à vous.

H. Lebesgue

Au sujet de Riesz.

Dans un des papiers de Young *Zur Theorie der nirgends dichten Punktmengen in der Ebene*, *Mathematische Annalen* 61, j'ai trouvé que c'était Schoenflies qui avait cru pouvoir déduire des raisonnements de Baire que la projection d'un ensemble discontinu etc. est discontinue. Young montre l'inexactitude par un exemple. Zoretti va plus loin, il met les points sur toutes les droites du plan (d'après *Bulletin des Sciences Mathématiques*)⁴⁵⁵.

LXXIII

Rennes, le 25 novembre 1905

Cher Facteur,

Votre rôle est utile en effet ; il est assez ridicule qu'on vous oblige à le faire. (Sur ce terrain brûlant il faut préciser. Je n'ai pas l'intention de dire : on = Baire.) Pour ma part si j'avais quelque chose à communiquer à Baire je lui écrirai tout bonnement : Mon cher Baire ... Bien à toi (ce qui peut-être est de

l'hypocrisie mais si peu. Puisque ça ne nous tromperait pas.) Bien entendu je ne vous dis pas cela pour que vous le transmettiez à Baire, de même que, ne sachant pas du tout ce que pensait Baire de Riesz, je ne vous avais parlé de cette histoire que parce que j'ignorais qui est Riesz. Il est certain que vis-à-vis de Baire ça a peu d'importance sinon aucune. Quant à la rectification anticipée de Young j'ignorais qu'elle se trouvait avec une rectification de Baire-Schoenflies ; je l'avais trouvée par le plus grand des hasards.

Car il n'y a personne qui ignore autant que moi ce que contiennent les histoires de Schoenflies, Young, etc. dont j'ai accepté très imprudemment de parler dans l'Encyclopédie. Je le regrette chaque jour plus.

Pour en revenir à la carte de Baire, sauf pour le cas où votre conscience serait des plus scrupuleuses, ce que je ne pense pas, il vous eût suffi d'écrire en dessous de M. E. Borel : chez M. Lebesgue, 32 rue de la Palestine, et de la remettre à la poste. Economie notable.

Le renseignement bibliographique de Baire me fait remarquer d'ailleurs que nous en sommes encore à Rennes au Band 58 de *Mathematische Annalen*⁴⁶⁰. D'ailleurs les 57 et 58 ne sont arrivés qu'en bloc à la fin de l'année dernière. Et comme on est au 61, jugez de la commodité bibliographique.

J'ai fait le courtier pour *La Revue du Mois*, je renonce d'ailleurs à toute commission ; sans grand mérite je le crains fort. Tous attendent, veulent voir ; ce qui est après tout trop naturel. C'est peut-être déjà quelque chose qu'une série de gens connaissant la Revue avant sa seconde année d'existence ; ils pourront la juger plus vite et se décider.

Philipot - d'après Annuaire Philipot est votre conscrit à l'Ecole - archicube, neurasthénique, se fait soigner par un fou. Fait mettre une draperie devant la glace de son armoire parce que ça l'énerve de se voir quand il est assis à sa table. Se promène avec une peau d'ours et une calotte d'astrakan. Déclare : Oh ! celui-là était bon au bachot, je lui ai mis douze sur les animaux malades de la peste. Gentil (moralement) dans les relations banales. Je l'ignore : a vécu à Stockholm, d'où Mittag⁴⁶¹.

J'ai, comme un brave, fait des corrections sur les bonnes feuilles en question que Gauthier-Villars m'a envoyées sans me

prévenir de rien. Evidemment ce que j'ai changé et rien c'est la même chose ; mais enfin c'est drôle de ne pas nous envoyer d'épreuves et c'est drôle d'en envoyer de manière qu'on ne puisse corriger. Sachant ce que vous me dites je ne suis pas fâché d'avoir fait des corrections pour voir ce qui en adviendra.

Pour le *Bulletin de la Société Mathématique*⁴⁶² moi aussi je croyais ; peut-être faut-il tout de même les demander sur les épreuves ce que je n'ai pas dû faire.

J'ai communiqué à Boutroux l'état de la question Collège de France, elle l'intéresse évidemment au premier chef. Décidément cet établissement me joue de vilains tours ; en somme c'est parce qu'il se croyait certain de se faire nommer après moi que Boutroux n'a pas été candidat l'an dernier. Certes, ce qui arrive n'est pas de ma faute, ça me met tout de même dans une situation délicate vis-à-vis de Boutroux.

J'avais eu idée primitivement de faire de l'*Analysis situs* (Poincaré, Picard, W. Dyck, Klein, Hadamard et cet animal de Schoenflies) c'eût été très beau, mais maintenant je ne suis pas prêt. Je crois d'ailleurs n'avoir pas lieu de me tracasser pour savoir ce que je ferai⁴⁶³.

Je n'envoie pas à M. Appell des remerciements qui seraient peut-être un relancement.

Pour Gauthier-Villars je vais lui écrire de ne pas faire composer le paragraphe qui se dénomme 4,III,ch.III, c'est la belle et simple remarque de Paraf sur les fonctions harmoniques, je puis remplacer cela par 2 ou 3 lignes⁴⁶⁴ ; puis je dirai à Gauthier-Villars de me renvoyer le ch.V, j'ai mal rédigé la première partie, je puis gagner en longueur, en simplicité et en clarté. D'ailleurs je viens d'envoyer à Picard, sur le sujet en question, une note pour les *Comptes Rendus* enfantine⁴⁶⁵ ; mais n'est-ce pas un charme de plus.

Tenez, en ce moment par exemple, je vois ma fille faire derrière moi ses premiers pas tout à fait seule pendant que sa mère la suit effrayée ; eh bien c'est un joli tableau. Ma fille dit trois mots à peu près ; de façon que nous seuls la comprenons, et encore. Je vous dis que c'est une merveille.

Très cordialement à vous,

H. Lebesgue

LXXIV

Mon cher Borel⁴⁶⁶,

Je reçois à l'instant cette lettre :

Monsieur le Professeur,

Monsieur l'Administrateur me charge de vous informer que le Ministère n'accepterait plus, comme chargé de cours de la Fondation Peccot, un professeur chargé d'un enseignement dans une Université.

Veillez agréer etc.

Picavet

J'ai l'intention de répondre à peu près ceci : Je maintiens ma candidature, au cas où l'Assemblée du Collège de France me nommerait et où le Ministère persisterait dans sa résolution je choisirais entre le Collège de France et Rennes.

J'appelle d'ailleurs l'attention sur les inconvénients de cette décision du Ministère qui restreint pour ne pas dire supprime la possibilité du choix là où le choix était déjà très peu possible. De plus on ne voit pas ce qui légitime une telle mesure pour le Peccot plutôt que pour une suppléance ou un remplacement au Collège de France.

Vous seriez bien aimable de me dire votre avis au plus vite.

Bien à vous.

H. Lebesgue

32, rue de Palestine, Rennes

La lettre de Picavet est une réponse à l'annonce de ma candidature.

LXXV

Rennes, le 28 novembre 1905

Mon cher Borel,

Je suis effrayé de la part qui m'incombe dans vos dépenses postales.

Merci de vos renseignements pour le Collège de France. BOUTROUX, vis-à-vis duquel je ne suis pas si vous voulez dans une situation délicate mais que je regrette d'avoir privé du poste PECOT l'an dernier s'il ne doit pas l'avoir dans l'avenir, m'écrit :

"J'avais vu M. PICAVET avant de quitter Paris et il m'avait également dit que la réclamation du Ministère s'était produite il y a plus d'un an et qu'elle avait sans doute été motivée par le cas de BAIRE. Il avait ajouté que cette réclamation avait été faite oralement à M. LEVASSEUR, qu'il n'y avait rien d'écrit, ce qui pourrait faciliter grandement un recul du ministère."

D'après cela peut-être eût-il suffi tout simplement de ne tenir aucun compte de la réclamation ministérielle et, d'autre part, ce serait mon interprétation qui aurait des chances d'être la bonne. Ce serait à cause du départ de BAIRE (à cause de son congé ou au contraire parce qu'il n'aurait pas pris de congé en s'en allant, s'il n'y a pas eu congé régulier mais seulement arrangement entre lui et ses collègues, ce que j'ignore). Bien entendu si l'on veut que je prenne un congé, je veux bien. Seulement cela amènerait certainement de la part des gens d'ici force protestations et pourrait amener pour plus tard une autre décision ministérielle. LE ROUX a déjà beaucoup de service, LACOUR est fatigué et je crois que mon absence provoquerait des difficultés, tout au moins si l'on voulait faire tous les cours de l'affiche.

Si le ministère a protesté, à cause désorganisation d'une Faculté ou à cause absence non régulière, je donne pas prise à l'objection du ministère. Si c'est la raison immoralité du cumul, je baisse honteusement les yeux.

L'adresse que MITTAG-LEFFLER vous a donnée est certainement fautive ; PHILIPOT demeure à un numéro pair du boulevard LAENNEC.

LACOUR avait eu l'idée de s'abonner de compte à demi avec SEUNES (minéralogiste)⁴⁶⁷ dès la réclame de MOREAU.

C'est entendu, envoyez-moi les épreuves de FATOU.

J'ai reçu de SCHOU⁴⁶⁸ une lettre un peu mélancolique (je n'en avais jamais entendu parler depuis l'École). Il me dit que "sa vie s'est formée différemment qu'il ne pensait étant à l'École". Qu'il a dû entrer comme ingénieur dans un atelier de machines, qu'il est parfois des mois sans avoir une minute de loisir pour travailler aux mathématiques auxquelles il s'intéresse toujours et que c'est

là la raison pour laquelle on ne voit jamais rien de lui.

Bien à vous.

H. Lebesgue

LXXVI

Rennes, le 29 novembre 1905

Mon cher Borel,

Je vous trouve d'un cynisme effrayant pour votre manière d'apprécier les généreux donateurs dont vous aidez les noms à passer à la postérité. Vous devriez au moins leur être reconnaissant de ne pas avoir légué leur fortune à quelque autre congrégation.

Evidemment c'est très beau d'enfermer beaucoup de choses en peu de pages, mais il faudrait cependant que le lecteur pu sortir ces choses des pages. C'est là le point noir, l'envers de la médaille concision. Comme je faisais cette réflexion j'ai reçu une longue lettre de Schoenflies, sur mon premier livre, m'annonçant qu'il y a des brèches dans le raisonnement des pages 18 et 30⁴⁶⁹.

Page 18 la brèche c'est que j'ai besoin d'un point α dans le voisinage duquel il y a une infinité de a_p et je dis que je prends pour α l'un des points limite des a_p . Or, voyez le malheur, ils se pourrait que les a_p fussent tous confondus.

Page 30. Schoenflies n'a pas vu que j'invoquais la convergence uniforme, alors il me prouve pesamment que f , limite de f_n , peut avoir des points de discontinuité qui sont points de continuité pour les f_n , ou, en d'autres termes, que la limite d'une suite de fonctions continues peut être discontinue.

Comme j'ai eu beaucoup de peine à savoir ce que voulait dire Schoenflies, parce que je ne lis l'allemand qu'en devinant ce que ça signifie ce qui est fort difficile quand il s'agit de bêtises, j'ai répondu aigre-doux. Mais du moins cette lettre montre les inconvénients de la concision.

Voilà qui est encore relatif à mon ignorance de l'allemand. Je n'ai pas modifié ma note relative à Runge et vous parce que je n'ai pas vu du tout dans *Crelle* ce que vous m'indiquiez. Avez-vous regardé *Crelle* ? J'ai vu que Heine doutait de l'exactitude de ce

théorème : les formules d'interpolation sont des formules d'approximation, mais...⁴⁷⁰

Je vous remercie d'avoir trouvé le temps de regarder mes épreuves ; je n'ai pas tenu compte de toutes vos objections justifiées contre les notations employées pour éviter de trop nombreuses corrections. J'ai envoyé le paquet complet corrigé à Gauthier-Villars il y a 2 jours, je pense que ça ne va pas rallonger à la mise en pages et, table des matières y comprise, on arrive à 129 en placard.

Je suppose que vous êtes actuellement débarrassé de ce qui concerne le premier numéro de la Revue.

Bien cordialement à vous.

H. Lebesgue

LXXVII

Mardi, 12 décembre 1905

Mon cher Borel,

Je n'ai pas reçu de vous le placard 7 ; s'il ne se trouve pas dans votre prochain envoi je vous en enverrai un exemplaire.

Ne faites aucune attention aux numéros de renvoi. Gauthier-Villars a changé le numérotage, avec raison d'ailleurs, mais le petit travail que j'avais fait et précisément à cause duquel j'avais numéroté est à refaire.

Je n'ai pas trouvé dans Heine ce que vous me dites⁴⁷¹. J'ai vu que Heine ne considérait pas comme évident que la formule de Lagrange appliquée à des points équidistants dans $(-1,+1)$ permettait d'approcher indéfiniment de $f(x)$ et il m'a semblé qu'il prétendait démontrer que cette approximation était réalisée quand $f(x)$ est représentable par une série entière convergente dans $(-1-\epsilon, +1+\epsilon)$. Est-ce que Heine veut faire concurrence à Aristote ?

Je ne pense pas que la note de Fréchet avance considérablement la question⁴⁷² ; je compte l'avancer d'ici quelque temps⁴⁷³.

Pour quand vous aurez le temps. On publie ici un Bulletin de la Société Scientifique et Médicale de l'Ouest et certains articles

particulièrement transcendants de ce Bulletin sont réunis en volume sous le nom de Travaux Scientifiques de l'Université de Rennes.

L'un ou l'autre ou les 2 nous valent des échanges avec des choses plus ou moins vagues. Serait-il possible de faire l'échange avec le *Bulletin de la Société Mathématique de France*. La Bibliothèque d'ici ne le reçoit pas. Evidemment ce qui serait le mieux ce serait que la Société Mathématique de France acceptât l'échange et nous envoie toute la collection.

Acta Nova, année 1793, paru en 1798⁴⁷⁴.

J'attends d'avoir tout reçu pour renvoyer les épreuves afin de savoir la longueur. Gauthier-Villars a imprimé un § que j'avais supprimé.

Mon manuscrit avait primitivement 199 pour 128. On en est actuellement à 113 pour 72, or $\frac{72}{112} = \frac{9}{14}$, $14 \times 128 = 1792$, $9 \times 199 = 1791$. Tout va bien.

Si Gauthier-Villars continue comme la semaine dernière ce sera fini dans 8 jours.

Bien à vous.

H. Lebesgue

LXXVIII

Lundi matin, 18 décembre 1905

Mon cher Borel,

Je ne m'explique pas mon étourderie. J'avais écrit à Boutroux en même temps qu'à vous et j'ai pris soin de bien regarder avant de mettre les lettres sous enveloppes. Je me demande si je n'ai pas écrit M. Borel Maître de conférences à Montpellier et inversement. Aussi j'ai envoyé une carte à Boutroux. Ma lettre d'ailleurs, autant que je m'en souviens, contenait peu de choses.

Au dernier envoi de Gauthier-Villars on en est à $19 \times 6 = 114$ pages imprimées pour 182 pages du manuscrit. Comme il y a 199 pages en tout il n'y aura pas lieu de faire de parti pris des suppressions.

Merci de vos remarques et renseignements mais il y en a une

contre laquelle je proteste violemment : Vous devriez rougir d'être aussi ignorant à votre âge. Au lieu de

$$\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}$$

vous voudriez

$$\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x_0}, \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_0,$$

ou

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x_0, y_0}$$

pour qu'on dérive au moins la constante $(v(x_0, y_0))$ par rapport à une constante.

La 3^e notation est très bonne,¹⁰⁹⁴ la seconde est si condensée qu'on peut rarement l'employer, mais la première de celles que vous proposez, quelle horreur !! Alors vous parleriez de

$$\frac{\partial v(1, 1)}{\partial 1}.$$

Qu'est ce que c'est que cela ? Ou encore, posant

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx,$$

vous écririez

$$F(x_0) = \int_a^{x_0} f(x_0) dx_0 ?$$

Pour moi

$$\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}$$

et

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x_0, y_0}$$

c'est la même chose, ça a la même signification, tout ce que l'une peut exprimer l'autre aussi. Et ne me dites pas que si l'on peut prendre la dérivée de $\varphi(x, y) = v(x_0, y_0)$, donc constante, on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x},$$

c'est pour moi une écriture incorrecte. D'ailleurs j'ai remarqué

avec plaisir que vous aviez dit : la constante $(v(x_0, y_0))$ et non pas la constante $v(x_0, y_0)$. Aussi je suis d'accord peut-être avec vous sur ceci que

$$\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}$$

et

$$\frac{\partial (v(x_0, y_0))}{\partial x}$$

ne signifient pas la même chose. Je sais bien que si l'on pose $\varphi(x, y) = v(x, y, z_0)$ on écrit

$$\frac{\partial v(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}$$

pour

$$\left[\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} \right]_{x_0, y_0, z_0}$$

et pour

$$\left[\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \right]_{x_0, y_0}$$

mais c'est parce que ça n'a pas d'inconvénient. En réalité les notations de ces dernières lignes sont les seules tout à fait correctes ; elles sont longues.

Merci de vos indications sur les systèmes à une infinité d'équations ; si vous pouvez les compléter sur un prochain placard par l'indication des journaux ou par un endroit où se trouve faite la bibliographie, je vous prie de le faire⁴⁷⁵.

Je me rappelle maintenant : ma dernière lettre était à l'occasion de Heine. Je n'ai pas vu ce qu'indiquait E.B. Jourdain⁴⁷⁶. Heine ne considère pas comme évident que la formule de Lagrange soit une formule d'approximation, il démontre qu'elle est une formule d'approximation quand on l'applique à $-1, \frac{n-1}{n}, -\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}, \dots$, s'il s'agit de la fonction $f(x) = \sum a_p x^p$, convergente dans $-1-\epsilon^2, 1+\epsilon^2$.

Bien à vous.

H. Lebesgue

LXXIX

Rennes, vendredi 22 décembre 1905

Mon cher Borel,

Je me demandais ce qui vous avait pris de dépenser 13 sous de timbres pour m'envoyer des tirés à part alors que je vous demandais une indication bibliographique pour mon bouquin ajoutant sur un prochain placard pour éviter que vous n'écriviez inutilement. J'en ai eu depuis l'explication : c'est qu'ayant eu le prix Petit d'Ormoy⁴⁷⁷, ce dont je vous félicite vivement, vous mener la vie à grandes guides. Mais vous auriez dû réfléchir qu'il faudra bien un jour que je vous renvoie ces tirés à part ; j'espère que les 13 sous que je dépenserai alors pèseront sur votre conscience.

Votre envoi n'a d'ailleurs pas été inutile. J'ai prêté à Le Roux les tirés à part de von Koch d'articles parus dans des périodiques étrangers et dans lesquels ledit von Koch s'occupe de fonctions analytiques d'une infinité de variables ce que fait aussi Le Roux.

Qui est Petit d'Ormoy ?⁴⁹³

Après ce que m'a écrit M. Appell je crois que les histoires du Collège de France seront tirées au clair et pour cette année et pour la suite. Pour ma suppléance ici, au cas où ..., j'avais pensé que cela pourrait permettre à Montel de finir plus vite et plus facilement sa thèse ; mais dès que j'y ai réfléchi il m'a paru impossible qu'on pût le désigner sans du même coup lui faire perdre à tout jamais le poste qu'il occupe à Nantes et qui, je crois, est assez avantageux. Je n'ai d'ailleurs parlé à personne des affaires du Collège de France du moins en ce qui concerne la possibilité que je prenne un congé (en dehors de Boutroux).

Sur la lettre que je vous ai envoyée, en même temps que celle à Boutroux que vous reçûtes, je vous demandais aussi (question peu pressée) si la Bibliothèque universitaire d'ici pourrait échanger les *Travaux Scientifiques de l'Université de Rennes* et le *Bulletin de la Société Scientifique et Médicale de l'Ouest* contre le *Bulletin de la Société Mathématique de France*.

Je suis un peu inquiet de la santé de ma femme, Elle a trop

longtemps nourri notre petite fille et cela l'a fort épuisée ; j'espère que la prochaine année ramènera la santé. Je suppose que, chez vous, tout va bien du côté santé ; bien à vous,

H. Lebesgue

LXXX

Rennes, le 16 janvier 1906

Mon cher Borel,

Je sais que vous êtes très occupé, vous aurez peut-être cependant l'occasion, sans perdre de temps, de causer de l'histoire suivante avec ceux qui peuvent influencer sur les décisions administratives.

Fatou m'écrit, ce dont vous êtes peut-être au courant, que Loewy⁴⁷⁸ cherche à se débarrasser de lui se basant sur son mauvais état de santé qui, dit Loewy, l'empêchera toujours de faire de l'astronomie. Pour cette raison Loewy considère Fatou comme plus propre à faire de l'enseignement. D'après Fatou l'idée de Loewy serait de créer par le départ de Fatou un poste pour un certain¹⁰⁹⁵ Ebert auquel Fatou fait le reproche, quelque peu nationaliste, d'être récemment naturalisé.

Je crois, mais ne vous basez pas trop sur cela car je n'ai pas de sérieuses raisons de croire, que Fatou peut momentanément se passer d'un traitement. Si je ne me trompe pas il n'y aurait pas d'inconvénient pour Fatou, au contraire, à ce qu'on lui donne un congé lui permettant de soigner sa neurasthénie, assez aiguë paraît-il. Je crois que Fatou ne verra aucun inconvénient à ce qu'on lui donne un congé mais ce qu'il désire, il me semble et cela me paraît trop naturel, c'est que ses droits pour plus tard soient réservés et qu'une incapacité physique de remplir les obligations de son poste, qui n'est peut-être que momentanée, ne soit pas considérée comme une raison suffisante pour le rejeter hors de l'Observatoire.

Fatou m'écrit avoir parlé de tout cela à Tannery qui a promis de s'en occuper. Si vous avez l'occasion d'en parler à Tannery ou à quelque personne qui ait prétexte à intervenir, je vous en serais reconnaissant. Je suppose que Fatou vous a d'ailleurs mis au

courant ; cela n'est cependant pas certain car Fatou est assez renfermé et timide.

J'ai reçu, avec étonnement, fin décembre, 25 exemplaires de ma note du *Bulletin*.

J'ai reçu aussi le N° 1 de *La Revue du Mois* ; mes remarques seront peu profondes. D'abord, par ordre alphabétique, Odéon vient avant Vaudeville⁴⁷⁹ ; il est vrai que théâtre non subventionné vient avant théâtre subventionné, mais ce serait trop chinois.

Ensuite, je crois que c'est une maladresse d'avoir débuté par l'article de Volterra⁴⁸⁰. Je ne méconnais pas que cet article ne contienne des choses très bien, peut-être est-il tout entier très bien, seulement, et je fais d'autant plus volontiers ce reproche que j'ai souvent conscience de le mériter, Volterra parle de beaucoup de choses en les supposant connues du lecteur, ce qui peut-être est exagéré. J'ai peur que, alors que les articles de n°1 devraient permettre à chacun de voir si la revue est faite pour lui, l'article de Volterra ait conduit trop de gens à se dire que cette revue n'était pas faite pour eux. Et puis l'article de Volterra est une traduction et, malgré l'adresse de Zoretti, cela se sent et pourra choquer certaines gens pour lesquelles cependant la revue est faite.

J'ai renvoyé à Gauthier-Villars le placard que vous m'aviez adressé. Je n'avais pas reçu ce placard en 2^e épreuve, ce qui d'ailleurs n'a rien d'étonnant car je ne l'avais redemandé que pour vous. En le renvoyant à Gauthier-Villars j'ai dit qu'il était inutile qu'il vous envoie à nouveau les épreuves, mises en pages. C'est ce que j'avais compris par votre bon à tirer ; si je me suis trompé rectifiez. Je n'ai pas encore reçu de secondes épreuves, je suppose que ça ne tardera pas.

Bien à vous,

H. Lebesgue

LXXXI

29 janvier 1906

Mon cher Borel,

Je reçois de Levasseur l'annonce, semée de fleurs, que le Collège de France m'est refusé pour mon âge avancé. Je pense qu'ayant commencé par refuser ma nomination pour un motif on n'a pas été fâché d'en trouver ensuite un autre, fût-il quelque peu défraîchi, pour refuser définitivement. Et ainsi je n'enseignerai jamais, et aux autres et à moi, l'*analysis situs*.

J'ai reçu, corrigées et expédiées, les 1^{ères} épreuves en page. Le bon à tirer sera donné d'ici 15 jours.

Bien cordialement à vous.

H. Lebesgue

LXXXII

Mon cher Borel⁴⁸¹,

Hier, Moreau me dit : "Votre affaire du Collège de France est-elle arrangée ? - Non, etc. - Voici pourquoi je vous en parlais. A la fin de décembre, j'ai été à Paris et Bayet m'a demandé incidemment¹⁰⁹⁶ : ça gêne-t-il la Faculté que M. Lebesgue vienne au Collège de France ? J'ai répondu que non, que tout ici était arrangé pour cela et que les deux autres années où vous alliez à Paris on n'avait rien demandé au Doyen. Bayet me dit alors : C'est parce que M. Levasseur trouve que M. Lebesgue doit opter entre le Collège de France et la Faculté de Rennes." Après cela il me paraît évident que tout ce qu'on m'a opposé était prétexte pour arriver à nommer Servant et que c'étaient Levasseur et Picavet, et non le ministère, qui marchaient contre moi.

Je suppose que Darboux a dit non seulement du bien de Servant mais aussi du mal de moi. Sans être fou au point de croire que Darboux pense à moi toutes les fois qu'il écrit quelque chose, je ne puis m'empêcher de remarquer l'insistance avec laquelle Darboux répète actuellement cette épistolaire bêtise d'Hermite : "Je me détourne avec effroi et horreur,..."⁴⁸². Dans le *Bulletin* Darboux semble en faire la conclusion de l'oeuvre d'Hermite. Eh bien, cela me paraît prouver que Darboux est plus que jamais dans un état d'esprit que je me permets de qualifier d'intransigeant et d'étroit et qui ne saurait m'être favorable.

Mais, au moins, lui ne m'a pas fait de sottises hypocrites ; je trouve plus à redire contre M. Levasseur (double face, triple

au besoin).

Pour Fatou, je crois qu'une solution est prête d'intervenir ; il a demandé un congé. Je ne vois aucun inconvénient à ce que vous lui parliez de tout cela.

Bien à vous.

H. Lebesgue

LXXXIII

Mon cher Borel⁴⁸³,

Je viens de recevoir votre lettre.

Je donnerai vers la fin de la semaine le bon à tirer. Gauthier-Villars ne m'a plus envoyé de feuilles de titre et de préface à cause de votre bon à tirer. Je lui en réclame une épreuve pour vérifier vos corrections ; comme il est assez invraisemblable que quelque erreur subsiste je ne l'ai demandé qu'en ajoutant sauf si cela était gênant en quoi que ce soit. Il est probable cependant que Gauthier-Villars m'enverra une épreuve, si donc vous avez quelque chose à changer vous pouvez me l'écrire.

Cordialement à vous.

H. Lebesgue

LXXXIV

Rennes, le 21 février 1906

Mon cher Borel,

Cavalier trouve inconvénient à ce que le bureau de notre jeune Association ne soit élu que par une trentaine de voix sur 200 adhérents, aussi veut-il proposer des noms aux votants,

Son projet primitif comportait Barrois et Appell, ce dernier ce trouve exclu puisqu'il ne fait pas partie des adhérents connus et Cavalier propose, en attendant que les futures réunions de la Société fassent connaître les gens actifs qui s'intéressent à la chose : Président Barrois, V.P. Curie (Paris), Trésorier X ? (Maurain si celui-ci accepte)⁴⁸⁴.

Ce projet n'a rien d'enthousiasmant, mais en vérité le choix est difficile.

Cavalier ne serait pas fâché d'avoir rapidement l'avis de quelques amis, de vous en particulier. Si vous avez un projet quelconque, écrivez à lui ou à moi. Cavalier avait pensé à Magnin (Besançon), Charve⁴⁸⁵ (Marseille) mais sans aucune raison.

Je n'ai plus eu de nouvelles de Gauthier-Villars, je suppose que vous lui avez envoyé l'épreuve des pages de titre de mon livre.

Je n'ai pas reçu le n° 2 de la *Revue* que vous m'aviez annoncé. Me l'avez-vous envoyé ?

Bien à vous.

H. Lebesgue

LXXXV

Mon cher Borel⁴⁸⁶,

Merci du n° 2 de la *Revue* et de votre réclame pour moi⁴⁸⁷ ; merci aussi de me signaler les rabiots possibles, rabiots que mon esprit basement mercantile me force à rechercher. Aussi je serai candidat à St Cyr comme je l'aurais été à toute autre chose. Je vais envoyer ma lettre de candidature.

Vous trouverez ci-jointes de vagues observations sur le début de la thèse de Fatou. D'une manière générale il me semble que Fatou met assez mal en lumière l'intérêt des questions dont il s'occupe et des résultats qu'il obtient. Le seul qui soit à peu près mis en lumière dans l'Introduction est celui relatif à la nature de l'indétermination au voisinage d'une coupure, et encore, Fatou me semble admettre aussi assez volontiers que tout le monde sait ou voit la même chose que lui et il donne parfois assez peu d'explications, il est vrai qu'il s'agit d'un mémoire et non d'un travail d'exposition.

On vous enverra d'ici un papier pour l'Association.

Bien à vous.

H. Lebesgue

LXXXVI

Mon cher Borel⁴⁸⁸,

Le *Bulletin des Sciences Mathématiques* qui ne veut plus rien recevoir de moi parce que Lerch m'a faussement accusé d'erreur publie sur des sujets connexes des bêtises de Pompeiu⁴⁸⁹. Celui-ci confondant quasi uniformité et quasi uniformité en général croit que pour qu'une série de fonctions analytiques en z ait une somme analytique en z il faut et il suffit que la série soit quasi uniforme. Cela est faux ; c'est vrai, mais évident, si les sommes sont bornées car alors la somme est toujours analytique. C'est faux si les sommes ne sont pas bornées. J'ai ajouté que Pompeiu aurait pu tout aussi bien conclure de ses raisonnements le même énoncé avec quasi uniforme en général au lieu de quasi uniforme que c'eût été tout aussi faux.

C'est Montel qui m'a signalé cette erreur ; sur mon conseil il vient d'envoyer à Tannery une note où il dit ce qui précède (c'est de lui que je tiens ces remarques) et où il donne un exemple de séries de polynômes en z qui représentent une fonction continue en x, y (donc série quasi uniforme) mais non holomorphe⁴⁹⁰. Si vous avez l'occasion de vous occuper de cela, faites en sorte que cette note ne soit pas enterrée.

Bien cordialement,

H. Lebesgue

LXXXVII

Rennes, le 14 mars 1906

Mon cher Borel,

Merci des renseignements que vous me donnez ; j'avais écrit à Hadamard pendant les vacances de l'an mais il y a un sort fâcheux jeté sur mes lettres. Je lui ai récrit aussitôt votre lettre.

Je viens de recevoir de Perrin le n° 3 de *La Revue du Mois*. Il m'a intéressé bien que j'ai trouvé le Frédéric Houssaye bien faiblard⁴⁹¹. Le papier poste adresse prévoyait : Envoi de M... cela m'a surpris et je me suis demandé s'il était convenu que la revue

s'offrait et ne s'achetait pas. Ne voyez rien d'ironique dans ma phrase, je veux seulement dire que je me suis demandé s'il était possible à votre revue de vivre et je me suis dit ensuite que peut-être cela serait possible si tous les collaborateurs effectifs ou éventuels s'y abonnaient et achetaient, lors de la publication de leurs élucubrations, assez de numéros à offrir. *La Revue du Mois* serait ainsi l'organe d'une société d'enseignement mutuel. Il serait désirable que cette société ne soit pas presque uniquement universitaire.

Puisque l'occasion s'en présente. En critiquant l'article de Volterra j'ai voulu seulement vous annoncer que je ne l'avais pas compris et que, dans ma modestie habituelle, j'en ai conclu que je ne devais pas être le seul à ne pas pouvoir lire un article où l'on ne parle que par allusion des hautes théories de mathématiques, de physique, d'économie politique, de zoologie.

Pour la liste des envois de mon livre, je n'ai pas l'ancienne, je pense, complétez s'il y a lieu, à :

Institut. Darboux, Appell, Jordan, Humbert, Painlevé, Picard,
Sorbonne. Goursat, Hadamard, Koenigs, Raffy, Tannery.

Mittag-Leffler, Hilbert, Klein, Peano, Volterra, Lerch, Dini, Osgood, Lindelöf, Blumenthal, Hurwitz, Fejer, Prigsheim, Pincherle, Wirtinger, Minkowski, von Koch, Schoenflies.

Lacour (avec qui ça va mieux), Le Roux, Montel, Fatou, Baire, Drach, Cotton, Zoretti, Boutroux, Molk, Viellefond, Husson, Dubesset, Perrin, Langevin, Cauquil (Principal de Collège de Clermont, Oise), Bibliothèque Collège de France.

Il y a sur cette liste, écrite au courant de la plume, des gens auxquels je ne tiens guère, peut-être en ai-je oublié de plus sérieux. Voulez-vous me le dire et je vous enverrai de suite la liste définitive, que j'avais tout à fait oubliée. Les gens marqués d'un sont ceux qui ne valent qu'un/2, ceux marqués ne valent j'espère guère mieux.

Bien à vous.

H. Lebesgue

LXXXVIII

Rennes, vendredi 16 mars 1906

Mon cher Borel,

Je vous renvoie votre liste. Il y a des gens auxquels je ne tiens pas spécialement : Koenigs, Fejer, Pringsheim, Pincherle, Wirtinger, Minkowski. J'ai marqué Pincherle parce qu'il est intelligent ; Pringsheim, Minkowski parce que je crois vous me les avez indiqués l'autre fois ; Fejer parce qu'il s'occupe de ces questions ; Wirtinger parce que je suis vaguement en rapport avec lui à cause de l'Encyclopédie, il est chargé du tome auquel je dois collaborer⁴⁹⁴.

Si vous voyez quelques envois plus indiqués ou si vous craignez quelques oublis, on pourrait, momentanément au moins, les supprimer quitte à le leur envoyer d'ici 2 mois.

Vous pourrez donc dire à Gauthier-Villars de m'envoyer une dizaine d'exemplaires et ne pas donner à Gauthier-Villars l'ordre d'envoi aux gens que je vous ai signalés ou encore à Le Roux, à Vieillefond, Husson⁴⁹⁵, Dubesset, Cauquil, auxquels j'enverrai directement en tant qu'ami.

Répartissez entre vous et moi, comme vous voudrez ; s'il y avait une différence quelconque dans l'envoi je préférerais cependant que l'on envoie à Brillouin en mon nom. Je l'avais oublié, mais il est capable de s'intéresser à tout et il a été gentil vis-à-vis de moi. Si ça ne vous gêne pas vous prendriez quelques autres : Blumenthal, von Koch, Lindelöf, Darboux, etc., à votre choix. D'ailleurs faites comme vous le voudrez, mais, si vous modifiez quelque chose, prévenez m'en pour que je ne fasse pas de gaffe. J'ai recopié votre liste,

L'annuaire de l'École s'est amusé à modifier mon adresse cette année !!!

Ici il n'y a pas d'École Primaire Supérieure, mais il y a une école municipale de médecine qui pourrait s'abonner à la Revue. J'en avais parlé à mon médecin. Je crois qu'il n'y a rien eu de fait. Castex⁴⁹⁶ pourrait s'en occuper. Ici il n'y a je crois aucune des bibliothèques dont vous parlez qui soient abonnées sauf

peut-être les Cours secondaires qui, n'ayant pas de crédits pour acheter des livres, s'étaient préoccupés d'un arrangement pour s'abonner. Au Lycée il était trop tard pour cette année, les renouvellements d'abonnements ayant lieu en juillet et tous les crédits étant utilisés. Je ne sais pas si quelque chose a été tenté du côté des Ecoles Normales. Je n'ai nulle accointance avec celle des filles, je parlerai à quelques professeurs de celle des garçons. Ma soeur pourra peut-être quelque chose à celle des filles de Beauvais; mais du moment que ça n'est pas de la littérature il y a peu de chances du côté des femmes d'autant qu'elles ont des crédits presque nuls. Et puis je crois bien me rappeler qu'elle a cessé au commencement de l'année d'être secrétaire de l'Association des anciennes élèves de l'école normale primaire pour des chipotements au sujet d'abonnements.

Mes félicitations pour vos 417 abonnés, combien en faudrait-il pour vivre bien ?

Merci et cordialement,

H. Lebesgue

LXXXIX

Rennes, 23 mars 1906

Mon cher Borel,

Nouvelle lettre de Montel m'annonçant qu'il n'a rien reçu de Tannery et que Pompeiu a publié une rectification fautive⁴⁹⁷. Je vais vous exposer la question en vous supposant d'une ignorance crasse, ce qui est toujours plus prudent.

Pompeiu cherche la condition nécessaire et suffisante pour qu'une série de polynômes en $x+iy = z$ ait une somme holomorphe. Le premier énoncé de Pompeiu était : il suffit qu'il y ait quasi-uniformité. Cela est bien nécessaire puisqu'une fonction holomorphe est continue en (x,y) mais n'est pas suffisant. Le 2^e énoncé de Pompeiu suppose en plus de la quasi-uniformité l'intégrabilité terme à terme ; celui-ci est suffisant mais non nécessaire.

En réalité, dans son premier raisonnement, je ne connais pas le second, Pompeiu supposait qu'une série quasi-uniforme est

toujours intégrable terme à terme (faute qu'il a, je crois, déjà commise dans sa thèse⁴⁹⁸), d'où son second énoncé.

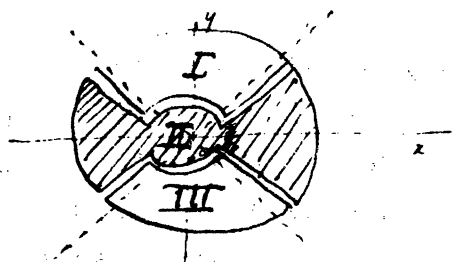
En réalité l'un et l'autre énoncé sont vrais dans le cas où les sommes de la série sont bornées, seuls cas auxquels pense Pompeiu, mais alors ils sont sans intérêt et inutilement compliqués. Supposons en effet que les sommes successives d'une série convergente de polynômes (z) soient bornées, alors la série est intégrable terme à terme, d'après un théorème dont je suis responsable et par suite le raisonnement de Pompeiu peut se dérouler : on intègre et on voit que la somme $\int(z)$ est la dérivée d'une fonction $F(z)$ qui, d'après Cauchy-Goursat, est holomorphe. Donc toute suite bornée, convergente, de $P(z)$ est uniformément convergente et a pour limite une fonction holomorphe.

Ce théorème est assez vieux, il est je crois d'Arzela⁴⁹⁹ ; mon attention a été attirée sur lui par Montel lorsque je cherchais une réponse à cette question, posée par Lerch lors de notre controverse⁵⁰⁰, existe-t-il des séries convergentes de $P(z)$ qui ne soient uniformément convergentes dans aucun domaine. La réponse est négative. Montel a depuis retrouvé cela comme cas particulier de faits plus généraux. Mais je reviens à Pompeiu.

Le théorème d'Arzela (?) répond à la question que se pose Pompeiu quand les sommes de la série sont bornées : il suffit alors que la série soit convergente ; les 2 énoncés de Pompeiu sont exacts et trop compliqués. Je crois qu'en réalité Pompeiu n'a pensé qu'à ce cas, ce qui est pardonnable étant donnée la mauvaise habitude qu'on a trop généralement de ne pas dire explicitement ce qu'on suppose et de donner aux énoncés une fausse généralité. Supposons les sommes non bornées : le premier énoncé de Pompeiu est nécessaire mais non suffisant. Montel construit en effet des séries de $P(z)$ convergeant dans une aire vers une $f(x,y)$ continue mais non holomorphe ; bien entendu, d'après Lebesgue-Montel ci-dessus rappelé, cette $f(x,y)$ ne peut être quelconque. Montel prend une fonction $f(x)$ indépendante de y et telle que, dans tout intervalle, s'en trouve un autre où elle est constante, alors il est facile de construire des $P(z)$ qui s'approchent autant que l'on veut de diverses constantes dans des aires convenables et qui tendent vers $f(x)$.

Pour le 2^{ième} énoncé il est suffisant, mais non nécessaire.

Exemple de Montel : Soit l'électromètre à cadrans (sic) dans lesquels les cercles sont de rayons $n, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}$; les parallèles aux bissectrices sont



distantes des bissectrices de $\frac{2}{n}$ et $\frac{1}{n}$. Alors si $|P_n(z)| < \frac{1}{n}$ dans I et III et $|P_n(z) - 2n^2 z e^{-n^2 z^2}| < \frac{1}{n}$ dans II $P_n(z)$

tend vers zéro partout et cependant le long de Ox on a

$$\int_0^x P_n(z) dz = 1 .$$

J'ai conseillé à Montel de faire une note de tout cela et de l'envoyer à Tannery en lui disant de supprimer la première⁵⁰¹.

Il me semble que dans cette mise au point de Montel il y a diverses choses qui n'avaient pas besoin de Pompeiu pour être intéressantes.

Je ne vous ai pas remercié de votre théorie cinétique⁵⁰².

J'avais lu le Boltzmann⁵⁰³ il y a 2 ans parce que j'étais persuadé comme vous que c'était un très beau sujet et qu'il y a beaucoup à faire. Mais cette lecture m'a effrayé, j'ai vu trop de trous. Je m'empresse d'ajouter que je n'ai jamais eu aucune idée sur la question. J'ai été heureux de voir que *La Revue du Mois* ne vous empêchait pas de travailler aux mathématiques. Votre idée pourrait peut-être être employée à d'autres choses, l'étude des parties de dames par exemple⁵⁰⁴.

J'ai reçu un accusé de réception de ma candidature à St Cyr. Plus une nomination de suppléant pour Centrale que je conserve momentanément.

Montel m'écrit que ses yeux recommencent à l'inquiéter. Si vous avez quelque chose à lui écrire il demeure 8 quai Cassard, Nantes.

Bien cordialement.

H. Lebesgue

Je voulais vous demander seulement combien vous faut-il d'abonnés pour que vous fassiez vos frais⁵⁰⁵.

XC

Rennes, le 28 mars 1906

Mon cher Borel,

Vous m'avez envoyé de nouveau les pages 17 à 24 de Fatou que j'avais déjà reçues et les pages 33 à 40. Je ne crois pas avoir reçu 25 à 32. Je supposais qu'il y avait erreur, que vous vous en apercevriez et que je recevrais les dites pages. Peut-être les ai-je effectivement reçues ; il n'est pas impossible que je ne me souvienne pas très bien de la façon dont elles finissent et que ce soit pour cette raison que les pages 33 à 40 ne m'aient pas paru la suite de ce que déjà j'avais lu. Je vous enverrai ce que j'ai reçu d'ici 2 ou 3 jours à moins que, d'ici là, je ne reçoive les pages 25-32.

Montel m'a écrit que, dans la 1^{ère} note qu'il avait envoyée à Tannery, il mettait les choses au point et qu'il lui semblait suffisant de faire une queue à cette première note. Je suppose qu'il l'a fait. Il ressort d'ailleurs de la lettre de Montel que le théorème dont je vous ai parlé dans ma dernière lettre et que j'attribuais à Arzela est de lui, Montel.

Bien cordialement,

H. Lebesgue

XCI⁵⁰⁶

- page 1 (et 2). L'usage semble établi par des travaux nombreux et volumineux, sinon importants, d'appeler "intégrale généralisée" celle que les procédés de M. Jordan (*Cours d'analyse*, 2^e éd., t.2) permettent d'attacher à certaines fonctions non bornées, et cette intégrale n'est pas nécessairement une de celles que donne la théorie des fonctions sommables⁵⁰⁷.

- page 2 (à deux endroits) Evidemment que l'on peut effectivement nommer doit être remplacé par que l'on a pu effectivement nommer⁵⁰⁸.

- page 3 (bas de la page et commencement de la page 4) Ici un complément est évidemment désirable : l'énoncé des relations entre a_n , b_n et la fonction. Si ce complément est obtenu, même partiellement dans la suite, il serait bon qu'il soit annoncé ici⁵⁰⁹.

- page 5 Que l'intégrale de Poisson donne toujours une fonction harmonique ce n'est peut-être pas absolument évident, parce que les dérivations qu'il serait naturel de faire pour vérifier l'équation de Laplace ne sont pas légitimées. On voit de suite l'exactitude par le développement en série.⁵¹⁰

- (milieu de la page 5) La remarque dont il est question ici est déjà dans Poisson (C. de l'Ec. Poly. 17, 18 ou 19). Schwarz n'eut qu'à ajouter les ε modernes pour avoir son théorème. Peut-être faudrait-il citer Poisson⁵¹¹.

- page 11 § 3 Au sujet de l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial \theta} F(\kappa, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int \dots = \sum n \kappa^n (\dots)$$

et des égalités analogues une explication est peut-être nécessaire. Comme je l'ai déjà dit les dérivations sous le signe \int ne sont pas légitimées ; l'égalité du 2^{ème} et des autres membres peut s'obtenir en sommant le 3^{ème} membre⁵¹².

- page 12 Une phrase peu claire : $F(\kappa, \theta)$ est connue (et égale à $2 \operatorname{arctg} \frac{\kappa \sin \theta}{1 + \kappa \cos \theta}$) et l'on trouve ainsi que (dans ce cas) l'intégrale précédente...⁵¹³.

- page 13 Il est vrai que le cas $\pm \infty$ n'offre pas de difficultés sérieuses ; la rédaction est peut-être cependant un peu concise⁵¹⁴.

- page 14 Dans le texte et en note *intégrable* devrait être remplacé par *sommable* pour éviter des confusions⁵¹⁵.

Au bas de la page il faut sans doute

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H(u) du = - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial H}{\partial u} F(u) du =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial H}{\partial \theta} F(u) du .$$

Mais ici, comme plus loin (début du § 4 et page 22) on trouve des dérivées de H par rapport à θ . Or H a été défini, page 13, comme fonction de u seulement. En réalité dans l'égalité précédente il doit être question de la fonction $H(u-\theta)$ ⁵¹⁶.

- page 15 Cette réciproque méritait d'être mieux mise en évidence parce qu'elle donne un sens très précis au problème de Dirichlet élargi dont il est question à cette page⁵¹⁷.

- page 17: $E_n[|f(u)| > \epsilon_n]$ notation non expliquée⁵¹⁸.

- page 18, § 4 : Confusion possible à cause de 2 significations données à la lettre Δ ⁵¹⁹.

L'inégalité écrite en haut de la page 18 est démontrée (?) dans des cas étendus dans un mémoire, en grande partie faux, que Harnack a publié en français (en partie corrigé) dans le BSM 188?⁵²⁰

- page 26 en haut : l'inégalité a lieu entre les valeurs absolues (?)⁵²¹

En bas : mettre en italique l'énoncé⁵²².

Est-il de Fatou ou de Pringsheim, peu clair⁵²³.

- page 28 : Figure mal placée, la mettre avant : On aura alors ...⁵²⁴

- page 33 : Mettre au moins en italique la partie de l'énoncé utilisé, surtout : a_n et b_n tendent vers zéro⁵²⁵.

- page 34, fin du § 1 : L'énoncé que Fatou m'attribue doit être modifié si, comme je le crois, $f(u)$ et $g(u)$ sont des parties réelle et imaginaire de la fonction de z sur le cercle de convergence. Il faudrait :

Pour tous les points u_1 tels que les fonctions de t $|f(t) - f(u)|$, $|g(t) - g(u)|$ soient pour $t = u_1$ les dérivées de leur...⁵²⁶

Le § 2 me paraît fort intéressant : pour le résultat et surtout à cause de la bonne idée d'appliquer à des recherches arithmétiques les résultats d'études en apparence si différentes.

- page 37 : α a deux significations⁵²⁷.

- page 39, § 3 : Une inexactitude : toute fonction sommable, bornée ou non, est presque partout dérivée de son intégrale.

Il est probable qu'en rédigeant ce § Fatou ne s'est plus rappelé ce qui l'avait obligé à faire un détour et qu'il a cru s'en rappeler alors qu'il se trompait. Je crois cependant qu'un détour est nécessaire ; il me semble en effet que Fatou s'était servi de l'interversion des signes \lim , et \int , ce qu'il avait le droit de faire quand il s'agissait de fonctions bornées ; mais cela devient moins certainement possible dans les autres cas⁵²⁸.

- page 40 : Il vaudrait mieux dire plus nettement que les formules

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} p^2(\kappa, \theta) d\theta = 2a_0^2 + \sum (a_n^2 + b_n^2) \kappa^{2n}$$

sont vraies, pour $\kappa < 1$, parce qu'il s'agit alors de fonctions bornées. Sans ce rappel pour un lecteur inattentif il pourrait paraître y avoir cercle vicieux si Fatou, comme je le crois, veut s'occuper dans la suite du cas où P devient infini.

La note de la page 40 doit être inexacte : page 114 (?) ; je ne sais quelle page Fatou voulait indiquer parce que si j'ai fait, en effet, des raisonnements du genre de celui qu'il faudrait faire et qu'il ne fait pas, je ne crois pas avoir fait quelque chose d'assez identique à ce qu'il fasse pour qu'il puisse se référer à moi⁵²⁹.

Avec mes amitiés,

H. Lebesgue

Montel a reçu sa note de Tannery pour qu'il la complète.

XCII

Mon cher Borel⁵³⁰,

Je vous ai renvoyé l'épreuve de Fatou avec quelques traits au crayon, je n'ai rien à en dire et je dois avouer que les repos dans l'impression gênent la compréhension. Je vous fais remarquer toutefois le résultat relatif à la formule de Parseval avec la grande extension que lui donne Fatou. La méthode de celui-ci est fort détournée mais par des méthodes plus naturelles je n'avais pu dans les *Math. Ann.* éviter l'hypothèse qu'il s'agisse de fonctions limitées⁵³¹.

Mes théorèmes invoqués par Fatou sont mis en doute actuellement par Beppo Levi dans les *Rendiconti dei Lincei*⁵³². Beppo Levi n'a pas su rétablir quelques raisonnements intermédiaires simples et il s'est cassé le nez sur une faute de rédaction grave que Montel m'a jadis signalée et qu'il est facile de réparer.

Naturellement j'ai commencé par rédiger une note où je l'attrapais comme du poisson pourri puis, sur une lettre de Segre, et parce que ce n'est pas le moyen d'acquérir une réputation mondiale que d'attraper ceux qui s'occupent de mes histoires, j'ai été moins

dur.

Les projets que j'avais formés se trouvent dérangés par ma belle-mère qui est assez gravement malade ici, je ne sais plus ce que nous allons faire ; en tout cas je serai à Paris dans une dizaine de jours.

Je viens de recevoir des réclames du Cercle de Palerme et j'ai vu avec étonnement qu'au 26 mars 1905 on en était au n° 398 et au 8 avril 1906 au n° 517. Ça n'est pas notre Société Mathématique de France qui marche ainsi. Il est vrai que j'ai eu l'occasion de voir qu'après 2 lettres au président de la SMF, après 2 demandes officielles du bibliothécaire d'ici, après votre intervention officieuse, on ne recevait de réponse, ni oui, ni non à ses demandes. C'est peu encourageant.

Bien à vous,

H. Lebesgue

XCIII

Mon cher Borel ⁵³³,

La bibliothèqued'ici ayant reçu hier les deux numéros de cette année de la Société Mathématique de France j'en infère que ma demande a été prise en considération ; tout de même le mutisme est une belle chose.

Vous ai-je dit que le jury de l'Ecole Centrale était une belle collection de réactionnaires ?

Picard a dû présenter mon livre à l'Institut. Il réclame avec insistance ma collaboration aux *Annales de l'Ecole Normale* qui doivent être vides, mais moi aussi je le suis.

Bien à vous,

H. Lebesgue

J'apprends la mécanique et je constate que les traités en sont vraiment beaux quant aux choses délicates. Principes, définitions, homogénéité, etc.¹⁰⁹⁷

XCIV

Paris, le 3 juillet 1906⁵³⁴

Mon cher Borel,

Deux mots pendant un entracte. Je suis trop pris et trop abruti après ma journée de travail pour pouvoir aller vous voir, vous ne m'en voudrez pas.

Le métier d'examineur manque un peu de charme quand on le fait à jet continu, il me plaît surtout par ses avantages pécuniaires.

Bien cordialement à vous.

H. Lebesgue

XCV

7 septembre 1906

Mon cher Borel,

Le Matin m'apprend la mort de Maillard⁵³⁵ professeur de mathématiques à la Faculté de Poitiers, mais je suis si ignorant du¹⁰⁹⁸ personnel que j'ignore si ce Maillard est en activité ou en retraite. Si oui, je pense qu'il y a là un moyen d'arranger mes affaires ; il me paraîtrait en effet un peu violent que je sois supplanté à Poitiers par Levayasseur et à Lille par Clairin,

J'ai fini d'hier seulement l'affreux métier de correcteur de copies. C'est aujourd'hui mon premier jour de vacances.

Bien à vous, mes respects à Mme Borel,

H. Lebesgue

XCVI

Mardi, le 16 octobre 1906

Mon cher Borel,

J'ai appris hier soir quelque chose de fort joli. Je suis nommé chargé de cours ici⁵³⁶ mais, par une attention très spéciale, avec mon traitement de Rennes, 4.500 F. Je la trouve fort mauvaise.

Ça me paraît être l'indication très nette de ce qui va se passer ; quand la Faculté de Poitiers parlera de déclarer la chaire vacante on réfléchira que me titulariser ça ferait 1.500 de dépenses en plus, que ça serait un avancement énorme, le 1/3 de mon traitement, et on me nommera à 5.000. Et quand on demandera à nouveau ma titularisation, comme Poitiers est une petite Faculté, on rééditera le fameux coup Dijon-Nancy et on déclarera la vacance à Lille. A moins que, comme à Lille, il s'agit d'une création, et pour passer par-dessus les résistances de Lille, on nomme d'emblée un titulaire sans nomination de chargé de cours. Dans les deux cas on aura reconnu mes services en me donnant le premier un beau titre, mais l'homme ne se nourrit pas de mots.

Je la trouve je le répète fort mauvaise. Ajoutez à cela que je devrai renoncer à Centrale. Il y a ici deux mathématiciens seulement et 4 certificats à faire passer, d'où ma présence pendant 8 jours. En juillet on a en moyenne 7 matinées de prises + 3 jours d'écrits, plus l'intervalle = 25 jours. Sans doute il serait possible de tout arranger avec de la complaisance de tous côtés et je ne doute pas d'en rencontrer ici. Mais il faudrait tout bouleverser et le voudra-t-on ? J'ai déjà reconnu hier chez les Garbe⁵³⁷, à la façon dont on a accueilli la nouvelle que nous vivions chez nous en ours, fort peu mondains, au genre de soucis de Pictaviens⁵³⁸ des universitaires que j'ai vus, aux potins et médisances auxquels on se complaît, qu'il fait bon n'être pas trop absent des réunions des gens des Facultés. Or nos ressources nous forcent à vivre à l'écart, ce qui va fort avec mon goût.

Au point de vue financier voilà où j'en suis ; j'ai à aider ma mère et ma soeur ; j'ai ma femme qui va beaucoup mieux mais il sera sans doute prudent qu'elle n'ait rien d'autre chose à faire cet hiver que de la chaise longue ; j'ai un beau-frère beaucoup plus sérieusement atteint : j'ai pu l'envoyer, il y a deux ans, pour 6 mois, dans les Pyrénées, il serait bon que je puisse recommencer. Cela serait fort bon aussi pour ma belle-mère qui, tombée malade chez moi en mai, a été opérée en juillet d'un cancer de l'uterus (confidentiel : ma femme ne sait pas de quelle maladie il s'agit, il est inutile qu'elle sache sa mère condamnée plusieurs années à

l'avance). Je ne suis pas seul à pourvoir à tout cela, j'ai un beau-frère officier de paix qui commence à avoir un traitement convenable. Mais comme il vit avec sa mère et 4 frères et soeurs n'ayant que les maigres traitements d'ouvriers et employés parisiens, il a fort à faire.

Je me disais qu'avec la vie que nous menons et que nous ne désirons pas changer 6,000 F + 1,000 F de mathématiques générales nous suffiraient et que je pourrais dans un ou deux ans me débarrasser de Centrale. Mais je vois qu'on va me faire attendre mes 7,000 et qu'il faudra lâcher Centrale en attendant. Or c'est grâce à cela que j'ai franchi cette année des passages dangeureux, j'ai pu aussi me précautionner pour un changement mais cela ne m'a pas mis dans une situation tellement florissante que je puisse me désintéresser de mon traitement d'une ou deux années. J'ai réfléchi à tout cela cette nuit depuis que j'ai les renseignements suffisants, j'irai attendre Drach ce soir pour causer avec lui et partirai pour Paris. Je demanderai qu'on reporte ma nomination (Husson doit partir de¹¹⁰⁰ main seulement pour Rennes) et qu'on me remette là-bas. Je passerai sans doute chez vous demain matin.

Bien à vous.

H. Lebesgue

XCVII

Mon cher Borel⁵³⁹,

Je trouve la réclamation de Schoenflies fondée⁵⁴⁰, mais en même temps je trouve bête son Heine-Borel. A ce sujet je n'ai qu'à répéter ce que je disais, je crois, dans le *Journal* de Jordan⁵⁴¹ : savoir que Heine a démontré incidemment un théorème dont il n'a aperçu ni l'énoncé, ni l'intérêt ; bien d'autres que Heine sont dans le même cas, Goursat par exemple⁵⁴².

Mais la réclamation de Schoenflies est fondée. D'après vos démonstrations, il n'était prouvé que pour le dénombrable explicitement du moins et les seules applications que vous en avez fait sont relatives au fond à ceci : démontrer que certains points existent. C'est à Schoenflies que revient le mérite d'avoir montré tout le parti que l'on pouvait tirer dans la théorie des fonctions de votre théorème, étendu au non dénombrable, en mettant, à

l'occasion de la démonstration de Heine, ce fait en évidence qu'il permet d'étendre à un intervalle (et aussi bien évidemment à un ensemble fermé) des propriétés vraies autour de chacun des points de cet intervalle.

Aussi, si je trouve ridicule la dénomination de Heine-Borel (en cherchant on trouverait certainement des devanciers à Heine, je parie que Cauchy l'a démontré aussi⁵⁴³), je n'eus point protesté contre Borel-Schoenflies.

C'est en effet à Schoenflies que revient la démonstration que j'ai citée en note dans mes *Leçons sur l'intégration* quand je parle de votre théorème⁵⁴⁴ ; à ce moment je ne connaissais la part de Schoenflies que par une parole de Montel ; je vous ai déjà parlé de tout cela, j'aurais dû citer Schoenflies pour être juste.

Quant à la démonstration de Schoenflies c'est la mienne, si l'on veut, c'est aussi celle de Baire⁵⁴⁵ et beaucoup plus encore que la mienne ; elle n'est ni plus simple, ni moins que les autres. Tout cela est indifférent.

Ce qui est certain c'est que cette polémique, cette rivalité, à qui aura le premier dit telle ou telle chose relative à ce théorème, polémique, rivalité, qui n'existait pas après la démonstration de Heine, mais qui existe après la vôtre, montre et l'importance du théorème et le très grand intérêt qu'il y avait à l'énoncer. Elle prouve combien est petit le rôle de Heine.

Je regrette que Schoenflies cite Riesz⁵⁴⁶ qui n'a je crois démontré jusqu'à présent que des choses fausses ou déjà connues, c'est le seul reproche que je lui fais,

Quant à mon rôle dans la question ...

J'ai fait, sans savoir, ce qu'avait fait Schoenflies, la même remarque que lui et, comme Schoenflies je crois, sans faire attention que vous vous limitiez au dénombrable. En tout cas le fait que Schoenflies a établi le rapport entre Heine et Borel montre qu'il a démontré (par le raisonnement de Heine, qui est au fond celui qu'il reprend ici) le théorème pour le cas général.

M. W.H. Young réclame la paternité de l'extension à un ensemble fermé et se plaint amèrement que Vitali et je ne sais qui se soient trompés dans *The theory of sets of points*⁵⁴⁷,

Il n'y a aucun inconvénient à laisser passer Schoenflies

absolument tel quel. Je vais, après mon cours, écrire une petite page, je vous l'enverrai pour lundi, vous en ferez ce que vous voudrez : le panier ou les *Comptes Rendus*⁵⁴⁸.

Bien à vous ; les Drach sont très gentils, mais Drach sort trop peu.

H. Lebesgue

XCVIII

Poitiers, le 10 janvier 1907

Mon cher Borel,

J'ai reçu de Montel, auquel je demandais des tuyaux, la lettre ci-jointe⁵⁵². Après elle j'ai besoin de voir le *Bericht*⁵⁵⁴ de Schoenflies, mais je ne l'ai pas et il n'est pas ici. L'avez-vous ? Si non je le ferais demander à une autre bibliothèque, ce qui me mènera jusqu'à je ne sais quand.

Il est inexact de me rapporter, comme le fait Montel, une part quelconque dans la proposition en question. J'ai compris qu'on pouvait l'utiliser, voilà tout. Schoenflies n'a peut-être pas fait plus, c'est possible.

Bien à vous.

H. Lebesgue

1, rue des 4 Roues, Poitiers.

XCIX

Poitiers, le 10 novembre 1907

Mon cher Borel,

Blutel⁵⁵⁵ m'a écrit pour me demander le double de la fameuse lettre que Raffy m'a adressée en juin. Il s'en servira peut-être à la prochaine séance du Conseil de la Société Mathématique de France (le 13 novembre m'écrit-il) où il compte évoquer l'incident. J'espère que vous assisterez à cette représentation.

Bien à vous.

H. Lebesgue

C

Poitiers, le 30 novembre 1907

Mon cher Borel,

Je pense que d'ici peu le Bureau de la SMF va dresser sa petite liste proposée pour les élections. Les rares provinciaux ou parisiens qui votent par correspondance le font au reçu de cette liste. Si donc on veut débarquer, par voie d'élection, le sieur Raffy, il faut s'entendre à l'avance sur le nom qu'on mettrait à la place du sien. S'il n'y a pas entente préalable sur le nom le fait de barrer Raffy n'aura aucune conséquence⁵⁵⁶.

Sans doute cette entente ne peut être faite que sur un nom non proposé par le Bureau, donc je ne puis jouer le rôle d'organisateur de la ténébreuse machination.

Je propose d'ailleurs que Raffy soit présenté comme vice-président car, après tout, le meilleur moyen de s'en débarrasser serait encore peut-être de le nommer président au plus tôt. Nous pourrions donc essayer à la fois de l'exclure par voie électorale ou en lui confiant les honneurs suprêmes.

J'ai reçu avant hier une lettre de Molk dans laquelle il me parle d'une réunion qu'il projette de 4 ou 5 personnes pour causer de l'organisation de la partie de l'*Encyclopédie* française relative à la théorie des fonctions⁵⁵⁷ et il ne conçoit pas cette réunion sans un président. Ce serait vous le président ; mes compliments mon cher.

Bien à vous.

H. Lebesgue

Comme nom je pense, au hasard, à Thybaut, Tresse, Fontené. Thybaut consulté accepterait je pense étant donné son amour de Raffy⁵⁵⁸.

CI

Poitiers, le 2 décembre 1907

Mon cher Borel,

J'ignorais que Raffy fut proposé comme Secrétaire et que la liste était arrêtée. J'avais pensé à Thybaut parce que je pensais qu'il ne serait proposé pour rien par le Conseil et que je voulais éviter que se pose la question grave : M. X est élu à la fois à ceci et à cela, que faire ?

Mais vous me dites que des gens votent pour la SMF "et que nous n'aurons aucune chance de succès...". Alors je voterai pour qui l'on voudra, peu m'importe. Tresse si vous voulez⁵⁵⁹,

Je ne sais rien du tout sur Molk, car je n'ai reçu de Molk qu'une lettre de 4 pages surchargées, ce qui ne saurait lui suffire à faire entrevoir sa pensée.

Bien à vous.

H. Lebesgue

CII

Poitiers, le 13 décembre 1907

Mon cher Borel,

Pour vous donner mon opinion il faudrait que j'ai compris ou que je sois sûr que c'est fou.

Je remarque d'abord que le théorème généralisé ne contient pas celui qu'il généralise comme cas particulier du moins si ce dernier est le Heine-Borel-Baire-Schoenflies-Goursat-Lebesgue- etc. théorème. Ensuite dans cette généralisation l'ensemble P n'intervient pas, son sens me paraît être :

Dans $(0, a)$ on considère les points non intérieurs à des intervalles I , c'est-à-dire un ensemble fermé quelconque. Pour un tel ensemble la mesure extérieure au sens de Jordan est la mesure au sens de Borel, ce qui est connu et évident.

Application. La définition est de Baire ; le théorème (2) me paraît identique à la définition, sauf une condition d'uniformité bien extraordinaire et qui me paraît fautive, sauf cependant si $\Psi(\xi) < \infty$ signifie $\Psi(\xi)$ borné.

Quant aux intégrales, je n'y ai rien compris. Il ne s'agit pas d'intégrales L car des fonctions semi-continues sont

sommables, ni d'intégrales de Riemann, car cela suppose l'ensemble des points d'infini réductible, alors ?

Il y a bien je crois une définition de La Vallée Poussin

$$\int_a^b f(x) dx = \text{par définition } \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx$$
$$f_n(x) = f(x) \quad \text{si } |f| < n$$
$$f_n = \pm n \quad \text{si } f > n \text{ ou } < -n$$

Et de là on peut peut-être déduire des \int .

Mais je remarque que le théorème (1) est alors, si je ne m'abuse, donné dans de La Vallée Poussin lui-même⁵⁶⁰. D'autre part, W.H. Young dans divers travaux a traité de l'intégration de ses fonctions semi-continues inférieurement⁵⁶¹ et je crois qu'il arrive à quelque chose comme le

$$\int f + \varphi = \int f + \int \varphi$$

de Zoard avec je ne sais quel sens aux intégrales.

En résumé, je ne comprends pas. Voici d'autre part ce que je puis encore raconter sur Zoard de Geötze⁵⁶².

Il m'a expédié récemment (de l'Hôtel de la Jeune France, rue Montagne Ste Geneviève, ce qui doit être un bel endroit) une note des *Comptes Rendus* que j'avais remarqué d'ailleurs parce qu'elle dépassait 3 pages 1/2 et qu'au même moment on m'en refusait une qui avait 9 lignes de trop, et le développement en hongrois et autocopié, pareillement à votre envoi, de cette note. Même Zoard avait pris la précaution de traduire au crayon les titres hongrois et il avait ajouté de même une note où il citait mon petit livre. Ma grande connaissance du hongrois m'a d'ailleurs permis de constater que je n'étais pas cité dans le texte.

Sa note des *Comptes Rendus* m'a paru assez insignifiante mais non inexistante, ni stupide, je n'en garantis pas d'ailleurs l'exactitude.

Il définit l'aire d'une surface non pas par la lim des surfaces polyédrales tendant vers elle comme je le faisais, mais par la même lim, en ajoutant cette condition supplémentaire qu'il s'agit de surfaces polyédrales formées par des triangles inscrits à la surface et il arrive, dans le cas de $z=f$ aux nombres dérivés

bornés, à une expression de la surface assez voisine de la formule classique

$$\iint \sqrt{1+p^2+q^2} \, dx \, dy .$$

Dans cette note figurent déjà des $\int ??$

Bien à vous.

H. Lebesgue

CIII

Poitiers, le 31 janvier 1908

Mon cher Borel,

Vous savez que j'étais avec Boutroux chargé d'une histoire pour l'édition allemande : c'était Blumenthal qui avait négocié la chose et m'avait demandé mon travail pour Pâques 1907. D'ailleurs des précisions sur ce que l'on désirait devaient m'arriver de Wirtinger. Pâques 1907 arrive je n'avais rien reçu ; je demande des explications et un délai à Wirtinger au début de mars. En décembre je reçois une réponse m'accordant le délai demandé mais ne me donnant pas d'explications. Je récris à Wirtinger que dans ces conditions, ne sachant même pas encore bien ce qu'on me demande, je me récusais. Je reçois une lettre de Wirtinger (qui venait de m'accorder un délai) me disant que je n'avais jamais été chargé de rien.

Ce qui s'était passé c'est que Molk avait proposé sa nouvelle combinaison (meilleure à coup sûr) : faire paraître les articles additionnels d'abord dans l'édition française et ce sont nos dépouilles qu'il s'agit de se partager. Oh ! je ne m'en formalise pas car je cherchais le moyen de me débarrasser de la corvée que j'avais acceptée, mais les raisons pour lesquelles je voulais m'en débarrasser subsistent quand il s'agit de l'édition française, augmentées si j'ose dire.

J'attendais d'ailleurs votre lettre.⁵⁶³ Molk m'écrivait en même temps qu'à vous "que nous ayons les coudées franches", qu'il fallait "que nous formions bloc", "en nous groupant autour de M. Borel", qu'il vous demandait "de tenir notre drapeau", qu'il fallait que "nous marchions la main dans la main".

Mais je ne connais rien de plus désolant, de plus

décourageant que la lecture d'un article de l'*Encyclopédie*. L'édition française a d'ailleurs pu renchérir encore sur l'édition allemande. Rien n'y est mis en lumière ; du fouillis, pas d'idées, tout a l'air d'être fait ; rien de saillant. Et ceci est inévitable avec le système de Molk ; il écrivait à Drach : "nous ne devons rien mettre de personnel, de neuf ; nous ne devons rien écrire qui ne se rapporte à une référence", et il lui écrivait ça à l'occasion d'un petit rapprochement de rien du tout.

Certes il y aurait eu intérêt à mettre en lumière les travaux français ; à combattre cette idée que pourrait donner la lecture de l'*Encyclopédie* allemande que jamais un Français n'a fait quelque chose de définitif, mais pour cela il ne fallait pas avoir cette idée loufoque d'une traduction de ce que l'on trouve mal, avec droit de contrôle des auteurs des articles allemands. Et puis il ne fallait pas confier cela à Molk le plus Allemand des Français ; c'est lui, qui n'admire que les travaux allemands, qui ne considère rien comme bien si les Allemands n'y ont pas donné leurs suffrages, c'est lui, qui veut mettre en lumière les travaux français.

Et puis il eût fallu que notre encyclopédie ait quelques qualités françaises, qu'elle soit de parti pris, incomplète, mais qu'elle soit lumineuse et attrayante, qu'elle ait un plan, qu'il y ait quelques vues d'ensemble, erronées au besoin pourvu qu'elles fussent pensées. Mais quel ensemble peut-il y avoir à un article fait et retouché 40 fois par les auteurs français et allemands, par Molk, Vogt, Cartan, Kürschak, Drach, Hadamard, Vivanti, Eneström, etc., etc., etc.⁵⁶⁴

Et puis l'édition française comprend des § faits par les auteurs qui viennent prôner leur saint ; rien de plus mauvais à mon avis et, si l'on est à peu près obligé, pour avoir des gens compétents, de s'adresser à ceux qui ont publié sur les chose voisines, il faut tâcher d'obtenir des choses impersonnelles.

Voilà une partie de mes raisons ; mais il y a autre chose. Faire paraître les compléments d'abord dans l'édition française me paraissait meilleur pour ceci : quelque intéressants que soient les travaux récents ils ne forment pas un tout capable d'être vraiment fort intéressant par lui-même, ces travaux sont intéressants comme suite d'autres choses et par leurs rapports avec ces autres choses. Et puis ces travaux sont en partie exposés dans les travaux allemands, de sorte qu'en pensant à l'article qui m'avait été demandé

(ou qui ne m'avait pas été demandé) il me paraissait impossible de faire quelque chose de lisible. Si je prends par exemple mon intégrale, elle est en relation avec les anciennes définitions de l'intégrale déjà étudiées dans les autres articles de l'encyclopédie et dont je n'avais plus à parler ; en rapport avec la notion d'aire traitée ailleurs ; en rapport avec la mesure des ensembles dont on a déjà un peu parlé ailleurs.

Il me semble que, dans l'édition française, on devrait d'abord introduire dans les traductions des articles déjà existants tout ce qui s'y rattache naturellement et puis, s'il y a un reste, faire un article complémentaire. Que feront sans cela les auteurs des articles français correspondant aux articles déjà existants. "Les traducteurs ne doivent rien supprimer" (Molk). Mais il faut bien qu'ils complètent ce qui est amorcé, qu'ils parlent des suites récentes des anciens travaux ; comment se fera le partage entre les matières qu'ils traiteront et celles qui formeront les compléments. Il me semble que c'est pour ce partage qu'il y avait lieu à entente. Mais non, Molk se charge des articles déjà parus, il a choisi ses collaborateurs pour cela ; même, si j'ai bien compris ce qu'il m'a écrit, certains de ces travaux sont prêts à être publiés. Alors je ne vois aucun avantage, au contraire, à ce que l'édition française se charge des compléments. Et je ne comprends plus ce qu'il y a à discuter.

En fin de compte : Je suis tout prêt à donner mon avis sur l'ensemble ou le détail, à donner les indications bibliographiques que je connais et à toutes les petites choses du même genre, mais j'ai l'intention ferme de n'écrire aucun article.

Je viens de faire une petite grippe ; rien de grave mais ça traîne.

Toutes mes amitiés.

H. Lebesgue

CIV

Poitiers, le 1er février 1908

Mon cher Borel,

Je reçois un mot de Boutroux me disant qu'il ne veut pas s'occuper des variables réelles ; ça prend un air de conspiration entre nous deux. Aussi je reviens sur mes raisons.

Il y avait lieu de s'entendre sur le tout ; sur les compléments à l'édition allemande non. Primitivement ceux de ces compléments relatifs au réel devaient former un article ; maintenant on va se mettre à 7 ou 8 pour le faire, c'est ridicule.

Chacun parlera sans doute de ce qu'il a fait ou, plus habilement, chaque membre de cette société d'admiration mutuelle fera luire le voisin, ce qui me paraît risible.

Au fond je crois que Molk ne tient à ces grands conciliabules que parce qu'il n'a pas confiance en nous. Un Allemand quelconque, voilà une autorité ! Mais il lui faut 8 ou 10 avis français concordants pour que ça commence à le rassurer. Et quand un article sera écrit, Molk écrira à l'auteur comme il vient de faire à Drach : "Donnez-moi la liste des mathématiciens allemands, anglais, français, italiens ou d'autres nationalité auxquels vous désirez que les épreuves soient soumises", et il faudra échanger des observations sur chaque phrase. Non, je puis avoir plaisir à signer quelque chose dont j'ai la responsabilité ; un article fait sous Molk, jamais.

Pour les articles allemands Molk a choisi des collaborateurs, pour certains depuis plus d'une année. Par exemple l'article sur les séries trigonométriques est donné ; alors son auteur devra-t-il parler là-dedans des histoires de Fatou et des miennes (ce qui serait naturel car cela seulement, par le rapprochement avec le reste, peut leur donner intérêt) ou les laissera-t-il aux auteurs de compléments ?⁵⁶⁵ Je pense qu'on décidera de ne rien laisser aux auteurs de compléments. Mais malheureusement on s'y prend un peu tard, ou on s'y est pris trop tôt pour distribuer la besogne. Comment ! Molk distribue lui seul le gros, l'important, la presque totalité de la besogne, il laisse des vêtiles et vient gravement nous demander de nous réunir pour faire le plan d'un petit article. La seule raison, c'est que pour cet article il n'y a pas de canevas allemand et que cela frise l'imprudence de laisser travailler des Français sans des adjudants teutons pour les guider⁵⁶⁶.

Je me connais trop pour aller dans cette galère ; je n'y serais pas depuis un mois que je me disputerais avec Molk, je passerais mes journées en colère et ça n'a rien de gai.

Bien cordialement.

H. Lebesgue

Et l'article de Baire sur les ensembles. En 1902 Molk présentait Baire de le lui remettre ; il n'est pas encore paru⁵⁶⁷. Et maintenant on va demander à Baire de recommencer son article pour y fourrer les choses récentes ou, à lui ou à un autre, d'écrire un article sans tête. Si Baire veut bien recommencer son article tout ira bien sinon on aura par ces façons d'agir empêché Baire de faire un article personnel, vraiment personnel.

Je retrouve, dans le *Bulletin de la Société Mathématique de France* 1907, fasc. 1, une réclame de Gauthier-Villars⁵⁶⁸ avec des renseignements copieux sur l'édition française. Pour l'analyse voici ce que je vois.

1^{er} volume, *Théorie des fonctions de variables réelles. Calcul infinitésimal.*

I Tables des matières

II Renseignements bibliographiques

III Introduction (H. Burkhardt)

1 Principes généraux de la théorie générale des fonctions de variables réelles (Pringsheim) (Molk)

2 Calcul différentiel et intégral (Voss) (Molk)

3 Nouvelles recherches sur la théorie des fonctions de variables réelles d'après ?

4 Intégrales définies (G. Brunel) (Le Roux)

5 Séries trigonométriques (Burkhardt) (Fréchet)

6 Développements en séries (Burkhardt) (Fréchet)

Ainsi voyez ce qui est arrêté par Molk seul ; c'est pour ce petit 3 que l'on dérange 8 personnes. Les autres volumes de l'analyse sont de même distribués sauf ce qui correspond à l'article d'abord demandé à Boutroux.

CV

Mon cher Borel⁵⁶⁹,

Veillez prendre connaissance et transmettre.

Mes raisons principales restent, malgré le 1^o de votre seconde circulaire, celles que je vous ai dites et dont je parle à

peine à Molk. Mais, en relisant les lettres de Molk, mon opinion a légèrement changé ou du moins s'est légèrement accentuée dans le sens que vous vous verrez à la lecture, si bien que je crois avoir été très modéré, très grand et généreux, dans ma lettre à Molk.

Bien cordialement.

H. Lebesgue

CVI

Poitiers, le 15 février 1908

Mon cher Borel,

Je n'ai pu vous répondre de suite ; par suite de grippe je suis bonne à tout faire y compris mes cours qui étaient hier et aujourd'hui.

1^e lettre. Il n'y a pas de malentendu entre nous. Je sais parfaitement que si vous aviez été mieux au courant vous auriez davantage hésité à accepter les propositions de Molk. Mais je ne vois aucun inconvénient à ce que vous les ayez acceptées ; il faut bien que le travail se fasse et je ne regretterai pas qu'il soit bien fait.

Lettre Montel. L'organisation que vous proposez ⁵⁷³ me paraît bonne si chacun consent au rôle que vous pensez à lui donner. Le choix de Montel me paraît très bon ⁵⁷⁴, il s'intéresse pas mal à la bibliographie et lit très facilement. Mais je renonce à toute direction, à tout contrôle, à tout patronat sur l'oeuvre en question.

Lettre Molk. Mes raisons subsistent en effet après la lettre de Molk qui se contente de reconnaître qu'il y a eu une maladresse "allemande" et explique tout en me disant qu'il a eu l'absolue (souligné) conviction qu'ils (les Allemands) avaient voulu faire pour le mieux. Ce qui doit sans doute me rassurer et infirmer les faits.

Au reste je ne serais d'accord avec Molk sur aucun des points du travail à faire ; je suis par exemple d'un avis entièrement différent du sien en ce qui concerne la division (qu'il a l'air de considérer comme rationnelle alors qu'elle est purement

bureaucratique) en matières traitées et non traitées par les Allemands. Mes raisons subsistent, mon abstention subsiste ; je ne fais pas partie de la rédaction de l'*Encyclopédie*.

2^e lettre Borel. Je vous répète que Z. de Geöcze m'a produit un effet bizarre, c'est peut-être un grand génie.

Cartan a publié ces temps-ci une note aux *Comptes Rendus* bien rigolote où il retrouve des choses datant de 1882-1884. Il a fait ensuite une rectification en ce qui concerne l'exemple de Schwarz qui montre qu'il y a des difficultés mais tout le reste n'est pas plus nouveau. Il répète en particulier la partie la plus élémentaire de Z. de Geöcze⁵⁷⁵. J'ai envoyé à *L'Enseignement Mathématique* un petit article sur les aires qui paraîtra Dieu sait quand, parce que je crois que ma thèse est plus simple et plus intuitive que Baire, Z. de Geöcze, Cartan, etc. Elle ne contient rien de neuf⁵⁷⁶.

Si vous avez l'adresse de Z. de Geöcze je lui enverrai quelques tomes de mes oeuvres complètes, il pourra toujours les vendre au poids de l'or pour nourrir ses 6 enfants. Ce pauvre bougre mérite vraiment d'avoir du génie.

En résumé : zut pour l'*Encyclopédie* et bien cordialement à vous.

H. Lebesgue

CVII

Poitiers, le 8 mars 1908

Mon cher Borel,

A l'occasion d'un petit article de Landau, je suis entré en correspondance avec lui. Il a eu l'occasion de m'écrire que, suivant lui, c'est à Méray⁵⁷⁷ que l'on doit la première preuve du fait que la formule de Lagrange n'est pas une formule d'approximation indéfinie.

En effet, en me reportant au BSM 1896 j'ai trouvé un article, très élégant, de Méray prouvant nettement le fait ; jusque là je croyais que Méray s'était toujours occupé, comme dans ses premiers articles, de l'approximation dans le champ complexe.

Le résultat de Méray est différent du vôtre en ce sens que vous vous occupez ainsi que Runge de l'approximation en prenant des valeurs équidistantes dans l'intervalle où l'on veut approcher de $f(x)$, tandis que Méray choisit ses valeurs *exprès* pour que ça ne marche pas. Cependant (voyez § 4 de Méray) il démontre par exemple que si l'on prend des valeurs équidistantes dans $(-\alpha, +\alpha)$ ($\alpha > \sqrt{\frac{2}{3}}$) et si l'on se sert de ces valeurs et d'autres convenablement choisies dans le même intervalle on a une formule d'interpolation qui ne converge pas vers $f(x)$ si $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

D'ailleurs les formules de Méray (§ 3) permettraient de retrouver facilement le résultat de Runge en ce qui concerne

$$\frac{1}{1+x^2}.$$

Ce qui m'amuse dans cette histoire c'est que, lorsque j'ai porté mon article sur le théorème de Weierstrass à Tannery, en 1898, je lui ai dit que, après mes essais multiples pour démontrer ce théorème par les formules d'interpolation, j'étais persuadé que ces formules ne donnaient pas toujours une approximation indéfinie. Tannery me dit que ce serait une remarque très curieuse et intéressante et 2 ans avant Méray avait fait cette remarque dans son *Bulletin*.

Les résultats mathématiques passent.

J'ai eu ces temps-ci des inquiétudes à cause de la santé de ma fille, tout va bien maintenant.

Cordialement,

H. Lebesgue

Reçu réponse Molk prenant acte.

CVIII

Mon cher Ami⁵⁷⁸,

Votre mémoire m'a rejoint dans l'établissement qui me fournit ce somptueux papier à lettres. J'y suis abruti, examinant plus abruti que moi et incapable de faire autre chose.

J'ai vu ma famille pendant deux jours, j'ai eu le plaisir de les trouver en bon état et j'ai envié leur sort malgré le temps

déplorable dont ils jouissent.

J'ai reçu un mot de Montel, de Bordeaux ; il me dit qu'Esclan-
gon est assez navré qu'on lui ait préféré Mascart⁵⁷⁹. Sans doute le
fait qu'on ait pu penser à lui, Esclan-
gon, pour Paris serait un
peu consolant, mais je crois qu'il ne faut pas lui donner cette
consolation qui lui semblerait peut-être une promesse pour l'ave-
nir. Aussi, pour une fois, je ne ferai pas le "milieu social" à
cet égard⁵⁸⁰.

Je viens de me creuser pendant 10 minutes et ne trouve rien
de plus à vous raconter. Je vous prie seulement de remercier Mme
Borel de ses amitiés (qui avaient presque l'air d'être écrites par
une personne ordinaire et non par une main enfantine ; vraiment les
progrès en écriture sont notables) et de lui transmettre les vœux
de repos, de joie et de santé du malheureux vidé qui a l'honneur
de se dire votre... etc.

H. Lebesgue

J'ai remis la lecture de votre mémoire⁵⁸¹ à des temps meil-
leurs. Merci de me l'avoir adressé si tôt.

CIX

Poitiers, le 13 novembre 1908

Mon cher Borel,

Pour être franc il faut que je vous dise tout d'abord combien
j'ai été épaté de l'allure quasi officielle de votre lettre.

Vous vous placez, il me semble, au point de vue du plus grand
bien pour l'Enseignement supérieur en désirant que les meilleurs
professeurs aillent dans les grandes universités. Vous vous souvenez
sans doute qu'en juillet 1907 on titularisa dans 3 grandes univer-
sités Lille, Lyon et Toulouse MM. Clairin, Levavasseur et Paraf⁵⁸²
et qu'à la même époque on me laissa tranquillement à Poitiers sans
me titulariser. J'en dois conclure que l'Autorité ne me juge pas
indispensable aux grandes Facultés et je suis par là dispensé de
m'occuper d'autre chose que de ma convenance personnelle.

Poitiers ne me plaît guère, mais j'y suis et j'y ai 1200 F
de supplément. J'ignore Bordeaux, je sais qu'il y pleut beaucoup,

c'est tout. L'annuaire de Bordeaux m'a appris d'une part que les "meilleurs professeurs" qu'on a réunis à Bordeaux m'étaient presque tous inconnus et d'autre part que Padé⁵⁸³ faisait 3 conférences supplémentaires (pendant le 1^{er} semestre seulement) pour les mathématiques préparatoires à la physique. Il peut donc avoir un supplément de 1500 F.

Il peut donc y avoir à aller à Bordeaux petit avantage pécunier. Mais ce qui est sûr, c'est que j'ai vu à mon passage de Rennes ici, au départ de Drach pour Toulouse et que je revois à l'arrivée de Bernard⁵⁸⁴ ici, c'est qu'un déménagement entraîne 4 mois de désarroi et d'ennui et 1000 F de frais. Comme j'ai un bébé de 4 mois, les choses n'en seront pas simplifiées.

Je vois seulement deux avantages certains à Bordeaux : une bibliothèque et la présence de 4 professeurs de mathématiques, d'où la possibilité d'arranger facilement une absence pour faire un service d'examens.

Remarquez d'ailleurs que si j'avais eu l'idée de demander Bordeaux, votre lettre m'aurait plutôt fait hésiter car vous me parlez énigmatiquement d'une demande de transfert déjà déposée.

Et que faites-vous d'Esclançon. J'ignore ce qu'il a fait. Je n'ai même jamais eu entre les mains aucun de ses travaux. Je ne sais si sa nomination serait légitime, mais il ne me paraît pas impossible qu'il soit candidat à tout ou partie de la succession de Padé.

Bien à vous et merci de m'avoir signalé un transfert possible.

H. Lebesgue

J'oubliais, Depuis le 1er novembre seulement je fais ici le calcul différentiel et 15 jours après je redemanderais à faire de la mécanique que j'ignore !!

CX

Poitiers, le 15 novembre 1908

Mon cher Borel,

Bien entendu je vous remercie d'avoir pensé à ce que vous

jugez être mon intérêt, mais il était naturel aussi que je regrette votre obscurité voulue.

Souvenez-vous que je n'ai et n'ai jamais eu aucune relation avec le monde universitaire, que j'en ignore tout et que par suite il ne suffit jamais de me parler d'une chose par allusion ; ou bien je ne comprends pas l'allusion, ou bien je crois apercevoir des difficultés là où il n'y a rien.

Vous revenez sur cette histoire de Lille ; mais il me semble bien me rappeler que vous m'avez signalé, sans plus, la vacance et que ce n'est qu'un an après que vous m'avez dit quelques-uns des avantages qu'il y aurait eus pour moi à demander la place. Or, de même que j'ai mis le pied dans l'Ecole Normale ignorant qu'il y avait un canulard, de même qu'il me paraissait scandaleux qu'on ait besoin de se faire recommander dans l'Enseignement supérieur pour avoir une promotion, j'ignorais et j'aurais trouvé scandaleux que le Ministère fit une différence entre les grandes et les petites universités (ce que je n'ai appris que par l'affaire Baire), j'ignorais et j'aurais trouvé scandaleux le recrutement local et, jugeant des Facultés par Rennes où le maître de conférences était zéro, j'ignorais qu'il y eût des Facultés où le maître de conférences serait quelque chose et qu'il puisse par suite y avoir intérêt à attendre sa titularisation dans un endroit ou un autre.

Vous, vous êtes nécessairement au courant de beaucoup de désirs de gens, des moyens qu'ils emploient pour arriver à leur but et de ceux qu'ils devraient employer, des intrigues, etc., et vous parlez de cela par allusion. Moi j'ignore tout cela, je ne comprends pas quand on me parle ainsi, mais je sais que souvent je ne comprends pas et j'arrive à croire qu'il y a des dessous aux moindres choses.

Ne vous méprenez pas, je ne veux nullement dire qu'un seul instant votre désintéressement dans cette affaire n'ait fait doute pour moi, mais, en me parlant de transfert, en ne me disant mot d'Esclançon, vous me laissiez dans le doute sur le genre d'obstacles possibles sur lesquels, avec ma diplomatie habituelle, j'aurais été m'aplatir.

Vos précisions nouvelles ne me décident nullement d'ailleurs, mais pour être en repos vis-à-vis de vous et de ma conscience, je vais écrire de suite à Cousin⁵⁸⁵, lui demandant tous avis

nécessaires et son opinion sur ma candidature éventuelle.

Je ne connais à Bordeaux qu'Esclangon, puis Pérez⁵⁸⁶ (qui désire quitter Bordeaux), eux seuls pourraient être mes grands électeurs.

Bien cordialement à vous.

H. Lebesgue

CXI

Poitiers, le 18 novembre 1908

Mon cher Borel,

Je vous devrai une indemnité pour correspondance. J'ai reçu vos lettres dans l'ordre évidemment où vous les avez écrites.

La première m'a décidé à ne pas me présenter. Il m'aurait été en effet fort désagréable d'aller dans un lieu que je ne désirais pas vivement contre l'avis de la Faculté. Et ce que vous me dites de Delassus⁵⁸⁷ m'est sympathique.

J'estime que notre vie privée est à nous, qu'elle ne peut être considérée que si elle crée scandale et le fait de ne pas rendre visite à un Recteur n'est pas un scandale. Je connaissais l'histoire Ardaillon⁵⁸⁸ par Drach depuis l'an dernier. J'avoue qu'il est beaucoup de littéraires auxquelles nos coutumes me feraient dire tu et que pourtant je ne connais nullement.

Il m'est arrivé par exemple à Nancy de découvrir que j'avais été deux ans à l'École avec un autre professeur du Lycée, ce dont celui-ci ne s'était nullement aperçu non plus d'ailleurs. Quand on retrouve un "camarade" de ce genre quoi d'étonnant à ce qu'on ne reprenne pas les relations avec lui et cela devient tout naturel quand on le retrouve comme Recteur. J'avoue que l'incident Delassus-Ardaillon me paraît très nettement défavorable à Ardaillon, mais à lui seul.

Et puis cette histoire Delassus me rappelle trop Lacour se plaignant à Picard et à mes collègues de Rennes : "Croiriez-vous qu'il n'a pas encore présenté Mme Lebesgue à Mme Thamin". Je ne puis accepter de servir d'occasion de jouer un vilain tour à Delassus ; si on a quelque chose à dire contre lui, qu'on le fasse

franchement.

En rentrant de la Faculté, j'avais 2 cours ce matin, j'ai trouvé une lettre de Cousin aussi froide, aussi officielle qu'on peut le souhaiter, beaucoup plus même quand on la compare à la façon dont je me livrais dans ma lettre. Cela m'aurait décidé à rester ici.

Certainement je serai candidat à Paris que j'ai des chances ou non. Les candidatures seront évidemment très nombreuses et les candidats difficilement comparables ; peut-être tout cela sera réglé par la suppression d'un poste.

Merci beaucoup de m'avoir prévenu.

M. Appell m'avait dit de poser ma candidature à la place d'examineur de Polytechnique. Je l'ai fait par lettre à la Direction de l'Enseignement secondaire ; je n'ai pas reçu l'accusé de réception qui est toujours lent à venir. Je ne pense pas qu'il soit nécessaire que je postule le reste.

Merci et bien à vous.

H. Lebesgue

1 rue des 4 Roues.

CXII

Poitiers, le 22 novembre 1908

Mon cher Borel,

Le même jour je reçois trois lettres réponses sur des sujets très divers et leurs trois auteurs avaient mal interprété ma pensée. Ce qui prouve à la fois qu'on écrit trop ou trop peu (ou que j'écris).

Je crois vous avoir écrit ceci ou à peu près : 1° Comme je ne suis vraiment attiré par rien à Bordeaux, je ne veux pas y aller contre (ou sans l'acceptation, si vous voulez) de la Faculté ; 2° D'ailleurs Delassus me devient sympathique ...

Et j'ai fait précisément ce que vous m'expliquez avoir fait : je n'ai pas insisté sur la partie importante, le 1°, et j'ai parlé uniquement du 2°.

La première raison est déterminante, n'écrivant à Cousin que par acquit de conscience, je n'aurais posé ma candidature que si tout allait bien. J'apprends par votre lettre que Cousin soutiendra Delassus selon toute vraisemblance et que ce serait à Paris que j'aurais des appuis. Les préférences de Cousin me paraissent très naturelles et je ne vais pas m'embarquer pour ce déplacement qui me sourit peu uniquement pour embêter Cousin.

Mais vous avez tort d'en conclure que je me retirerais en tout cas devant Delassus. Et d'abord je connais l'histoire Delassus depuis 8 mois, cela ne m'a pas empêché d'écrire à Cousin et ne m'aurait pas empêché d'être officiellement candidat à Bordeaux si tout m'y avait souri. Seulement quand je crois reconnaître que l'opposition à Delassus, pour des raisons d'ordre privé, n'a pas cessé, je me félicite de ne pas profiter de cette opposition que je déplore. Et comme je tiens beaucoup au respect de la vie privée, je m'engage sur ce thème de même que vous parlez "trop officiellement" des choses que vous avez à coeur.

J'appelle faire une saleté à Delassus : le juger lui sur ses qualités mathématiques et pédagogiques et sur quelques détails connus de sa vie privée et ne juger ses concurrents que sur leurs aptitudes. Je dis que c'est une saleté parce que c'est une opposition en quelque sorte occulte qu'il ne peut que soupçonner, qu'on n'avouera pas et qu'on ne lui dira pas franchement, de sorte qu'il lui sera impossible de se défendre. Au reste je crois que nous sommes d'accord au fond et que vous pensez comme moi qu'il y a dans les gens corrects, convenables, sociables et mondains bien des individus moralement très inférieurs à ceux qui giflent un premier président et qui vivent avec une ouvrière.

Il est certain que mon jugement sur Ardaillon repose sur des bases fragiles. Mais cependant j'aime mieux que celui qui, d'après sa fonction, a à donner des notes secrètes sur un camarade ne fasse pas allusion à aucun moment à la vie dite irrégulière ou bizarre de celui-ci. Même dans une conversation d'amis ce n'est pas innocent puisqu'une conversation a toujours de l'écho. Il me semble que s'il voulait rentrer en relation avec Delassus il aurait dû donner suite à son idée (la seule bonne à avoir) de faire les premières démarches.

La lettre de Cousin est plus que froide, il doit être le quatrième à ne pas avoir compris et il a été évidemment étonné tout

au moins par mon épître. Je lui disais par exemple sur les droits d'Esclangon à peu près ce que je vous déclare : que j'ignorais s'ils étaient sérieux et scientifiquement établis ; sa réponse contenait un éloge d'Esclangon le déclarant surpassant tous les candidats du monde. J'avais dit à Cousin que j'étais candidat aux examens de Polytechnique : *il a fait les plus expresses réserves sur la possibilité d'assurer le service*, et comme ce serait en partie à lui qu'il me faudrait recourir au besoin, sa réponse est plus que froide. (Padé avait 1500 F de supplément.)

A vous.

H. Lebesgue

CXIII

Mon cher Borel⁵⁸⁹,

Merci de vos tuyaux. Je n'ai pas eu le temps encore d'écrire à Drach, ma petite fille est actuellement malade (c'est peu de chose d'ailleurs, mais chaque faiblesse physique est accompagnée chez elle de réactions nerveuses violentes).

Il me semble qu'il y a quelque temps déjà que, partisan du fameux "nombre fini de mots", vous ramenez tout au dénombrable⁵⁹⁰. Est-ce que vos idées (que vous semblez indiquer comme nouvelles) vous conduisent à nier toute différence entre l'ensemble des nombres rationnels et l'ensemble de tous les nombres ? Ce serait un cas grave.

Cordialement à vous.

H. Lebesgue

CXIV

Poitiers, le 11 décembre 1908

Mon cher Borel,

Je suis d'accord avec vous sur les ensembles, Il ne s'agit que d'une question de grammaire, mais il n'est nullement indifférent d'avoir un bon langage. Il me semble que ce que vous me dites

est ce que Richard (de Dijon)⁵⁹¹ a été je crois le premier à exprimer très nettement ; ça se retrouve aussi, avec toute la confusion non désirable, dans Peano et König entre autres.

Ma petite va nettement mieux, merci.

Mes intentions : quand l'affaire de Collège de France sera réglée, j'écrirais aux pontifes que je suis candidat même à la rigueur j'irai les voir et, à la très grosse rigueur j'écrirai une notice si mes concurrents le font.

J'avoue que je comprends peu l'attitude de Drach. Il me semblait tout naturel que, aussi bien pour des motifs d'amitié que scientifiques, vous fassiez tout votre possible pour le faire venir à Paris. D'ailleurs Drach désire Paris, pourvu que ça ne tarde pas trop ; dans ces conditions, ses travaux étant de nature à intéresser beaucoup des mathématiciens parisiens et ses connaissances et les vôtres dans ce monde étant étendues, il me semblait indiqué qu'il profite de l'occasion et je le croyais le candidat le plus sérieux de tous. J'ajoute que je m'étais dit que je n'avais aucune chance devant lui et je pensais à poser ma candidature pour avoir quelques notions sur ce qu'"on" pense de moi.

Evidemment c'est après une entente entre vous deux qu'il a adopté le parti de se présenter en second au Collège de France,¹¹⁰¹ vous m'expliquerez pourquoi si vous le jugez bon.

Je connais peu, moi aussi, les travaux de Cartan, mais ils me semblent de bons travaux sans originalité⁵⁹² et c'est pourquoi si, au lieu d'être candidat, j'avais à choisir je voterais pour Drach.

En lisant votre lettre je me demande qui connaît à la fois les travaux de Cartan et les miens ? Toutes mes chances résultent de ceci : que, par impartialité !, ceux qui connaissent mes travaux votent pour Cartan et inversement.

Merci et bien à vous.

H. Lebesgue

CXV

Poitiers, le 15 décembre 1908

Mon cher Borel,

Paris ne fait pas le bonheur et je comprends qu'on n'y désire pas aller, mais, comme j'ai vu l'an dernier Drach non fixé encore sur la question de savoir s'il le désirait encore et comme il concluait que c'était désirable si ça se présentait vite, sa décision m'a surpris. Et puis comme il se présentait cependant au Collège de France ça n'est qu'une 1/2 décision et j'ai peur que plus tard il ne le regrette.

J'ai reçu votre tiré à part. Tout d'abord, je ne suis pas d'accord avec vous sur le sens réel du théorème de Cantor⁵⁹³ : pour moi il signifie tout simplement ce que vous lui faisiez dire jadis : Quand on a u_1, u_2, \dots on peut nommer u ne faisant pas partie de u_1, u_2, \dots ⁵⁹⁶.

Ensuite, vos considérations reviennent, vous le dites, à des calculs de mesure d'ensembles⁵⁹⁷. Précisément comme exemple de mesures d'ensembles j'ai autrefois considéré des choses qui ressemblent beaucoup à vos nombres normaux (avec divers adverbes). Ça me permet de vous faire observer qu'un enfant de 2 ans construirait un nombre absolument normal⁵⁹⁹.

Définissons d'abord l'ensemble des nombres pour lesquels 4 a la fréquence $\frac{1}{10}$ soit $E_{4,10,1,1}$. Soit $E_{4,10,1,1}^{\varepsilon, n}$ l'ensemble des nombres dans lesquels 4 a une fréquence comprise entre $\frac{1-\varepsilon}{10}$ et $\frac{1+\varepsilon}{10}$ dans les $n+p$ premiers chiffres, quel que soit p .

$E_{4,10,1,1}$ est la partie commune à tous les

$$E_{4,10,1,1}^{\varepsilon, 1} + E_{4,10,1,1}^{\varepsilon, 2} + \dots$$

pour ε ayant les valeurs $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$.

Enfin $E_{4,10,1,1}^{\varepsilon, n}$ est la partie commune, quel que soit p , aux $E_{4,10,1,1}^{\varepsilon, n, p}$ qui sont les ensembles des points dont, parmi les $n+p$ chiffres, il y a un nombre de 4 compris entre

$$\frac{(n+p)(1-\varepsilon)}{10} \quad \text{et} \quad \frac{(n+p)(1+\varepsilon)}{10} .$$

De même on définit l'ensemble $E_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$ des nombres u tels que $\beta^\gamma u$, écrit dans le système β^δ , donne la fréquence $\frac{1}{\beta^\delta}$ au chiffre α . La partie commune à tous les $E_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$ est l'ensemble E des absolument normaux (comme vous et moi).

Or les $E_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}^{a, b, c}$ sont des ensembles d'intervalles, donc E est mesurable (B) et sa mesure se calcule de proche en proche. On trouve naturellement 1. D'une façon plus précise, $\varepsilon_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} > 0$ étant donnés, on peut définir, effectivement si vous y tenez, une suite dénombrable d'intervalles de mesure $\varepsilon_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$ au plus et enfermant les points du complémentaire de $E_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$. Ce qui veut dire qu'on enferme les points du complémentaire de E dans une suite d'intervalles de mesure au plus égale à $\sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} \varepsilon_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} = \varepsilon$. Et si l'on a choisi $\varepsilon < 1$, l'existence de E s'ensuit. Mais cette existence se manifeste, en utilisant votre démonstration du théorème de Heine-Borel, par ce fait qu'étant donnée la suite d'intervalles de mesure $< \varepsilon$ nous savons nommer un nombre ne faisant pas partie de la suite, donc faisant partie de E .

Je vous accorderai d'ailleurs volontiers que ce mode de construction ne présente aucun intérêt, sauf celui de réussir toujours. Il consiste essentiellement en ceci : définir d'une façon précise la suite de ces opérations que j'ai appelées, suivant les siècles, I et II ou A et B, qui conduisent à définir l'ensemble comme ensemble mesurable B. Alors, si la mesure est $\neq 0$, cette suite d'opérations permet de choisir un nombre de l'ensemble⁶⁰⁰.

Je vois que Palerme est désencombré, et que la grève est finie, vous avez été imprimé très vite et paraîtrez officiellement dans peu de temps.

Bien à vous.

H. Lebesgue

La maladie de ma fille est quasi finie.

CXVI

Poitiers, le 17 décembre 1908

Mon cher Borel,

Ma petite fille a remonté de nouveau à 40, nous sommes inquiets.

Je suppose que c'est le papier de botanique qui vous fait parler de Bernard ; il date de l'époque du début où Bernard a habité chez moi⁶⁰¹. Je vois assez peu Bernard, nous habitons aux deux extrémités du piton poitevin ; je le vois assez pour lui faire votre commission.

Si, c'est une prétention nouvelle que le calcul ; certes vous en avez parlé déjà mais sans insister et vous insistiez au contraire sur le fait qu'un nombre peut être logiquement défini sans qu'on sache le calculer. Maintenant c'est tout à fait le Kronecker⁶⁰². Je ne dis pas que ça en soit plus mauvais.

Je me suis mal expliqué, en vous parlant de votre démonstration du Heine-Borel. Mais supposons qu'on sache qu'un ensemble E est enfermé dans des intervalles I_p $[(\frac{a_p}{10^p}, \frac{a_{p+1}}{10^p})$, p , a_p et a_{p+1} entiers]. Alors raisonnant à la façon de Cantor sur les groupes de chiffres qu'il faut éviter dans x (au lieu des chiffres comme le fait Cantor)⁶⁰³ on définira autant de chiffres que l'on veut d'un nombre x ne faisant pas partie d'un ensemble E ; si la mesure des I_p est < 1 , En y perdant 2 jours ou moins, on nommerait donc facilement la loi de tous les chiffres d'un absolument normal et on calculerait les 100 premiers. Même pour Kronecker un nombre absolument normal existe.

Je ne prétends pas qu'en tous cas les probabilités dénombrables conduiront à des mesures, je ne le crois pas⁶⁰⁴.

A vous.

H. Lebesgue

Poitiers, le 31 décembre 1908

Bonne année, parfaite santé, paradis à la fin de vos jours.

Ma petite fille a fini ; notre bonne, qui part régulièrement chez elle sous le prétexte de se soigner dès qu'il y a quelqu'un de malade chez nous, ayant daigné revenir chercher les étrennes, je ne suis plus astreint à cirer les planchers, fourbir les casseroles ou charger les poêles et je puis vous répondre.

Je suis mortifié d'avoir été si peu convaincant, d'autant que je ne vois pas ce que vous pouvez désirer.

Soit E un ensemble de mesure non nulle, je suppose qu'on sache enfermer le complémentaire de E (par rapport à $(0,1)$ contenant E) dans des intervalles $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots$, de longueurs l_1, l_2, \dots ; la série $l_1 + l_2 + \dots$ étant majorée par la série $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots$ que l'on sait sommer et dont la somme est inférieure à 1. (On est dans ce cas *presque* toutes les fois qu'on a su démontrer qu'un ensemble mesurable B est de mesure nulle. Je mets *presque* pour éviter toute discussion, mais il me semble inutile.) Bien entendu la loi des $(a_i, b_i), l_i, \lambda_i$ est donnée (nombre fini de mots). Ceci posé partageons $(0,1)$ en $\frac{1}{10}$: $(0, \frac{1}{10}), (\frac{1}{10}, \frac{2}{10}), \dots$ ⁶⁰⁵. Prenons les p premiers l_i ; soient

$$s_p^0, s_p^1, s_p^2, \dots, s_p^q$$

les sommes de ceux des l_i considérés qui sont dans $(0, \frac{1}{10}), (\frac{1}{10}, \frac{2}{10}), \dots$ (ceux qui empièteraient sur deux intervalles seront comptés comme il convient dans les 2). Soit r_p le reste de la série des λ après les p premiers termes ; pour p assez grand l'une des sommes

$$s_p^0 + r_p, s_p^1 + r_p, \dots$$

sera plus petite que $\frac{1}{10}$. Ça arrivera sûrement si p est tel que que l'on ait $10 r_p < 1 - s$. Donc après ce nombre p d'opérations ou avant on connaîtra un ou plusieurs 10^i èmes dans lesquels il y

a des points de E . Choisissons le plus près de zéro des premiers qui se présentent. Soit $(\frac{\alpha-1}{10}, \frac{\alpha}{10})$; dans cet intervalle le complémentaire de E a une mesure au plus égale à $\delta_p^\alpha = \kappa_p < \frac{1}{10}$. Donc si q est assez grand pour que l'on ait

$$10 \kappa_q < \frac{1}{10} - (\delta_p^\alpha + \kappa_p),$$

en recommençant de même avec les $\frac{1}{100}$, après q opérations au plus, on trouvera dans $(\frac{\alpha-1}{10}, \frac{\alpha}{10})$ un $100^{\text{ième}}$ contenant des points de E , etc. Donc, après un nombre fini d'opérations (nombre qu'on peut calculer même), on aura les 2 premiers chiffres d'un point de E , etc.

Doutez-vous que l'ensemble des absolument sommables soit dans le cas de mon E ? Dites-moi de quoi vous doutez.

Bien à vous.

H. Lebesgue

CXVIII

Poitiers, le 29 janvier 1909

Mon cher Borel,

Il y a longtemps que j'aurais dû vous répondre, mais mille riens m'en ont empêché. La Sicile tremblant il n'y a rien de pressé pour Guccia⁶⁰⁶ et puis je me demande s'il y a quelque intérêt à renseigner les lecteurs des *Rendiconti* sur les absolument je ne sais plus quoi, ma remarque touchant seulement à un point de détail et non à ce qui vous occupe principalement dans votre note⁶⁰⁷. Quant à l'intérêt philosophique que peut avoir le fait de savoir déterminer toujours un point déterminé d'un ensemble de mesure non nulle, il est mince pour tout autre que nous deux. Aussi il me semble mieux de ne rien publier à ce sujet, d'autant que ça ne pourrait être imprimé après votre note et que ça prendrait alors aspect de rectification grandiloquente.

Avez-vous remarqué, je viens de le faire seulement, que la généralisation employée par Stieltjes, dans son grand mémoire, pour l'intégrale définie coïncide avec la mienne⁶⁰⁸. Stieltjes pose⁶⁰⁹

$\int_a^b f(x) d\varphi(x)$ pour désigner la limite de $\sum f(\xi_i)[\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})]$, où $a = x_0 < \xi_0 < x_1 < \xi_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, quand n augmente indéfiniment. Il suppose f continue et φ monotone.

Pour que sa généralisation ait un sens quel que soit f continue il faut que φ soit à variation bornée [pour le voir il suffit de prendre $f=1$] et même qu'on ait toujours $\varphi(x)$ compris entre $\varphi(x-0)$ et $\varphi(x+0)$:

$$\varphi(x-0) \leq \varphi(x) \leq \varphi(x+0) .$$

Si l'on veut se débarrasser de cela on le peut, mais il faut alors spécifier si l'on prendra toujours les x_i parmi les points de continuité de φ ou si au contraire tous les points de discontinuité de φ finiront par faire partie des x_i . Stieltjes lui-même est à diverses reprises obligé de spécifier qu'il fait la 1^{ère} hypothèse. Passons.

Cette condition ($\varphi(x)$ à variation bornée) remplie, alors $f(x)$ peut être quelconque intégrable au sens de Riemann, la limite existe.

Si φ a une dérivée continue (et par suite est lui-même continu) on a, pour f continue,

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) = \int_a^b f(x) \varphi'(x) dx ;$$

mais pour les autres cas : Tout d'abord débarrassons nous des points de discontinuité de φ , ce qui introduit dans

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x)$$

la série $\sum [\varphi(\xi+0) - \varphi(\xi-0)] f(\xi)$ étendue à tous les points de discontinuité (infinité dénombrable). Alors soit d'abord un nombre dérivé de φ partout fini, dans ce cas j'ai prouvé que la dérivée existe presque partout, l'ensemble des points où elle n'existe pas pouvant être négligé dans la démonstration de

$$\int_a^b \varphi'(x) dx = \int_a^b d\varphi(x) .$$

On a alors de même

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) = \int_a^b f(x) \varphi'(x) dx .$$

Cela suppose seulement que $\varphi(x)$ soit une fonction qui peut être

considérée comme une \int indéfinie. Mais si φ étant à variation bornée n'est pas intégrale indéfinie, φ devient intégrale indéfinie par une foule de changements de variable $x = \chi(t)$, en particulier en prenant pour t l'arc de $y = \varphi(x)$. Alors on a : $\varphi[\chi(t)] = \phi(t)$, qui a une dérivée presque partout, et on peut écrire

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) = \int_{\chi}^x f[\chi(t)] \phi'(t) dt .$$

Si en particulier t est l'arc indiqué on a :

$$\int_{s_0}^{s_1} f[\chi(s)] \phi'(s) ds = \int_{s_0}^{s_1} f \frac{dy}{ds} ds =$$

$$\int_{\text{le long de } y=\varphi(x)} f dy$$

en tant qu'intégrale curviligne.

Vous voyez d'une part que le symbole de Stieltjes soulève une question : généralisation du passage classique de la dérivée à la fonction primitive, d'autre part que mon intégrale permettrait une exposition nouvelle du Stieltjes⁶¹⁰.

Bien cordialement,

H. Lebesgue

Je viens de lire la réponse de F. Masson à Poincaré : c'est roulant : Je trouve très moral que l'imbécilité de Poincaré allant offrir sa supériorité à l'Académie Française soit récompensée ainsi.

D'abord une élection à quelques voix seulement de majorité sur un Charles de Pomairols : puis la réponse de Masson. Pour celui-ci on a reçu Poincaré parce qu'il faut quelqu'un pour expliquer dans le dictionnaire les mots scientifiques. Quant à l'ensemble des travaux de Poincaré c'est de la culture primaire ; pour le scepticisme scientifique de Poincaré c'est la preuve de faillite de la science et du triomphe prochain de la foi.⁶¹¹

Bravo !

CXIX

Poitiers, le 3 février 1909

Mon cher Borel,

En disant qu'il y a identité entre l'intégrale de Stieltjes et la mienne, j'ai seulement voulu indiquer que si l'on considère une intégrale de Stieltjes $\int f d\varphi$ on peut l'exprimer par une intégrale à mon sens $\int f \varphi' dx$ et réciproquement. Mais cela ne veut nullement dire que l'intégrale de Stieltjes peut remplacer la mienne. Si φ est sommable certes il existe une fonction à variation bornée ϕ telle que l'on ait $\int d\phi = \int \varphi dx$; mais c'est mon intégrale seule qui prouve l'existence de cette fonction ϕ , et permet de la trouver. Ici on peut dire qu'employer une intégrale de Stieltjes n'a aucun sens ou est une lapalissade. Si vous voulez, on peut dire plus contre son emploi que contre l'emploi d'une intégrale au sens de Duhamel⁶¹⁷, dont la conception vous avait jadis réjouie.

Il me semble intéressant de noter le remplacement possible d'une intégrale de Stieltjes par une de mes intégrales, mais l'inverse n'aura un sens que dans des cas très particuliers.

En tout cas si les 2 opérations conduisent parfois, toujours si vous voulez, à considérer les mêmes choses, ces deux opérations sont extrêmement différentes en tant qu'opérations et c'est pourquoi (c'est le but de toute cette diatribe) je viens vous dire mon étonnement de vos scrupules sur la notion de mesure⁶¹⁸.

Cette notion de Stieltjes ne me paraît fournir aucun renseignement ni sur le but à atteindre dans la mesure, ni sur le procédé que vous utilisez pour atteindre ce but. Si l'on veut à toute force tirer de la notion de Stieltjes quelque chose sur la mesure, on n'atteindra jamais que la mesure au sens de Jordan, puisque Stieltjes partage (a,b) en un nombre fini de parties choisies indépendamment de l'intégrale à calculer. Et puis certes la mesure est une $\int d\varphi$, mais ce n'est une $\int d\varphi$ qu'après que le φ , la mesure, a été trouvé.

Quand Landau m'eut envoyé son article *Über die Approximation* etc., je lui écrivis aussitôt. Le temps qu'il me renvoie ma lettre, qu'on la copie à la machine et Guccia l'avait moins d'un mois après

avoir imprimé l'article de Landau. Cependant ma lettre ne parut même pas dans le même volume que l'article de Landau qui ne parut que 3 mois au moins après que j'avais écrit ma lettre. Et vraiment quel intérêt aurait mon article, dites-le moi, franchement je ne le vois pas⁶¹⁹.

J'espère que, si les résultats de la Sorbonne doivent être ceux que vous indiquez, du moins certains professeurs hésiteront beaucoup avant de se décider. Au reste vos prévisions ne me surprenent pas beaucoup, je serais seulement étonné que Painlevé fût pour moi. Ce qui me chagrine plus c'est de penser que ce sera toujours la même chose et qu'au fond je n'aurai guère vraiment de chance que contre Baire. Sa candidature ne me surprend pas ; je la regrette pour lui, elle ne le guérira certes pas, au contraire.

Bien cordialement.

H. Lebesgue

CXX

Mon cher Borel⁶²⁰,

Je viens de recevoir et de lire votre article sur les ensembles⁶²¹. Puisque je devrais à cette occasion vous remercier de la grande place que je suis un peu confus d'occuper dans votre article, je me sens plus à l'aise pour vous attraper un peu. J'ai essayé de vous voir à Paris, sans succès ; je n'ai vu que Painlevé et Tannery. J'ai appris que Cartan avait ou aurait l'unanimité, Painlevé m'a dit qu'il avait hésité entre Cartan et moi et qu'il était décidé pour Cartan à cause de l'utilité incontestable des travaux qu'il a publiés. Puisque Painlevé lui-même se décide ainsi mon sort pour maintenant et plus tard est trop évident. Quant à Tannery il m'a considéré comme le candidat qui désire seulement une présentation en 4^{ième} ligne ; il m'a sorti le parallèle Baire-Lebesgue et parlé des nominations de Guichard, Vessiot, peut-être¹¹⁰² Cotton, qui devront se faire avant la mienne. Enfin il m'a dit qu'il ne fallait compter sur rien avant une 20^{aine} d'années, parce qu'on supprimerait 2 personnes pour faire disparaître son poste et celui de Raffy.¹¹⁰³ En considérant Tannery comme très pessimiste il n'en résulte pas moins qu'il serait fou d'espérer Paris. Voici pour ce qui me concerne.

D'autre part j'ai appris comment se présentaient les questions à la Sorbonne. J'aurais dû le comprendre depuis longtemps par ce que m'avait dit Boutroux, mais il était trop discret pour être explicite et moi trop borné pour comprendre. J'ai donc appris que l'on voulait vous titulariser et que cela expliquait la solution¹¹⁰⁴ prise pour remplacer Puiseux. Eh bien ! très franchement, je regrette cette affaire. Rien de plus naturel que votre désir d'être titularisé mais la titularisation dans le moment actuel ne semble être à l'étude que parce qu'Hadamard reçoit un avancement. J'aurais voulu, ce qui vous eût été bien facile, que vous légitimiez cette titularisation par des travaux. Pour tout dire je vous reproche *La Revue du Mois*. Je sais bien que vous trouvez là l'occasion de dépenser vos qualités d'action et vos ardeurs d'administrateur, mais c'est ce que j'estime le moins en vous.

Accessoirement, car je n'ose insister sur un point que mon intérêt m'empêche de juger impartiellement, je regrette que la solution prise pour remplacer Puiseux supprime un poste de mathématicien pour créer peut-être un poste d'astronome. Et quand Blutel partira supprimera-t-on encore ? Après tout Blutel est peut-être parti.

Je n'ai pas reçu votre article des A.S.N.⁶²². Avez-vous vu le coup de patte d'Hadamard en bas de son mémoire récemment récompensé⁶²³. Comme j'étais ces temps-ci en correspondance avec Hadamard (au sujet du théorème de Cauchy sur les polyèdres⁶²⁴), je lui ai demandé explications. Il m'a répondu froidement que pour moi je ne pouvais distinguer les fonctions remplissant les conditions imposées des autres et que par suite la question du minimum ne pouvait avoir pour moi aucun sens. Ça devient tellement étrange que je me demande si je ne commets pas quelque grosse erreur.

Vous avez vu que mes prévisions sur l'impossibilité d'accoler une remarque de moi à votre article de Palerme étaient fondées.

Bernard m'a dit que la présentation de Cartan par Paris était faite ; je m'intéresse à ces choses au point de vue historique, tenez-moi au courant.

La couverture de la *Revue Générale des Sciences* que vous m'envoyez contient une bonne chose au sujet de *Scientia* : "On se plaint de plus en plus des effets de la spéculation à outrance où les hommes de science sont condamnés".⁶²⁵

La vie ici est aussi monotone et assoupissante qu'on peut le souhaiter. Ma famille va bien.

Cordialement,

H. Lebesgue

CXXI

Mon cher Borel⁶²⁶,

Merci beaucoup de vos renseignements et de votre aimable "mise à ma disposition". J'ai résolu la question le plus simplement en retirant ma candidature. Je ne crois pas à l'influence d'un papier de plus dans mon dossier, il ne contrebalancera pas le moindre piston personnel d'un concurrent. Et puis il me faut attendre une dizaine d'années avant d'être candidat et à une promotion au choix et une vingtaine avant d'être à nouveau candidat à Paris; alors je m'en désintéresse.

Je ne sais de quoi Baire s'est plaint; mais si c'est que les questions se règlent sans que les candidats possibles sachent les vacances, il n'a pas tort. Si même il trouvait bizarre que l'on s'occupe de faire des rapports après avoir choisi, je ne lui en fais pas grief.

J'étais candidat à la chaire de mathématiques élémentaires de Beauvais quand on m'a envoyé à Rennes, on a eu bien tort. Quelle vie douce, calme et utile après tout on m'a fait manquer.

Bien à vous,

H. Lebesgue⁶²⁷

CXXII

Poitiers, le 26 avril 1909

Mon cher Borel,

Je ne croyais pas vous avoir donné matière à un aussi long plaidoyer. Je n'ai jamais dit que je n'étais pas heureux d'une titularisation qui naturellement doit vous faire plaisir; je n'ai pas dit non plus que vous n'aviez pas de droit à être titularisé

ni même qu'il eût été injuste de vous titulariser antérieurement. J'ai dit et je dis que je regrette qu'on s'occupe actuellement de vous titulariser ; j'ai dit et je dis que c'est l'avancement d'Hadamard qui est l'occasion de votre titularisation et vous confirmez mes dires par vos explications. J'ai dit et je dis que j'aurais préféré que ce soit des travaux récents de vous qui légitiment votre nomination et non l'ancien parallèle Borel-Hadamard et là encore¹¹⁰⁵ vous m'approuvez implicitement en déclarant que vous avez eu "un dégoût profond ... de la carrière mathématique" et par votre détermination de vous créer "une situation personnelle indépendante de l'administration et des Académies" en fondant *La Revue du Mois*. Oui vous avez fait moins de mathématiques et plus d'à côté et c'est ce que je vous reproche car, je sais^{que} ce que je vais dire est à la fois cruel et injuste mais je veux espérer que le seul fait que je le dise vous prouve que j'en vois l'outrance, vous ne renoncez pas à avancer dans l'Université ni les Académies. Et alors pourquoi ne pas légitimer votre avancement aux yeux de tous, ce qui vous était si simple.

Il est évident que notre travail n'est pas fini quand nous avons fait nos cours. Vous comptez dans votre travail *La Revue du Mois*, sans doute, mais c'est là un précédent fort dangereux et si l'on compte autre chose que le travail scientifique au sens restreint comment mettre une limite de démarcation, comment blamer ceux qui ne font que cacher sous le pavillon scientifique une marchandise inavouable ?

Ceci dit pour un premier point, j'arrive à celui qui me met en cause. Dans ma lettre j'ai fait des réserves sur mon impartialité à juger la solution de la question Puiseux parce que je prévoyais l'objection intérêt personnel. Mais au fond cela ne m'intéresse pas personnellement. Je n'ai plus d'illusion sur ce point : pour la majorité des Sorbonnards, mettons influents, je suis l'individu qui s'occupe des fonctions qui ne servent à rien. On peut me décerner des éloges mais je serai toujours le second à passer. S'il se présentait une place demain je m'y présenterais sans doute par faiblesse, il serait plus sage que je ne m'y présente pas. Mais, si par lâcheté je consens à essayer de profiter de circonstances qui éliminent un candidat sérieux, je n'en regrette pas moins ces circonstances, et le fait que la combinaison actuelle élimine Vessiot et Guichard ne peut à mon avis être nullement compté à

l'actif de cette combinaison. Je regrette infiniment que tous les candidats ne puissent faire valoir leurs titres et j'espère que je continuerai à le regretter, ou je changerais beaucoup. Dès maintenant, je n'y ai aucun mérite cela ne peut rien me coûter, je me déclare partisan de la suppression des maîtres de conférences à Paris ; tous les Parisiens titulaires.

Ou vous me jugez mal ou vous devez savoir que ce n'est pas le fait d'éliminer Vessiot et Guichard ni le fait d'augmenter votre influence qui pourrait s'exercer en ma faveur qui me fera changer d'avis sur l'inopportunité de votre titularisation.

Quant à *La Revue du Mois* il serait plus simple de n'en pas parler, vous ne me convaincrez pas.

Bien à vous,

H. Lebesgue

CXXIII

Mon cher Borel⁶²⁸,

Vraiment il est curieux que nous nous entendions si peu. Je vous reproche à l'occasion de votre titularisation d'avoir délaissé les mathématiques et vous me prouvez que vous n'avez pas fait une carrière de gendre. Je vous laisse voir que je ne suis pas égayé par les derniers événements et vous me croyez une mentalité de méconnu, de persécuté, d'obsédé. Non.

Avant cette histoire j'avais pris mon parti de finir à Poitiers ou du moins je ne pensais pas à l'avenir. Vient cette affaire, je ne crois pas un instant à mes chances, je ne trouve aucun titulaire prêt à me soutenir et, tel le commerçant qui se rattrape sur la quantité, je ne puis cependant m'empêcher d'espérer dans l'ensemble, tout au moins mon imagination se donne libre carrière et je rêve d'une vie finissant ailleurs qu'ici. La vérité m'apparaît et je songe que, nulle ville de Faculté ne m'attirant, c'est ici que je finirai ma carrière et naturellement cela m'attriste. A peine peut-on dire que cela me mette de mauvaise humeur, ou si je suis de mauvaise humeur j'ai tort ce qui à la vérité n'a jamais empêché aucune mauvaise humeur.

Je ne crois en vouloir à personne du choix fait, à Cartan moins

qu'à tout autre. J'ai, bien qu'incompétent, beaucoup d'estime pour les travaux de Cartan que j'estime solides, bien faits, difficiles et utiles, tout au plus je lui reproche de ne pas avoir donné à leur auteur occasion de faire preuve de qualité d'invention, ce qui ne prouve pas qu'il soit incapable de création véritable. Je doit dire qu'une note de Cartan sur les aires⁶²⁹ et surtout la rectification incomplète et un tant soit peu jésuitique qui l'a suivie m'a fâcheusement impressionné, mais il s'agit là d'une pécadille vénielle. Je ferai volontiers un parallèle Cartan-Goursat et j'estime que Goursat n'est pas déplacé où il est.

En somme je ne connais rien que du sympathique sur Cartan ; il ne doit son avancement qu'à son mérite et même sa titularisation fut injustement tardive et retardée encore par un transfert de Lacour à Rennes.

Certes j'estime mes travaux plus que les siens, mais je me rends compte que des juges vraiment compétents aient pu hésiter et surtout ayant à tenir compte de l'âge et de l'ancienneté. Le résultat ne m'émeut pas en tant que violant la justice; *c'est sans doute la solution la plus juste*. Ce qui m'attriste c'est d'avoir eu l'occasion de constater, ce dont je ne doutais pas il y a 6 mois, que personne ne me connaît (je dis personne parce que c'est commode) et j'avoue éprouver une certaine consolation à laisser aux Sorbonnards la responsabilité (toute morale et dont ils ne se douteront même pas) de leur choix fait à l'aveuglette (quoique peut-être juste) en ne laissant pas composer de rapport sur mon compte.

Mais pourquoi voyez-vous un reproche à vous adressé dans ma façon d'agir. Pourriez-vous être plus élogieux pour moi dans un rapport que dans votre article de la *Revue des Sciences* ? Et même n'est-ce pas un peu hypocrite de ma part de repousser un rapport après que cet article a été publié ? A mes yeux la non confection d'un rapport est le signe évident que le choix a été fait par sentiment plutôt qu'à la suite d'étude, mais je ne vous ai nullement reproché de ne pas avoir travaillé de tout votre possible pour qu'il en soit autrement.

Il se peut que ce que vous appelez ma mauvaise humeur et que j'appelle ma tristesse me fasse sentir plus vivement les aspérités des choses, mais croyez-moi quand je vous affirme qu'elle ne me fait pas tout rapporter à moi. J'ai entendu dire, par X (?), que Baire ne s'était présenté que très tard par suite d'ignorance d'où

ma phrase qui n'est nullement une plainte personnelle, bien injustifiée puisque vous m'avez amicalement renseigné très tôt. Mais je trouve que, dans toute l'Université, les choses se règlent subrepticement sans qu'on ait rien fait pour susciter les candidatures ou avertir les candidats possibles.

Aussi, je suis persuadé que je dois faire ma carrière en province, mon dossier ne me servira que pour les promotions et vous m'avez appris jadis qu'il était bon de se faire pistonner pour avoir une promotion, c'est pourquoi j'ai dit et je dis : qu'un papier de plus dans mon dossier ne contrebalancera pas le moindre piston personnel de mes concurrents.

Au fond cette histoire me rend triste parce qu'elle m'a fait penser à l'avenir alors que je ^{ne} m'en étais pas inquiété. Cela est peu réjouissant de savoir qu'on finira sans avoir utilisé les qualités que l'on croit avoir, sans avoir été, dans sa profession, de quelque utilité. Mais en un sens cela est heureux, j'avais besoin qu'on me force à penser à ces choses, j'étais aussi inconscient qu'à 20 ans et je tâcherais d'arranger ma vie pour qu'elle ne soit pas vide pour moi et les miens. Cette constatation que je fais actuellement, j'aurais dû la faire depuis 5 ans au moins, mais je la fais je crois assez tôt encore pour ne pas perdre ma vie en récriminations inutiles, et qu'on juge par suite risibles, comme Baire.

Bien à vous,

H. Lebesgue

CXXIV

Poitiers, le 28 avril 1909

Mon cher Borel,

Vous, vous avez peut-être le droit de dire que ma nomination soit plus juste que celle de Vessiot et Guichard, moi je n'ai pas le droit de le penser trop absolument. Et puis ne faut-il pas tenir *beaucoup* compte de l'ancienneté. Tout cela est très complexe. Je pense que le mieux serait que tous les candidats possibles puissent faire valoir leur titre et je pense que Don Quichotte, qui est en fait l'individu le plus sympathique qui ait jamais existé et aussi n'a-t-il pas vécu, eût refusé de poser sa candidature si de

mesquines questions d'argent avaient empêché ses collègues de poser la leur.

Peut-être est-ce un symptôme de vieillissement mais je constate que vous conservez la mentalité qu'on a à 25 ans et pour moi je pense au contraire avec les fruits mûrs qu'un travail de détail sur un fait précis peut être très important. J'apprécie de plus en plus les faits pris individuellement, je n'en suis pas encore à admirer telle forme particulière du développement de $\Gamma(x)$ mais ça vient.⁶³⁹ Aussi je ne juge pas comme vous, bien que je crois avec vous que l'esprit n'a toute sa hardiesse et toute sa vigueur d'imagination que dans le jeune âge, qu'on doive sous peine de déchoir ne plus publier passé un âge à déterminer. J'avoue que la transcendance de e qui je crois n'est pas un travail de jeunesse⁶³⁰ ne me paraît pas un devoir d'élève ; j'apprécie autant les derniers travaux de Riemann (mort jeune je crois) que sa dissertation sur les fonctions de variable complexe dont l'importance m'a semblée parfois avoir été exagérée⁶³¹. Je sais que Gauss fit ses *Disquisitiones* jeune, très jeune⁶³², mais je ne crois pas négligeables ses recherches tardives. Ce n'est pas il me semble une de ses idées de 18 ans qui a conduit Fredholm⁶³³ à son très important résultat et Volterra qui l'a précisé a fait des recherches avant 35 ans⁶³⁴. Enfin j'apprécie fort les travaux récents d'Hadamard⁶³⁵. La notion de $\zeta(x)$ ne s'est précisée que lentement dans l'esprit de Cauchy et parce qu'il a persévéré...⁶³⁶ Ne venez-vous pas de publier l'éloge de Poincaré⁶³⁷?

Je suis en somme plus indulgent que vous pour les travaux des hommes mûrs, je crois d'ailleurs que si l'on veut voir développer ses idées il ne faut pas trop laisser ce soin aux autres et je crois un peu moins que vous aux idées. Je crains que si l'on croit ne devoir faire que des choses *importantes* on n'en arrive trop facilement à ne rien faire et je taxerais volontiers d'orgueil votre attitude actuelle que vous appelez sans doute modestie ; ne pas vouloir faire maintenant des travaux qui pesés au plus juste seraient inférieurs à ceux d'avant.

Ma théorie de l'intégration est antérieure à l'époque où je demandais Beauvais ; elle date de l'époque où j'avais 21 heures de classe (et 23 ans⁶³⁸ il faut dire) et où je n'avais à Nancy que des collègues s'intéressant à la manille, au jacquet, mais avec lesquels je n'ai jamais parlé de science.

Je ne puis vous empêcher de faire un rapport, mais je désire

qu'il n'y en ait pas.

On a fait à Boutroux des offres pour Nancy, cela attire Boutroux qui ne se présente pas là-bas ne voulant pas nuire à Husson qui désire aussi ce poste. A ce sujet Appell a parlé à Boutroux de la succession de Floquet, mais il faut attendre 8 ans. Je ne sais à quoi se décidera Boutroux mais il y a évidemment là un cas ennuyeux à résoudre, à cause seulement de la délicatesse de Boutroux. La seule solution serait qu'ils laissent Nancy et la section permanente choisir.

J'ai des doutes sur la valeur des recherches de Boutroux ; il a des idées !! mais j'apprécie fort son caractère depuis que je le connais mieux.

Bien à vous.

H. Lebesgue

Vous avez vu, sur l'adresse, que je vous donne le titre auquel vous tenez, surtout ne prenez pas cela au tragique.

CXXV

Poitiers, le 7 mai 1909

Mon cher Borel,

Boutroux désire Nancy pour les mêmes raisons qu'Husson : région qu'il connaît, habitants dont il apprécie l'esprit et le caractère, famille nombreuse à Nancy et aux environs. Il ne faudrait pas croire que le désir de Boutroux d'aller à Nancy soit postérieur à l'offre que lui ont fait les Nancéiens ; dès son arrivée ici, en causant, il a eu l'occasion de me dire qu'il n'était particulièrement attiré par aucune ville de Faculté, sauf Nancy. Seulement, quand il est arrivé, il se déclarait partisan de la petite Faculté, de la petite ville calme où l'on peut tranquillement travailler et maintenant (et depuis longtemps) comme il s'ennuie terriblement ici où il n'a pas trouvé les relations intéressantes qu'il espérait il désire une plus grande Faculté. Et c'est vous, le partisan des grandes Facultés, qui lui conseillez de ne pas briguer Nancy.

J'insiste sur ceci que son désir de Nancy est légitime de la même façon que celui d'Husson, qu'il ne date pas d'hier et qu'il

était aussi vif à l'époque où je parlais avec lui de la place de Padé à Bordeaux que maintenant et cela avant que nous ne sachions rien de l'existence d'une vacance possible à Paris, à plus forte raison à Nancy. Je regrette fort qu'Husson et Boutroux désirent la même chose et je regretterais que l'un des deux ne voit pas son désir réalisé mais, quand Boutroux demandait Caen, on lui a opposé qu'Husson le demandait et ainsi Husson aura successivement Caen et Nancy et Boutroux Poitiers.¹¹⁰⁶

Boutroux a reçu le désistement d'Husson à la chaire de Floquet dûment rédigé. Malheureusement un tel papier est sans valeur ou presque. La succession de Floquet ne sera réglée par Boutroux et Husson ; c'est un engagement de la Faculté, de la Section permanente, du ministère qu'il faudrait pour qu'on puisse comparer la presque certitude qu'il aurait maintenant d'être nommé avec les chances qu'on peut lui compter pour le moment du départ de Floquet. Quisait quels seront les candidats ? Déjà maintenant les Nancéiens avaient pensé faire des offres à Baire ; son état de santé seul a empêché ces offres d'être faites. Boutroux et Husson pensent-ils par leur papier éliminer Baire et qui prendrait actuellement la responsabilité de l'éliminer dès maintenant ? Et puis est-on assuré qu'au départ de Floquet la Faculté ne bouleversera pas tout, se contentera-t-elle d'un seul professeur faisant de la technique et ne s'en contentant pas ne modifiera-t-elle pas profondément les sciences ? De sorte que le successeur de Floquet aura peut-être à faire, avec autre chose, une partie de ses cours que vous voulez éviter actuellement à Boutroux.

Quant à l'époque de la succession de Floquet. Oui, je crois que Boutroux se contentait à peu près au début de l'espérance de la succession de Floquet qu'on lui avait dite très proche, c'est moi qui lui ai fait vérifier l'âge de Floquet⁶⁴⁵ et ces 8 ans à attendre ont modifié singulièrement le problème. Je sais que Floquet, après sa maladie, a parlé de prendre sa retraite ; je ne crois pas qu'il en parle encore et quand même. Saint Germain en a parlé pendant 12 ans, de même Pujet⁶⁴⁷ à Rennes qui n'a fini par la prendre qu'à cause de la mort de son fils unique qui a bouleversé sa vie.

Une retraite prématurée est peut-être possible, Celle de Molk qui en parle et qui est très malade (diabète avancé paraît-il et sinusite inopérable à cause de ce diabète)⁶⁴⁸, Supposons que

Molk prenne sa retraite, si Boutroux va à Nancy alors sera-ce en qualité de professeur de mécanique, ce qui ne lui convient guère, ou pour y remplacer Husson qui passerait à la mécanique ? Alors ne serait-il pas plus naturel en un sens que ce soit Husson qui attende cette chaire de mécanique.

Bien entendu je plaide surtout le cas Boutroux parce qu'actuellement Husson tient la tête mais, je le répète, je les considère comme ayant des droits à peu près égaux. Aussi il me semble qu'on devrait laisser choisir Nancy et la Section permanente, on devrait tenir compte de l'ancienneté et peut-être aussi des raisons que vous me donniez, mais alors on conviendrait bien que ce n'est pas une preuve de mérite d'être dans une grande Faculté et les promotions ne seraient plus je pense réservées surtout à ces grandes Facultés.

Certes nous serons d'accord (en particulier) sur le dos de Landau, bourgeois, pédant et calculateur. Je suis heureux que vous calculiez ses résultats d'infinitésimaux mais je suis en colère que même de si petits résultats puissent être obtenus par de tels procédés. Peut-être n'est-ce que parce que je serais incapable de faire ces calculs.

Je vais vous envoyer deux représentations photographiques de mes deux plus belles oeuvres, comme ce ne sont ni des idées, ni des calculs nous seront sans doute d'accord pour les apprécier.

Bien à vous.

H. Lebesgue

Que pensez-vous de l'objection d'Hadamard aux méthodes Hilbert ?

CXXVI

Poitiers, le 23 septembre 1909

Mon cher Borel,

Si vous étiez abruti le jour où je vous vis je le suis bien plus encore car j'ai eu les plus grandes peines à accoucher du factum que je vous envoie⁶⁴⁹. Malgré son aspect pompier il n'est pas destiné au grand public, mais à vous seulement. Je voulais vous

préciser ce que je vous avais dit, assez pour qu'au besoin vous puissiez citer ce que vous voudriez en coupant et en recollant les morceaux au besoin et puis aussi je voulais m'astreindre à une rédaction parce que l'expérience a prouvé qu'il peut y avoir des malentendus même entre gens qui d'ordinaire se comprennent bien. Et je n'ai pu mieux.

Je n'ai pas eu cependant le courage de pousser jusqu'au bout la définition d'un absolument normal, ça se rapprochait un peu trop de ces définitions que vous aimez exigeant un million de volumes de 500 pages.

Mon abrutissement aidant, je n'ai rien compris à votre raisonnement⁶⁵⁰. Tout d'abord, bien que j'affirme en avoir le droit⁶⁵¹ dans mon topo, je n'ai pas compris que l'on ait le droit de laisser de côté la différence entre la vraie valeur de votre $\theta(\lambda)$ et

$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\lambda e^{-\lambda^2} d\lambda$. Je crois volontiers que ça peut se légitimer mais

il me semble qu'il faudrait le faire⁶⁵². Mais j'ai été beaucoup plus arrêté par vos p_n et q_n du bas de la page⁶⁵³. J'ai cru comprendre que ce que vous démontriez être égal à 1 c'est la probabilité pour qu'une suite indéfinie (de suites finies) de la forme

$$a_1, b_1 b_2, c_1 c_2 c_3, d_1 d_2 d_3 d_4, \dots$$

formée de 0 et de 1 donne la cas favorable une infinité de fois. Mais je n'ai vu nulle part que vous teniez compte de

$$a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = \dots, b_2 = c_2 = d_2 = \dots, c_3 = d_3 = \dots$$

Si vous voulez, la probabilité que avec $n+1$ chiffres on soit dans le cas favorable, sachant qu'on l'est avec n chiffres, ne me paraît pas être p_{n+1} , mais ne paraît pas définie. J'ai cru voir que les événements successifs n'étant pas indépendants on ne peut appliquer la règle des probabilités composées⁶⁵⁴. D'où l'astuce que j'emploie dans mon élucubration et qui colle je crois, sauf erreur grossière.

J'ai été dégoûté par le fascicule de l'Encyclopédie sur la théorie des fonctions⁶⁵⁵. Tout est réduit à des questions de mots ; il ne s'agit pas de bien exposer les choses mais de parler de tous les mots proposés. Peu importe qu'un tel ait introduit une idée, s'il n'a pas introduit un mot. Peu importe que tel autre n'ait rien fait s'il a réexposé une vieille chose en changeant un peu

l'ordre et le vocabulaire. Et puis vraiment je trouve ridicule d'annoncer que M. J. Tannery a adopté le mot "borné" dans sa seconde édition⁶⁵⁶, et ridicule, ainsi que peu respectueux pour Weierstrass, de dire que le théorème d'après lequel une fonction continue ne peut passer d'une valeur à une autre sans prendre les valeurs intermédiaires est de lui⁶⁵⁷. Et cela suivi d'une date, quelque chose comme 1873 ! pauvre Rolle !!⁶⁵⁸ sans compter les Grecs !!! Il paraît d'ailleurs que c'est une propriété caractéristique⁶⁵⁹.

Je trouve merveilleux qu'on ait réussi à mettre aussi peu de choses en 112 pages et cela sans mettre les démonstrations.

Enfin il y a des choses fausses. En feuilletant j'ai vu une erreur insignifiante me concernant dans la note de la page 41⁶⁶⁰, qui montre bien comment Molk se laisse prendre aux mots sans rechercher le sens ; puis une erreur plus grave dans la note 306, page 100.

Enfin tout cela est sans importance et ce qui me chagrine le plus ces temps-ci c'est de ne pas être riche. Si par hasard vous connaissiez un moyen facile, sûr et rapide de faire fortune je vous serai reconnaissant de me l'indiquer et, même après, je me souviendrais assez de vos conseils pour vous prêter un louis à l'occasion.

Bien à vous.

H. Lebesgue

CXXVII

Poitiers, le 30 septembre 1909

Mon cher Borel,

Je suis heureux que mon topo soit arrivé trop tard⁶⁶¹ car, encore une fois, il était destiné à vous montrer jusqu'où je vous permets d'être kroneckérien et à préciser l'artifice que j'employais, mais pas à autre chose.

Sur l'indépendance des probabilités ; C'est au dernier moment, parce que le genre de calcul auquel me conduisait ma façon d'opérer était assommant, que j'ai regardé de plus près votre

raisonnement mais je ne l'ai pas compris et mon abrutissement m'empêchait de savoir si l'objection était fondée.

Je parlais du fasc.1, vol.1, tome II, *Principes fondamentaux de la théorie des fonctions* par Molk d'après Pringsheim. Oui ce serait peu d'erreurs, mais je n'ai fait que feuilleter, seulement elles sont caractéristiques des gens qui veulent faire de la bibliographie sans lire ou sans avoir compris mais qui veulent cependant parler de tout, même quand ce serait inutile comme dans les 2 exemples cités, pour être complets. J'ai bien envie de supprimer plets.

Ayant eu à un moment besoin du théorème d'Hadamard sur les déterminants, auquel les équations intégrales ont fait une si heureuse fortune, je l'ai cherché dans l'*Encyclopédie*. J'y ai trouvé un énoncé manifestement faux, ça sautait aux yeux⁶⁶². Alors j'ai cherché dans la *Tribune publique* et il a fallu 2 rectifications successives pour arriver à l'énoncé exact. Je trouve que c'est là bien peu de soin et la preuve, est-elle nécessaire ?, de bien peu d'esprit critique chez Molk. Quand vous regardez ce fascicule voyez si quelque chose s'en dégage, s'il est de nature à séduire un chercheur quelconque ou à faire réfléchir sur quoi que ce soit et vous comprendrez mon indignation.

Pour ce qui est de l'importance du rédacteur, je suis assez d'accord avec vous et, personnellement, j'ai été très intéressé par l'article de Cartan⁶⁶³, au moins pour certaines parties, bien qu'à ce moment j'avais des raisons particulières pour ne pas trouver épatant ce que faisait Cartan. En fait cet article ne m'a pas paru épatant et là encore j'ai regretté la bibliographie, cependant on y voyait parfois des idées et pas seulement des mots.

La Collection des monographies ne me paraît pas le moyen certain de faire fortune. Il semble qu'en régime permanent je gagnerai 25 F par volume et par an soit à peu près 7 centimes 1/2 par jour.

Toute idée de fortune mise à part, j'écrirai peut-être un autre bouquin. Seulement je dois écrire des tas de choses et ne fais rien. Pendant Centrale c'était une mécanique de spéciales, à peu près. Puis à cause de mon cours de mathématiques générales, pour lequel je ne trouve pas de bouquin me satisfaisant, une concurrence à Vogt et Fabry⁶⁶⁴. Puis à cause de St Cyr, une algèbre

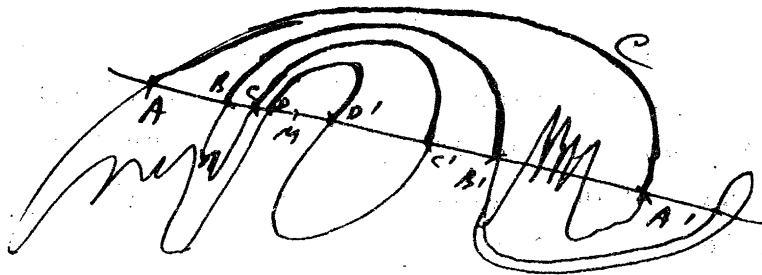
élémentaire. D'autre part je suis depuis longtemps hanté par le désir d'écrire des contes pour enfants. Vous connaissez l'histoire du Monsieur auquel on demandait s'il savait jouer du violon : "Peut-être, je n'ai jamais essayé." Et ce n'est pas le seul symptôme de paralysie générale que je présente. Quant au "petit livre", j'ai eu et j'ai périodiquement l'idée d'écrire sur l'*Analysis situs* (une petite partie naturellement). J'ai là-dessus pas mal de petits résultats disparates que je classerai dans une rédaction mais difficiles à publier à part. Peut-être m'y serais-je déjà mis, si Baire n'avait pas annoncé un mémoire plus étendu là-dessus⁶⁶⁶ et je ne veux pas trop lui couper l'herbe sous le pied ce qui serait d'autant moins pardonnable qu'à qui sait lire les indications de Baire dans sa note de B.S.M. suffisent pour reconstituer le mémoire à venir, autant du moins qu'il est annoncé⁶⁶⁷.

Les méthodes de Baire me paraissent d'ailleurs trop massives. Au fond pourquoi ne peut-il pas y avoir correspondance univoque et continue entre un espace à plus d'une dimension et une droite ? Simplement parce qu'un point divise une droite en 2 morceaux et qu'un point ne divise pas un espace en 2 morceaux. Et bien le cas général est à peu près aussi simple. En somme je crois plus simple et plus adéquat au but de s'appuyer par exemple sur le fait qu'une courbe ne divise pas en morceaux un E_{2+p} que de s'appuyer sur ce qu'elle divise en morceaux un E_2 ⁶⁶⁸.

On arrive d'ailleurs au même résultat en remarquant qu'une courbe remplissant un E_p a nécessairement des points multiples d'ordre $p+1$ au moins et qu'elle peut n'avoir que des points d'ordre $p+1$. Ceci a l'air d'une astuce épouvantable mais on peut présenter la démonstration sous la forme suivante : Quand on divise un E_p en petits morceaux il y a nécessairement des points frontières de $p+1$ morceaux au moins et sous cette forme la propriété est fondamentale, on l'admet à chaque instant. C'est par exemple à cause d'elle que dans les divisions du plan on considère des côtés et des sommets et dans les divisions de l'espace des faces, des arêtes et des sommets.

Quant au théorème de Jordan et les analogues je l'obtiens par la méthode que j'avais employée à l'Ecole pour les polygones dans une leçon d'agrégation qui fit sensation parce que Tannery⁶⁵⁹ refusa d'en rien dire à cause de sa complexité et que mes camarades la jugèrent folle, non sans quelque apparence de raison. Ça consiste

en ceci : pour savoir si M est intérieur à C on coupe par une droite et l'on ne compte que les morceaux d'un côté de la droite



et se terminant de part et d'autre de M . S'il y en a un nombre pair M est extérieur, si impair intérieur. Et ça va tout seul. Même dans un cas plus général. Soit un domaine simplement connexe D (points extérieurs connexes), C sa frontière, Γ un ensemble correspondant d'une façon biunivoque et bicontinue à C , alors Γ est frontière d'un domaine simplement connexe Δ et il y a une correspondance de plan à plan transformant C en Γ , D en Δ ⁶⁷¹.

On peut d'ailleurs caractériser ces frontières C . Ce sont des ensembles parfaits continus qu'on peut définir par des fonctions, discontinues peut-être, $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, $0 \leq t \leq l$, $f(t+l) = f(t)$, $\varphi(t+l) = \varphi(t)$, et telles que si on entoure les points t_0 , t_1 de petits cercles qu'on fasse diminuer ensuite indéfiniment on divise C en morceaux dont l'un finit par être donné par $t_0 < t < t_1$ et l'autre par $t_1 < t < t_0+l$.

J'ai aussi des invariants analogues aux nombres de Betti ⁶⁷² et dont la signification analytique est assez cachée, bien qu'une vieille remarque de Volterra permette de la trouver, ⁶⁷³ Ce sont les nombre de Betti (minima) des variétés que l'on considère quand on définit les nombres de Betti ordinaires. On peut démontrer par exemple que si on cherche le nombre de Betti p_2 ce qui conduit à considérer les surfaces S_1, S_2, \dots, S_{p_2} dont les ordres de connexion sont o_1, o_2, \dots, o_{p_2} si l'on fait en sorte que $o_1 + o_2 + \dots + o_{p_2}$ soit minimum alors o_1, o_2, \dots, o_{p_2} sont déterminés.

Je me suis occupé aussi du problème du coloriage des cartes géographiques, mais je ne puis chanter victoire ⁶⁷⁴.

Je pourrais aussi me borner à l'étude des domaines à plusieurs dimensions et pantoufler dans les $\int \int \int$ et leur dérivation _n

simple⁶⁷⁵.

Mais je ne sais si je ferai jamais rien de tout cela. Je ne m'engage pas.

Je n'ai pas ce que l'on peut appeler de graves ennuis, je suis embêté par la question déménagement. On a ici à choisir entre 3 maisons et il faut un beau hasard pour que l'une soit acceptable tant au point de vue logement que, surtout, au point de vue hygiène et proximité d'école. Or j'ai trouvé quelque chose qui ferait bien mon affaire mais on refuse de me louer et on ne demande qu'à me la vendre. D'où mon ennui de ne pas être riche (jusqu'à un certain point). Si vous avez 15.000 F à placer à 5 1/2 % sur lère hypothèque pour 5, 6 ans, ils seront les bienvenus. Mon ennui provient du fait peu nouveau qu'il faut avoir quelque argent pour pouvoir faire des économies, sans cela la situation s'éclaire et si je dépense peut-être, avec ma mère, encore un peu plus que je ne gagne c'est peu et ça a été plus que compensé par les rabiots que j'ai eus. Je compte que nous dépensons 7.500 (je mets à part mon voyage de St Cyr bien entendu) peut-être plus car jusqu'ici il y a eu chaque année des dépenses assez grosses que nous nous plaisons à qualifier d'extraordinaires.

En somme j'ai 7.200 ici et St Cyr vaut, tous frais payés, de 3.700 à 4.200 suivant l'adresse que l'on met à se tirer d'affaire en route. Je suis encore à St Cyr pour un an car on m'a nommé pour finir Padé. Jusqu'ici aucun examinateur de St Cyr n'a été changé comme il eût dû l'être au bout de 3 ans et je vous assure qu'aucun n'a l'intention de dévisser, sauf peut-être pour mieux ; aussi considèrent-ils tous qu'il serait scandaleux de ne pas me renommer pour 3 ans. Mais ce n'est qu'à moitié rassurant, car le jour où le ministère voudra modifier sa commission il faudra qu'il le fasse brutalement et alors sans doute radicalement. Quoi qu'il en soit je suis encore à St Cyr pour un an.

Vous voyez que ma situation financière, sans être brillante, est acceptable et il est vraisemblable, si Dieu prête vie aux rabiots, qu'elle s'améliorera ; mais ce qui me rend parfois pessimiste c'est la perspective qu'ils cessent pour une assez longue durée et le fait que mes dépenses sont ce que je viens de vous dire à condition de se donner fort peu de distractions, pas de déplacement ou à peine pendant les vacances et vous savez qu'on serait heureux de rendre plus agréable la vie des siens.

Quoi qu'il en soit, je n'ai pas de domicile pour après le 1er décembre et il n'y a pas ici de pont habitable, ce n'est pas pour rendre gai.

Bien à vous.

H. Lebesgue

Les équations intégrales sont je crois cause de la vente d'une dizaine de *Leçons sur l'intégration* pendant les 2 dernières années, en 1907 c'était tombé plus bas.

CXXVIII

Poitiers, le 5 octobre 1909

Mon cher Borel,

Si vous tenez à donner un titre (provisoire) mettez *Leçons sur quelques questions d'analysis situs*, ça n'engage à rien⁶⁷⁷. Si le livre s'écrit, peut-être aura-t-il quelque rapport avec ce titre ; s'il s'écrivait et qu'il n'eût pas de rapport, cela resterait un autre livre annoncé.

J'ai personnellement beaucoup d'estime pour Denjoy qui me paraît se débrouiller à son aise dans des questions fort difficiles et il a sur Boutroux l'avantage de savoir ce que c'est que la rigueur. Ce n'est d'ailleurs pas le complément au Pompéiu, qui m'a été personnellement utile, que j'apprécie le plus ; ce complément était assez enfantin. Ses dernières histoires $y(x)$ et $x(y)$ uniformes sont plus audacieuses,⁶⁷⁸

J'ai eu pendant une après-midi l'idée que peut-être je pourrais acheter la maison qui me tentait puisqu'on voulait la vendre et non la louer ; mais cette idée n'a pas résisté à l'audition du prix demandé, bien supérieur à la valeur réelle, à ce que j'aurais pu revendre si j'avais eu besoin de le faire. Je crois bien que cela m'était passé de l'idée quand je vous ai écrit, car c'est déjà pour moi un souvenir lointain. Je ne vous en remercie pas moins de regretter de ne pouvoir faire l'usurier et de tout ce que vous me dites sur ce sujet.

Prix de l'Institut. Pourquoi je n'ai jamais concouru ? Et d'abord comment pouvez-vous affirmer ainsi que je n'ai jamais

concouru ? Vous avez raison cependant de l'affirmer.

Je crois qu'à d'infinies exceptions près on n'a un prix de l'Institut, même sur un sujet donné, que si l'on est connu et apprécié à l'avance. Ce que l'on sait de l'auteur influe sur le jugement du mémoire et même sur la façon de le lire ; or si je puis dire que je suis connu, je crois qu'il serait exagéré de dire que je suis apprécié des membres de l'Institut et la conversion de Painlevé lui-même est de date récente. Et puis j'ai une telle façon de comprendre les questions que quand je résous une question, elle n'intéresse plus personne dans la forme où je l'ai traitée. Je ne cite que pour mémoire le problème de Plateau⁶⁷⁹, mais tout de même j'ai été le premier à résoudre le problème du passage de la dérivée à la fonction. Le problème était cependant célèbre, mais sa résolution a fait peu de bruit dans le Landerneau académique. A-t-on assez cherché à démontrer l'existence de la solution du problème de Dirichlet dans des cas très étendus ? On a inventé pour cela des artifices analytiques énormes ; eh bien je le démontre dans le cas général, je suis le seul à l'avoir fait, et je semble être le seul à m'en douter⁶⁸⁰. Je sais bien que toutes ces questions étaient bien déflorées, plus que déflorées, que je n'ai qu'un tout petit mérite dans la solution totale et seulement la veine d'être venu le dernier. Mais est-ce exact, dans mon cas, de dire veine ?

Voyez encore la question des séries trigonométriques . Il n'y a pas de question dont on parle plus ; ça revient dans tous les laïus à l'usage des profanes, dans toutes les conférences. Je crois avoir fait quelque chose dans ce domaine, mais croyez-vous que Darboux s'en doute.

Eh bien ! N'ayant pas conquis à l'avance les juges, j'aurais jugé tout à fait inutile d'essayer. Je connais en effet mes moyens, je me sais incapable de faire bien par ordre ; du moins c'est ainsi dans mon orgueil que j'explique le fait que je n'ai *jamais* été nulle part, *et dans aucun cas*, premier. J'ai une vocation de second ou de troisième si vous voulez.⁶⁸¹

Même sur un sujet donné pour moi je serais très capable de ne pas avoir de prix ; aussi je n'ai pas regretté que les sujets donnés soient assez éloignés de mes préoccupations. J'en ai été plutôt heureux, car il aurait fallu sans cela que je me décide de concourir sans enthousiasme ou à m'abstenir avec regret. Je préfère qu'il continue à être donnés des sujets sur lesquels je suis

incompétent, et puis ça me permettra, au besoin, de fulminer contre la partialité de l'Institut. Je mets d'ailleurs l'*analysis situs* dans ces sujets, car les miettes élémentaires que j'ai ne constituent pas le "perfectionnement sur un point important" qui serait demandé et elles n'y conduisent pas.

Bien à vous.

H. Lebesgue

Où'est-ce que ce livre de vous qui va paraître ? et pourquoi après m'avoir annoncé son apparition me dites-vous (à ce propos, Denjoy ...) ?⁵⁸² Je n'ai pas compris du tout le propos. Vous ne lisez naturellement pas *L'intermédiaire des mathématiciens*, moi non plus ; on peut y voir une conquête récente de la géométrie élémentaire et de l'*analysis situs* : la démonstration, que je crois complète, du théorème de Cauchy sur l'égalité des polyèdres convexes ayant des faces égales⁵⁸³. La difficulté qu'on croyait voir au raisonnement de Cauchy n'existait en réalité pas. Je n'ai pas eu le tirage à part de cette affaire que je crois parue.

CXXIX

Poitiers, le 9 octobre 1909

Mon cher Borel,

Tout d'abord, bien que je ne m'en fasse pas généralement un titre de gloire, laissez-moi vous apprendre que je fus en mon temps refusé au baccalauréat.

Il me semble que vous errez dans votre comparaison avec Painlevé.¹¹⁰⁷ Suivant la forte remarque de Picard au sujet de Boutroux nos travaux ne sont pas sans relations avec les jugements que nous portons sur les mathématiques et les mathématiciens modernes. Il est certain si, pour prendre cet exemple que vous choisissiez, j'attache quelque prix à mon travail sur le principe de Dirichlet c'est parce que j'y ai utilisé une idée simple et que je crois féconde, savoir : Si des fonctions f sont monotones et telles que

$$\iint \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx dy$$

soient bornées, elles sont également convergentes. En d'autres

termes c'est l'intégrale que l'on veut rendre minimum qui détermine elle-même le caractère d'égale convergence à employer. Si j'ai été conduit à cela, c'est que depuis longtemps je m'étais dit qu'il fallait rechercher une solution n'impliquant aucune de ces restrictions bonnes seulement pour les besoins de la démonstration particulière que l'on essaie. Et je recherchais cela parce que j'étais persuadé que, là comme pour l'intégration, le procédé applicable de suite au cas général, c'est-à-dire à celui dans lequel on a le minimum de données, ne s'appuierait que sur ce qu'il y a d'essentiel dans la question. En fait, tandis qu'il faut à Poincaré un appareil analytique assez compliqué pour résoudre le problème de Dirichlet, c'est un calcul en trois lignes qui me montre l'existence de la solution et légitime le procédé même du balayage, employé par Poincaré⁶⁸⁴.

C'est à cause de cela que les travaux qui finissent ne me paraissent pas négligeables, surtout si, pour finir, ils utilisent une voie nouvelle de quelque manière.

Quant à l'intérêt que peut présenter mon travail sur Dirichlet. Ce n'est pas prolonger un rameau déjà trop long si, en fait c'est cela, je reprends au début et vais d'un coup plus loin que mes devanciers. Et puis ce n'est pas de ma faute si ce rameau se prolonge. Prenez les fonctions de Pompeiu et Denjoy qui sont continues dans tout leur domaine d'existence, frontières comprises. Ces fonctions sont évidemment déterminées par leurs valeurs aux points singuliers, c'est le même raisonnement que celui sur l'unicité de la solution du principe de Dirichlet et la recherche de la fonction connaissant ces valeurs singulières, c'est la résolution du problème de Dirichlet dans un cas plus général encore que celui que j'ai traité. Puisque, suivant Pompeiu et Denjoy, les seuls points singuliers peuvent ne pas former de séparation du plan. Pompeiu résoud la question dans un cas par une $\{ \}$, mais évidemment la question générale se pose. Ce n'est pas moi qui suis le coupable. Je ne parle pas des prolongements par questions analogues au problème de Dirichlet relatives aux autres équations aux dérivées partielles.

Mais tout cela n'est pas la question. Je m'étonnais, dans ma dernière lettre, de la façon dont les pontifes m'apprécient et par suite j'essayais de juger mes travaux à leur point de vue. Or, que la solution générale du principe de Dirichlet ait ou non un

intérêt, ce n'est pas moi qui l'ai posée. Tous ceux qui se sont occupé de cela mettent en évidence le petit progrès qu'ils ont fait relativement à la forme du contour et voyez combien Picard dans son *Traité* fait ressortir ces progrès⁶⁸⁶. Il y a donc là une de ces questions de "concours général" dont vous parlez. De même ce n'est pas moi qui ai posé la question de trouver des caractères de convergence des séries de Fourier de plus en plus compréhensifs. J'ai cependant le prix pour l'instant, mais je dois employer des procédés déloyaux pour résoudre les questions car ça n'a pas l'air de compter plus que certaines roulées administrées en dehors des formes dans les concours de boxe. Il paraît que le Cauchy présentait une difficulté, j'avais entendu dire cela au moment des leçons d'agrégation et, respectueux, je l'ai cru sur parole d'autant plus qu'Hadamard l'a répété à diverses reprises. C'était ceci : quand les arêtes ne sont pas toutes affectées de signes, celles qui en ont peuvent former des divisions non simplement connexes et le



$F+S = A+2$ ne marche plus. Mais il suffit de regarder pour voir que cette inégalité et les analogues sont modifiées dans un sens tel que l'impossibilité d'où découle la conclusion de Cauchy est plus manifeste encore. J'étais tellement persuadé de la réalité de la difficulté que je n'ai fait cette vérification qu'après avoir recherché un artifice géométrique tranchant la difficulté et parce que cet artifice prouvait clair comme le jour qu'il ne saurait pas y avoir de difficulté⁶⁸⁸.

La question du coloriage n'est pas résolue, elle n'a pour moi que l'intérêt de la difficulté à vaincre ; c'est du sandow. Mais vous savez qu'on ne tire sur les sandows qu'un quart d'heure tous les 2 ans. Vous m'aviez peut-être parlé de votre livre ; je n'en avais aucun souvenir.

Bien à vous.

H. Lebesgue

Je vous renverrai votre préface si elle doit compléter une série d'épreuves⁶⁸⁹.

CXXX

Poitiers, le 20 novembre 1909⁶⁹⁰

Mon cher Borel,

J'ai reçu, avant mon voyage à Paris, la traduction de vos livres élémentaires par Stäckel⁶⁹¹. J'ai oublié de vous en remercier. Dites-moi si Stäckel sait qu'on me les a envoyés, que je l'en remercie⁶⁹². Reçu aussi le livre de Blumenthal et le vôtre⁶⁹³. Les séries entières sont quelque chose de bien sale et il me semble que plus on y met de l'ordre moins c'est clair.

Garbe m'a aussi montré votre circulaire sur l'Enseignement supérieur. Je lui ai dit de vous envoyer un annuaire, c'est tout comme renseignement, l'enseignement n'existant pas faute d'élèves. J'ai ajouté qu'il est heureux qu'il n'y en ait pas car je trouve monstrueux l'idée de faire des professeurs licenciés en leur faisant passer 3 certificats chacun demandant qu'on suive au plus 3 heures de cours par semaine. C'est avec cette admirable méthode qu'on peut être reçu à l'agrégation, non seulement sans connaître les fractions continues comme vous l'indiquez, mais sans savoir un mot d'arithmétique, ou de théorie algébrique des équations, ou de théorie des groupes, de fonctions elliptiques, de géométrie supérieure, etc., à d'insignifiantes bribes près. Et non seulement cela peut se présenter mais se présente à tout instant.

En d'autres termes je trouve qu'il est scandaleux de se dire : puisqu'il n'y a que si peu d'étudiants il n'y a besoin que de deux professeurs. Je trouve tout naturel qu'on se préoccupe du nombre d'élèves pour décider si l'on doit fonder un enseignement ou non, mais si on le fonde il ne faut pas le faire au rabais et un seul étudiant réclame autant de préparation que 30. Je demande que l'on crée en un petit nombre d'endroits un enseignement complet. Que chaque certificat, en dehors du programme obligatoire, ait des matières à option, de façon qu'un candidat ait été obligé de préparer le programme fondamental, donc, si vous voulez, de suivre le cours d'un certain professeur, mais aussi ait dû choisir 2 autres matières à étudier, donc recevoir oralement ou par le livre l'influence d'autres professeurs. Que, par exemple, on ait le certificat d'analyse avec mention : calcul des variations, théorie des

formes, fonctions elliptiques, etc. Je demande donc qu'on supprime les certificats non fondamentaux qui, par exemple, pullulent à Paris et que les étudiants soient astreints à choisir, en plus de l'enseignement fondamental, l'un de ces enseignements. On introduit une composition écrite de plus, sur cet enseignement complémentaire, et il y aurait une interrogation sur le même sujet.

Je dois dire que je ne suis pas d'accord avec vous sur la suppression des fractions continues du programme de mathématiques spéciales⁶⁹⁴. J'approuve cette suppression de même que celle des débuts de la théorie algébrique des équations ou de la théorie des formes. Je suis partisan de tas de suppressions, par exemple de la suppression de tout ce qui concerne les nombres premiers dans l'arithmétique du bachot que je verrais sans regret réduits aux opérations sur les nombres rationnels. Je suis partisan, dans le même programme, de la suppression des progressions et si je parlais de la géométrie !!! J'approuve au contraire l'introduction des notions de dérivée et d'intégrale dans le programme du bachot, mais je voudrais que l'on mette autre chose que ces dérivées et intégrales dans les programmes de licence et d'agrégation. En d'autres termes je suis adversaire de cette unification des programmes de baccalauréat et d'agrégation vers laquelle on tend. Il est regrettable qu'en France l'enseignement primaire mathématique se réduise trop à l'étude de règles de trois de plus en plus compliquées, qu'au certificat d'études on sache ^{faire} couler 1 robinet, au brevet simple 2 et au brevet supérieur 3, mais qu'on ne sache pas faire autre chose. Et je proteste à l'avance contre la transformation de l'enseignement secondaire et supérieur qui permettrait d'adresser à ces enseignements une critique analogue.

Ceci décrété, j'ai lu tout à l'heure le début de votre chapitre *Applications arithmétiques* et je n'y ai rien compris⁶⁹⁵.

Page 121 vous exposez le paradoxe de Richard et aux dernières lignes de cette même page et dans les 2 premières de la page 122 vous y répondez. De la page 122 je peux, je pense, ne retenir que les dernières lignes et ces 2 premières de 123 : "Le nombre n'est pas désigné ..., approximation arbitraire".

Vous dites (bas de page 121) "cette définition de α exigerait un temps infiniment grand". Pourquoi ? Parce que vous supposez qu'on définisse u_1, u_2, \dots individuellement. Sans quoi non puisqu'en moins d'une page vous venez de le définir cet α à partir de

u_1, u_2, \dots, u_n . Direz-vous que le nombre obtenu en écrivant successivement les nombres entiers à la suite et après la virgule n'est pas défini $0,123456789101112\dots$ parce que pour définir la suite des entiers il faut, si l'on veut les nommer *individuellement*, prononcer une infinité de mots ?

D'ailleurs, le nombre des mots de la langue française étant limité toute suite indéfinie de nombres suppose, pour la définition *individuelle* de ces nombres, une infinité de mots, alors quel que soit la suite u_1, u_2, \dots votre procédé de la page 121 n'a pas de sens. Que dis-je, on ne peut jamais parler d'une suite indéfinie de nombres et cela n'a aucun sens de parler de la somme

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots$$

Il me semble que vous rejoignez Hadamard (grâce à l'identité de $+\infty$ et $-\infty$).

Au bas de la page 121 vous dites encore qu'on n'obtiendra jamais mieux qu'un petit intervalle enserrant α . Oui, mais fait-on plus pour e , pour π ? Je ne comprends absolument pas.

Pour moi la solution du paradoxe de Richard est celle même de Richard et si l'on doit interpréter la fin de la page 123 et les premières lignes de la suivante comme une objection à cette solution il me semble que cette objection porte à faux.

Soit écrite une phrase P définissant le procédé de votre page 121 pour tirer un nombre α d'une suite u_1, u_2, \dots de nombres dont le dérivé couvre $(0,1)$.

Soit Q la phrase suivante : "Je désigne par u_1, u_2, \dots les nombres de la suite obtenu en écrivant dans l'ordre alphabétique d'abord les combinaisons 1 à 1 des lettres françaises, puis les combinaisons 2 à 2, 3 à 3, etc., puis en barrant celles des phrases ainsi écrites qui ne définissent pas un nombre compris entre 0 et 1."

Le paradoxe de Richard consiste en ceci : L'ensemble des phrases P puis Q définit un nombre ne faisant pas partie de la suite u_1, u_2, \dots . Or cette suite contient tous les nombres qu'on peut définir avec un nombre fini de mots.

Richard dit : la phrase $P+Q$ est de celles qui ont été barrées. Vous, vous affirmez (haut de 124) que sous une certaine forme au moins on a dû conserver une définition équivalente à

$P+Q$.

Supposons, je le veux bien, que l'on ait conservé $P+Q$ elle-même alors votre raisonnement montre qu'on nomme en fin de compte un nombre différent de celui que l'on a considéré comme défini par $P+Q$, de sorte que $P+Q$ acquière un nouveau sens. Si vous voulez, pour donner un sens à $P+Q$, on attribue un sens (provisoire) à la suite u_1, u_2, \dots , mais, ce sens donné à $P+Q$, le sens de la suite u_1, u_2, \dots change et le nombre que définit $P+Q$ change aussi.

Je ne vois rien de mystérieux, ni de profondément philosophique sous tout cela. On a professé la phrase insidieuse $P+Q$ qui avait l'air d'avoir un sens et qui n'en avait pas. Elle avait l'air d'avoir un sens parce qu'elle parlait avec assurance de u_1, u_2, \dots mais quand on y regarde de près cet u_1, u_2, \dots n'est pas précis. A la rigueur je puis admettre qu'on saura ce que c'est que u_1, u_2, \dots quand on prendra la suite des combinaisons que j'ai dites dans l'ordre où je les ai rangées. Mais si l'on opère ainsi, je suis entièrement d'accord avec Richard, vous aurez barré des phrases qui acquerront un sens quand vous parcourrez le reste de la suite des combinaisons. De sorte que si les combinaisons sont $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ vous obtiendrez une suite toute différente en opérant dans l'ordre $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ ou dans l'ordre $\alpha, \beta, \alpha, \beta, \gamma, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ etc. et c'est dans cet ordre qu'il faudrait opérer pour garder à coup sûr tout ce qui a un sens et même ce ne serait pas suffisant.

Mais voyez cependant qu'en opérant ainsi votre suite u_1, u_2, \dots est "en perpétuel devenir" et que par suite votre raisonnement ne marche pas.

En somme l'objection à faire au paradoxe de Richard est celle de Richard, c'est celle d'Hadamard à Burali-Forti, c'est celle que nous opposons à Zermelo : "Vous définissez un procédé net, univoque, précis de formation mais à partir de quelque chose d'indéfini, le résultat n'est donc pas défini du moins nécessairement"⁶⁹⁶.

Et si l'on voulait mieux montrer encore ce qu'a d'indéterminé cette prétendue suite u_1, u_2, \dots il faudrait remarquer (ce que vous faites en somme page 123) que les phrases n'ont pas nécessairement un seul sens et aussi que si l'on rencontrait en route toutes les vérités exprimées, on rencontrerait aussi toutes les erreurs. Qu'on rencontrerait des phrases contradictoires en soi :

"un est différent de un", ce qui à la vérité ne serait guère gênant on barrerait ces phrases, mais aussi des phrases contradictoires avec le reste. Mais serait-ce avec ce qui est avant seulement qu'une phrase devrait être d'accord ou avec tout ce qu'on garderait. Ce ne peut être la seule hypothèse car ce qu'on garderait n'est pas défini, mais si c'est ce qu'on garde avant on peut être amené à barrer la définition de 2^π comme contradictoire avec une phrase baroque conservée avant.

Tout cela n'est pas très sérieux, mais ce qui l'est c'est ceci : votre suite u_1, u_2, \dots n'étant pas définie vous ne pouvez pas par votre procédé en déduire un nombre déterminé.

Je ne crois donc nullement que la solution du paradoxe de Richard soit dans ce fait (page 124) que "le nombre de mots nécessaires pour expliquer le calcul de ce nombre, avec une approximation donnée d'avance, croît indéfiniment". Il me semble que cela n'est pas plus vrai pour votre nombre α de la page 121 que pour le nombre π , qu'il est vrai que (à supposer un instant votre α défini univoquement) le temps nécessaire au calcul des chiffres successifs de α serait infini, mais ce serait vrai aussi de π et d'ailleurs de tout nombre qui a une infinité de chiffres.

Je m'élève encore contre la fin de la page 124, qu'on peut concevoir, dès maintenant, l'ensemble de tous les nombres qu'on définira par la suite. Non on peut affirmer que dans l'ensemble des combinaisons de lettres dont j'ai parlé se trouvent toutes les phrases qu'on écrira jamais avec les lettres actuelles, donc toutes les vérités des savants et tous les mensonges des politiciens, mais de là à dire qu'on connaît un ensemble !!!

Je suis surpris des pages en question car il me semblait être d'accord avec vous d'après vos articles et en somme ce que je dis c'est simplement que l'ensemble des nombres qu'on peut définir n'est pas "énumérable" (je ne crois pas me tromper dans le langage, je veux dire qu'il ne peut pas être rangé en suite simplement infinie d'une façon déterminée)⁶⁹⁷.

Veillez calmer mes angoisses, bien cordialement à vous.

H. Lebesgue

CXXXI

Poitiers, le 20 novembre 1909

Mon cher Borel,

Je viens d'aller lire le Poincaré, je suis tout à fait d'accord avec lui⁶⁹⁸. L'exemple de Russell du début montre bien que la difficulté dans le paradoxe de Richard vient du fait que le u_1, u_2, \dots n'est pas défini.

Ceci étant ; vous, ayant lu cela, et d'ailleurs ayant au préalable écrit des choses équivalentes, pourquoi remplacez-vous la bonne explication par une que je considère comme mauvaise ?

2 bouquins de la collection parus 2 sous presse, quelle production !⁶⁹⁹

Bien à vous.

H. Lebesgue

CXXXII

Poitiers, le 16 décembre 1909

Mon cher Borel,

Dans une note^{de} M. Wirtinger (BSM, 1907) vous trouverez une autre démonstration du théorème de M. Hadamard⁷⁰⁰. Wirtinger semble dire que la question est résolue aussi pour les déterminants à coefficients réels ; je ne vois pas et je n'ai pas le temps d'approfondir mais il semble bien à cause de la signification géométrique simple de la question que ça ne doit pas être très difficile. Mais on a souvent des surprises.

E. Fischer a publié aussi une note sur le sujet. Je ne sais ce qu'elle contient, si ça vous intéresse, je la rechercherai⁷⁰¹.

Bien à vous,

H. Lebesgue

CXXXIII

Poitiers, le 11 janvier 1910

Mon cher Ami,

Merci de me prévenir, mais en vérité vous nous embarrassez terriblement. Si la question ne s'était posée que dans quelques années, il est fort probable que nous aurions pris notre parti de vivre et mourir à Poitiers et ma réponse serait nette. Actuellement nous sommes perplexes et sans voir des avantages nets à Paris nous ne pourrions nous empêcher de saluer avec joie une occasion de quitter Poitiers.

Vous serez sans doute étonné de mes objections, qui auraient dû se produire l'an dernier, mais si paradoxal que cela paraisse à qui se rappelle ma grande désillusion quand j'appris l'unanimité, non pas contre moi, mais pour Cartan, je n'ai jamais compté l'an dernier pouvoir réussir. C'était pour moi une occasion de me renseigner sur l'opinion parisienne à mon égard. Maintenant je suis très fixé ; j'avoue cependant que j'ai été épaté hier de constater que l'estime qu'on pouvait avoir pour moi devait être bien médiocre puisqu'on m'avait unanimement préféré Cartan et que cependant on avait préféré laisser le prix Petit d'Ormoys non décerné que de le donner à Cartan. Quoi qu'il en soit et malgré cela comme il me semble que cette fois je pourrais avoir quelque chance, j'examine les conséquences financières de cette nomination.

Ici j'ai 7200, j'aurais 6000 à Paris et pour un temps indéterminé mais fort long puisque, par exemple, Perrin est encore dans les derniers sur le tableau des maîtres de conférences et qu'on ne doit pas escompter en mathématiques d'autres vacances¹¹⁰⁸ prochaines (?) que celles provenant du départ de Boussinesq et de Darboux. Or à ce moment, Hadamard pourra, peut-être, désirer revenir du Collège de France à la Sorbonne, Cartan, Vessiot, Guichard, d'autres peut-être, seront sur les rangs.

Sans qu'il y ait moyen de prévoir rien de précis on peut donc penser qu'il y a quelques chances pour qu'un vingtaine d'années s'écoulent avant que je puisse être titularisé à Paris et qu'un minimum de 10 ans est à prévoir. Quant à la durée du traitement à 6000, elle peut bien être de 6 à 8 ans.

Nous ne nous rendons pas du tout compte de ce que notre vie avec nos deux enfants nous coûterait à Paris, mais il nous paraît, sans raison, qu'un budget de dépenses de 10000 est à prévoir. Ici déjà avec les charges de famille que j'ai, nous ne bouclons pas notre compte avec les 7200 de mon traitement normal et ce sont les rabiots qui ont bouché les trous. Ce serait bien pis à Paris où les trous seraient beaucoup plus gros. D'où la nécessité de s'ingénier pour trouver les rabiots et pour avancer ; l'obligation dont vous me parliez d'aller partout déclarant qu'on est un type très chic ayant fait des travaux de la plus haute importance. Je sais que je réussirai très mal dans ces rôles.

Bien entendu ces privations ou débours se rattraperaient plus tard, vraisemblablement, si Dieu me donne vie mais si le brigand ne le fait pas !

Et encore je néglige totalement le cas où au bout de 4 ans je redeviendrais Poitevin et où le seul avantage serait d'avoir fait 2 déménagements successifs autant qu'inverses.

Si j'étais raisonnable je vous dirais donc de suite : grand merci, mais je puis être tranquille ici, j'y reste. Je n'ai pas cette sagesse ; le désir que nous avons l'un et l'autre de nous rapprocher des nôtres nous fait hésiter et je ne puis rien vous dire de définitif.

Mais d'ailleurs il ne me semble pas y avoir lieu de se presser. Les journaux m'avaient bien appris que Painlevé serait candidat mais ils ne m'avaient pas annoncé qu'il serait élu et j'ai été étonné de la précision de vos affirmations⁷⁰². Et puis il faudrait que je sache si Painlevé a une idée sur le choix de son suppléant, si ce suppléant ferait la mécanique ou autre chose, quels seraient suivant vous les candidats possibles à ce poste pas très alléchant.

Pas très alléchant à cause de : dans 4 ans d'une part, à cause surtout de cette façon peu triomphante d'entrer à la Sorbonne par une porte dérobée surtout après qu'on s'est fait éconduire en se présentant par la grande porte. C'est vraiment trop nettement essayer d'évincer pour plus tard les Vessiot, Guichard, etc, en acceptant momentanément ce qu'ils ne peuvent évidemment accepter.

Encore une fois, merci ; nous réfléchirons encore.

H. Lebesgue

CXXXIV

Poitiers, le 12 février 1910

Mon cher Borel,

Ecrivez-moi 1, rue des 4 Roues, 1. Retenez

1 4 1.

Malgré de nombreuses observations je n'ai pu obtenir qu'on me fasse régulièrement parvenir chez moi les lettres adressées à la Faculté ! Or ces jours-ci j'ai la grippe et c'est par hasard que votre lettre m'a touché de suite puisque, ne sortant pas, je ne passe pas à la Faculté.

Je crois votre idée heureuse ; il est exact comme vous le dites que ma définition n'est pas sans inconvénient⁷⁰³. C'est, comme celle relative aux mesures d'ensembles, une définition logique mais non kroneckerienne, ne fournissant pas dans tous les cas un procédé possible de calcul ; il y a donc avantage à en multiplier les formes, non dans l'espérance chimérique d'obtenir une définition kroneckerienne, mais pour obtenir des cas plus nombreux dans lesquels on sache calculer l'intégrale. A cet égard les transformations de forme les plus grandes sont les plus intéressantes et je crois que les cas où nos définitions permettent effectivement le calcul sont assez souvent différents.

Votre définition peut avoir un autre avantage sur lequel vous ne dites rien. C'est que son étendue en ce qui concerne les fonctions non bornées est, je le crois du moins, différente de celle de la définition que j'ai donnée⁷⁰⁴. Or il est incontestable que la considération de l'∫ des seules fonctions sommables est insuffisante dans bien des questions: intégration de $\frac{dy}{dx} = f(x)$, séries trigonométriques partout convergentes, etc.

Mais j'ai des réserves de forme à faire. Pour le cas d'un seul point singulier c vous prenez des précautions, vous avez par exemple ajouté "quel que soit l'intervalle $\alpha\beta$ ", et pour le cas général vous n'en prenez plus⁷⁰⁵. Je pense qu'il faut prévenir que vous ne donnez qu'un schéma du mode de définition que vous proposez. Dans le cas des fonctions bornées tout va bien et ce que vous dites, tel que vous les dites, est parfaitement suffisant et le raccord avec mon intégrale est immédiat. Mais pour les fonctions

non bornées il y a lieu de faire attention. Je reviendrai là-dessus. Pour finir quant à ce qui concerne les fonctions bornées je vous signale une idée assez éloignée de W.H. Young *On the general theory of integration* (Royal Society of London, A, 204, 1905)⁷⁰⁵, qui a cependant quelques très vagues rapports avec la vôtre sans en avoir la simplicité. Au fond je fais surtout le rapprochement parce que Young comme vous signale une différence dans le cas où l'intervalle d'intégration est infini. A la vérité je crois cette différence, qui existe, assez artificielle. Elle provient de ce que, quand vous prenez $\int f dx$ à l'extérieur des α_n, β_n , vous utilisez l'intégration ordinaire ; c'est-à-dire que vous appelez

$\int^{\infty} f dx$ la limite pour $N = \infty$ de $\int^N f dx$; mais rien n'empêche, si l'on veut, directement avec mon intégrale de prendre pour définition de $\int^{\infty} f dx$ la limite de $\int^N f dx$, sans s'occuper des α_n, β_n . B. Levi a dit quelque part que l' \int des fonctions sommables pourrait se remplacer par une limite de \int de fonctions intégrables mais sans rien préciser (Palerme, article sur le principe de Dirichlet)⁷⁰⁷.

J'arrive aux fonctions non bornées. Je prends le cas du seul point singulier c , soit $c=0$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Si $\beta = -\alpha$ on est conduit à attribuer à l'intégrale la valeur principale de Cauchy : 0 ; si l'intervalle est $(-1, +1)$, si $\beta = -\frac{\alpha}{2}$, on est conduit à attribuer à l'intégrale la valeur $L/2$. Le "quel que soit α, β " que vous avez rajouté doit donc être considéré comme indiquant que α, β doit être quelconque et tendre d'une façon quelconque vers 0. Mais qu'est-ce qui correspond à cette restriction dans le cas général, c'est ce que vous ne précisez pas⁷⁰⁸. La fièvre et le mal de tête aidant je n'ai pas bien vu ce à quoi vous pensiez. Peut-être à ceci : Soit E un certain ensemble de mesure nulle et prenons les α_n, β_n enfermant E ; si, quels que soient ces α_n, β_n dont la mesure totale tend vers zéro, votre définition marche, la limite sera l' \int . C'est-à-dire que l'on définit l' \int à la façon des intégrales impropres étudiées par tant de gens à la suite de Jordan. Seulement les auteurs prennent pour E l'ensemble \mathcal{E} des points au voisinage desquels la fonction n'est pas bornée et ici on prendrait un autre E de mesure nulle, comprenant \mathcal{E} d'ailleurs. Il faudrait démontrer que le E particulier choisi, pour lequel la définition colle, n'influe pas ; ce qui doit être facile. Il serait curieux, je suis incapable de voir cela bien que ce soit

certainement très facile à décider, que l'intégrale des fonctions sommables puisse se définir à la façon des intégrales impropres. Quant à l'étendue de votre définition on pourrait la caractériser, si votre définition précise était celle que je viens de dire, en disant qu'elle fournit les intégrales de fonctions sommables et toutes celles qu'on en déduit par le mode ordinaire de définition des intégrales impropres (dans ces domaines exclus, dont la mesure tend vers zéro, on applique l' \int des fonctions sommables au lieu de celle des fonctions intégrables). Cette extension de la définition des \int impropres a été considérée à différentes reprises par E.W. Hobson. En particulier dans son bouquin que je ne connais pas *Theory of functions on a real variable* ou dans un récent article *On the second mean value* etc. cité dans mon mémoire.⁷¹² Je m'aperçois que Hobson dans ce dernier papier (et par suite ailleurs) suppose que les domaines exclus sont en nombre fini, ça ne doit pas avoir d'importance quant au résultat parce que E est fermé ; mais c'est une nouvelle différence entre votre définition et la définition des \int impropres.

En résumé votre définition me paraît intéressante, la borne-rait-on aux fonctions bornées. Il faudrait cependant, ce que je suis incapable de faire je le répète, décider si votre définition⁷³⁰ s'applique à toutes les fonctions sommables bornées. Il me semble que vous le laissez entendre, mais vous ne le dites pas nettement. Quant aux fonctions non bornées⁷¹³, qui sont celles sur lesquelles les progrès sont les plus désirables, il me paraît nécessaire soit que vous précisiez soit que vous indiquiez que vous précisez. Il serait d'ailleurs loin d'être sans intérêt de réunir en un tout coordonné, dépendant d'un mode unique de définition et de raisonnement, ce qui se rapporte aux intégrales ordinaires et aux intégrales impropres. Ces dernières actuellement paraissent à la fois indispensables et en dehors de tout.

J'ai envoyé ces jours derniers à Picard un mémoire volumineux, je ne sais plus être court, sur les $\int \int \int \int \int$ ⁷¹⁴. J'y étends à ces $\int \int \int \int \int$ les théorèmes relatifs aux \int du dernier chapitre de mon 1^{er} petit livre et ceux du commencement du mémoire de Toulouse⁷¹⁵. Je ne m'y occupe pas des sommes rimaniennes cependant.

Vous avez vu que j'ai profité d'une note de Riesz aux *Comptes Rendus* pour faire les remarques que je vous avais indiquées sur l' \int de Stieltjes⁷¹⁶.

Vous ne m'avez rien écrit sur le cas Painlevé. Sans doute, et j'y ai pensé depuis, vous trouvez encore mes prévisions d'avancement, une fois à Paris, trop optimistes. Dans tous les cas vous me direz ce qui se passe.

Cavalier est revenu de Paris disant qu'on prétendait que Gauthier-Villars avait ou allait déposer son bilan. Que doit-on penser de cette nouvelle étrange.

Je vais prendre de la quinine qui d'ailleurs ne me fait rien.

Bien à vous.

H. Lebesgue

CXXXV

Poitiers, le 19 février 1910

Mon cher Borel,

Je trouve très joli et très simple votre caractère de sommabilité. Il m'a même paru si simple qu'il m'a semblé difficile qu'il n'ait pas été déjà aperçu (quand une chose a été trouvée on a facilement cette illusion). Aussi j'ai regardé Jordan, 2^e volume, 2^e édition, qui met côte à côte tout ce qu'il faut pour préparer votre théorème, mais qui, évidemment, n'y a nullement songé⁷¹⁷. J'ai regardé aussi le mémoire de la Vallée Poussin, mais il ne pense pas du tout à trouver un caractère précis de sommabilité⁷¹⁸. Quant aux autres travaux sur les intégrales impropres⁷¹⁹, comme ils sont relatifs à des fonctions non absolument intégrables, ils ne contiennent certainement pas, on peut l'affirmer, votre joli résultat.

Bien à vous.

H. Lebesgue

CXXXVI

Mon cher Borel⁷²⁰,

Comme suite à notre conversation, Montel m'avait dit, avant Pâques je crois, que vous aviez remis à Jordan un mémoire mais

qu'il ne contenait pas le prolongement analytique (ou plutôt pas analytique). Or j'avoue que le reste ne me paraît qu'intéressant et que je voudrais voir publier ce qui est important⁷²¹.

Si je ne crois pas à la sommation des séries divergentes numériques, je comprends tout l'intérêt qu'il y aurait à définir la fonction correspondant à une série de Taylor là où Weierstrass ne l'atteint pas.

Dans sa 5^{ième} note, Mittag-Leffler utilise son $E_\alpha(x)$ comme vous utilisez e^x . Mais, dans Rome⁷²², il l'utilise plus astucieusement : $f(x) = a_0 + a_1x + \dots$ est la limite pour $\alpha = 0$ de la fonction associée

$$a_0 + \frac{a_1x}{\Gamma(\alpha)} + \frac{a_2x^2}{\Gamma(2\alpha)} + \dots$$

Il n'a plus là de multiplication par e^{-qx} chose et d'intégration de 0 à ∞ ⁷²³.

Où a-t-il donné cela ?⁷²⁴ Est-ce avant ou après les résultats analogues de Lindelöf et de Le Roy ?⁷²⁵

J'ai repensé aux professeurs adjoints. Je n'avais entendu parler de cela que par vous; rien d'officiel ne m'a appris qu'il y avait des places de professeurs adjoints vacants et qu'on allait les pourvoir. On n'avertit donc pas les intéressés ? Si on les avertissait, j'essaierais de savoir ce qui m'est arrivé.

Une mission linguistique partie de Coudani⁷²⁶ va faire des fouilles à Babel, elle visite l'Egypte, la Grèce, etc. Son chef refait l'histoire de l'alphabet ; il découvre aux lettres tant d'origines phalliques que, désormais, un alphabet me paraîtra une publication obscène. La mission arrive à Paris, où, pour des raisons que j'ignore, elle étudie seulement le français parlé en se logeant aux environs de la place Maubert. Elle constate que la langue française se simplifie et devient plus logique, ce que prouvent 40 pages de citations telles que : l'om que j'ai cultivé son jardin; çui la, salaud, i m'a cogné, etc., etc. Idiot.

Bien à vous.

H. Lebesgue

CXXXVII

Beauvais, 38 Esplanade de l'Hôtel Dieu
Lundi, 21 mars 1910

Mon cher Borel,

Après bien des hésitations j'étais décidé à me désintéresser du mouvement Painlevé pour les raisons que je vous avais dites.

Il y a huit jours une conversation avec Fréchet a entièrement modifié mes projets. Fréchet désire, et c'est légitime, être chargé quelque jour d'un service d'examen. Cette année il fera l'Ecole Normale. D'où des complications déjà grosses pour mon service de St Cyr. Complications qui deviendraient bientôt un obstacle très sérieux pour même demander un tel service d'examen.

Or un supplément, moins gros que celui que j'ai, certes, mais un supplément, m'est indispensable pour boucler ici mon budget. Je partirai donc de Poitiers et puisque Paris seul m'attire je suis candidat à la suppléance Painlevé. Déficit pour déficit, autant déficit à Paris qu'ailleurs.

Mais, d'après la lettre de Montel que je reçois ce matin, M. Appell envisage la solution supplément à Cartan puis, si nécessaire, petit cours supplémentaire.

Certes il y a lieu d'améliorer la situation de Cartan, mais si cette amélioration aboutit en somme à la suppression (momentanée) d'un poste je la considère comme mauvaise.

Puisqu'on cherche à améliorer par la Sorbonne la situation de Cartan on hésitera plus encore à faire venir à la Sorbonne un individu comme moi qui, lui aussi, désirera voir sa situation améliorée d'ici peu. Je crois donc avoir bien peu de chances. Mais comme je ne suis très volontiers candidat que quand je n'ai pas de chances sérieuses ça me paraît être une bonne occasion de me présenter. Je viens d'écrire à MM. Appell et Painlevé.

Bien à vous.

H. Lebesgue

CXXXVIII

Poitiers, le 15 avril 1910

Mon cher Borel,

Je ne sais si ma lettre des vacances vous a rejoint. Je suis passé chez vous, mais personne.

Je reçois le compte de Gauthier-Villars. Je constate une légère hausse sur la vente: Intégration de 77 en 1908 est passé à 96 en 1909 et Séries trigonométriques de 73 à 75.

Cette dernière hausse est insignifiante et pourrait signifier que le régime permanent est établi mais il y avait eu l'année d'avant une baisse très considérable de 89 à 73 et par suite je considère que vraiment il y a eu hausse.

Quand vous aurez vu votre compte dites-moi si vous constatez la même hausse sur l'ensemble. Je serais curieux de savoir dans quelle mesure cette hausse doit être attribuée à l'apparition de nouveaux bouquins de la collection ou aux équations intégrales.

Bien à vous.

H. Lebesgue

A Paris j'ai acquis la certitude, rien de mystérieux là-dedans d'ailleurs, que Painlevé et Appell voulaient avant tout trouver 1500 à 2000 de plus pour Cartan. Cela me paraît assez naturel, mais m'élimine, car je ne puis aller à Paris avec moins de 6000 de traitement officiel et normal. On m'a bien dit que l'assassinat de Charlois⁷²⁷ de Nice et une révolution de la République d'Equateur intervenaient dans la question ; mais c'est trop compliqué pour moi.

CXXXIX

Poitiers, le 16 avril 1910

Mon cher Borel,

Je ne sais rien conclure des chiffres que vous m'adressez et certains m'étonnent prodigieusement. Oui, les prix sont trop

élevés, mais la raison de la défaveur d'un livre bien rédigé (fonctions méromorphes) en comparaison d'un qui l'est mal (termes positifs)⁷³² ne m'apparaît pas clairement. Cependant il me semble deviner que la vogue va aux livres élémentaires et qui ne sont pas une suite.

Cartan a actuellement à la Sorbonne 6000 de l'Etat, c'est ce que j'appelle son traitement officiel et, pour les travaux pratiques, 2000 pris sur des droits d'Université et non soumis à retenues, c'est ce que je ne considère pas comme un traitement officiel.

Il me semble difficile d'augmenter Cartan avec l'argent de l'Etat sans le promouvoir, ce qu'on ne songe pas à faire je crois. si on ne lui donne pas une indemnité pour une augmentation du service supplémentaire qui lui arriverait à la suite de l'élection de Painlevé. Je ne comprends donc pas comment on pourrait accorder ce que dit Cartan avec ce que veulent Painlevé et Appell.

J'ajoute d'ailleurs que j'estime fort l'idée de ceux-ci, quand ils veulent améliorer la situation de celui qu'ils ont fait venir avant d'en faire venir un autre. J'estime moins que Painlevé devenant peut-être trop candidat m'ait dit qu'il avait voté l'an dernier pour moi alors qu'il m'avait dit l'an dernier qu'il soutenait Cartan parce qu'on était certain que ses travaux pourraient être utiles et qu'il n'a acquis la même idée au sujet des miens que bien plus tard⁷³³. Mais c'est en dehors de la question.

Je ne crois pas que ça marchera ; ne serait-ce que parce qu'on ne trouvera pas d'autres moyens d'augmenter Cartan que de lui donner un service supplémentaire. L'idée de Bouglé⁷³⁴ est bonne. Je l'appliquerai.

Je croyais vous avoir écrit Bd St Germain,

Bien à vous.

H. Lebesgue

Je considère que pour toute chaire Cartan passera avant moi. Et pour la géométrie ce serait Guichard. Quant à Vessiot en faire un recteur serait très bien ; mais le veut-il ? Et puis il y a Cosserat⁷³⁵, etc.

CXL

Poitiers le 18 avril 1910

Mon cher Borel,

Je vous remercie d'avoir établi des budgets aussi compliqués ; mais je ne crois pas qu'il y ait lieu d'échafauder des solutions tenant compte des règlements.

Je crois par exemple qu'il existe un règlement empêchant de donner plus de 6000 au suppléant de Painlevé pour la suppléance. Mais, sur les promus qui profitent de ce fait de 6000, on peut prélever telle somme que l'on voudra et même plus de 6000 pour les donner comme indemnité supplémentaire à qui l'on veut, au même suppléant par exemple.

En fait il y a toujours moyen de tourner les règlements quand ils existent. La question se réglera à mon avis de la façon suivante. Quand Painlevé sera élu, si ¹¹⁰⁹..., il ira trouver Bayet et lui dira : "Je désire que la question soit réglée de telle façon" ; et la question sera réglée de la façon indiquée qu'il y ait des règlements à tourner ou non.

C'est comme cela que ça se pratique toujours. (Bernard m'a dit que ça avait été réglé de cette façon pour un individu aussi fa-¹¹¹⁰lot que Joyeux-Laffuie.) Ça sera a fortiori vrai de Painlevé qui pourrait être ministre de Bayet quelque jour.

Pour moi je n'avais donc qu'à me préoccuper que de ce qu'envisageait Painlevé et au besoin à lui faire connaître mes désirs (mes conditions si vous voulez). C'est ce que j'ai fait à Pâques ; et c'est parce que Painlevé s'occupe surtout de l'amélioration Cartan (ce que je comprends, je le répète), que c'est là-dessus qu'il insiste, que je crois avoir peu de chances. Je lui ai écrit et dit d'ailleurs que je ne viendrai pas à moins de 6000. Cette prétention n'a rien d'exagéré en soi et on la trouvera d'autant plus modérée que j'ai ici 6000 de l'Etat + 1200 de l'Université (non soumis à retenue) pour Math. générales. (Fréchet a 1200 de l'Etat soumis à retenue pour astronomie ; cette situation privilégiée vient de l'absence de maître de conférences ici.)

Mes prétentions n'ont d'ailleurs pas étonné Painlevé, qui les trouve plutôt trop modestes et qui, peut-être, trouverait mauvais

de me soutenir pour ne me faire avoir que si peu.

Ma façon de comprendre le règlement de la question a été corroborée par ce que m'a dit M. Appell : "Que pense M. Painlevé ? Comment voit-il la solution de la question ?"

En tout cas je n'ai retiré de mes conversations que l'impression d'une amabilité, certaine, mais qui pense bien être sans résultat pratique.

J'ai fait prévenir Baire il y a quelque temps par Bernard, qui avait l'occasion de lui écrire ; je ne sais ce qu'il fera.

Vous ne m'avez pas dit si vous aviez fini par prévenir Drach ; je pense que c'est fait puisque vous l'avez vu à Pâques, m'a dit sa belle-mère.

Dans l'état actuel, donner une promotion au choix à quelqu'un c'est lui donner une avance énorme sur ses collègues. C'est donc une chose qu'on ne doit faire qu'avec beaucoup de circonspection et en faisant porter le choix sur ceux qui ne sont pas trop loin de l'ancienneté ; or je suis le 4^{ième} à partir de la fin du tableau (et en comptant le fameux Tissier)⁷³⁶ avec 6 ans de service et les 1^{ers} ont 18 ans. (La 4^{ième} classe contient en tout 50 noms.) Comme âge, les premiers ont de 12 à 15 ans plus que moi !!!! Il y en a de plus vieux, de 1851, 57, 59 !

Je n'ai soulevé auprès de personne la question de titularisation à Paris, c'est si éloigné qu'on ne peut rien prévoir.

Amitiés.

H. Lebesgue

En admettant vos chiffres, qui supposent que Lazialac avait 2000 et qu'il parte, rien de plus simple (?) que d'arriver à 10000 et 6000. Cartan aurait : suppléance 6000 + 4000 (travaux pratiques) et moi 6000 (suppléance). Il en résulterait encore pour l'Etat 6000 d'économie sur Painlevé plus 1500 sur moi remplacé, de quelque façon que ça se passe, par quelqu'un à 4500.

CXLI

Poitiers, le 27 avril 1910

Mon cher Borel,

Interprétez pour moi les résultats du scrutin. La question est de savoir si 900 unifiés sur 1400 se dérangeront pour voter Painlevé ? La bataille a été chaude paraît-il ; y a-t-il eu des mots irréparables prononcés ?³⁴⁸

J'ai consulté le tableau de janvier 1909. Il y a eu, depuis, la mort de Legoux⁷³⁷ et celle de Gossart⁷³⁸ et la retraite de Blondlot⁷³⁹. Il y aurait donc 6 promotions dues à la générosité de nos Q.-M.⁷⁴⁰

Avec la promotion de Parmentier⁷⁴¹ (Université Besançon), cela fait 10 promotions. Mais il y a à tenir compte aussi du départ pour d'autres cieux de Cavalier, Marchis⁷⁴², Cartan et Pérez. Cela ferait donc 14 rangs gagnés. Mais ce serait trop beau. En réalité tous les plus jeunes (de promotion) titulaires que moi (ô, Français !!) sont au tableau avant moi, sauf Blaise⁷⁴³ qui est cependant plus vieux d'âge que moi. Cela tient à la façon bizarre dont se calculent les années de service ; pour moi les 2 années de bourse⁷⁴⁴ ne comptent pas (parce que bourses de la Ville de Paris paraît-il).

Tout en protestant contre mon point de vue pour les promotions au choix, vous n'êtes pas loin de l'adopter. Vous me parlez du moment où je serais "en bonne position pour être l'objet d'un choix", et vous me faites observer que donner à Drach 2 ou 3 années d'avance sur Cousin n'est pas illégitime.

Certes je suis de votre avis et je crois que 2 ou 3 années d'avance par le choix ne sont pas illégitimes. Mais je crois que, pour éviter les abus volontaires ou non, il ne faudrait pas aller beaucoup au-delà.

Et puis, comment comptez-vous ces années ? Entre Drach et Cousin par les dates d'Ecole. Mais si vous comptiez par le tableau, ça ferait plus de 3 années de différence. (C'est comme cela que Darboux compte, puisqu'il a regardé ceux qui précèdent Drach sur le tableau.) Remarquez bien que je souhaite fort à Drach une promotion et que je sais qu'il aurait particulièrement le droit de se plaindre de la façon dont on compte les années de service ; mais son cas est commode pour la discussion.

On pourrait aussi compter d'après les années de naissance et ce serait parfois assez légitime. Prenez Drach et Le Roux. Si Drach avait une promotion cette année sans que Le Roux en ait une, ça ferait à Drach une avance de 9 ans. N'est-ce pas un peu beaucoup ?

Tout cela ne prouve qu'une chose : la grosse difficulté de faire du grand choix et d'être juste. Ce ne serait relativement rien s'il s'agissait de gens de même spécialité et l'on pourrait au contraire se servir du choix pour corriger les inégalités de classement provenant des débuts de carrière ; mais il faut comparer des mathématiciens et des botanistes ?!

Je proposerais volontiers : 1° une modification du décompte des années de service (le système actuel atteint surtout les mathématiciens), 2° choix portant seulement sur le premier tiers du tableau.

Si Painlevé est élu je lui proposerai ma combinaison. Cartan (suppléant Painlevé en math. génér. 6000 + travaux pratiques 4000) Lebesgue (suppléant Cartan 6000). Pas de diminution, mais pas d'augmentation de service pour Cartan et cependant son traitement augmenté ; c'est je crois ce que Painlevé et Appell désirent.

Je ne crois pas que ça soulève de difficulté de règlement. Bien que je me demande quel est cet article bizarre (dont tout le monde m'a parlé) qui limite le traitement d'un suppléant à la 1/2 de celui du suppléé. Cependant le suppléant de Bouglé touche plus de la 1/2 du traitement de Bouglé et c'est pourquoi j'admets pouvoir suppléer Cartan à plein traitement.

C'est la seule combinaison que j'ai vu me permettant le départ à Paris.

Où en est l'histoire Drach Navale dont Montel m'a parlé.

A vous.

H. Lebesgue

La chaire de Painlevé est-elle d'Etat ou d'Université ?

CXLII

Poitiers, le 29 avril 1910

Mon cher Borel,

Merci de vos renseignements.

Ma combinaison n'est que la précision de ce dont M. Appell m'avait parlé.

Le retour de Joyeux Laffuie se réglera assez facilement. Il est suppléé par son maître de conférences lequel était suppléé par un certain Brazil (?), chef des travaux pratiques antérieurement et qui fut nommé maître de conférences sur place parce que Joyeux Laffuie l'a demandé, étant député. On va mettre à la retraite Jobert (de Dijon), né le 14 juin 1840, et il en résultera un mouvement d'où une place pour Brazil.

La veste de Joyeux Laffuie était certaine, et pas volée.

Cousin passera certainement à l'ancienneté, il est le 4^{ième} (Parmentier, Université, étant exclu). Au reste voici, sur le tableau de 1909, les rangs des mathématiciens (Parmentier et Camichel⁷⁴⁵ étant exclus) :

4^e Cousin ; 8^e Andrade⁷⁴⁶ ; 11^e Le Roux ; 12^e Fabry⁷⁴⁷ ; 17^e Le Vavasseur ; 18^e Delassus ; 28^e Cartan ; 31^e Cotton⁷⁴⁸ ; 35^e Drach ; 38^e Baire ; 42 Dulac⁷⁴⁹ ; 44^e Clairin ; 45^e Lebesgue.

Je pense que Buhl⁷⁵⁰ et Carrus⁷⁵¹ seront placés après moi ; quant à Husson⁷⁵² il sera de quelques rangs avant ou après.

J'estime ne pouvoir avoir une promotion au choix que lorsque Cotton, Baire, Dulac, Clairin et ceux qui suivent seront mes seuls concurrents mathématiciens. C'est-à-dire quand, la question Drach étant supposée antérieurement réglée, le 18^{ième} actuel aura été promu à l'ancienneté. Ce moment sera plus ou moins proche suivant l'importance des choix et les rangs sur lesquels ils seront portés. Ce ne sera pas avant 4 ans, en tout cas.

Le point sur lequel nous différons d'avis c'est que vous faites aller de pair la reconnaissance de la supériorité d'un individu et l'accroissement de son traitement tandis que je crois qu'il faudrait seulement associer la supériorité et l'importance des fonctions. J'estime que c'est seulement lorsque l'importance de la fonction et le chiffre du traitement ne seront plus liés nécessairement que l'on pourra s'opposer à la titularisation de gens qui devraient rester préparateurs ou à des incidents comme celui de la création des professeurs adjoints de lycée et collège.

Je reconnais que la réglementation que je rêve est légèrement prématurée.

J'aurais quelque confiance dans le résultat du mouvement Painlevé si celui-ci n'avait son plan arrêté qui consiste en somme à augmenter Cartan et à faire nommer Chazy⁷⁵³ (celui-là et non

un autre jeune). Je tiens cela de Painlevé lui-même.

Bien à vous.

H. Lebesgue

CXLIII

Poitiers, le 11 mai 1910

Mon cher Borel,

Merci de vos renseignements. J'ai écrit hier à MM. Appell et Painlevé pour rappeler au premier, signaler au second, la combinaison en question.

Je ne conçois pas que Vessiot ou Guichard puissent être candidats cette fois, ne l'ayant pas été la dernière fois. A moins, en ce qui concerne Guichard, que Darboux prenne un congé et qu'alors, les 7500 qu'il laisserait aidant, on ne fasse à Guichard un traitement acceptable. Je dois dire d'ailleurs que si cette éventualité se présentait je ne pourrais faire qu'une chose, me retirer.

L'affaire Joyeux Laffuie ne se règle pas aussi facilement que je l'avais imaginé. Car Joyeux Laffuie est un millionnaire pressé et, son congé finissant le 1er juin, il reprend le 1er juin. Son remplaçant Brazil ou plutôt le remplaçant de son remplaçant Teopsent se trouve ainsi brusquement dépossédé. Sans doute tous ces gens ont aussi des nominations jusqu'au 1er juin, mais Brazil¹¹⁴⁸ est remplacé définitivement, je crois dans son poste de travaux pratiques qu'il a quitté pour celui de maître de conférences.

Bref il y a là des difficultés.

Vous ai-je dit comment on pense régler mon absence cette année (qui coïncidera avec l'absence de Fréchet pour les examens de l'Ecole Normale). On a proposé au Ministère d'adjoindre Denjoy au jury d'ici sans traitement supplémentaire et moi je lui donnerai 500 F de la main à la main. (C'est pour l'oral du 15 au 28 à peu près). Denjoy a accepté et s'est assuré le consentement éventuel de ses Doyen, Recteur et collègues mathématiciens. Le Ministère a fait une objection relative à la distance, mais c'est sans doute pour ne pas avoir l'air d'acquiescer de suite. Si le Ministère

acceptait ce mode de solution, ce serait un précédent assez commode. Aucun chiffre n'a été fixé au Ministère, qui n'a pas demandé de renseignements sur ce point.

Je n'ai pas parlé de Paris ici, sauf à Bernard et à Cavalier. Il faudra que j'en parle à Garbe pas trop tard ; d'ici peu si ça a l'air de s'emmancher. J'écrirai aussi à Picard, à Tannery et Goursat qui, je pense, seront assez volontiers pour moi. J'ignore complètement Darboux, Poincaré, Boussinesq et presque autant Andoyer⁷⁵⁴.

Pour Baire. Comme il avait écrit à Bernard, il y a quelque temps, se plaignant de n'avoir su le dernier mouvement de la Sorbonne que trop tard et demandant si c'était une règle employée à son intention que celle que l'on suit maintenant pour la nomination des maîtres de conférences à Paris, je lui ai fait savoir ce que je savais sur ces faits et lui ai fait annoncer la possibilité que l'élection de Painlevé crée une place. Ce qu'il aurait peut-être prévu seul.

Je vous remercie encore de vos bons tuyaux et de vos démarches ; je compte que vous continuerez à me tenir au courant.

Drach m'a dit que sa promotion était acquise. En lui répondant, je lui ai expliqué les raisons pour lesquelles ma détermination n'était pas aussi stupide qu'elle le paraissait ; sans que ces raisons soient évidemment péremptoires. Et, maintenant que le résultat approche, mes hésitations reprennent.

J'ai eu aussi des craintes avec l'état de ma mère à la fin des vacances de Pâques ; heureusement elle aussi va mieux. Aujourd'hui c'est ma petite fille qui a 39°, mais je crois bien qu'il va s'agir seulement d'une de ces indispositions de croissance (?) comme elle a déjà eu plusieurs fois et qui nous ont tant effrayé par leur durée et leur intensité les premières fois.

Bien cordialement.

H. Lebesgue

CXLIV

Poitiers, le 12 mai 1910

Mon cher Borel,

Merci de vos nouveaux tuyaux, moi je n'y comprends rien et vous pouvez vous rassurer je ne me bougerai pas ; donc, ne ferai pas de gaffes, ce qu'évidemment vous craignez. Cependant je crois devoir écrire directement à Picard, Tannery et Goursat. Je le ferai d'ailleurs sans détails.

Il est évident, par la lettre de Drach, qu'il n'a pas l'intention d'être candidat à la Sorbonne d'ici quelque temps. Je crois que cela vaut mieux, car il m'a semblé résulter de ma conversation l'an dernier avec Painlevé qu'il n'aurait pas de chances d'y être nommé⁷⁵⁵.

Je suis de votre avis pour Baire ; aussi n'ai-je fait écrire Bernard que parce que le cas Painlevé ne pouvait manquer d'attirer peu après son attention s'il ne l'avait attirée déjà. Il est vraisemblable d'ailleurs que Baire, en écrivant, cherchait à obtenir de Bernard des tuyaux sur ce point en lui parlant de choses voisines.

L'intervention de Liard, et ce n'est pas son congé qui l'empêchera d'intervenir, me paraît grave.

Dites à Denjoy ce que je vous ai dit ; je ne crois pas que sa visite au ministère puisse avoir aucun résultat.

L'indisposition de ma petite fille a été violente, mais paraît terminée. Elle a repris gaieté, appétit et apparence de santé.

Soyez tranquille, encore une fois, sur mon immobilité. Je ne vois pas d'ailleurs ce que je pourrais faire puisqu'il s'agit avant tout de régler la compétition Cartan-Vessiot dans laquelle je n'ai pas à intervenir puisque, à Paris, on a considéré l'an dernier que même une compétition Cartan-Lebesgue n'existait pas, ne pouvait pas exister.

Je suis d'ailleurs d'autant plus calme que je ne sais pas où est mon vrai avantage et la seule raison d'impatience que j'ai c'est qu'il me faudra prendre d'ici peu des résolutions pour mon déménagement ici et pour nos arrangements de vacances.

Bien à vous.

H. Lebesgue

Je ne sais si l'ambition de Vessiot ⁷⁵⁶ est de devenir inspecteur général, mais il y a longtemps que je me suis dit qu'il y avait fort peu d'individus aussi qualifiés que lui pour cela. Si cette situation le tentait, un stage de recteur serait indiqué.

Cavalier me dit à l'instant que Denjoy ferait bien d'aller au ministère voir GÉNÈRES ou même Bayet afin de savoir 1° s'ils ont compris, 2° s'ils ont une idée non énoncée et priez Denjoy de nous faire savoir le résultat.

CXLV

Poitiers, le 15 mai 1910

Mon cher Borel,

Je viens d'écrire 1° à Denjoy, 2° à Darboux, Poincaré, Andoyer, Boussinesq, Koenigs, mais vraiment Raffy je ne puis.

Goursat m'a écrit qu'il me soutiendra, sauf si Vessiot était candidat auquel cas "il demanderait à réfléchir" (formule polie).

Baire est certainement à plaindre et il est infiniment triste de voir s'abîmer si vite une belle intelligence.

Je compte sur vous pour me tenir au courant. Merci beaucoup.

A vous.

H. Lebesgue

CXLVI

Poitiers, le 20 mai 1910

Merci, mon cher Borel. Qu'on puisse prendre 10000 sur Painlevé me paraît bien dangereux pour moi et je ne compte plus sur rien. Cependant je me défends comme vous le verrez ci-joint. Je vous prie de faire partir cette lettre, si toutefois vous ne la jugez pas trop maladroite. Elle vous donnera peut-être des tuyaux sur mes travaux (voyez Fredholm, terrain dangereux ⁷⁵⁷).

J'avais fait un résumé du même genre (4 pages seulement) à Poincaré dans ma lettre⁷⁵⁸.

A vous.

H. Lebesgue

Drach m'a écrit pour tâcher de me convertir à la province. Corrigez quelques-unes des fautes d'orthographe.

Bulletin des Sciences Math.

1. Sur l'approximation des fonctions, nov. 98 . [[[27]]]
2. Sur les transformations ponctuelles des surfaces minima, avril 02. [[[19]]]
3. Sur la représentation analytique, à partir de $z=x+iy$, des fonctions continues de x et de y , mars 03. [[[47]]]
4. Remarques sur la définition de l'intégrale, sept. 05. [[[137]]]
5. Analyse du livre de M. et Mme W.H. Young : *Theory of sets of points*. [[[99]]]

Bulletin de la Société Math. de France

6. Sur le problème des aires (1903 et 1905).[[[20]]]
7. Une propriété caractéristique des fonctions de classe 1 (04). [[[94]]]
8. Lettre à M. Borel sur la théorie des ensembles (05). [[[131]]]
9. Contribution à l'étude des correspondances de M. Zermelo (07). [[[298]]]
10. Sur la méthode de M. Goursat pour la résolution de l'équation de Fredholm (08). [[[299]]]
11. Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz (à paraître). [[[300]]]

Comptes Rendus de l'Académie des Sciences

12. Sur les fonctions de plusieurs variables. 27 mars 99. [[[35]]]
13. Sur qqs surfaces non réglées applicables sur le plan, 19 juin 99. [[[301]]]
14. Sur la définition de l'aire d'une surface, 27 nov. 99. [[[302]]]

15. Sur la déf. de certaines intégrales de surface, 6 nov. 1900.
[[[303]]]
16. Sur le minimum de certaines intégrales, 3 déc. 1900. [[[304]
]]
17. Sur une généralisation de l'intégrale définie, 29 avril 1901.
[[[1]]]
18. Un théorème sur les séries trigonométriques, 10 mars 1902.
[[[21]]]
19. Sur l'existence des dérivées, 16 mars 1903. [[[305]]]
20. Sur une propriété des fonctions, 28 déc. 1903. [[[9]]]
21. Sur les fonctions représentables analytiquement, 4 juillet
1904. [[[81]]]
22. Sur une condition de convergence des séries de Fourier, 22 mai
1905. [[[136]]]
23. Sur la divergence et la convergence uniforme des séries de
Fourier, 27 nov. 1905. [[[164]]]
24. Sur le problème de Dirichlet, 11 fév. 07. [[[262]]]
25. Sur le problème de Dirichlet, 18 mars 07. [[[263]]]
26. Sur les suites de fonctions mesurables, juillet 09. [[[306]]]
27. Sur les intégrales de Stieltjes et sur les opérations fonction-
nelles linéaires, janv. 10. [[[259]]]

Annales de l'Ecole Normale

28. Sur les séries trigonométriques, 03. [[[22]]]
29. Sur les intégrales multiples (à paraître). [[[138]]]

Annali di Matematica

30. Intégrale, longueur, aire (thèse), 1902. [[[10]]]

Mathematische Annalen

31. Recherches sur les séries de Fourier, 1905. [[[62]]]

Journal de Mathématiques

32. Sur les fonctions représentables analytiquement, 1905.
[[[77]]]

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei

33. Sur les fonctions dérivées, juillet 06. [[[183]]]
34. Encore une observation sur les fonctions dérivées, 20 janv. 07.
[[[184]]]
35. Sur la recherche des fonctions primitives par l'intégration,
3 nov. 07. [[[307]]]

Atti della R. Accademia delle Sci. di Torino

36. Sur les transf. ponctuelles transformant les plans en plans
qu'on peut définir par des procédés analytiques, 10 mars 07.
[[[308]]]

Rendiconti del Circolo mat. di Palermo

37. Sur le problème de Dirichlet, 1907. [[[264]]]
38. Sur la représentation approchée des fonctions, 1908. [[[166]
]]

Enseignement math.

39. Sur la définition de l'aire des surfaces, mai 08. [[[201]]]

Intermédiaire des Math.

40. Démonstration complète du théorème de Cauchy sur l'égalité des
polyèdres convexes, juin 09. [[[230]]]

Revue de l'Enseignement des Sciences

41. Sur l'égalité des corps solides, juin 09. [[[309]]]
42. Sur les programmes d'arithmétique et d'algèbre, mars 10.
[[[294]]]

Nouvelles Annales de Math.

43. Remarques sur l'équilibre du solide, mars 09. [[[310]]]
44. Démonstration élémentaire d'un th. de M. R. Bricard, mai 10.
[[[311]]]

Annales de la Faculté de Toulouse

45. Sur les intégrales singulières, 1909. [[[206]]]
46. Remarques sur un énoncé dû à Stieltjes et concernant les intégrales singulières, 1909. [[[267]]]

Collection Emile Borel

47. Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, 1904. [[[4]]]
48. Démonstration d'un théorème de M. Baire. Note II des Leçons, de M. Borel, sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynômes, 1905. [[[25]]]
49. Leçons sur les séries trigonométriques, 1906. [[[55]]]

1. Cela contient la démonstration élémentaire du th. de Weierstrass sur la représentation des fonctions continues par une série de polynômes. L'extension de ce théorème aux fonctions ayant une infinité dénombrable de discontinuités, aux fonctions de plusieurs variables continues par rapport à l'ensemble des variables ou seulement par rapport à chacune d'elles (voir 32)⁷⁵⁹.

2. C'est de la géométrie. Détermination de toutes les transformations de contact transformant les surfaces minima en surfaces minima ou les surfaces parallèles à celles-là ($R+R' = C^{te}$) en surfaces de même nature⁷⁶⁰.

3. Toute fonction continue de x et y est égale à une série uniformément convergente de séries de polynômes en $z = x+iy$, Lerch n'avait pas lu les mots soulignés ; il crut pouvoir dire que je m'étais trompé.⁷⁶¹

4. Pédagogie. Dans certains cours on pourrait démontrer l'existence des fonctions primitives des fonctions continues sans se servir de l'intégrale définie et au contraire déduire cette dernière notion de la première⁷⁶².

13, 14. 15. 16. 17. 30. Mesure des ensembles. Définition de l'intégrale, Intégration de $\frac{dy}{dx} = f(x)$ ⁷⁶³.

Définitions analogues de la longueur d'une courbe et de l'aire d'une surface par polygones ou polyèdres voisins et dont les longueurs ou aires forment des suites minimisantes. On en

déduit définition de la longueur par division de la courbe en morceaux et remplacement de chacun d'eux par droite (longueur minimum), c'est-à-dire polygones inscrits, et définition de l'aire par division de la surface en morceaux et remplacement de chacun d'eux par surface d'aire minima. Cette surface existe (problème de Plateau). Cette définition se prête très bien à l'exposé élémentaire (voir aussi 39⁷⁶⁴), elle permet d'obtenir facilement et, pour longueur, dans des cas très étendus les expressions des nombres définis par les intégrales L . Cela a été perfectionné dans 47⁷⁶⁵ où l'on montre que, dans tous les cas, la longueur est une $\int L$.

Ces définitions permettent aussi de résoudre des problèmes de minima analogues à celui de Plateau (dans le sens que je lui donne). Minimum de $\int f(x,y,z) ds$, $\iint f(x,y,z) d\sigma$.

Détermination de toutes les transformations continues

$$X = \xi(x,y,z), \quad Y = \varphi(x,y,z), \quad Z = \psi(x,y,z)$$

conservant les longueurs ; on en trouve d'autres que les déplacements et symétries, d'où une infinité de surfaces nouvelles desquelles on peut dire qu'elles sont applicables sur le plan. Détermination de toutes celles de ces surfaces qui sont les cônes, des cylindres, des surfaces de révolution. Corrélativement : exemple de courbe ayant en chaque point une tangente variant de façon continue et même un plan osculateur et dont les tangentes ne forment pas une surface applicable sur le plan. L'application sur le plan conserve l'aire.

47⁷⁶⁶. Exposé plus didactique de certaines parties de la thèse. A citer bref historique. Etude, jamais faite avant moi, des rapports étroits, de l'identité, entre l'intégration riemannienne et de la mesure de Jordan⁷⁶⁷, de la mesure approchée par excès ou défaut et des intégrales par excès ou défaut de Darboux, Extension notable des théorèmes de Ludwig Scheeffer. Extension des résultats relatif à $\frac{dy}{dx} = f(x)$, en particulier intégration quand le premier membre est un symbole de dérivation supérieur ou inférieur à droite ou à gauche. Conséquence fondamentale : une intégrale indéfinie est presque partout égale à la fonction intégrée. C'est la première apparition d'une propriété de toutes les fonctions sommables, 20⁷⁶⁸, qui prépare 32. Définition logique (descriptive) de l' \int ,

29⁷⁶⁹. Contient l'extension du résultat souligné aux intégrales multiples. $I = \iint_C f(x,y) dx dy$ définit, pour f fixe donné, une fonction de C , dont on peut définir la dérivée par la limite de $\frac{I}{\text{aire } C}$ quand C tend vers zéro autour du point x_0, y_0 en lequel on cherche la dérivée de la fonction de contour. On trouve que cette dérivée existe presque partout et égale f .

On peut définir aussi des dérivées de C le long de segment de droites, et, si ce sont des parallèles à des axes de coordonnées, on trouve ainsi des sortes de dérivées partielles premières de I lesquelles sont presque partout égales à $\int f dx$ ou $\int f dy$. Enfin si C est rectangle de sommets $0,0$; x,y alors $I = F(x,y)$; si on néglige un ensemble de points de mesure nulle la formule

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

peut être utilisée dans tout l'ensemble restant.

Ces propriétés que j'ai annoncées, très vaguement, depuis fort longtemps ont été obtenues partiellement (et la première seule en partie, mais d'une façon habile) par M. Vitali. Elles sont fondamentales, elles ne sont pas faciles à éclaircir.

33, 34, 35⁷⁷⁰. Réponses à des critiques relatives à la rédaction du livre 47. Objections faites à une rédaction trop concise et supposant le lecteur trop intelligent. Développement de la démonstration d'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit une intégrale indéfinie (intéressante, retrouvée par Vitali).

6⁷⁷¹. Correction d'une faute de forme de la thèse dans la démonstration du fait que aire de $S+S' = \text{aire de } S + \text{aire de } S'$ et aires obtenues par déplacement sont égales ~~ne suffit pas à définir~~ l'aire du domaine plan.

18, 28⁷⁷². Une fonction est supposée représentable par une série trigonométrique convergente sauf peut-être pour un ensemble réductible de points, quelle est cette série? Grâce à l' $\int L$ c'est la série de Fourier pour toutes les fonctions bornées et même pour d'autres. Un caractère de convergence pour ces séries de Fourier avec $\int L$ permet de donner un exemple de série de Fourier ne représentant pas une fonction intégrable Riemann.

31⁷⁷³. Caractère de convergence des séries de Fourier (aussi 22)⁷⁷⁴,

$$\lim_{\delta=0} \int_{x_0+\delta}^{\text{n'importe quoi}} \left| \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} \right| = 0 .$$

Ce caractère est, naturellement, à cause de sa généralité, fondé sur une convergence analogue à la convergence qu'on veut obtenir, mais tous les caractères simples connus s'en déduisent de suite, et de nouveaux. Il faut y remarquer la disparition des symboles trigonométriques.

Extension d'un résultat de Fejer. Sommée par le procédé de moyenne arithmétique, toute série de Fourier converge vers la fonction presque partout (en relation avec 20 et 32).

49⁷⁷⁵. Séries trigonométriques. Histoire. Méthode nouvelle simple d'étude élémentaire, analogue à une méthode que Runge exposait au même moment ; elle en diffère cependant et notamment parce qu'elle repose sur une démonstration élémentaire du fait qu'une fonction est définie par ses coefficients de Fourier, qu'on a déjà souvent évoquée pour les questions de moment analogues que soulevait la théorie des équations intégrales. Emploi systématique de 31. L'existence des séries de Fourier de fonctions continues qui soient divergentes est là rattachée, pour la première fois sauf 23, à un fait simple et important duquel résulte aussi l'existence de fonction continue dont la série de Fourier converge partout mais non uniformément. Emploi de ces séries divergentes.

Exposition de 18 et aussi essai, le premier, d'exposition du mémoire de Riemann dont on se borne ordinairement à tirer 2 lemmes pour arriver au Cantor.

Dans les applications qu'on a faites des séries trigonométriques j'ai choisi des exemples très variés, quelques-uns importants, tous intéressants malgré la place infime dont je disposais.

45⁷⁷⁶. Outre des considérations importantes quoique préliminaires sur le théorème de la moyenne, l'intégration des séries, l'intégration par parties et par substitution ; on y trouve l'extension à des classes étendues d'intégrales singulières de résultats concernant les séries trigonométriques. En particulier de ceux signalés en fin de l'analyse de 31. Le problème principal est le suivant : déterminer tous les noyaux d'intégrales singulières propres à représentation de toutes les fonctions d'une certaine classe. (Résultats annoncés partiellement dans 38⁷⁷⁷). Cela est en rapport

intime avec mes résultats antérieurs sur la divergence des séries de Fourier. Ces résultats sont en relations avec des questions variées. Problème de moments, représentation des fonctions continues ou non, approximation des fonctions de grands nombres, égalité de Parseval, etc.

46⁷⁷⁸. Essai de reconstitution de la démonstration d'un théorème figurant dans une lettre de Stieltjes à Hermite, équivalent au résultat de Darboux sur l'approximation de $\int \int \varphi^n ds$ mais un peu plus précis. Cette démonstration est toute élémentaire et me paraît devoir être susceptible d'autant de généralisations que celle de Darboux.

27⁷⁷⁹. Toute intégrale de Stieltjes $\int f(x) d\alpha(x)$ peut être exprimée à l'aide d'une $\int_L \varphi(x) dx$ et inversement ; mais tandis que $\varphi(x)$ se calcule de suite connaissant $f(x)$ et $\alpha(x)$, f et α ne s'obtiennent que si l'on a intégré $\int \varphi(x) dx$.

11⁷⁸⁰. Les questions relatives à la divergence des séries de Fourier sont en relations étroites avec le degré d'approximation que donnent les séries de Fourier pour les fonctions simples. C'est une question assez neuve sur laquelle on ne possède guère que les résultats de Heine, utilisés par Darboux dans les fonctions de grands nombres. Ces résultats sont relatifs à l'ordre des coefficients, et non du reste de la série, mais ces questions sont connexes.

Si l'on sait que $|f(x+h) - f(x)| < Ah$ on dit généralement : les coefficients de Fourier a_n et b_n sont tels que $|a_n| < \frac{K}{n}$, $|b_n| < \frac{K}{n}$. C'est vrai, mais en réalité na_n et nb_n tendent toujours vers zéro. C'est pourquoi j'ai déterminé les limites exactes des ordres des coefficients et des restes pour la famille citée et les familles $|f(x+h) - f(x)| < Ah^\alpha$ et $\lim_{\delta \rightarrow 0} [\log \delta \{f(x+\delta) - f(x)\}] = 0$. Cette dernière famille est celle des fonctions auxquelles s'applique le caractère de convergence uniforme dit de Lipschitz-Dini ; il résulte en particulier de mes recherches que ce caractère ne peut être élargi en remplaçant $\text{Log } \delta$ par autre chose.

Mon but principal est de tendre vers des renseignements numériques sur l'ordre d'approximation possible des fonctions par des suites de Fourier d'ordre n ou des polynômes d'ordre n .

Voir déjà 45. Je pense que suivant ces ordres d'approximation les fonctions se différencient comme les irrationnelles suivant qu'elles sont plus ou moins approchées par des nombres rationnels.

12.⁷⁸¹. Dans sa thèse Baire déclarait que la méthode qui lui avait fourni la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit de classe 1 ne s'appliquait pas aux fonctions de plus d'une variable et qu'il ignorait si cette condition s'appliquait encore à ce cas. Je fis voir de suite que de tout criterium donnant la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit de classe 1 pour une variable on pouvait déduire la même condition pour le cas général et j'obtins ainsi en particulier la généralisation au cas général de l'énoncé même de Baire. La démonstration ne parut que beaucoup après (32).

48.⁷⁸². La démonstration de Baire utilise le transfini ; j'ai fait connaître là une méthode applicable quel que soit le nombre de variables et n'utilisant pas le transfini. De plus je donne, pour une variable, un autre criterium que celui de Baire.

7.⁷⁸³. Autre démonstration, pour le cas général, de ce criterium d'où celui de Baire se déduit facilement. Ce criterium s'énonce ainsi : il faut et suffit pour qu'une fonction discontinue soit de classe 1 que l'ensemble où elle est définie puisse être considéré comme la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés sur chacun desquels l'oscillation de la fonction ne surpasse pas ϵ (et cela quel que soit $\epsilon > 0$.) Cet énoncé, beaucoup moins élégant que celui de Baire se prête mieux que celui-ci à la démonstration du fait qu'une fonction est de classe 1. Il a de plus cet avantage d'être généralisable.

32.⁷⁸⁴. Généralisation du précédent. La classe d'une fonction se reconnaît à la structure des points en lesquels la fonction f vérifie les inégalités de la forme $a < f < b$, a et b étant des constantes. Ces ensembles s'obtiennent par l'application répétée de 2 procédés : addition d'ensembles, remplacement d'un ensemble par son complémentaire. C'est du nombre et de l'ordre de ces opérations que dépend la classe de l'ensemble considéré $E[a < f < b]$ et la classe de f .

Si compliquée que soit une expression analytique elle est équivalente à une série multiple de Baire, les fonctions à expressions analytiques rentrent donc toutes dans l'une des classes de

Baire, dont toutes les classes existent effectivement (à un certain sens du mot exister du moins). Même il existe des fonctions ne faisant pas partie de cet ensemble de classes de fonctions.

Si abstraites que soient ces considérations, elles ne sont pas sans applications. La démonstration annoncée dans (12) s'en déduit. On peut aussi compléter les résultats de (1) où l'on avait prouvé qu'une fonction de $n+1$ variables, continue par rapport à chacune d'elles, était représentable par une série n -uple de polynômes. On prouve ici que ces séries n -uples ne peuvent pas être en général évitées. C'est-à-dire que les $f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ sont de $n^{\text{ième}}$ classe en général. Même à chaque $\varphi(t)$ de classe n on peut faire correspondre une de ces fonctions continues par rapport à chaque variable et telle que $f(t, t, \dots, t) = \varphi(t)$.

Ces applications montrent l'intérêt pratique du mémoire ; il prouve des équivalences de problèmes.

36.⁷⁸⁵ La recherche des transformations ponctuelles transformant tout plan en plan a été ramenée par M. Segre, grâce à un résultat de M. Darboux, à la résolution des équations fonctionnelles $f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, $f(x_1x_2) = f(x_1)f(x_2)$. M. Segre m'a demandé mon avis sur ce problème analytique. J'ai montré que si l'on raisonne comme M. Zermelo on doit admettre l'existence d'une infinité de solutions autres que les solutions connues, mais que nommer effectivement une telle transformation revient à nommer une fonction échappant à tout mode de représentation analytique. Autant dire qu'il n'y a pas d'autres solutions.

9.⁷⁸⁶ Cette petite étude m'a conduit à sérier dans un cas particulier le problème de la recherche effective d'une correspondance de Zermelo : celui des ensembles dénombrables de nombres. On ne peut alors nommer une correspondance sans employer des procédés qui échappent à tout mode de représentation analytique. Même l'élément distingué $f(a, b, c)$ d'une progression arithmétique à 2 raisons $u_{m,n} = a + bm + cn$ est nécessairement une fonction inexprimable analytiquement des variables a, b, c .

37.⁷⁸⁷ Ce que les méthodes de ma thèse avaient en commun avec celles de Hilbert, c'était l'emploi des suites de fonctions qui sont minimisantes et convergentes, Mais dans les études de M. Hilbert et de ses successeurs la convergence n'est établie qu'en particulierisant beaucoup les fonctions employées, d'où la nécessité de ne traiter

le problème de Dirichlet que pour des domaines très spéciaux. J'ai remarqué qu'une suite de fonctions $f(x, y)$ chacune sans maximum ni minimum dans un domaine et telles que

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

soit borné est également convergente dans tout domaine intérieur à D .

Il résulte de là une méthode plus précise que toutes celles que l'on a proposées pour la résolution du problème de Dirichlet et d'une portée bien plus grande, car, pour qu'elle s'applique, il suffit que ce qu'on appelle le domaine D soit un ensemble fermé tel que tout point frontière fasse partie d'un continu frontière. Peu importe que les points frontière ne soient pas limites de points extérieurs, peu importe que les continus frontière soient en nombre infini. Ex. de domaines :



Les questions que soulèvent les travaux de Denjoy montrent l'intérêt que peuvent présenter les plus bizarres de ces domaines.

La méthode a cet avantage de montrer que la solution varie d'une façon continue avec le domaine et les valeurs données à la frontière de sorte qu'en modifiant très peu le domaine, donc la solution, on peut toujours faire en sorte que cette solution soit donnée par la méthode de Neumann ou de Fredholm, par celle de Schwarz, etc. D'ailleurs la méthode du balayage s'applique directement dans tous les cas. Même sujet 24, 25.

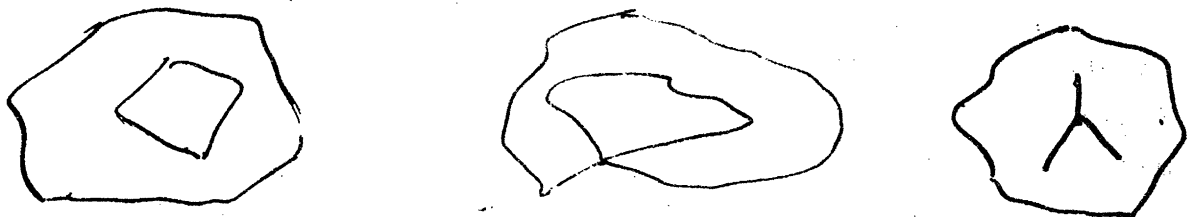
10⁷⁸⁸. Goursat avait justifié dans un cas particulier la formule de résolution de l'équation de Fredholm. J'ai prouvé que sa méthode fournissait la solution dans des cas aussi généraux et plus que ceux qu'on avait considéré. Cette méthode est une méthode de démonstration par continuité à partir d'un cas particulier directement étudié. J'ai indiqué un autre cas particulier plus simple qui pourrait servir de point de départ. Il se trouve que ce cas particulier avait été considéré par bien d'autres et en particulier par Fredholm. Mais à l'époque où j'écrivais je ne pouvais me procurer à la bibliothèque de Poitiers que la note que Fredholm fit paraître aux

Comptes Rendus.

41. 43⁷⁸⁹. Les 6 conditions, dites nécessaires et suffisantes pour l'équilibre d'un solide, permettent seulement de prouver que les dérivées premières et secondes des coordonnées par rapport au temps sont nulles à l'instant initial. Pour conclure de là au repos il faut admettre qu'un mouvement ne peut avoir lieu avec une vitesse initiale et une accélération initiale nulles toutes deux (il faut nier le mouvement $x = t^3$) et l'on sait cependant, j'en donne des exemples, que de tels mouvements se présentent pour des conditions initiales fort simples.

Ne fausse-t-on pas l'esprit des élèves en leur présentant comme une déduction logique ce qui n'en est pas une? Pourquoi ne pas se contenter de dire qu'il n'y a pas de mouvement possible à partir du repos dans lequel le travail des forces est négatif? Or cela suffit pour l'étude du repos des corps, des machines simples par exemple, et donne une théorie fort cohérente et simple. Je crois qu'il y a là-dedans la preuve de qualités pédagogiques au sens élevé du mot; mais je suis peut-être le seul à le penser.

40⁷⁹⁰. Le raisonnement de Cauchy, tendant à démontrer que 2 polyèdres convexes dont les faces sont égales sont égaux, suppose que les arêtes de 2 polyèdres à faces égales, suivant lesquelles les dièdres ne seraient pas égaux, sont des arêtes divisant les polyèdres en calottes simplement convexes. On écarte par exemple des arêtes placées comme ci-dessous :



Je montre que si l'un de ces cas se présentait on pourrait construire 2 polyèdres convexes inégaux à faces égales pour lesquels ces singularités ne se présenteraient pas. On peut d'ailleurs aussi, en précisant un peu le calcul de Cauchy, le conserver même pour le cas général.

44⁷⁹¹. Bricard a signalé un curieux mouvement à 2 paramètres dans lequel tous les plans passent par une certaine droite enveloppant des quadriques de révolution. Je montre que l'existence d'un tel mouvement est une conséquence immédiate du fait que dans un triangle

$A+B+C = 2$ dr. C'est étonnant ce qu'il y a de choses qui résultent de cette égalité. Ce 44 est stupide mais il est destiné à payer un abonnement qu'on me sert à l'oeil.

CXLVII

Poitiers, le 22 mai 1910

Mon cher Ami,

Rien dans le corps de votre lettre ne me surprend mais c'est le P.S. qui m'étonne. Et quoi, mes lettres seraient un sujet de conversation entre pontifes des mathématiques, ils les éplucheraient et du laisser aller du plan ils oseraient tirer des conclusions. Seraient-ils, par hasard, aussi bêtes que Guy de Téramond⁸³⁷ les peint dans le feuilleton du *Temps* ? Ne savent-ils pas qu'une lettre est une conversation écrite, que le charme de la conversation est fait surtout de son manque d'apprêt et que par suite il ne faut pas chercher dans une lettre le résultat quintessencié d'une réflexion profonde et longue, mais seulement ce qui y est : le mouvement de la pensée et la liberté de l'expression.

Au reste je n'ai aucun argument personnel à faire valoir contre qui que ce soit, ma pensée était nettement exprimée, à condition bien entendu qu'on considère une lettre comme écrite sincèrement au courant de la plume et non comme un document machiavéliquement pensé et qu'il faut lire entre les lignes. Je disais seulement qu'il est injuste de me demander à moi d'avoir prouvé des qualités dans tous les ordres de recherches mathématiques, qu'une telle exigence ne s'est jamais manifestée pour les autres candidats.

J'écrivais hier à Montel, ce que je vais vous répéter, qui fixe ma pensée actuelle :

"Borel désire trop que j'aille à Paris pour juger sainement de mes chances, écris-moi tout ce que tu sauras en dehors de lui.

Pour moi je ne crois plus avoir aucune chance. L'hostilité violente de Darboux fera réfléchir à deux fois les nombreux candidats à l'Institut et comme aucun pontife de l'Institut ne me défendra avec la 1/2 de l'énergie que Darboux mettra à me combattre on votera finalement pour un autre que moi. Et même pour ceux qui

n'escomptent aucun appui de Darboux il paraîtra plus simple de trouver une combinaison m'écartant et Vessiot et Guichard gagneront la timbale."

Je considère en effet comme m'écartant toute combinaison me mettant en parallèle avec Vessiot et Guichard. Je ne veux pas dire seulement que je n'ai aucune chance contre eux (Picard ne me défendrait pas contre Vessiot), mais même que si l'on peut au point de vue scientifique me placer avant eux suivant l'avis de certaines gens il y en aurait très peu, et je ne serais pas de ceux-là, qui trouveraient scandaleux de me placer après eux au point de vue universitaire.

Avez-vous raconté la séance à Drach. Je ne pense pas que ça modifie ses idées, mais il vaudrait cependant mieux l'avertir.

A quelle date la prochaine réunion ?

Je serai remplacé en juillet par Denjoy comme je vous l'ai dit, le ministère a accepté.

Sera-ce à Darboux qu'il faudra que je demande de m'appuyer pour une promotion ?

Pourquoi, pour montrer que je ne travaille pas dans un trou, ne parlez-vous pas du problème de Dirichlet. J'ai obtenu sur ce sujet un résultat *très important* : la solution varie d'une façon continue avec le contour et les valeurs au contour. De sorte que le calcul de cette solution et son expression peuvent s'obtenir comme limite du calcul ou de l'expression pour un contour voisin que l'on peut toujours choisir de façon que la méthode alternée, ou celle de Neumann, ou celle de Poincaré, ou celle de Fredholm s'applique⁷⁹².

Darboux a fait une année un cours sur les équations intégrales.

On peut donner 10000 à Cartan et à Vessiot, 8 à chacun avec 3 cours et 2 à chacun de travaux pratiques. Donc, ..., C.q.f.d.

Merci et bien à vous.

H. Lebesgue

Merci pour communication Andoyer, elle ne modifie pas ma façon de voir.

Painlevé interviendra-t-il ?

CXLVIII

Poitiers, le 27 mai 1910

Mon cher Borel,

Je ne connais pas l'organisation du service à Paris et je ne comprends pas ce que c'est que d'être candidat aux conférences de méca. Ça veut-il dire que la question Cartan-Vessiot étant tranchée au profit du premier, Vessiot reste candidat ? Alors je n'aurais qu'à me retirer. Mais j'imagine plutôt que l'on cherche une combinaison ne préjugant rien sur le classement respectif de Cartan et Vessiot (ce serait justice) et que mon cas est par suite considéré comme tranché.⁸⁴⁹

Y a-t-il une date de délibération fixée ou probable ? Je n'ai reçu aucune réponse de Picard, cela est assez significatif.

Si Vessiot (qui depuis longtemps est mon (!) candidat à l'Inspection générale) désire ce poste il lui faut passer par le Rectorat. Avis Cavalier.

Bien à vous.

H. Lebesgue

T.S.V.P.

Voulez-vous me répondre de suite, je crois que vous pouvez me fixer définitivement ce qui me permettrait d'agir pour la question maison, déménagement.

Quant à mes chances sur Paris, elles diminueront avec le temps et d'ailleurs ça m'intéressera toujours de moins en moins.

CXLIX

Poitiers, le 28 mai 1910

Mon cher Ami,

La situation est claire et ce qui l'éclaircit encore c'est une lettre de Picard, dont copie :

"Vous savez toute l'estime que j'ai pour vos travaux, et je

suis tout prêt à vous défendre contre des attaques qui seraient injustes. Mais, dans la question actuelle, je ne puis vous soutenir devant les candidatures de MM. Guichard et Vessiot, qui sont beaucoup plus âgés que vous, et dont les travaux dans des ordres différents sont de grande importance. Le choix de l'un ou de l'autre n'aura rien de blessant pour vous ; dans des matières différentes de celles dont vous vous occupez, ils ont acquis une juste notoriété.

J'ai préféré, cher Monsieur, vous dire en toute sincérité mon opinion. Je n'en suis pas moins disposé, croyez-le bien, à dire l'excellente opinion que j'ai de vos travaux."

Guichard n'est pas candidat, n'est-ce pas ? Alors Picard m'indique nettement que, pour lui, je suis au plus 3^{ième} et vous voyez le danger d'instituer un débat sur la prochaine place.

Mais je crois qu'il ne faut pas ruser avec ce danger et j'ai envie d'envoyer à Picard une lettre dont vous me renverrez le brouillon corrigé :

Monsieur,

1° Remerciements pour opinion et défense.

2° Je savais depuis 2 jours la candidature de M. Vessiot quand j'ai reçu votre lettre. Pour M. Guichard je pense que vous avez voulu parler seulement d'une possibilité de candidature car, il y a quelques mois, M. Guichard me disait que sa situation en province ne lui permettait d'être candidat à Paris que dans le cas d'une chaire vacante.

Quand j'ai posé ma candidature on prévoyait tout au plus 6000 pour rétribuer le nouvel arrivant, c'est-à-dire qu'à ce moment la candidature de Vessiot était impossible. Si j'avais su qu'elle devait se produire j'aurais peut-être hésité à poser la mienne car je sais bien que nos 10 ans de différences d'âge seront considérées comme un gros argument.

A mon avis partial, quelque estime que j'ai pour les travaux et les qualités pédagogiques de M. Vessiot, mes travaux peuvent faire oublier cet argument et d'ailleurs y a-t-il lieu jamais de faire entrer en ligne de compte une différence d'âge ?

De la nomination de M. Hadamard à Paris à celle de M. Cartan, 13 ans se sont écoulés sans mouvement sur Paris. Dans 13 ans

j'aurais l'âge exact de M. Guichard et j'espère que, comme lui, ma situation en province sera telle que je ne voudrai plus être candidat à Paris que pour une chaire. Or qu'arriverait-il si ces 13 ans s'étaient passés sans mouvement et que M. Vessiot ait été nommé cette année ? Qu'on titulariserait M. Vessiot ou M. Cartan et qu'on ferait venir un jeune maître de conférences. Il faudrait donc qu'après ces 13 ans il y eût 3 vacances successives pour que j'ai des chances sans qu'un des maîtres de conférences récemment nommé n'en ait trop acquis. Il est vrai qu'avant 13 ans on doit escompter les retraites de MM. Darboux et Boussinesq ; mais, si M. Vessiot m'est préféré cette fois, au départ de M. Darboux, M. Guichard, plus âgé et spécialisé dans la géométrie, sera un successeur plus sérieux encore et la retraite de M. Darboux ne peut entrer en ligne de compte. Il y a la retraite de M. Boussinesq, mais n'est-ce pas sur elle que l'on compte pour permettre à celui que l'on nommera cette année de rester à Paris même dans le cas où M. Painlevé reprendrait son poste ? Et de plus n'escompte-t-on pas la suppression d'un poste ou tout au moins d'une chaire de math. pour créer une chaire de botanique ?

En tout cas, c'est seulement cette retraite de M. Boussinesq, ou quelque incident imprévu, qui pourrait *peut-être* me permettre l'accès à Paris d'ici fort longtemps. N'est-ce pas la preuve de la nécessité de juger chaque fois les candidats d'après leur valeur réelle et sans s'occuper de leur âge ?

M. Vessiot dit que je suis sûr d'arriver à Paris bientôt, tandis que pour lui c'est la dernière occasion. Si cet argument ne contenait pas implicitement un très gros éloge de mes travaux, je serais tenté de le considérer comme absurde : ou bien il y aura d'ici très peu de temps une place à la Sorbonne et ce n'est pas alors la dernière occasion pour M. Vessiot d'être nommé à Paris, ou bien il n'y en aura pas et je ne serai pas bientôt nommé à Paris. Or je viens de vous expliquer que cette seconde hypothèse est la plus vraisemblable ; c'est pourquoi je ne veux pas considérer l'opinion que vous me donnez dans votre lettre comme définitive et que je vous prie de réfléchir à nouveau à la question.

Bien à vous.

H. Lebesgue

J'ai eu l'occasion de parler des postes de Recteur et

d'Insp. Général avec Cavalier. D'ici 1 an 1/2 au plus Jeanmaire⁷⁹³ (?) de Toulouse sera mis à la retraite. Quant à Niewenglowski et Combette ils auront leur retraite tous deux avant 5 ou 6 ans au plus. Si donc Vessiot était nommé Recteur avec quasi promesse d'Insp. Gén. il verrait le bout de son stage de Recteur.

Mais tout cela arrive trop tard.

D'autre part, ce que je dis dans ma lettre à Picard n'est pas tout à fait exact. La retraite de Boussinesq pourrait en effet fort bien créer pour moi une place à 6000 que n'accepterait pas Vessiot ; mais je sais bien que je ne perdrais rien à dire que, si j'étais nommé à Paris, je ne postulerais ma titularisation ni au moment de la retraite de Darboux, ni au moment de la retraite de Boussinesq. Et si par hasard cela pouvait contribuer à décider Vessiot dans le bon sens pour moi, je le dirais de suite.

Certes Darboux n'est pas tout puissant. Mais comment espérer enlever une promotion au grand choix, si les math. ne sont pas d'accord, surtout après la promotion de Drach qui est très critiquée.

Je n'ai guère l'intention d'aller à Paris. Poincaré s'en foutra ou sera pour Vessiot, cela est certain.

Je n'ai plus d'illusions et je fais cela par acquis de conscience ; mais, dès hier, j'ai repris avec ma femme mes recherches de maison. Celle de Drach est à louer.

Rebien à vous et grand merci.

H. Lebesgue

CL

Poitiers, le 30 mai 1910

Mon cher Borel,

J'attends une autre lettre de vous, mais je réponds en attendant à celle de ce matin.

Vessiot a des qualités pédagogiques certaines, mais il faut tenir compte de ce qu'il travaille sur un sujet bien étudié où les questions son nettes et relativement facilement résolubles jusqu'au

bout, qu'en somme il est relativement facile de construire une belle route dans un pays bien connu mais qu'il y a cependant plus de mérite à créer une piste dans une forêt vierge.

Et puis, qui me lit ? Personne en France. Les mieux intentionnés lisent le préambule puis, rapidement, ils sautent des pages et courent aux énoncés. Alors comme ce sont des questions qu'ils n'ont pas étudiées, ils n'en voient pas l'utilité et disent que mes travaux sont quelconques. Puis, comme tout de même la vérité finit par se faire jour, il apparaît que mon travail n'était pas sans portée, alors, repensant à ce qu'on a lu, ou se reportant à mon travail, on constate que j'avais bien dit telle chose mais comme il faut bien qu'on se trouve une excuse à soi-même on dit que je rédige fort mal, que je ne mets pas les choses en évidence.

Et voilà pourquoi mes travaux récents sont médiocres et mes premiers mal rédigés !

Mais vous tombez d'accord avec Picard que je ne mets pas mes résultats en évidence. Précisez, je vous prie.

Oui peut-être eût-il mieux valu pour moi ne rien faire après ma thèse et passer mon temps à en chanter les mérites. Mais ce n'est pas mon genre. Tout ça me dégoûte.

Quant à l'histoire Raffy, elle m'a donné l'occasion d'expliquer à ma femme le sens des expressions Raffyfiture et Raffybre, mais je n'y attache pas d'autre importance. Je suis fort aise de ne pas avoir à souhaiter la mort de ce sinistre bougre ; sa mort ne me servirait pas. Si Guichard est nommé à la place de Raffy, Darboux ne prendra pas sa retraite d'une façon anticipée surtout si ça pourrait me servir. Or il n'est atteint par la limite d'âge qu'à la fin de l'année scolaire 1916-1917⁷⁹⁴.

La possibilité de devenir maître de conférences à la Sorbonne en octobre 1917 est pour moi de nul intérêt. Pour moi c'était cette fois ou jamais.

Soit, c'est jamais. Mais comme vous le prévoyez ça n'est pas très encourageant. Et pour commencer j'abandonne tout travail, je rejette toute pensée mathématique jusqu'à la rentrée.

Oui, il y a de la faute des circonstances dans la lenteur des mouvements sur Paris mais si, à l'époque de Picard, on avait tenu compte de l'ancienneté comme il veut le faire, croit-il

qu'il serait arrivé aussi jeune ?⁷⁹⁵ Et puis il y a 2 façons de tenir compte de l'ancienneté. Sa façon, mais aussi comparer mes travaux à ceux que Vessiot et Guichard⁷⁹⁶ avaient publiés à 35 ans. Ce serait la façon juste de tenir compte de l'ancienneté. Il y a à considérer la fécondité et la valeur, d'où nécessité de comparer à âge égal. Les travaux au-dessus de 35 ans n'ont à intervenir que s'ils modifiaient l'opinion première.

Je voterais pour Guichard. Guichard et Vessiot sont deux hommes intelligents et comprenant les maths. Ils ont publié des travaux intéressants quoique de second ordre ; il n'y a entre eux que la différence de qualités pédagogiques (et certes Guichard ne met pas en évidence ses résultats, grâce à ces notations 20, 30, etc. on croirait presque qu'il n'en a pas⁷⁹⁷). Mais cette différence me paraît être compensée par la différence d'âge et comme j'ai avantage à ce que ce soit Guichard ...

J'ai reçu votre, vos autres lettres.

Peu importe l'opinion de Poincaré entre Vessiot et Cartan ; il n'y a plus de compétition Vessiot-Cartan, mais Vessiot-Guichard-Lebesgue-Fabry, etc. Poincaré m'ignore⁷⁹⁸ ; ce que j'ai fait ne s'écrit pas en formules.

Soyez rassuré j'étais décidé avant votre réponse à ne pas écrire dans le sens indiqué à Picard. A quoi bon ? Mais il faut bien que je lui réponde et vous devinez que je le fais sans ménagements superflus. Oh ! je suis très poli ; mais je répète ce que je vous dis au début et je lui laisse comprendre que pour moi son jugement est dû à une incompréhension. (Peut-être aussi à de l'orgueil. Lui, il était naturel de le nommer jeune contre des candidats âgés, mais moi !)

Décidément ceux pour qui la mort est l'entrée dans la vie éternelle ont bien peur de cet incident minuscule.

Le livre de Fabry⁷⁹⁹ est grotesque, on le croirait pensé et rédigé par d'Adhémar,

Mon cher Ami, je loupe en écrivant à Picard, mais c'est que je n'ai aucune confiance dans le présent et que l'avenir ne m'intéresse pas. 4 ou 5 ans, comme vous dites, où l'∞ c'est pareil. Cette fois ou non, et ce ne sera pas cette fois, Malgré cette conviction je vous envoie la liste que vous me demandez.

Quant à la maison de Drach elle est pleine d'inconvénients.

M. Appell est bien gentil de trouver qu'on pourra me pardonner 39 ou 40 ans si l'on nomme cette fois des gens de 45 ou 48.

Je crois que jeudi il y aura discussion et que ça ne changera aucune des voix comme toutes les discussions. Gladstone⁸⁰⁰ disait : J'ai entendu des quantités de discours dans ma vie, un seul a changé mon opinion mais il n'a pas changé mon vote.

Bien cordialement à vous et merci,

H. Lebesgue

CLI

Poitiers, 4 h, 1 juin 1910

Mon cher Borel,

Ci-jointe la liste demandée et des tas de tuyaux. J'espère qu'avec cela vous allez décider Darboux à démissionner de suite pour me céder sa place.

J'ai mal au poignet de cet effort de persuasion.

Cordialement,

H. Lebesgue.

CLII

Poitiers, le 4 juin 1910

Mon cher Ami,

Bien entendu, si je me méfie de votre impression, c'est parce que je sais combien vous aviez à coeur mon succès et que je crains que votre grande amitié n'obscurcisse un instant votre sens critique. Je n'oublierai certes pas les efforts que vous avez faits en cette occasion, je ne mesure pas vos efforts à leur résultat. C'est qu'en effet j'aurais voulu avoir trois voix, la vôtre et celles d'Appell et Tannery puisqu'ils avaient déclarés qu'ils voteraient sans tenir compte de l'âge pour celui qui leur semblerait avoir le plus de valeur d'après la discussion. Et c'est parce que

je n'ai pas eu ces 3 voix que je ne suis pas tout à fait d'accord avec vous sur la portée et la signification de la discussion et des votes.

Je crains que, si, Guichard écarté, on avait à recommencer, ce ne soit toujours le plus vieux (évidemment Fabry excepté) qui ait l'avantage. Et puis je regrette que Painlevé ait conquis si peu de voix à Vessiot et que l'opinion de Darboux ait tant de poids.

Picard me semble un hurluberlu. Je lui ai écrit en substance :
Merci de votre bonne opinion, je l'aurais voulu plus agissante. L'âge est un défaut et, sans insinuation contre Guichard et Vessiot que j'estime, je peux dire que je me demande si je suis encore assez jeune pour profiter de ce qu'il peut y avoir de stimulant dans la vie de Paris. Que d'ailleurs je me demandais si l'on nous jugeait bien, que, pour ne parler que de Vessiot dont je connais mieux les travaux, il me semblait très intelligent, d'esprit très ouvert, capable de s'assimiler les idées des autres au point de ne pas leur faire perdre leur fécondité, comme on l'avait vu dans ses 2 principaux mémoires, mais qu'il manquait d'originalité. Qu'il était professeur épatant, mais moi aussi et réédition de ce que je vous avais dit.

Quant à mon opinion sur Guichard et Vessiot, je ne l'ai pas dite à Picard, la voici. Les travaux de Vessiot sont plus importants comme résultats parce qu'il a bien su utiliser les idées des autres. (Ce qu'a dit Painlevé sur Vessiot est à deux tranchants et a pu décider du vote de Picard.) C'est à coup sûr un grand mérite de voir les sujets importants et les idées fécondes. Mais je crois que les quelques résultats de Guichard sont obtenus par un travail de pensée (pas très profond), mais plus personnel. Son mémoire sur $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = \varphi(x)$ est bon.

Il est souhaitable et vraisemblable qu'on trouve le moyen de faire venir Guichard à Paris. La situation de celui qui profiterait de la rapacité des finances serait un peu difficile.

Vessiot doit éprouver une grosse déception ; vraiment ce type devrait pantoufler dans l'Inspection générale. La nomination de Gauthier va peut-être rendre vacante un rectorat.¹¹⁵⁰

Tâchez donc de savoir enfin l'opinion de Poincaré s'il en a une. Boutroux m'a écrit qu'il ignorait l'opinion de son oncle.

Je ne serais pas fâché d'apprendre ce que cet individu, tout à fait mystérieux pour moi, pense de moi.

J'ose espérer que vous n'avez aucune envie d'un siège de député, quoique, à en croire Darboux, vous ayez déjà un point commun avec Jaurès⁸⁰² : la longueur de vos discours.

Les mérites de Fabry sont minces vis-à-vis de ceux de Guichard et de Vessiot et du même genre, je comprends donc fort bien qu'on n'en ait pas parlé. Mais je crois que Baire est digne d'entrer en compétition avec Guichard et Vessiot.

Mon candidat pour une place de chargé de cours est Lattès. Il a fait des travaux intéressants, *utiles* et personnels, seulement sa thèse⁸⁰³ n'est connue que de Hadamard qui l'estime beaucoup mais n'en est pas épaté comme de celle de Fréchet. Lattès aurait dû passer avant Husson, Carrus, Buhl, Fréchet. J'ai dit mon opinion à Zoretti qui m'avait demandé des tuyaux, il y a 3 mois. La santé de Lattès est telle qu'il n'acceptera peut-être pas d'aller à Clermont, mais on devrait le lui offrir.

Vous savez que vous me devez des exemples précis de mauvaises mises en évidence de mes résultats.

Bien cordialement à vous et grand merci.

H. Lebesgue

CLIII

Poitiers, le 7 juin 1910

Mon cher Ami,

Je ne vois que des avantages à la combinaison en question en ce qui me concerne s'il ne s'agit que d'une séance de travaux pratiques. La durée de la séance importe peu c'est le nombre de dérangements qui importe.

Cette solution permettrait de dire jésuitiquement qu'il n'y a que 6000. Mais je crains qu'on ne l'accepte pas, parce qu'elle conduirait, si je me rappelle les chiffres, à donner 10500 à Cartan, plus qu'à Guichard, sans qu'il y ait là-dedans la rétribution d'un travail supplémentaire. Mais Cartan verrait peut-être avantage à avoir 2000 sans les travaux pratiques, 1000 F pourraient

aller à Guichard.

J'ai à lire 123 volumes de la sphère, rien n'est plus mal fait⁸⁰⁴. A vous.

H. Lebesgue

Pourquoi Andoyer, n'imitant pas la discrétion de Vessiot, annonçait-il avant l'examen de son fils qu'il voterait pour Vessiot ? En somme Darboux vote pour Vessiot parce que Vessiot n'est pas Lebesgue, Boussinesq à cause de son âge, Koenigs et Andoyer¹¹⁵¹ à cause des examens de l'X, Goursat peut-être parce que je suis ami de l'un de ceux qui l'évincèrent à l'Institut (mais Vessiot est ami de Painlevé) et Painlevé parce qu'ami de Vessiot. Ce n'est pas brillant comme motifs, mais ça fait une majorité. Darboux ira puisque c'est lundi, mais lundi on élira la commission de la R.P.⁸⁰⁵. Painlevé ira-t-il à la Sorbonne ? Si non il faudrait obtenir de Tannery qu'il ne vote pas pour Drach pour qu'on arrive au premier tour à 5 contre 5. Si Poincaré n'oublie pas.

C'est Goursat qu'il faudrait que quelqu'un convertisse. Si je ou on peut dire que j'ai une voix de majorité j'en aurai beaucoup plus, mais je n'ai pas cette voix, la raison âge me fera lâcher au 2^{ème} tour, ou avant.

CLIV

Poitiers, le 11 juin 1910

Mon cher Ami,

Le succès de Fabry serait scandaleux, ce n'est malheureusement pas une raison pour qu'il ne soit pas le plus probable. Les nominations qui ont dû avoir lieu cette année pour la commission d'examen d'entrée, et que j'ignore, indiqueront peut-être l'état d'esprit actuel des dirigeants de l'Ecole Polytechnique.

Quant au petit marché de Fabry il est suggestif. D'ailleurs Fabry se fait des illusions énormes sur son mérite. L'an dernier, il écrivait à Boutroux, sur un ton amer, qu'il était dégoûté, que ce n'était pas la peine de travailler puisqu'on ne lui donnait pas de promotion au choix.

Puis, comme par suite du cours de Boutroux au Collège de France, il y avait eu un remaniement de service par suite duquel

Fabry a fait le cours de Math. générales pendant une partie de l'année ; il a oublié son fameux bouquin qui n'a d'autre mérite que son faible volume obtenu surtout grâce à l'emploi d'un style télégraphique⁸⁰⁶. Je dois ajouter, c'est de toute justice, que son livre n'est pas plus idiot que celui de Vogt⁸⁰⁷ ; mais à faire un livre plus idiot il y aurait eu en vérité un énorme mérite.

Si l'argument du cumul vous était opposé il faudrait essayer de faire donner à Drach la place de Jordan¹¹⁵³. Ce serait la seule occasion prochaine pour Drach de venir à Paris. Je sais qu'il ne désire pas cette résidence, mais plus tard il regretterait peut-être sa décision et, d'autre part, je crains fort qu'il ne fasse jamais plus rien (de valeur) en province. Il faudra donc, le moment venu, attirer son attention sur cette possibilité et le faire réfléchir à nouveau.

Quant à la succession de Raffy, elle pourra m'être profitable si et seulement si elle ne fait qu'une place à 6000. Mais on va titulariser Guichard et il restera suffisamment pour faire venir Vessiot lequel est assuré dès maintenant des voix de Darboux, Picard, Boussinesq, Andoyer (je suppose que Painlevé ne vote plus, sans quoi 5 voix) et par suite l'emportera à coup sûr. Ma seule chance serait si Poincaré se décidait à prendre parti et en ma faveur ; mais c'est tout à fait invraisemblable.

Vous m'avez donné des exemples de mauvaise rédaction, ils abondent. Mais ce que je vous demande ce sont des exemples de résultats mal présentés, mal mis en évidence. Ce n'est pas la même chose.

Je voudrais sur un exemple précis voir comment vous entendriez que je batte la grosse caisse pour faire admirer un de mes résultats à vos bons badauds. Je vous accorde d'ailleurs fort volontiers à l'avance que je pourrais annoncer mes mémoires par des notes aux *Comptes Rendus*. Ce que je n'ai pas fait ni pour le mémoire de Toulouse, ni pour celui qu'a Picard, ni pour celui qu'on trouvera dans les papiers de Raffy.⁸⁰⁹

Au cas où la succession de Raffy se réglerait comme je le suppose, Guichard voterait. Pour qui serait-il, mystère. L'avez-vous vu avant le dernier vote, que vous a-t-il dit ?

Je ne vois pas clair du tout dans ce qui est l'intérêt personnel de Boutroux. J'ai indiqué à celui-ci le résultat du dernier

vote, Boutroux conclut que ça c'est mieux arrangé que ce qu'on pouvait craindre "car il paraissait difficile d'empêcher Guichard d'arriver et le résultat final que Guichard aille à la Sorbonne de suite ou plus tard est le même". Ce que Boutroux appelle le résultat final c'est évidemment ce qui le concerne et en cela je suis d'accord avec lui. En quoi la mort de Raffy modifierait-elle les plans de Boutroux Poincaré⁸¹⁰, je ne le vois pas bien. Ils doivent évidemment chercher à se débarrasser soit de la candidature de Vessiot soit de la mienne.

Bien à vous. Montel m'apprend aussi la mort de Raffy.

H. Lebesgue

CLV

Poitiers, le 14 juin 1910

Mon cher Borel,

Je suis aplati et abruti par l'affaire de l'épure de St Cyr. Vous savez qu'elle était impossible ; j'en suis l'auteur. En passant de l'épure que j'avais faite à l'énoncé j'ai fait une erreur grossière (-6 au lieu de -8) et l'on ne pouvait repasser de l'énoncé à l'épure. Cet animal de Guichard a regardé vaguement les 5 énoncés que je lui proposais, mais n'a pas fait les épures (cependant qu'il me recommandait de faire avec soin les problèmes qu'il m'envoyait) et en a choisi 3. Ces 3 ont été envoyées au ministère de la guerre qui en a choisi une, la mauvaise et la 5^{ième} de celles que je proposais !!!!

Cela est d'ailleurs grave ; si je ne perds pas St Cyr de suite cette année ce qui est fort possible car toutes les épreuves ont été critiquables et on trouverait peut-être commode de guérir la commission de la peste en me sacrifiant, je ne l'aurais certainement plus l'an prochain. Je suis soumis à la renomination après cette année. Or n'ayant plus de rabiots en perspective (Centrale, St Cyr, X fichus) Paris n'est plus possible.

M. Appell a tort d'attacher de l'importance à l'abandon de la chaire de mécanique. S'il voyait ce qui se passe ici, il comprendrait que le seul moyen d'avoir parfois 2 ou 3 élèves c'est de faire analyse et math. générales.

Montel est très paresseux pour écrire. On devrait lui proposer les analyses de Raffy au BSM ; il fait bien cela.

Vous n'espérez pas convaincre grand monde par une comparaison Drach ou moi avec un académicien, Humbert !! Quant aux raisons qu'on pourrait avoir de soutenir Drach contre Humbert, elles ne me paraissent pas négligeables. Dans 100 ans il restera du Drach et pas d'Humbert ; Humbert est un bon professeur pour bons élèves sages, sans idées nouvelles, sa place n'est pas au Collège de France où Drach au contraire ferait bien. En ce qui concerne le parallèle Drach Lebesgue je dois dire que la notion d'irréductibilité était plus cachée et apparaît comme actuellement plus féconde que la notion d' $\int L$.

J'ai reçu une lettre de Lattès. Il préfère rester à Montpellier dans la prévision d'un départ possible de Fabry. Il est embarrassé cependant parce qu'il ne sait rien de Fabry. Il a peur que, n'étant élève de personne, on lui oppose Zoretti ou quelque autre si une place à Montpellier devenait vacante et il me prie de vous faire savoir son existence. Il existe et ce qu'il fait est bien ; il est de l'année d'avant Husson à l'Ecole et a autant de titres que lui à être titularisé.

Bien à vous.

H. Lebesgue

CLVI

Poitiers, le 16 juin 1910

Mon cher Ami,

Denis⁸¹¹ a pris les choses moins au tragique que moi pour ce qui est de l'erreur ; il m'a dit d'autre part qu'il m'aurait couvert s'il avait été question de sanction et que je n'aurais pas dû en douter. C'est là de la part de cet homme, qui me connaît à peine, une preuve de confiance qui m'a beaucoup touché. Depuis je lui ai écrit et il m'a répondu ; il me semble que M. Denis me pardonne de ne pas avoir compris le rôle du Président du jury comme lui, dans un sens aussi sympathique que lui, et que, de cet incident, il ne résultera, au point de vue de nos relations, que plus d'intimité et de sympathie.

Quant au ministère, on ne sait. Du moins Sarraïl⁸¹², fort mécontent naturellement, ne prend pas les choses au tragique et est raisonnable. Je conserve donc St Cyr cette année, du moins.

Quant à Guichard, oui sa responsabilité morale est assez grosse, mais il ne faut pas exagérer. Il s'est dit que l'épuration est une épreuve peu importante et a proportionné implicitement les chances d'erreur à cette importance, ce qui est idiot mais tout naturel. Et puis il a eu trop confiance en moi.

Je suis très nerveux, mal équilibré depuis plus de 6 mois et cette affaire m'a plus remué qu'il n'était peut-être raisonnable. Cependant ce ne serait pas absolument puéril de lier Paris à cela. J'ai ici 7200 et je dépense plus. Aller à Paris avec 6000 francs, il n'y faut pas songer. Je comptais être renommé à St Cyr pour 3 ans, d'où 3 ans pour me retourner et voir venir, mais si St Cyr m'échappait avec scandale non seulement je me trouverais sans rien mais tous les jurys d'examen me seraient interdits et alors ce serait fort grave.

Lattès est neurasthénique, soit, mais pas dans ses travaux. Le malheur est que sa thèse a été examinée par Hadamard qui n'a pensé qu'à Fréchet et que Lattès lui non plus ne met pas en évidence.

Inutile de parler à Appell du changement de chaire.

Je viens de voir que Maige⁸¹³ a une promotion au choix. Il est plus jeune que Drach d'âge et d'Ecole, il a débuté comme titulaire et il n'a jamais rien fait d'important !! Sur le nouveau tableau je suis 33^{ième} sur 38.

Une très mauvaise nouvelle. Bernard est atteint de tuberculose. Depuis 3 mois il toussait, était mal à l'aise, n'avait pas de force. Puis grippe de laquelle il s'est relevé juste pour aller stupidement faire 9 jours, comme secrétaire du colonel soit mais c'était encore trop. Au retour au lit de nouveau, très pris, Calmette⁸¹⁴ a fait l'analyse bactériologique des crachats ; il y a des bacilles de Koch. Bernard ira dans le mois voir le Directeur du Sanatorium de Bligny que Calmette lui a indiqué comme le meilleur auscultateur. Il vient de s'installer à la campagne à côté de Poitiers. Sa femme ne va guère bien, très inquiète, très fatiguée ; le bébé va pas mal. Tout confidentiel.

Très cordialement.

H. Lebesgue

CLVII

Poitiers, le 22 juin 1910

Mon cher Borel,

J'ai été fort étonné que vous parliez de Pruvot⁸¹⁵ comme bénéficiaire de la vacance. M. Appell m'avait dit à Pâques qu'on saisirait la première occasion pour créer une chaire de botanique et je m'imaginai que la bataille serait entre Molliard et Dangeard⁸¹⁶.

Toutes ces compétitions n'accéléreront pas la solution de la question. J'imagine qu'il faut consulter le conseil de la Faculté, le conseil de l'Université, puis qu'il appartient au ministre de décider en ce qui concerne déjà seulement la conservation de la chaire, sa suppression ou sa transformation et ce n'est qu'après qu'on s'occuperait du choix du maître de conférences de mathématiques. Comme nous sommes déjà fin juin, les vacances vont empêcher les réunions de conseils divers et ça va traîner 6 mois sans doute.

Bernard ne va pas mieux ; il est encore sous le coup de cette prétendue grippe (en réalité accès de fièvre tuberculeuse) qui a fait découvrir la chose. Il ne peut rester 2 heures levé sans fatigue ; 1/2 heure de conversation et il atteint 37° 7 ; il n'a guère d'appétit. Enfin, et c'est là je crois la raison de l'état général, il est extrêmement nerveux parce qu'il n'a pas encore pris son parti de quitter sa vie ordinaire active pour une période assez longue. Actuellement il est d'ailleurs trop près de cette période pour que tout ne la lui rappelle pas : examens de licence ou de PCN⁸¹⁷ ; comptabilité du laboratoire ; attribution qui vient d'être faite à la Faculté d'un domaine de Mauroc destiné à la création d'une imitation de Fontainebleau ; lettres d'étrangers avec lesquels il correspondait à l'occasion de ses recherches ; invitation à des excursions locales, etc. Heureusement Mme Bernard et le bébé ne vont pas trop mal,

Je n'ai aucune nouvelle de St Cyr ; au ministère on ne m'a toujours pas demandé aucune explication. M. Denis m'a dit qu'à son avis il n'y avait pas lieu actuellement d'aller au devant de cette demande d'explication. M. Denis m'a dit que le général Sarrail *seul* était officiellement responsable des sujets et que le

général tenait à cette organisation qui lui permettait de tripa-touiller les sujets ; que, par exemple, Sarraïl avait cette année modifié le sujet d'histoire. Dans ces conditions il n'y aurait à prévoir de manoeuvres ténébreuses de concurrents ou de Sarraïl que lors de la nomination de la commission l'an prochain.

Si vous avez le même temps qu'ici vous ne verrez guère de beaux vols⁸¹⁸. Ici le vent est tel qu'il vient de me renverser pendant que je cueillais du tilleul.

Bien cordialement à vous.

H. Lebesgue

CLVIII

Poitiers, le 25 juin 1910

Mon cher Ami,

Je vous écris à Paris, car je n'ai plus rien compris à la durée de votre séjour à Rouen.

La petite feuille ajoutée est celle qui, deux fois déjà, détruisit mes espérances. Il n'y a aucun doute à avoir, Vessiot passera et ce sera pis que tout pour moi, Vessiot se trouvant chargé d'un cours, plus tard, ou le titulaire dans sa chaire, quitte à supprimer une autre chaire de mathématiques.

J'écrivais il y a quelque temps à Boutroux : "Vous vous demandiez avec moi l'an dernier si^{de} tous les candidats à Paris qui semblaient devoir être nommés avant vous il n'y en aurait pas quelqu'un d'évincé ; eh bien, il me paraît que Vessiot sera le bénéficiaire de la succession Raffy et que ce sera moi l'évincé, car d'ici peu ce serait pour moi un sacrifice d'argent impossible que d'aller à Paris à 6000. Il n'y aurait qu'une chance en ma faveur, c'est que Poincaré s'intéresse à la question et se décide pour moi."

Or Boutroux a reçu cette lettre à Paris, il pouvait et il a dû à ce moment causer à son oncle et il ne m'a rien répondu sur ce sujet. Il n'y a pour moi aucun doute que Poincaré ne sera jamais, mettement au moins, en ma faveur.

Si vous le jugez utile et si l'état de santé de mes enfants

le permet(ils paraissent incuber une coqueluche) j'irais à Paris mardi.

Rien à faire pour Bernard pour le moment, mais il se pourrait que d'ici peu il y ait à faire car il ne pourra pas reprendre son service à la rentrée.

Bien à vous.

H. Lebesgue

CLIX

Poitiers, le 28 juin 1910

Mon cher Borel,

Ce n'est pas encore la victoire, mais nous y tendons. On peut espérer que la décision de Poincaré entraînera celle de Picard. Peut-être ça aura-t-il quelque influence sur Goursat, mais je doute que les autres se décident à changer leur vote. En tous cas ce serait déjà beau d'arriver à

Vessiot : Darboux, Painlevé, Boussinesq, Koenigs, Andoyer, Goursat,

Lebesgue : Borel, Appell, Tannery, Poincaré, Picard.⁸⁵⁶

On pourrait presque dire que la qualité l'emporte sur la quantité s'il n'était évident que, suivant son habitude, Picard me soutiendrait *contre* Vessiot pour la seule raison *contre* et s'il était possible d'admettre que la décision de Poincaré soit due seulement à des motifs scientifiques.

N'importe c'est un progrès capital que d'avoir l'appui de Poincaré. Je vous remercie vivement non seulement de me l'avoir aussi vite annoncé mais surtout de me l'avoir obtenu.

Quant à la question d'argent je ne la comprends pas. Je croyais que tout individu nommé maître de conférences à Paris devait débiter par 6000. (Cas Cartan, Guichard reste prof, à Clermont.) En conséquence je croyais que Vessiot ou tout autre aurait 6000 quitte à lui donner tout ce que l'on veut pour un service supplémentaire.

Et à ce sujet, mais subsidiairement, je vous rappelle que j'ai ici 6000 de l'Etat et 1200 de l'Université. Naturellement si

par surcroît je conservait ces 7200 je ne m'en plaindrais pas.
Mais il faut sérier les questions.

Bien à vous.

H. Lebesgue

CLX

Mardi, 5 juillet 1910

Mon cher Ami,

Je rentre de Niort et je trouve vos 2 lettres, elles me prouvent que Picard est bien pour moi et que Poincaré l'est aussi ce dont après tout je doutais. J'ai vu Poincaré et nous n'avons parlé que de Drach. Au commencement de la conversation, tout en parlant de Drach en termes sympathiques, il m'a semblé qu'il ne lui rendait pas justice ; je me suis efforcé de lui faire comprendre l'importance de la notion d'irréductibilité. Je n'y suis parvenu qu'imparfaitement parce que, cela ne vous étonnera pas de Poincaré : "Classer les problèmes, ce n'est pas les résoudre".

Mais j'ai obtenu qu'il regarde le mémoire de Drach⁸¹⁹. Il l'a fait devant moi, avec une rapidité stupéfiante. Presque le temps matériel de couper les pages et il appréciait cependant. Même, d'après ce que m'avait expliqué Drach, assez justement il me semble.

Je n'ai vu ni Darboux, ni Painlevé je vous l'ai dit.

Je crois que c'est de Goursat que les choses dépendent. On n'obtiendra rien d'Andoyer, quant à Painlevé il faudrait évidemment qu'il soit absent. (Car je ne crois pas au succès possible de Drach que Painlevé soutiendra sans le vouloir.)

Pour ce qui est de Drach, j'ai l'impression que sa candidature lui a été très favorable, qu'elle l'aurait été plus si, plus habile, il avait évité de soulever une question de personnes, étant donné surtout que Vessiot est sympathique à tous.

Pour la question traitement. Il serait injuste de me donner 9000 ; mais je ne serais pas fâché d'avoir 7500.

Que la question se règle au plus vite, grand Dieu.

Ci-jointe une photographie des enfants (faite par un de mes beaux-frères) pour que Mme Borel compare avec les enfants des Duclaux⁸²⁰. Mes malheureux petits ont la coqueluche en plein, mais nous ne les souffrons pas.

Amitiés et merci.

H. Lebesgue

CLXI

Dimanche, 10 juillet 1910

Mon cher Borel,

Comme la partie est à peu près certainement perdue, je ne crois pas risquer de la compromettre davantage en écrivant comme je viens de le faire à Goursat. Le résultat sera sans doute même.

Pour Painlevé, je ne sais que vous conseiller. Si vous lui parlez, dites lui :

- 1° Que Darboux est pour Vessiot parce qu'il a pris parti contre moi sans raison et ne peut se déjuger ;
- 2° Que Boussinesq est contre moi *a priori* à cause de l'âge ;
- 3° Que Koenigs est contre moi à cause de l'X⁸²² ;
- 4° Qu'Andoyer m'a dit qu'il y aurait unanimité pour Vessiot, car ses titres écrasent les miens ;
- 5° Que Goursat tient à affirmer que ancienneté = travaux,

Que dans ces conditions il lui appartient de savoir s'il veut faire l'appoint de ce groupe d'incompétents ou de rancuniers.

D'autre part, faites-lui envisager l'avenir de Vessiot à la Sorbonne. Les camouflets qu'il recevra en voyant titulariser avant lui Guichard et Cartan (et dans combien de temps ?).

Mettez en parallèle la situation que Vessiot pourrait avoir comme Inspecteur Général, grâce à la haute influence de Painlevé, Dites que l'influence scientifique de Vessiot à la Sorbonne sera évidemment nulle et qu'au contraire il peut avoir une très grosse, très utile et très désirable influence (se haussant à la hauteur d'une influence sociale) dans le poste d'Inspecteur général, que l'importance de cette influence justifie qu'on fasse un peu violence au désir actuel de Vessiot, d'autant qu'on lui assurerait ainsi

mieux financièrement. Cela je le pense entièrement et si je me reconnaissais les qualités nécessaires pour un poste d'Inspecteur général, c'est ce poste que je briguerais.

Je tends à croire qu'il vaut mieux que vous lui parliez ; cependant s'il n'allait pas à l'Institut il y aurait de fortes chances qu'il n'aille pas à la Sorbonne. Je ne sais que vous conseiller, ce que vous ferez sera bien.

Etant donné le genre de motifs qui font voter les gens pour Vessiot, je vous conseille de ne pas voter pour Vessiot au second tour. Il ne manque pas d'autres procédés pour prouver à Vessiot que l'on n'a pour lui que des sympathies personnelles et l'empêcher de croire à une méconnaissance complète de ses réelles qualités.

Bien à vous et merci à l'avance.

H. Lebesgue

CLXII

Mardi 12, 10 h matin

Mon cher Ami,

Merci beaucoup de vos nouvelles. Elles sont en somme excellentes auprès de ce que j'attendais. Avant en somme 6 voix contre 5 j'ai tout de même de grandes chances de passer et puis, d'après ce que je connais du caractère de Vessiot, il se peut fort bien qu'il ne veuille pas profiter d'un appui non mathématique. (Oh ! il ne faudrait pas le blâmer s'il acceptait.)

Montel m'écrit, avant la séance, une lettre très pessimiste dans laquelle il me dit que vous vous êtes attrapé avec Painlevé. J'espère que ça n'a pas aigri les choses au point que le *député* Painlevé intervienne. Mais je ne le crois pas, il faudrait trop que Painlevé sorte de son caractère ordinaire.

J'écris un mot de remerciements à Picard. J'écris à M. Appell à peu près : Borel me résume la séance en quelques lignes. Il me semble que je puis interpréter le résultat 6 voix contre 5 à Vessiot. Me conseillez-vous d'essayer, du 25 au 29 juillet (entre Bordeaux et Nantes) de demander une audience à M. Liard.

Je vais annoncer le résultat à Drach ; je supposerai ou qu'il

a retiré sa candidature ou que nos partisans se sont entendus sur celui qui leur paraissait pouvoir le mieux battre Vessiot.

Voici *actuellement* mon horaire : Poitiers jusqu'au 16 au matin.

Marseille du 18 au 20 matin ;
Toulouse du 21 au 22 soir ;
Bordeaux du 23 soir au 24 soir ;
Poitiers du 25 au 27 ;
Nantes du 28 soir au 2 août ;
La Flèche du 3 au 9 août ;
Paris du 10 au 1er septembre ;
etc.

Mais tout cela sera bouleversé plus d'une fois. Dans chaque ville mon adresse est Commission de St Cyr au Lycée, sauf Bordeaux (Faculté des Sciences) et La Flèche (Prytanée).

J'espère que maintenant le mauvais temps est fini et que vous allez jouir de vos vacances.

A vous et merci.

H. Lebesgue

Pourquoi n'y a-t-il pas eu vote ? Est-ce parce que maîtrise de conférences ?

En tous cas on peut peut-être tirer argument de ce que Guichard lui aussi n'a eu que 6 voix sur 11 au premier tour.

Est-ce pour ménager la susceptibilité de Vessiot ou Darboux ou Painlevé ?

CLXIII

Poitiers, mercredi soir

Mon cher Ami,

Je passerai chez vous demain à 2 h 1/2 à moins que vous ne me donniez contrordre par pneumatique:

26, rue d'Angoulême
chez Mme Dallet⁸²³

où j'arriverai vers midi 1/2.

Je ne pourrai rester à Paris que le vendredi et un peu du samedi.

A vous.

H. Lebesgue

CLXIV

Poitiers, le 15 juillet 1910

Mon cher Borel,

M. Appell m'a écrit qu'il me présentait, mais, très prudent, il ne dit pas un mot du résultat final ni de l'époque à laquelle on pourra être fixé. Si vous avez quelque tuyau sur ce dernier point, envoyez-le moi.

Maurain a reçu de Liard un mot lui annonçant sa nomination en principe ; pour lui, la chose est donc certaine. Maurain est un ami si sûr, si égal et si modeste qu'on ne peut que se réjouir de son succès. Je crois que personne ne critiquera vivement sa nomination.

Il n'en sera pas de même de la mienne et ce que vous me dites du laïus de Darboux me le fait apparaître très modéré, mais assez venimeux.

Ma lettre à Goursat ne contenait aucune injure ; je n'injurie que les gens pour lesquels j'ai une haute estime ou ceux pour lesquels je n'en ai aucune. J'ai reçu de lui, après la séance, un mot fort aimable et je lui réponds en lui disant deux mots de St Cloud⁸²⁴.

Je m'arrête Denjoy vient d'arriver chez moi ; dites-moi tout ce que vous savez ou saurez, de mon côté je vous tiendrai au courant.

Bien cordialement.

H. Lebesgue

Qu'il doit faire bon se reposer et moi qui commence à travailler le 18.

CLXV

Ault-Onival, Villa Marie Constance,
Somme

Onival, le 15 septembre 1910

Mon cher Ami,

J'ai enfin fini ma tournée depuis une semaine, Avant de rejoindre ici ma famille (dans ce charmant pays où il fait un froid horrible et un vent effrayant), j'ai fait un détour par Poitiers où j'ai été voir Bernard.

Lorsqu'il est parti à Paris voir le docteur Guimard (?), il avait presque chaque jour le soir 38°. Le voyage l'a beaucoup fatigué et le diagnostic du docteur l'a beaucoup impressionné. De sorte que de retour à Bouillet (la campagne où il est installé près Poitiers) il a été pris pendant huit jours d'un fort accès de fièvre de tuberculeux. Puis 8 jours de calme, pendant lesquels il a eu la visite des Perrin et voilà 3 semaines qu'il ne se lève même plus. Il atteint chaque soir 39°3 à moins qu'à force d'anti-pyrine il ne réussisse à arrêter sa fièvre vers 38°5.

Le Dr Guimard est, d'après Bernard, un homme plein de santé, d'aspect antipathique, la figure pleine de pustules et qui semble éprouver un plaisir sadique à jouir de sa supériorité sur ses malades. Après avoir ausculté Bernard, il lui a déclaré qu'il avait le poumon gauche entièrement pris et que le droit se prenait, que dans ces conditions il n'y avait aucun espoir de guérison. Par la suite il a pallié cette condamnation en disant qu'avec un régime, des précautions, il pourrait enterrer ses médecins, et il lui a cité l'exemple d'un certain Grancher⁸²⁵, phtisiologue célèbre, qui, pris avec un excès de noce, d'une tuberculose évolutive avait vécu à la campagne tout en travaillant jusqu'à 67 ans.

A bien réfléchir, le diagnostic n'était donc pas une condamnation définitive, mais il n'était guère rassurant et Bernard, qui se flattait de l'espoir d'avoir la forme bronchite tuberculeuse et qui ne redoutait rien tant que la forme évolutive, la forme qui conduit aux cavernes et à la lente agonie après une vie d'infirmes, a été désolé de se voir précisément dans ce cas.

Il semble d'ailleurs que la forme de tuberculose ait varié.

On ne parle pas encore de phtisie galopante (sauf Bernard), mais tout le monde la craint et le médecin de Poitiers, un brave homme très optimiste, a cru devoir prévenir qu'au train dont allaient les choses il craignait une issue fatale et d'ici peu de temps.

Il faut entendre Bernard causer de son état : "J'ai actuellement dans le poumon gauche deux ou trois furoncles gros comme des noix qui se vident. Je remplis trois fois ce crachoir par jour, c'est de là que vient tout ce pus. J'en arrive donc à la période caverneuse, la troisième période de la tuberculose. Si comme Roland (le docteur de Poitiers) me l'affirme ma fièvre est due uniquement à cette formation, si ce n'est le poumon droit qui se prend en totalité, je puis espérer que, les cavernes formées, elles se cicatrisent plus ou moins et que j'ai un répit de fièvre. Répit que le repos et le régime pourraient peut-être prolonger assez pour que j'arrive à cette quasi-guérison que m'a fait entrevoir le Dr Guimard.

Si ce n'est pas cela, si je continue à me brûler comme je le fais actuellement, c'est la phtisie galopante ; j'en ai pour 3 mois. Et trois mois stupides ; actuellement je pourrais encore travailler 3 heures par jour, mettre de l'ordre dans mes papiers, laisser quelque chose que d'autres pourraient comprendre. Mais ce ne serait qu'au prix d'accès de fièvre terribles et je n'atteindrais certainement pas ce répit espéré.

Et après ces 3 mois, quelle horrible mort ! J'ai vu mourir ma soeur, ce n'est pas drôle." 1155

Est-on encore fondé à espérer un arrêt ? Je crains que non, mais il y a des exemples de guérison clinique à tous les degrés et il faut malgré tout espérer. Leur espoir serait que Bernard aille assez bien pour qu'il puisse s'installer à Mauroc. (Une propriété qui a été dévolue à l'Université pour y installer une station genre Fontainebleau et où, pendant les vacances, on a aménagé un pavillon pour loger Bernard et sa famille.) Là, si le mieux persistait, Bernard aurait un laboratoire chez lui et la possibilité de travailler aiderait certainement à son rétablissement. Mais Bernard est gêné par l'éventualité "d'aller s'installer dans une maison de campagne, comme diront les bons collègues, sans y rien pouvoir faire".

Au début, Bernard et Mme Bernard prendront un congé, La

première chose à obtenir serait que Bernard ait au moins 6 mois à traitement plein. Après on verra.

Si par hasard, vous pouvez, en venant de vacances, passer par Poitiers, je crois qu'il serait plus rassuré s'il se rendait compte que ses amis penseront à sa femme et à sa mère ; bien qu'il soit assez difficile avec lui de parler des questions matérielles. A la vérité il y a ici Cavalier qui fera tout le possible et Garbe qui y met toute la bonne volonté possible ; mais Bernard est prêt à regimber contre tout ce qu'il considère comme une faveur administrative.

Le petit Bernard va bien en ce moment, il marche à peu près seul, digère bien sans prendre une nourriture extraordinairement spéciale. Il est fort gentil, très amusant. De temps à autre on l'installe sur un tapis avec quelques jouets pour que son père s'amuse à le regarder, mais ces derniers jours ce spectacle crevait le coeur de ce pauvre Bernard qui se refusait à voir le petit Francis.

J'ai demandé une audience à Bayet, rien de nouveau.

J'ai vu le général Sarraïl très aimable et ne prenant pas les choses au tragique, mais le ministre nous a blâmés officiellement Guichard et moi.

Bonne fin de vacances, amitiés.

H. Lebesgue

CLXVI

Paris, le 7 octobre 1910
26 rue d'Angoulême

Mon cher Borel,

La situation de Bernard a beaucoup empiré depuis ma dernière lettre. Il n'a pas cessé depuis d'être très fiévreux, il a eu des crachements de sang abondants. Cependant depuis 4 ou 5 jours, du mieux se manifeste, la fièvre a tendance à diminuer ; il semble par une lettre adressée à Magrou⁸²⁶ qu'il ait quelque espoir qu'il n'ose cependant pas avouer. On doit le transporter dimanche en automobile de Bouillet au laboratoire de Mauroc.

Vessiot ne peut pas encore crier victoire, mais il n'est que temps que je me prépare à l'idée de ma défaite. Bayet ne dit pas qu'il est nettement favorable à Vessiot, mais il refuse d'entendre parler de moi ou presque. Il y a quelques jours, MM. Appell et Picard dînaient avec lui à Chantilly, à un essai de conversation il s'est contenté de répondre : "Vous voulez donc que Vessiot se suicide ?" (traduction Picard peut-être), puis il a détourné la conversation. A moi il s'est borné à me dire qu'il était tenu à la plus extrême réserve et je suis parti heureux d'avoir recueilli un si précieux renseignement.

Bayet connaît Vessiot et le père de Vessiot était accointé au Ministère. Puis il y a Painlevé.

M. Appell a remis à Bayet une note très précise, il a demandé à Bayet de présenter cette note au ministre et de demander au ministre de le recevoir avec M. Picard avant la nomination ; il semble même qu'il y ait peu d'espoir d'obtenir la maigre satisfaction que mon cas soit au moins plaidé.

Picard me disait : "Il y a peut-être encore un petit espoir, mais il ne faut guère espérer et le mieux est que vous considériez cette aventure comme ayant eu au moins l'avantage d'obliger les gens comme Darboux ou Goursat à réfléchir à la valeur de vos travaux".

Je ne méconnaissais pas cet avantage, mais j'avoue que j'avais espéré mieux comme succès que "d'avoir fait réfléchir Darboux".

Enfin, quoi qu'il arrive, je prends l'engagement de ne pas me suicider. Vessiot se suicide, quant à Koenigs je pense qu'il va reparler de sa mort prochaine pour obtenir une voix de plus lors du remplacement de Maurice Lévy⁸²⁷ à l'Institut.

Il semble que Maurice Lévy ne laissera rien dont Montel puisse profiter. Une place de répétiteur à Centrale aurait cependant bien fait son affaire et lui aurait permis dès maintenant de quitter le Taupin, quitte à chercher mieux ou plus par la suite. (L'état des yeux de Montel ne s'est pas amélioré au contraire ; il avait rendez-vous avec Dufour le célèbre oculiste de Lausanne ; Dufour⁸⁵⁰ est mort subitement 2 jours avant le rendez-vous et Montel a perdu presque le seul espoir qu'il avait d'arriver à savoir quelle est sa maladie et de pouvoir par suite la soigner.)

J'ai fait avant-hier la connaissance de M. et Mme Otto

Blumenthal⁸²⁸.

Relativement à un voyage possible de vous à Poitiers : je ne puis guère rien vous dire avant d'avoir revu Bernard et sa famille. Je ne sais pas encore ce que nous allons faire et quand je partirai d'ici, mais ce sera sans doute avant votre retour.

Bonne fin de vacances.

H. Lebesgue

CLXVII

Poitiers, le 23 octobre 1910

Mon cher Ami,

J'ai repris mon service ici le 17 octobre à 7 h moins le quart du matin. Et depuis je surveille, corrige et interroge tout en attendant la nouvelle de la nomination définitive et officielle de Vessiot.

Vous serez bien aimable de me tenir au courant des détails agrémentant la conclusion de cette histoire héroï-comique.

A vous.

H. Lebesgue

CLXVIII

Poitiers, le 27 octobre 1910

Mon cher Ami,

Expliquer-moi comment il se fait que M. Picard n'ait pas été chez le ministre. Était-il absent ou empêché ? Ou le ministre a-t-il refusé de convoquer Picard ?

J'espère que la fêlure ministérielle ne va pas retarder encore les choses. Je ne suis pas le seul dans l'attente. Je reçois des tas de demandes de renseignements : Zoretti, Boutroux, Denjoy, Husson, Dulac. Ce dernier est le plus amusant ; il vient de déménager et il ne veut pas s'installer avant la nomination, car, le cas échéant, il briguerait Lyon. Dulac me console par avance en me

disant qu'on parle d'une vacance prochaine. J'apprends ainsi qu'on n'a pas cru devoir changer d'arguments quelques trousés qu'ils soient.

Bernard continue à aller mieux. La crise grave a duré jusque dans les tout premiers jours d'octobre, elle s'est terminée par une abondante hémoptysie qui n'a complètement cessé qu'au bout de 8 jours. Depuis il n'a plus de fièvre violente, il peut se lever et marcher un peu dans son domaine. Mais il est extrêmement nerveux, pointilleux, et il s'excite à mettre des obstacles contre toutes les combinaisons aimables de Garbe et Cavalier.

Son fils va bien ; sa femme n'est pas florissante, ça se comprend trop bien.

A vous.

H. Lebesgue

CLXIX

Poitiers, le 29 octobre 1910

Mon cher Ami,

Comme vous le voyez je me console par l'alcoolisme⁸²⁹. Votre formule est nouvelle pour moi ; il y a trois semaines j'écrivais à Picard : le ministère attend que l'un de nous deux (Vessiot ou moi) meurt, il nommera le suivant, Mais votre hypothèse est à envisager. Cependant je crois plutôt que Doumergue⁸³⁰ se sert de tous ses atouts pour mater un pontife des socialistes indépendants et moi je ne serais pas étonné que la solution de notre affaire ne vienne qu'après l'interpellation. Ce que vous me dites des dispositions de Painlevé me semble devoir modifier mon appréciation sur mes chances; je les coteais $\frac{1}{1000}$, je les cote $\frac{1}{100}$.

M. Appell n'a pas eu le temps de m'écrire au sujet d'une histoire de demande d'audience à Liard qu'il devait éclaircir. Voulez-vous l'interviewer à ce sujet et me renseigner ; cette histoire m'intrigue.

Bernard a de la fièvre depuis 2 ou 3 jours, Peut-être n'est-ce que momentané.

Recevez, vous qui êtes Parisien, le témoignage de mon

admiration pour une si grande faveur du destin.

H. Lebesgue

CLXX

Poitiers, le 31 octobre 1910

Mon cher Borel,

Painlevé a voté contre le ministère, j'ai donc 1 chance sur 100 ; à l'heure actuelle c'est *peut-être* fait et je n'en ai *peut-être* plus. Cependant comme Bayet ne se décide pas rapidement il n'a *peut-être* pas fini de reconstruire la Faculté de Toulouse et ça traînera *peut-être* encore.⁸⁴⁵

Je ne comprends pas quels tuyaux vous espérez de Painlevé et bien entendu vous n'avez pas l'intention de le pousser à dire à Doumergue : "Nous allons voir si vous agissez par vengeance ou non"⁸⁴⁷.

Je me relis, je trouve 4 peut-être, ça vous indique mon état d'esprit.

A vous,

H. Lebesgue

CLXXI

Poitiers, le 2 novembre 1910

Mon cher Borel,

Dès que vous saurez quelque chose, dites-le moi. Tout plutôt que cette attente morne. D'autant plus pénible que ma femme ayant été retenue à Paris au moment de mon retour ici par un malaise de mon bébé, je suis seul ici à me morfondre. Se morfondre à deux est plus intéressant, mais, dans l'espoir d'une solution qui depuis plus d'un mois ne saurait tarder, ma femme n'est pas encore venue me rejoindre.

Je connais Madame Gambier⁸³¹. A Brest Béghin⁸³² lui donna quelques notions superficielles. A Rennes j'élargis un peu ses

connaissances, c'est à son mari qu'il appartenait seul d'approfondir les études. Je pense qu'il n'y a pas manqué.

Ayant profité comme il convient de l'occasion d'égrener quelques sous-entendus, j'ai ajouté que l'agrégation de Mme Gambier ne me paraîtrait pas justifier suffisamment la nomination de Gambier à un poste de chargé de cours avant Lattès. Je sais bien que Gambier a travaillé le Painlevé, mais ça n'est pas une raison suffisante.

Sans doute Lattès, il y a quelque temps, induit en erreur par Fabry qui lui avait dit que la retraite de Jordan était presque imminente et que lui Fabry était assuré d'être nommé à la quasi-unanimité, avait déclaré ne pas vouloir quitter Montpellier. Mais il est revenu de son erreur et j'estime que c'est bien trop que Fréchet eut été nommé avant lui qu'il ne faut pas de Gambier en plus. Le mouvement qui irait bien, je le crois du moins, à Lattès est le suivant : Vessiot à Paris, Dulac à Lyon, Lattès à Alger, d'où d'ailleurs la régularisation de la situation de Denjoy actuellement en dehors des cadres de l'Etat.

Dulac demandera Lyon, si Lyon devient vacant. Je viens de lui télégraphier et de lui écrire d'agir de suite, qu'il avait un concurrent.

Le mouvement dont je parle ne profiterait pas à Gambier et je le regrette pour lui et sa femme, mais je pense plus juste que Lattès passe d'abord. D'ailleurs à juger les choses de loin, et sans renseignements suffisants peut-être, je pense que la situation est acceptable momentanément pour les Gambier. Il y a à Rennes des cours secondaires où Mme Gambier peut être et est sans doute employée. C'est dans cette situation qu'ont été les Maurain tant qu'ils ont été à Rennes, avec en plus ceci que Mme Gambier, sans être sans doute bien riche (fille de boulanger de Brest je crois), n'est pas dans la purée. Je pense donc - sous réserve de renseignements plus précis - qu'il n'y a pas plus lieu d'avoir de la pitié pour eux que pour Vessiot.

D'ailleurs il me paraît probable maintenant que Boutroux prendra un congé après sa titularisation. Alors, ou Gambier pourrait aller le suppléer, ou on s'arrangerait pour nommer Husson et Gambier irait à Caen. Dans les deux cas il s'agirait d'une ville avec lycée de filles.

Votre explication sur Liard est insuffisante. Il aurait du me répondre : "Je suis très occupé par tels comités, impossible de vous recevoir en ce moment, d'ailleurs je me fous de la question". Ne pas l'avoir fait c'est de la goujaterie partielle.⁸⁴⁶

A vous,

H. Lebesgue

Je continue à m'alcooliser.

CLXXII

Poitiers, le 3 novembre 1910

Mon cher Ami,

Mme Borel exagère, je n'en suis pas encore aux télégrammes affolés, mais seulement à la lettre mélancoliquement anxieuse autant que journalière. Je suis dans la situation du Monsieur qui attend son tour chez le dentiste.

Continuez à m'envoyer les précisions (?) que vous pouvez obtenir, c'est fort intéressant. Ce que je trouverais de plus violent ce serait que Vessiot sache quelques jours avant moi qu'il est nommé. Et c'est possible car lui le saura par les félicitations de Bayet et moi seulement après que les papiers retour du Rectorat seront arrivés à la Faculté des Sciences de Paris.

Que vous a dit Drach du succès probable (très, hélas) de Vessiot ?

A vous,

H. Lebesgue

CLXXIII

Poitiers, le 4 novembre 1910

Mon cher Ami,

Merci de votre lettre, confirmée par une de Boutroux. D'après mes tuyaux c'est la deuxième fois que ma nomination est à la signature sans être signée ; jamais 2 sans 3.

Je suis calme parce que, sauf les tout premiers jours, je n'ai jamais très sérieusement compté sur rien. Les appuis amicaux de Vessiot me paraissent très importants. Même j'agaçais quelque peu mes collègues de St Cyr en mettant toujours des si quand la conversation venait sur ce sujet.

J'ai appris depuis ma lettre d'hier, et j'allais vous écrire à ce sujet, que la situation des Gambier n'était pas celle que j'imaginai. Cavalier m'a fait remarquer que les postes de lycée de Rennes (car il y a un lycée depuis mon départ) étaient pris par Mmes Martin et Vacher⁸³³, et il m'a dit d'autre part qu'il ne croyait pas que la situation financière des Gambier soit très brillante. Ceci et ce que vous me dites me fait mieux comprendre leur embarras et leur anxiété. Tout en reconnaissant qu'il faut s'efforcer de leur donner satisfaction je crois cependant que Lattès doit passer le premier.

Je ne connais pas la thèse de Traynard⁸³⁴, mais je connais les travaux de Lattès qui sont fort bons. Je ne connais qu'un des termes du problème et je ne veux pas, comme Darboux, éliminer l'autre pour des raisons d'ancienneté et cependant je suis tenté de le faire.

Car je sais les travaux de Lattès tous bons et d'autre part plus nombreux que ceux de Traynard et puis il a ses traductions⁸⁵³ non négligeables, enfin il a beaucoup d'ancienneté ; il est de 1892 à l'Ecole, l'année d'avant Husson, Or voyez, on a nommé Husson vivement bien qu'il ait eu moins de travaux que Lattès.

Sans décider entre Traynard et Lattès, j'appelle l'attention sur le cas de ce dernier qui me paraît, à moi mal renseigné, le plus intéressant.

Lattès a épousé une Montpelliéraine et, comme renseigné par le seul Fabry il croyait au départ prochain de celui-ci, il a parlé de rester à Montpellier. Mais un voyage à Paris a suffi à lui faire comprendre que Fabry se faisait pas mal d'illusions et il est décidé à aller chercher, ailleurs qu'à Montpellier, sa titularisation.

Alger lui plairait-il ? Montel, qui le connaît beaucoup mieux que moi et qui l'a vu au cours des vacances, affirme que Lattès serait content de retourner à Alger. En tout cas j'ai écrit à Lattès, s'il veut Alger il le fera savoir.

Bien à vous et merci.

H. Lebesgue

Si vous me télégraphiez, je suis à la Faculté presque toute la journée de 10 h le matin à 6 h le soir. Je pars de chez moi vers 9 h 1/2 du matin pour y rentrer le soir à la même heure, sauf lorsque j'ai des rendez-vous avec des fumistes ou autres ouvriers. Je vais peut-être avoir enfin une bonne d'ici 2 ou 3 jours, je vous préviendrai alors que je reste plus chez moi.

CLXXIV

Poitiers, le 5 novembre 1910

Mon cher Ami,

Merci de vos tuyaux.

Si M. Appell est appelé chez le nouveau ministre dites-lui d'insister sur ceci : Le *seul* argument qu'on a jamais fait valoir pour Vessiot est le suivant : pour Vessiot c'est la dernière fois.

Je prétends que c'est tout autant la dernière fois pour moi. Ou bien en effet, ce qui est improbable, il se produirait une vacance d'ici 1 ou 2 ans et ce ne serait la dernière fois ni pour l'un ni pour l'autre ou bien non. Mais alors mon passage à Paris entraînerait pour moi une perte d'argent que je ne pourrais supporter d'autant que pour les rabiots indispensables à la vie et pour la titularisation j'aurais en Vessiot un concurrent certain d'avance de me battre à cause de son âge.

Et encore je suppose qu'à une prochaine fois ce serait moi le candidat désigné *par le Doyen !!*

Merci et bien à vous.

H. Lebesgue

CLXXV

Poitiers, le 6 novembre 1910

Mon cher Borel,

Ce n'est pas de ma faute si Dulac rapporte inexactement ma lettre. Je lui disais que j'avais très peu d'espoir et qu'il ferait bien de ne pas attendre la nomination pour manifester son désir.

Mais, puisqu'ont de l'importance les choses auxquelles je n'en vois aucune, je vous rapporte un entrefilet fidèle paru dans la *Solidarité* et qu'un professeur du lycée m'a communiqué à midi (je ne garantis pas le mot à mot). C'est le n° du 1er novembre.⁸³⁸

En Sorbonne, La succession de M. Raffy continue à être très disputée par M. Vessiot de Lyon (promotion 1884) et M. Lebesgue de Poitiers (promotion 1894). M. Borel, gendre de M. Appell, a fait une campagne acharnée contre M. Vessiot dont la nomination barrait la route à des ambitions futures ; il a décidé M. Picard à faire un rapport défavorable contre M. Vessiot et très élogieux pour M. Lebesgue dont le mérite est d'ailleurs reconnu. Mais comme il y a eu quelques absences et des machinations un peu irrégulières il se pourrait que le ministre ne ratifie pas le choix de la Sorbonne.

Ce poulet est signé S.S. ; je ne pense pas qu'il y ait à s'en préoccuper outre mesure (ce qui est souligné est certainement incorrect comme mot à mot mais c'est l'esprit, si j'ose dire).

Vous ai-je dit que j'avais vu Blumenthal à Paris en octobre, Il m'a parlé d'une démonstration de Brouwer⁸³⁵ sur l'impossibilité d'une application entre des continus à n et à $n+p$ dimensions. Je lui ai alors communiqué une démonstration très simple. Tout cela doit paraître incessamment dans les *Math. Ann.*⁸³⁶, J'ai peur que ça ennuie Baire.

Bien à vous et merci.

H. Lebesgue

Merci aussi de "toutes les idées baroques qui vous passent par la tête". Il n'y a pas que moi qui écrit des choses tendres.

CLXXVI

Poitiers, le 7 novembre 1910

Mon cher Ami,

M. Appell me lave la tête épistolaiement.

A partir de demain j'ai une bonne et c'est chez moi qu'il faudrait me télégraphier.

Reçu de Boutroux avis que sa candidature cesse d'être le secret de Polichinelle. Ce bon Boutroux aime trop le mystère ; il paraît que je ne l'aime pas assez.¹¹⁵⁷

Cordialement,

H. Lebesgue

CLXXVII

Poitiers, le 8 novembre 1910

Mon cher Ami,

La façon dont vous caractérisez votre correspondance est fort bonne, aussi n'ai-je relevé votre phrase que parce qu'elle m'a amusé n'étant pas de votre façon habituelle. Mais elle ne m'a froissé aucunement, il faut beaucoup plus que cela pour me froisser puisque je n'ai même pas relevé votre injurieuse comparaison avec Koenigs. Et cependant qu'elle est injuste: Je n'accuse pas Liard de machinations ténébreuses, mais je dis seulement que ce n'est pas la première fois qu'il a à se décider entre un individu qu'il connaît et un dont il ne connaît que le nom. Comme il est philosophe, il s'est assez analysé pour avoir remarqué que, pour lui comme pour tous les autres humains, cela crée une inégalité entre les deux individus. Que par suite il doit s'efforcer de connaître la tête de l'autre type. Que si cependant il ne le fait pas il doit au moins ne pas recevoir non plus celui qu'il connaît déjà.

Mais même je ne demandais pas tant ; j'aurais désiré seulement qu'il écrivit au crayon bleu sur le coin de ma lettre *répondre* : *impossible* et un séide quelconque m'aurait expédié une

réponse de politesse.

Un type comme Liard, qui a aussi conscience de sa puissance que lui, devait comprendre qu'une inégalité de traitement de report entre les candidats peut être interprétée. Même s'il dit qu'il se désintéresse de la question, ce qu'il dit un peu tard d'ailleurs.

J'aurai votre Journal ce soir. Je pense que les ambitions futures⁸³⁸, c'est Drach. Si ça veut dire quelque chose.

Quant à la question de savoir si Vessiot a les qualités morales désirables chez un Inspecteur de l'Enseignement secondaire, je me le suis demandé comme vous.

Il est certain que j'avais une plus haute opinion de lui puisque je le croyais incapable de ne pas s'incliner devant l'avis de la Sorbonne, mais il faut se garder de conclure hâtivement, car on peut être excellent inspecteur sans être un surhomme.

Et maintenant. Ma nomination a été à la signature, ça veut dire je pense qu'il y avait un papier portant mon nom qui attendait la signature du ministre. Ce papier est-il encore à la signature ? ou Bayet l'a-t-il retiré, ou a-t-il mis à la signature 2 papiers un en mon nom, un au nom de Vessiot ? Avez-vous quelque précision ?

Boutroux s'est décidé à affirmer par lettre à Garbe et à Cavalier son désir d'être nommé ici si la place devenait vacante. Ni l'un ni l'autre n'y voient d'inconvénient, au contraire. A condition toutefois que Boutroux ne vienne pas ici pour prendre un congé au 1er janvier. Garbe et Cavalier trouveraient cela détestable et ils n'auraient peut-être pas tout à fait tort.⁸⁵⁷

Pour ménager Fréchet, qui est menacé d'être sans élève et qui à cause de cela voudrait bien faire de l'analyse, on proposera sans doute un arrangement intérieur des cours d'après lequel les candidats à l'analyse et à la mécanique devraient fréquenter les cours des 2 professeurs. Je crois qu'en principe cela est excellent et je suis certain que Boutroux n'y verra pas d'inconvénient,

A vous,

H. Lebesgue

CLXXVIII

Paris, le 10 novembre 1910
26 rue d'Angoulême

Mon cher Ami,

Je ne pourrai aller demain à St Cyr. Faites mes amitiés à Maurain et à Duclaux et croyez moi votre dévoué.

H. Lebesgue

CLXXIX

Paris, 15 novembre 1910
(cachet de la poste)

J'approuve entièrement la façon dont Boutroux pose la question ; seulement il serait illusoire que je sois le plus payé ; ça ne durerait pas 3 mois.

La nomination simultanée n'a aucun intérêt, qu'un intérêt d'amour propre pour Vessiot. Mon antériorité de nomination ne pourrait jamais me servir à le battre, mais à obtenir seulement qu'on ne me laisse pas trop loin derrière lui.

A vous.

H. Lebesgue

CLXXX

Poitiers, le 15 novembre 1910
(cachet de la poste)

Soyons pratiques, mon cher Ami, et gageons que l'on nommera Vessiot avec un traitement (oh pas de chinoiseries et de distinctions en indemnité, supplément et autres) au moins égal à celui qu'il a à Lyon et qu'on m'offrira 6000.

A vous.

H. Lebesgue

CLXXXI

Poitiers, le 16 novembre 1910
(cachet de la poste)

Mon cher Ami,

Décidément vous refusez de me comprendre. Je n'ai jamais douté que MM. Appell, Picard, Poincaré et Borel se souviendraient qu'ils m'avaient proposé avant Vessiot (et je leur suis reconnaissant d'avoir saisi l'occasion de l'affirmer), mais du point de vue pratique (auquel vous me conviez à me placer) ça ne m'avance en rien. Sans doute en disant cela j'ai l'air de mettre en doute leur puissance, mais certes je la mets en doute et je ne crois pas les insulter pour cela, car je crois que la puissance n'appartiendra pas de longtemps aux plus dignes, de même que je crois que la majorité sera longtemps encore formée d'imbéciles. Constaté, après qu'ils viennent seulement de remporter un demi-succès, qu'un adjutant pourrait ne pas nuire et même être indispensable à un succès futur, en quoi est-ce manquer aux convenances ?

Je comprends la mauvaise humeur de la maîtresse de maison qui ayant préparé de ses blanches mains un savoureux entremets s'en voit refuser sous prétexte de régime. Mais je ne la comprendrais plus si le refus avait été précédé de l'énumération des conséquences très graves et très probables de ce manquement de régime, insignifiant en apparence. Je comprends qu'on combatte mes raisons, qu'on me traite de fou, et je m'en étonne d'autant moins qu'on ne m'a jamais compris quand je disais que pour moi comme pour Vessiot c'était la dernière fois ; mais qu'on considère que je manque à des devoirs de reconnaissance parce que j'hésite avant d'engager ma vie dans ce qui me paraît une mauvaise voie, ça me paraît un peu gros. En vérité, si l'on doute autant de mes qualités morales on a eu tort de me pousser à un instant quelconque ; toutes les qualités mathématiques du monde ne rachèteraient un tel défaut.

Je n'ai pas écrit au Doyen en effet et j'aurais été mécontent (de moi-même) si mes lettres avaient influé sur ses actes. Que Liard ait agi suivant son droit et son devoir en intervenant qui en doute ? Mais qu'il ait mieux rempli son devoir en recevant le concurrent de celui en faveur de qui il se savait prévenu, qui

pourrait en douter ?

A vous.

H. Lebesgue

CLXXXII

Jeudi soir

17 novembre 1910

(cachet de la poste)

Mon cher Ami,

M. Appell me parle de l'avenir de la Science française, ce qui peut être une façon de se moquer de moi. M. Picard, lui, me traite de fou, mais j'aime mieux ces deux manières que la vôtre.

Eh quoi ! parce que, comme exemple des couleuvres qu'il me faudrait avaler, j'ai prévu une différence de traitement entre Vessiot et moi, vous m'accusez de chantage. Mais rappelez-vous donc que dans ma lettre précédente je demandais à être le premier nommé mais le moins payé. Je n'ai jamais eu la naïveté de m'étonner qu'on puisse laisser 3000 F disponibles pour les donner à Vessiot s'il était nommé, à d'autres qu'à moi s'il ne l'était pas. J'avoue volontiers qu'en cas de nomination simultanée je trouverais plus violent que Vessiot soit nommé sans diminution de traitement et qu'on m'en propose une à moi. Et je n'hésiterais pas une minute avant de relever le fait. Mais si c'est cela que vous appelez du chantage, nous ne parlons pas la même langue.

Certes j'ai des préoccupations financières, mais pas pour le moment, pour plus tard. Et vous qui me parlez de mes devoirs vis-à-vis de ceux qui m'ont soutenu, vous ne serez sans doute pas étonné que je considère ces préoccupations comme un devoir vis-à-vis des miens. Ah ! si l'on n'avait à la fois qu'une sorte de devoirs ce serait souvent plus simple.

Si je ne constatais pas autant la baisse de mon imagination mathématique ce serait fort simple. Je serais assuré, je ne dis pas de battre Vessiot ce qui m'est indifférent, mais d'arriver à conquérir une situation stable et acceptable et alors j'aurais peut-être assez confiance en moi pour croire à mes devoirs vis-à-vis de la Science.

J'attends Langevin, je n'ai pas reçu le télégramme de lui, j'ai bien peur qu'il ne vienne pas. J'aurais été fort heureux de l'avoir en ce moment.

A vous.

H. Lebesgue

CLXXXIII

Poitiers, le 19 novembre 1910

Mon cher Ami,

Vous n'avez convaincu personne et c'est ma femme seule, qui désirait vivement Paris et qui cependant m'approuvait, qui a gagné la bataille. Je crains bien, pour que vous me jugiez sage, d'agir en somme comme un fou, mais enfin c'est décidé. J'accepterai d'aller dans la fournaise parisienne si toutefois on ne prétend pas me nommer après Vessiot, comme Boutroux en envisage la possibilité dans une lettre qui vient de recevoir le Doyen.

Il n'y a de vrai que ce que m'a écrit Picard : que je n'avais plus la liberté d'agir suivant ce qui me semblait raisonnable et que les choses étaient tellement machinées que, pour tous, on me donnait ce que j'avais demandé. Mais ce n'était pas là de quoi me décider, bien au contraire. Enfin, laissons tout cela.

Je reçois de Lattès une lettre disant : "La mort de Tannery ne va-t-elle pas changer les intentions de Borel et alors ne pourrais-je pas attendre à Montpellier le départ de Fabry." Vous voyez que ce ne sont pas les seuls parisiens qui ont pensé à vous placer à la sous-direction de l'École. Je connais mal les candidats possibles, mais il me semble que vous êtes le seul indiqué. Je ne sais ce qu'est maintenant l'École; si elle était ce que nous l'avons connue je vous conseillerais d'être candidat, il y aurait un rôle utile à jouer. Quant à vos scrupules sur l'Administration... Je ne sais pas au juste ce qu'est le travail administratif du sous-directeur et s'il est si absorbant que vous semblez le dire; je ne puis avoir un avis. Mais je crains fort que *La Revue du Mois* ne vous ait pris plus de temps que ne vous en prendrait l'administration de l'École pourvu que vous classiez mieux vos tiroirs. Et puis *La Solidarité* aurait là de si jolis sujets d'articles !!⁸³⁹

Mon cher Ami, ce n'est pas par coquetterie que je me dis en baisse. Je sais fort bien que depuis 5 ans je n'ai rien fait de nouveau ; j'ai fait (et Dieu sait au prix de quels efforts et parfois de quel ennui) des mises au point de vieilles idées. C'est à une place de Recteur que j'aurais dû être candidat, voilà mon niveau.

Je suis dégoûté des autres et de moi.

A vous.

H. Lebesgue

CLXXXIV

Poitiers, le 21 novembre 1910

Mon cher Borel,

Tant que je n'ai pas reçu de nomination je dois prévoir la nécessité de faire mes cours mercredi et jeudi ; ce serait après seulement que je pourrais vous voir.

J'avais en effet pensé à Brillouin (que je connais au reste fort mal) mais je l'avais écarté pour non titulaire à la Sorbonne. Je crois en effet que Brillouin est un homme possédant beaucoup de qualités de compréhension générale de Tannery. Et c'est pour cela que je le verrai plus volontiers briguer à l'Institut la succession de Tannery que celle de Gernez⁸⁴⁰.

A vous.

H. Lebesgue

CLXXXV

Paris, le 2 janvier 1911

Mon cher Borel,

Mes meubles ont fini par partir de Poitiers jeudi et vendredi. Nous sommes rentrés à Paris dans la nuit de dimanche. J'ai bien reçu votre lettre, je n'ai pas pris le temps d'y répondre de suite et je l'ai oubliée.

J'irai vous voir mardi ou mercredi. A vous. Voeux.

H. Lebesgue

CLXXXVI

St Mandé, le 19 janvier 1911

Mon cher Borel,

Je vous remercie de votre lettre. J'ai fait mardi ma conférence à 10 h. Et maintenant j'opérerai le jeudi à 1 h 1/2 ou 1 h 3/4 (??).

Je commence aujourd'hui, ça remplace ainsi la conférence du début de janvier.

Mes enfants vont mieux. J'ai été voir ma fille à Beauvais ; elle a une bronchite un peu forte, mais en bonne voie de guérison. Seulement le temps n'était guère favorable, 10 et parfois 14 au-dessous de zéro.

Ici le petit est presque complètement guéri, mais ne voit-il pas que mardi soir il était presque complètement sourd. Il paraît que ce n'est rien.

A vous.

H. Lebesgue

Nous espérons que Mme Borel a fait bon voyage, n'a pas raté l'arrivée du bateau et a trouvé son frère en bon état.

CLXXXVII

St Mandé, le 31 janvier 1911

Mon cher Borel,

Dreyfus⁸⁴¹ a perdu sa soeur, qui, tuberculeuse, était soignée au sanatorium de Bligny, par le fameux Guimard de Bernard.⁸⁵²

Depuis plus d'un an Dreyfus avait pris à sa charge les 2 enfants de sa soeur, quoiqu'il en ait deux lui-même de vivants. Il en a eu 6 (2 fois 2 jumeaux).

Il accepte avec sa pétulance ordinaire cette charge considérable et cela lui paraît évidemment tout naturel et ordinaire. C'est une preuve de qualités morales qu'il faut noter.

Je le crois d'ailleurs bon professeur, quoiqu'un peu tr pissant peut-être, et ce dont je suis sûr c'est de la conscience avec laquelle il fait son métier. Si donc vous pouvez un jour lui être utile (promotion ou autre chose) il faut le faire.

A vous.

H. Lebesgue

CLXXXVIII

St Mandé, le 23 mars 1911

Mon cher Ami,

Comme je demandais hier après la conférence de Russell comment il se faisait qu'on ne vous y avait pas vu, Montel m'apprit la mort subite de votre mère.

Vous constatiez il y a peu de temps, après la mort de Bernard, qu'il n'y a rien à dire de consolant à ceux qu'une mort vient d'affliger. Nous pourrons du moins vous témoigner notre bien vive amitié.⁸⁵¹

Vous savez que vous pouvez disposer de moi pour tous les remplacements qui vous seraient utiles ; je suis certain que vous ne l'oublierez pas.

La conférence de Russell⁸⁴² n'a eu que peu de succès ; ce qu'il a dit était fort obscur et peu nouveau, Il parlait cependant fort bien français et fort clairement, Mais il avait omis de définir ses termes "exister", "individus", "pouvoir", etc., de sorte que pour ma part je n'^{pas}ai bien compris ce qu'il voulait dire. Quelques philosophes, guère de mathématiciens : Vessiot, Cartan, Montel, Bricard, Fouché, Fatou, Bioche, moi, Cahen⁸⁴³, Levy de St Louis et je crois que c'était tout avec quelques élèves de l' cole.

Quand vous serez rentré je vous demanderai de me mettre en relation avec Blondel⁸⁴⁴.

Présentez nos amitiés à Madame Borel et croyez, mon cher Ami, à notre entière sympathie.

H. Lebesgue

CLXXXIX

Samedi soir

25 mars 1911

(Cachet de la poste)

Mon cher Ami,

J'irai lundi à l'Ecole puis déjeuner chez vous. Comme je vous le disais dans une lettre qui vous est peut-être parvenue avant votre départ de St Paul des Fonds, j'ai appris mercredi soir le malheur qui vous frappait.

Sans doute c'est une douleur bien imprévue que celle causée par un décès aussi subit et on a l'illusion que la douleur eût été moins cruelle si, pendant la durée d'une maladie, l'anxiété vous y eût préparé. Mais il faut songer que bien des vieillards ne disparaissent qu'après des mois ou des années de souffrances, de déchéance physique et parfois de mort intellectuelle. Que ceux qui les chérissent le plus se détachent d'eux peu à peu parce qu'ils ne sont plus eux-mêmes et que pour vous, du moins, le dernier souvenir que vous conservez de votre mère sera le souvenir sain des jours que vous avez passés auprès d'elle il y a un mois.

Je ne me fais pas d'illusion sur la faible vertu de mes consolations, mais je vous exprime ma bien cordiale amitié.

H. Lebesgue

CXC

Paris, 10 avril 1911

(cachet de la poste)

Donnez-moi votre adresse, je vous enverrai un énoncé.

J'ai vu Janiszewski⁸⁵⁹, il est évidemment aussi têtue et étroit d'idées qu'on peut le souhaiter. Evidemment pour lui rien n'est démontré quand il n'y a pas de symboles. Nous avons eu un fort attrapage parce qu'il se refusait à dire ce qu'il entendait par $\lim M$ (qui est pour lui la borne inférieure de l'ensemble dérivé des M et non pas la plus petite limite pour $n \rightarrow \infty$ ou $t = t_0$)⁸⁶⁰. Il s'y refusait parce que ça c'était un symbole ordinaire de

l'analyse et qu'il fallait être d'une ignorance crasse comme moi pour ne pas comprendre.

Il croit d'ailleurs qu'il y a beaucoup de choses dans sa thèse ; moi je ne trouve pas du tout. C'est une thèse allemande bien faite, surtout avec des idées d'autres, comme il convient.

Pour qu'il puisse passer cette année il faut qu'il se dépêche ; je lui ai dit de commencer ses démarches auprès des éditeurs avant même qu'il ne nous ait remis à nouveau son manuscrit, mais je ne sais s'il a fait des démarches officielles. Pour les recommandations, être très modéré, c'est trop long pour le contenu et pas lisible.

A vous, bonne santé à tous deux.

H. Lebesgue

CXCI

St Mandé, 7 avenue de la Tourelle
Le 2 mai 1911

Mon cher Ami,

Je ne puis encore préciser, mais ou j'irai déjeuner chez vous vendredi ou samedi ou je passerai chez vous un de ces jours, je vous préviendrai.

Après en avoir parlé avec Montel, il nous a semblé qu'on ne pouvait pas accepter la thèse de Janiszewski. Voici pourquoi : Janiszewski est pressé, or Montel ne peut prendre sur lui d'accepter un si gros morceau sans réunir le Comité de rédaction et ça remet Janiszewski à plus tard. D'autre part, la thèse de Janiszewski est assez particulière comme forme, elle pourrait effrayer certains gens qui paient encore leur cotisation on ne sait pourquoi. Et pour certains un prétexte de ce genre pourrait suffire pour lâcher la Société⁸⁶¹.

Mais Montel se propose de soulever à la prochaine séance du Conseil la question générale d'acceptation possible de thèses. Montel me dit d'autre part que les *Math. Annalen* voudraient des thèses françaises. Voyez si vous devez écrire de suite à Blumenthal. Il faudrait alors attirer son attention sur le fait qu'il

faut beaucoup d'exemplaires en très peu de temps. Je n'ai pas revu Janiszewski.⁹⁸⁰

J'ignorais l'existence de semblables compositions⁸⁶² et je ne comprends pas encore très bien. Mais peu importe. Votre sujet est de l'ordre de celui que vous me communiquez, plus long et plus difficile cependant, mais ça importe peu et puis, pour des compositions, on a 3 heures > $\frac{1}{2}$ 6 heures.

Seulement je crois qu'il vaudrait mieux remanier 3. On pourrait dire :

On définit une opération qu'on appelle multiplication fonctionnelle par le procédé suivant : $f(\lambda)$ et $g(\lambda)$ étant deux fonctions données, le produit fonctionnel de f par g , qu'on notera $f.g(\lambda)$, s'obtient en remplaçant, dans $f(\lambda)$, la variable λ par la fonction $g(\lambda)$. Si l'on effectue le produit fonctionnel de cette fonction $f.g(\lambda)$ par une autre fonction $h(\lambda)$ on obtient le produit fonctionnel de $f(\lambda)$, $g(\lambda)$, $h(\lambda)$ qu'on note $f.g.h(\lambda)$, et ainsi de suite,

Calculer les produits fonctionnels des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_6$ prises deux à deux ; vérifier que la multiplication fonctionnelle n'est pas commutative et montrer que le produit d'un nombre quelconque des fonctions φ_i est aussi une de ces fonctions φ_i .

Ce que je viens d'écrire là ne me satisfait pas, mais vous voyez ce que je veux dire : plus de précautions, de précisions pour ne poser à ces gens que des questions précises. L'ampleur de vue bien connue des philosophes pourrait les entraîner fort loin.

Reportez la phrase finale de votre 3 à la fin de 2 : Pour la symétrie on désignera par $\varphi_1(\lambda)$ une fonction identique à λ .

Aidez un peu pour la solution de 4, car les raisonnements très simples de la théorie des combinaisons, qui consistent au fond à compter sur ses doigts avec un peu de bon sens, sont de ceux auxquels les élèves se montrent le moins habiles.

Bien à vous.

H. Lebesgue

CXCII

St Mandé, 7 avenue de la Tourelle
Dimanche⁸⁶³

Mon cher Ami,

Vous n'avez oublié qu'une chose, c'est de me dire à qui était destiné ce problème ; je ne puis donc juger que d'un point de vue assez théorique, sans m'occuper de la force moyenne de ceux à qui il s'adresse.

Ceci étant il est certain que votre problème est dans le programme de Philosophie sauf peut-être la 4^{ième} partie, mais celle-ci n'est peut-être vraiment intéressante que si elle n'est pas dans le programme.

Dans 2° pourquoi des signes - ?

Si l'on remplace, comme semble l'indiquer 1°, C par sa valeur en A et B , λ_4 est plus facile à calculer que λ_3 , λ_6 que λ_5 , on pourrait peut-être les permuter.

A la fin de 2° mettre on posera : $\lambda_1 = \varphi_1(\lambda_1)$, $\lambda_2 = \varphi_2(\lambda_1)$,
....

Dans la rédaction de 3 on définit le produit fonctionnel de φ_2 et de φ_3 . Puis on parle de la multiplication fonctionnelle. Ensuite on parle du produit fonctionnel d'un nombre quelconque de fonctions $\varphi_2, \varphi_3, \dots$, tout cela sera-t-il clair ? Pour des élèves de la classe de Philosophie tout cela serait incompréhensible.

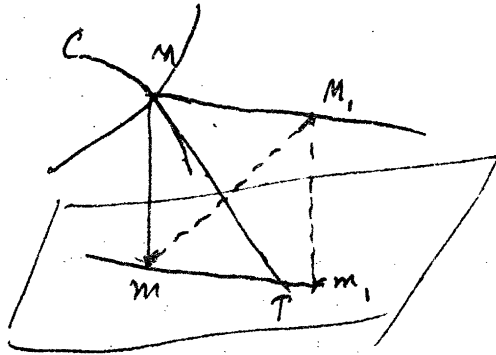
D'ailleurs vous voulez seulement, je crois, qu'on vous dise $\varphi_i^{\alpha_i} \varphi_j^{\beta_j} \dots = \varphi_k$ et non la loi de formation de k , que je n'ai pas aperçue pour ma part ; je crois qu'ici pour ne pas faire perdre de temps il vaudrait mieux dire nettement ce que l'on demande en indiquant le résultat qu'on désire.

Dans 4°. Aider un peu plus peut-être : Dire si a, b, c, d sont 4 nombres donnés ℓ, m, n, q pris dans un ordre quelconque ($a=m, b=q, c=\ell, d=q$ par exemple), montrer qu'il y a 24 manières différentes de choisir a, b, c, d et que, si l'on considère l'un quelconque de ces choix, il y en a 3 autres pour lesquels A a la même valeur ; en déduire qu'il y a 6 valeurs de λ_1 . Dans 5

j'aimerais mieux aussi une formule moins vague que : que se pas-
se-t-il alors

Je ne puis aller déjeuner chez vous jeudi, je vous remercie.
Quand voulez-vous que nous parlions de ces questions ? Les modifi-
cations que je propose sont de pure forme pour aider un peu plus
car je crains que des gens malhabiles ne s'embarquent à ce sujet
dans des calculs monstrueux.

J'ai bien pensé à ce que vous dites pour Blutel, mais ça ne me
satisfait pas. D'abord que ça saute brusquement d'une racine de
 ζ à une de ζ' c'est aussi surprenant et puis, d'après la signifi-
cation géométrique de sa méthode : "C ligne de plus grande pente



mM_1 perpendiculaire à toute MT , MM_1 parallèle à mm_1 , m_1
point qu'on déduit par la méthode Blutel de m . Il me semble vrai-
semblable qu'au voisinage d'un zéro de ζ' ça tend vers zéro.

Au reste le but de Blutel⁸⁶⁴ est étrange. Il veut une méthode
le conduisant à quelque chose ; quoi ? peu lui importe.

A vous.

H. Lebesgue

Pérez me dit que son article va bientôt paraître⁸⁶⁵, donc aus-
si l'Idylle l'an 3000. Vous avez certainement pensé à en mettre
des exemplaires (de l'Idylle ; Pérez me dit qu'il mettra des ex-
emplaires de son article à la disposition de Mme L.M. Bernard) à
la disposition de Mme Bernard, mais comme, à la rigueur, votre
voyage en Italie aurait pu vous faire oublier de donner les ordres
nécessaires pour cela je vous y fait songer.¹¹⁶¹


CXCIII

Mon cher Ami⁸⁵⁶,

Voici une nouvelle forme d'énoncé assez conforme je crois à ce que nous disions l'autre fois. Il faudrait peut-être faire rentrer les premières lignes de 4° dans 3°, ça serait mieux il me semble.

Je n'ai pas parlé de 0 , foyer des projections de c et γ peut-être ça ne nuirait-il pas pour reconnaître k quand $v=0$, mais ça ne fait rien qu'on ne le reconnaisse pas.

Remarques diverses quoique intéressantes.

1° Votre raisonnement sur  droite isotrope rencontre toujours au même point me paraît très fort maintenant et me remplit plus d'admiration que tout le reste de vos oeuvres.

2° Cependant j'avoue que votre démonstration de Heine-Borel est jolie, mais pourquoi, de quel droit, ne l'avez-vous pas donnée à l'époque de votre thèse ?⁸⁸⁰

3° Ça ne vous paraît pas abracadabrant le résultat de Blutel qu'un procédé puisse conduire *toujours* à une limite et *pas toujours* à la même. On a dans le plan les racines de $\{z\}$ et celles de $\{z'\}$, ça fait $2n-1$ points et le procédé fait sauter brusquement d'un de ces points à un autre. Combien étrange ? On a des domaines où ça converge vers une racine de $\{z\}\{z'\} = 0$, des domaines où ça converge vers une autre, et sur les frontières ça converge encore !!

A vous,

H. Lebesgue

J'oublie toujours de vous payer, comme cela j'y penserai.

M, Janiszewski me dit que son imprimeur de la rue M, le Prince lui fait faux bond, Il voudrait essayer à l'Ecole Polytechnique, mais il lui faudrait une lettre, Il vaut mieux qu'elle soit de la personnalité la plus éminente, Donc je vous passe la main à vous de voir si vous devez la passer à Poincaré qui serait tout puissant.

Janiszewski a bien amélioré sa rédaction, ça devient presque lisible.

A vous.

H. Lebesgue

CXCIV

Mon cher Borel,

Soyez sans crainte, je sais parfois ne pas être bavard (et je ne vois personne).

Dans les Parisiens, 4 je crois peut-être ont abordé la 4^{ième} question.

Généralement tout est raté. J'en suis à la 25^e copie et c'est la 1^{ère} fois qu'on reconnaît les circonférences comme courbes k . Tout à l'avenant. La 1^{ère} partie en général très bien cependant ; sauf en ce qui concerne les intersections des C entre eux et avec les T .

Naturellement j'ai aussi trouvé l'échappatoire de "en fonction de quoi". mais une telle réponse ne serait satisfaisante que pour l'administration. Il n'y aura pas de réclamations, les candidats ne se doutent de rien et les professeurs ne traitent la question qu'après la rentrée.

Le papier que vous m'envoyez est sans doute destiné à fixer l'histoire de la faute : Dans mes premières rédactions j'avais mis : calculer Z' en fonction de Z . Je crois l'avoir mis aussi dans la 1^{ère} rédaction que je vous ai envoyée, en tout cas c'était ainsi que les choses étaient rédigées dans le papier qui nous a servi à discuter chez moi. Je crois que c'est après que j'ai fait remarquer que Z' s'exprimait toujours algébriquement en fonction de Z , que c'étaient les coefficients qui ne s'exprimaient pas toujours algébriquement, qu'on avait remanié l'énoncé et commis la faute. Si ces souvenirs étaient exacts, le papier que vous m'envoyez serait de la 2^e rédaction que je vous ai adressée. Ça n'a d'ailleurs que ce seul intérêt que la faute se comprendrait mieux dans un travail fait en commun qu'à tête reposée. J'aurais d'ailleurs dû m'en apercevoir après.

La fameuse bonne n'est pas venue, il doit en venir une autre demain, Aruceitea a déménagé.

Amitiés.

H. Lebesgue

CXCV

St Mandé, 7 avenue de la Tourelle
Le 6 octobre 1911

Mon cher Ami,

Je n'avais eu d'autres renseignements que l'écho de la première annonce de la maladie de Fernand⁸⁶⁷ que vous aviez faite à Drach ; je savais que vous craigniez une typhoïde. Mais une typhoïde qui se déclare soudainement est une chose assez anormale pour qu'on puisse espérer une erreur de diagnostic. Nous souhaitons, puisque le pis est passé, que tout marche bien maintenant. Seulement il serait peut-être imprudent que votre neveu ne prenne pas un repos de longue durée.

Pour Drach, *je crois qu'il ne sait pas du tout parler anglais.* Mais il sait beaucoup de mots, lit ou devine facilement de sorte qu'un séjour de quelques mois en Angleterre, puis, s'il était chargé de conférences en Amérique, un séjour d'un ou deux mois en Amérique avant les conférences, ce qui a l'air possible puisqu'elles ont l'air de commencer fin septembre, le prépareraient plus que suffisamment à *lire*.¹¹⁶²

Et ceci, quel bel art que celui des transitions, me conduit à vous demander si vous connaissiez le fin mot de la manigance qui a l'air de se tramer contre Hadamard.

Jordan est, à Polytechnique, à la retraite depuis le 1er octobre ou 1er novembre, mais il avait offert d'assurer le service. Bien ; Hadamard part pour l'Amérique, puisqu'on a remis la nomination à plus tard. Mais, Hadamard parti, on vient de reconnaître qu'il serait indécent de demander à un professeur âgé d'assurer la suppléance d'un plus jeune, donc nomination de suite⁸⁶⁸. Demain samedi réunion de l'un des comités, samedi suivant réunion du second.

Recevez tous mes voeux,

H. Lebesgue

CXCVI

St Mandé, 7 av. de la Tourelle

Le 1er janvier 1912

Mon cher Ami,

Je comprends votre embarras et, comme vous, je désirais bien connaître les candidats en présence pour pouvoir les comparer et ne pas risquer de donner mon avis qui, prouvant seulement mon estime pour l'un d'eux, serait peut-être cependant interprété comme le résultat d'un choix que j'aurais fait entre lui et ses concurrents dont on ne m'a pas dit les noms.

Sous réserves, je puis cependant dire que L.E.J. Brouwer me paraîtrait dans pas mal de circonstances devoir être appuyé (s'il était français et candidat à une maîtrise de conférences par exemple).

Ses travaux ne sont pas très volumineux et il sont assez spéciaux ; mais, précisément parce que peu de personnes s'intéressent à l'*Analysis situs*, malgré l'importance de cette doctrine, il y a lieu de soutenir fortement ceux qui ont fait preuve de qualités exceptionnelles pour cette étude. Et Brouwer a fait preuve de qualités d'intuition et de rigueur très réelles. Je connais mal ses derniers travaux (je ne les ai pas lus parce que je suis en dispute avec lui à ce sujet), mais les premiers, quoique moins importants sans doute, m'avaient frappé.

Il faut peut-être aussi soutenir Brouwer à cause de son mauvais caractère, qui doit lui avoir fait quelques ennemis. Pour moi je suis au plus mal avec lui (et j'ai laissé de côté mes histoires sur l'*Analysis situs* pour que le laps de temps écoulé entre ses travaux et les miens résolve toute question de priorité et autre), mais je crois que c'est par manque de souplesse pour comprendre la pensée d'autrui et par opiniâtreté dans ce qu'il considère comme la seule chose juste qu'il se rend insupportable.

On aimerait évidemment mieux que Brouwer soit un peu moins cantonné dans les principes de l'*Analysis situs*, mais il est jeune et après tout il pourrait peut-être là-dedans faire pendant longtemps oeuvre utile⁸⁷³.

Nos meilleurs voeux:

H. Lebesgue

CXCVII

Mon cher Ami⁸⁷⁴,

Hier j'ai été frappé dans votre exposé du mot de convergence asymptotique que vous ne m'aviez pas encore dit et qui ne devait pas se trouver dans la Note que vous m'aviez fait lire⁸⁷⁵. Et comme on me demandait de dire quelque chose j'ai dit que ce mode de convergence (cette façon d'être des suites pour mieux dire) avait déjà été considéré par F. Riesz sous un autre nom⁸⁷⁶.

Je n'ai rien prétendu dire de plus. Quant à ce fait que dans votre exposé votre conception s'introduit très tôt tandis que la notion de Riesz ne s'introduit qu'à l'occasion de recherches bien postérieures à la définition de l'intégrale, d'accord. Le but de Riesz n'a rien de commun avec le vôtre (C.R. 17 mai 1909).

Seulement il y a déjà tant de dénominations qu'il en vaudrait mieux une de moins. Les mots de "convergence en mesure" me paraissent plus hongrois que français, quant à convergence asymptotique ce n'est pas non plus cela. Il n'y a pas l'idée vaguement commune (oh, très) à tous les emplois du mot asymptote.

J'aime moins l'introduction de l'intégrale indéfinie *a priori* que le ϵ positif ou négatif dans la mesure. D'abord la notion d'intégrale indéfinie pour plusieurs variables est artificielle (mais on peut parer à cela), mais surtout je crois qu'on réussit seulement à introduire plus tôt le mot d'intégrale, mais que pour s'en servir il faudra cependant après démontrer les propriétés qui constituent les autres définitions. En d'autres termes je crains que pour un exposé complet il n'y ait pas économie réelle⁸⁷⁷.

A vous.

H. Lebesgue

Madame Dobelmann a été heureusement opérée.

CXCVIII

Mon cher Borel⁸⁷⁸,

Ce que vous me dites me paraît fort simple et je crois que ça va très bien. Ça correspond certainement à une vue plus simple et par suite plus profonde des choses.

Ceci dit, reprenons notre polémique. Je vous ai toujours dit : "Dans votre livre il n'est pas prouvé que la définition de la mesure ne soit pas contradictoire, je ne vois pas comment on pourrait le démontrer en se servant du fait que votre mesure est définie de proche en proche par des additions et soustractions algébriques correspondant aux additions et aux soustractions géométriques qui définissent l'ensemble. Je ne crois pas qu'on puisse le faire sans remplacer cette définition constructive de proche en proche de la mesure par une définition autre, analogue à ce que je fais, en prenant des ensembles contenant et contenus."

Votre lettre semble me donner une confirmation éclatante. Je ne connais pas votre démonstration⁸⁷⁹, mais je vois les choses ainsi. Vous remarquez que les ensembles exemples que vous définissez à partir des intervalles, au début de votre chapitre sur la mesure des ensembles, possèdent cette propriété d'être, à des ensembles enfermables dans ϵ près, des ensembles finis d'intervalles (je ne comprends d'ailleurs pas le mot fini. Si on a un ensemble infini d'intervalles non empiétant on peut n'en garder qu'un nombre fini tout en modifiant très peu ϵ . Pourquoi soulignez-vous fini ?), et que, à ϵ près, votre définition constructive de la mesure donne même mesure à vos ensembles exemples et aux ensembles d'intervalles que vous leur substituez. Dès lors vous changez en somme votre définition de la mesure et vous dites : \mathcal{D}_1 Si un ensemble E est à ϵ près un ensemble E_1 d'intervalles on a, à ϵ près, $m(E) = m(E_1)$.

Puis, partant de cette nouvelle définition, vous prouvez qu'elle satisfait aux conditions essentielles de la mesure, par ex.

$$m(A_1 + A_2 + \dots) = m(A_1) + m(A_2) + \dots,$$

tout comme je suis amené à prouver cette égalité après avoir donné la définition de la mesure que j'ai adoptée.

Quelle différence de principe y a-t-il ? Je n'en vois aucune,

seulement tandis que moi dans ce qui précède je pose une définition \mathcal{D}_1 j'imagine que vous vous ne la posez pas, que vous constatez seulement l'accord de cette \mathcal{D}_1 avec votre définition de la mesure de votre livre et que c'est pour cela que, dans votre lettre, vous dites ça marche pour tout ce qui est définissable. Et ça paraît une différence avec ce que j'ai fait qui marche aussi, si je puis dire ? , pour ce qui n'est pas définissable. Mais je crois que ce que j'ai dit plus haut montre que cette différence même n'existe pas.

En d'autres termes, partant de la conception nette du but à atteindre, vous pouvez affirmer que la mesure de tels et tels ensembles simples ne peut être que telle chose et vous pouvez aller ainsi très loin (aussi loin que cela a un sens sans doute) dans la complexité des ensembles ; mais, pour démontrer que vos conceptions ne sont pas contradictoires, vous devez remplacer cette définition par une autre qui permette d'atteindre de suite le nombre mesure (d'un point de vue idéaliste s'entend). Je dis : "vous devez remplacer", mettons si vous voulez vous mettez en évidence une propriété que vous démontrez par récurrence être générale ; c'est la même chose.

Et cette propriété est précisément une propriété de contenant et de contenu différente, mais de même nature que celle dont je me sers après Jordan et *tutti quanti*. Ainsi vous arrivez (je n'oublie pas que dans un autre chapitre que celui de la mesure, au bas d'une page en note⁸⁸¹, vous dites à l'occasion d'un ensemble de mesure nulle qu'on pourrait éviter un raisonnement en posant que $m(E) < \varepsilon \rightarrow 0$ veut dire $m(E) = 0$. Je n'ai pas revu votre livre (votre lettre m'a été remise comme je sortais), mais vous voyez que je connais mes classiques.) vous aussi à ces contenants et contenus et il eût été extraordinaire que vous n'y arriviez point, puisque vous les avez même réintroduit dans l'intégration.

Bien entendu tout cela ne veut pas dire que j'ai eu dans une mesure quelconque l'idée de votre démonstration, qui me paraît au contraire très nouvelle de forme ; mais je reste sur mes positions quant à ce que j'ai toujours prétendu.

Je proteste contre le mot *bien défini*⁸⁸² comme qualificatif des ensembles. D'ici peu de temps ou dès maintenant quelqu'un et probablement vous-même contesterez qu'ils soient bien définis, car un ensemble dénombrable n'est pas bien défini nécessairement. Au

reste il serait trop beau qu'on sache dire ce qui est bien défini, on saurait par suite dire aussi ce qui l'est mal et on l'écarterait, ce serait trop beau.

Je crois que personne de ceux qui se sont occupés de la mesure n'a utilisé le Heine-Borel non dénombrable, c'est toujours le seul dénombrable qu'on emploie. Ça n'apparaît sans doute pas dans ce que j'ai fait puisque n'ayant pas distingué entre les deux théorèmes je n'ai évidemment pris aucune précaution. Où l'idée de dénombrable intervient-elle dans Heine ? Je me suis servi du non dénombrable dans la dérivation et l'opération inverse, mais pas dans la mesure sauf, comme j'ai dit, peut-être par maladresse de rédaction.

Pour les séries divergentes.

Il est évidemment bien tard pour nier le fait après que vous l'avez expliqué pour des cas étendus. Cependant je crois que ça s'explique aussi un peu parce que la plupart des séries divergentes qu'on a rencontrées on les a jetées au panier et que celles qu'on a publiées on les a publiées presque toujours précisément parce qu'elles avaient donné quelque chose.

Je crois à la sommation d'expressions analytiques divergentes, je ne crois pas à la sommation des séries numériques.

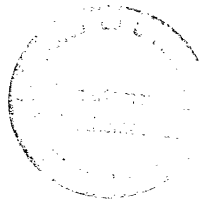
Mais l'assimilation avec la physique me paraît plus contestable. En mathématiques on arrive à une série divergente sans aucune hypothèse jusque-là. En physique on n'arrive à un résultat quelconque qu'après 10^{10} hypothèses ; dans ces conditions, affirmer, parce que le résultat colle, qu'il y a quelque chose d'exact dans le raisonnement, me paraît illégitime logiquement. Qu'il soit cependant sage d'essayer de profiter de ce raisonnement dans d'autres cas ; certes, c'est toute la philosophie naturelle. Et qu'il soit sage, quand Duclaux est présent, de montrer quelque foi et quelque enthousiasme, de protester contre la critique trop aiguë ou le scepticisme trop constant, d'accord.

Mme Dobelmann ne sera remise à neuf que mercredi prochain.

A vous (et à demain).

H. Lebesgue

CXCIX



Mon cher Borel⁸⁸³,

Je passerai vous voir demain.

Je suis très mal au courant de ce qui semble vous préoccuper jusqu'à la mauvaise humeur. Je sais bien que jadis il y eut une note de vous et une de moi un certain mois de décembre⁸⁸⁴. Mais je n'ai jamais eu le texte de ces notes, je ne m'y suis jamais reporté, et tout cela est fort loin. En ce qui me concerne, j'ai dû indiquer là une certaine propriété de convergence je ne sais laquelle, mais immédiate et qui ne m'a jamais été utile. La seule⁸⁸⁵ chose que j'ai jamais utilisée vraiment c'est le fait que, ε étant donné, pour $n > N$, on a $|R_n| < \varepsilon$ en tous les points sauf ceux d'un ensemble de mesure $\eta(\varepsilon)$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{N}$. Il est évident que l'on peut transformer cela de bien des façons, mais je ne l'ai pas fait, je ne m'en suis pas occupé et n'en ai pas vu l'intérêt.

Quant à Egoroff⁸⁸⁶ je ne sais ce qu'il a fait, j'en ai causé une fois avec Montel et j'ai oscillé entre un énoncé (que nous lui attribuions à Egoroff) qui était évident et un autre qui était faux. Il ne faudrait donc pas trop vous fier à l'énoncé d'Egoroff que Montel a pu vous donner.

Mais si vous êtes de mauvaise humeur c'est donc que maintenant vous attachez de l'importance à ce qui vous semblait sans intérêt mercredi ?

Ma foi, je ne puis lire personne, je ne m'étonne pas qu'on ne puisse me lire sans ennui.

A vous.

H. Lebesgue

CC

Mercredi 2h⁸⁸⁷

Mon cher Borel,

Je suis libre mercredi 12 midi 1/4.

J'ai réfléchi à la présentation et vraiment j'y vois beaucoup d'inconvénients. Je me présenterai si on le juge tout à fait nécessaire, mais ce sera à regret.

Si Guichard est candidat jusqu'au bout, il est inutile que je me présente.

S'il n'est pas candidat jusqu'au bout et que je me présente seul, je veux dire sans Vessiot, j'apparaîtrai aux yeux de tous comme le comparse qui permet à la combinaison Cartan d'aboutir. Je renforcerai l'opinion de Darboux en l'existence d'une combinaison, ce qui ne me gêne guère. J'ennuierais Picard, ce qui me trouble plus. Et puis vraiment j'aurais l'air bien pressé de me faire titulariser.

Enfin, et, surtout, si c'était seulement mon intervention qui permet de faire titulariser Cartan, je serais plutôt gêné vis-à-vis de Guichard pendant toute la durée des examens de St Cyr. Et vraiment je n'ai, moi, aucune raison d'être désagréable à Guichard et je ne tiens pas à lui être désagréable exprès.

J'imagine maintenant que Vessiot se présente aussi, alors pour moi, je n'en doute pas, Appell, Poincaré, Borel et même Picard, mais Vessiot aura certainement pour lui Goursat, Andoyer, Painlevé, Koenigs et Darboux. Vous n'espérez pas, je pense, faire varier l'avis d'aucune de ces cinq personnes. Tout dépendra donc de Boussinesq. Ce qui s'est passé une fois peut fort bien ne plus se reproduire, car Picard cette fois ne donnera pas à fond et Darboux étant supposé battu pour la première ligne, Boussinesq peut vouloir lui donner la consolation d'appuyer aussi son candidat (à Darboux) au second tour.

Donc on engagerait la bataille pour, dans l'hypothèse la plus favorable, arriver *dead-head* à la présentation des mathématiciens. Car à l'Assemblée générale, pourquoi les raisons d'ancienneté, de connaissance, de commisération pour la fureur de Darboux (après tout la seconde ligne a si peu d'importance, faisons ce plaisir à Darboux) ne décideraient-elles pas quand les mathématiciens n'ont pu se décider en faveur d'un candidat ou se sont décidés en faveur du plus ancien, du plus connu, de celui que protège Darboux.

Prenons un exemple : Caullery⁸⁸⁸, qui fait voter pour Pérez à cause du mérite, votera certainement pour Vessiot uniquement

parce qu'il le connaît et il n'aura aucun remords puisque les mathématiciens ne lui diront pas que ma supériorité est éclatante. Malgré la certitude du résultat je préférerais d'ailleurs être candidat en même temps que Vessiot, que seul. J'ajoute que si j'étais choisi, c'est-à-dire si j'étais seul candidat à la 2^e ligne, ça n'aurait pas d'importance et ça en aurait une si je n'étais pas choisi.

Si Cartan a besoin d'un candidat pourquoi ne ferait-il pas, comme cela se pratique couramment en province, c'est-à-dire ne demanderait-il pas d'être son second à quelqu'un qui n'a en réalité pas l'idée d'être candidat dans un avenir rapproché, tout au moins : Vogt⁸⁸⁹, Montel (je ne lui ai pas proposé cela vous pouvez en être certain !!) ; que Cartan demande à Puiseux ?!!!⁹³⁵

Cordialement,

H. Lebesgue

CCI

Mon cher Borel⁸⁹⁰,

J'ai reçu le livre de Pierpont⁸⁹¹ et ce matin une lettre de l'éditeur (coût 30 centimes).

Ce que j'ai dit mercredi à la bibliothèque tombe. Le livre de Pierpont n'étant pas un manuel, mais une série d'expositions assez étendues sur des sujets spéciaux. Je ne vois aucun inconvénient à ce qu'il soit entre les mains des élèves, mais il ne remplace pas un traité étranger à mettre en parallèle (ou opposition) avec les livres de Goursat ou Humbert⁸⁹² par exemple.

Je ne partage d'ailleurs pas votre avis (qui m'a paru favorable sur le livre de Pierpont). C'est un travail de vulgarisation de quelqu'un qui n'a pas toujours compris à fond. Je puis dire cela moi qui suis particulièrement bien traité dans ce bouquin.

La méthode que Pierpont réclame dans sa préface⁸⁹³ est exactement celle de Young qu'il ne cite pas pour ce point, mais on ne peut lui reprocher de ne pas avoir fait de bibliographie complète et d'avoir laissé échapper cela.

Ce que je lui reproche plutôt c'est d'avoir absorbé, à peu

près digéré, puis rendu des tranches de mathématiques ainsi servies à des étudiants qui sont en droit de se demander pourquoi on leur parle de cela plutôt que d'autre chose et en quoi c'est intéressant. Un exemple : Il parle très longuement de la définition de l'intégrale L ³⁹⁴, mais il ne dit pas qu'elle était nécessaire pour $\frac{dy}{dx} = f(x)$. Il ne s'occupe pas de cette question, ni par suite des $\frac{dL}{dx}$ ce qui me contriste car c'est ce que j'ai fait de plus important bien que presque tout le monde l'ignore.

S'il utilise les L ⁸⁹⁵ pour les séries de Fourier, mais formellement puisqu'il ne cite aucune fonction non intégrable R qui soit développable en série de Fourier et qu'il ne se pose à aucun moment la question des relations entre les fonctions sommables et les séries de Fourier. Bien plus, il reproduit ceux des théorèmes de Riemann sur l'unicité du développement que tout le monde reproduit, mais il ne continue pas une page de plus pour démontrer que ce seul développement quand il existe est celui de Fourier avec des \int ⁸⁹⁶ ou L .

En somme Pierpont me paraît avoir étudié pour ses élèves quelques mémoires, mais n'avoir fait que bien rarement la liaison entre ce qui se trouve dans 2 mémoires.

Il y a des raisonnements faux. Ex. il prend n°442 la condition suffisante qu'il vient de démontrer au numéro d'avant pour une condition nécessaire.

C'est un livre qui pourra être cependant utile.

Cordialement.

H. Lebesgue

CCII

Chère Madame⁸⁹⁷,

Je suis pris le mardi, aussi ai-je d'abord eu l'idée de laisser M. Pierpont arriver à complète dessiccation. Mais comme il se peut que l'été se décide à être torride, M. Pierpont n'aurait qu'à s'enflammer et j'aurais, moi, son ignition sur la conscience. J'irai donc ; quant à ma femme, qui se déplace moins facilement qu'une américaine, je ne répons de rien. Au reste la prohibition

de l'esclavage dans nos appartements complique singulièrement sa vie.

Votre cordialement dévoué.

H. Lebesgue

CCIII⁹⁰²

Mais n'avez-vous pas peur que ce ne soit aussi un peu trop ennuyeux pour les auditeurs qui perdront à coup sûr pied au milieu des S_n^p , T_n^p et autres Δp . Je sais bien qu'une conférence se lit après coup, mais je crois que, si vous leur racontiez les choses comme vous me le faisiez jeudi au coin de votre feu (légitimement absent d'ailleurs), ce serait autrement clair et attrayant. On ne perdrait pas le fil des idées au milieu de la complication, pas très grande certes, mais cependant déroutante, des moyens.

Cela vous serait possible, maintenant que le trop ennuyeux est fait et qu'il ne reste plus que le suffisamment ennuyeux à faire - si vous ajoutiez deux pages, à votre brouillon amélioré, pour entrer dans le sujet et conclure. (Il faudrait dire que l'ensemble des nombres rationnels a_n est pris pour exemple.)⁹⁰⁴ Cela ferait un tout publiable tel que (BSMF par ex.), auquel vous pourriez renvoyer dans votre conférence et qui vous permettrait de n'exposer là les choses qu'en langage ordinaire. Cet article paraîtrait bien avant le volume du congrès et même vous pourriez facilement avoir envoyé des tirés à part avant le congrès.

Alors votre conférence⁹⁰⁵ pourrait être un exposé des tentatives que vous avez faites pour élargir Weierstrass, si j'ose dire. Celle de votre thèse, la construction de fonctions à quoi elle vous a conduit, fonctions dont l'existence justifie votre exposé actuel. Tentative des séries divergentes, qui vous a conduit à un prolongement analytique qui n'était pas pour vous l'essentiel quoi que tout le monde en ait pu penser ; mais vous a conduit aussi à sommer des séries à rayon de convergence nul⁹⁰⁶. Résultat de Nordlung. Mittag-Leffler à votre suite prolonge, analytiquement, mais ses développements convergent en dehors de l'étoile ; Mittag-Leffler le regrette, c'est pour vous le point capital et le plus utile, etc.

Je voudrais aussi que vous insistiez sur la nécessité de ce développement pour reconnaître si des fonctions analytiques *ordinaires* différentes ne sont pas en réalité la même; on ne peut dire : f étant définie dans D et φ dans Δ seront la même fonction si toute relation vérifiée par f dans D est vérifiée par φ dans Δ à cause de fonctions multiformes et cela n'est jamais vrai si D et Δ n'ont pas une partie commune, et cependant, si f et φ sont bien la même fonction, de toute relation de f dans D on déduit une relation de φ dans Δ . Vous étendez ce bénéfice et c'est peut-être à cela que les gens non préparés seront le plus sensibles.

Bien cordialement.

H. Lebesgue

CCIV

Nantes, le 18 août 1912

Mon cher Ami,

Dimanche dernier, il y a huit jours, revenant de La Flèche, j'ai voyagé entre Angers et Nantes avec Houssay⁹⁰⁷.

Le pauvre malheureux est atteint d'Institutive aiguë⁹⁰⁸. A peine causions nous depuis dix minutes qu'il m'apprenait sa candidature, les voix qui étaient pour lui, celles qui étaient pour ses concurrents, celles qui étaient contre lui et celles qui étaient douteuses. Qu'il me disait la peine qu'il prenait pour exposer dans sa Notice ses ardues travaux à des profanes sans le savoir. Qu'il m'indiquait les mérites de la thèse de Worms⁹⁰⁹ et l'aveugle parti pris de ceux qui ne les veulent point voir ; etc.

Peu de jours auparavant j'avais vu, dans *Le Journal*⁹¹⁰, un éloge des recherches de M. le professeur Houssay sur les poules carnivores⁹¹¹ ; avant-hier le même *Journal* nous enseignait qu'à la suite des travaux mémorables M. le professeur Houssay avait découvert que les poissons avaient la forme des ballons dirigeables et qu'il convenait de donner aux aéronefs la forme de poissons⁹¹². Enfin, fin juillet, en première page, première colonne, cette fois et non dans un de ces articles de sixième page destiné au seul public scientifique, il nous était révélé⁹¹³ que le susdit

professeur était aussi callé dans l'art eugénique de faire de beaux enfants que MM. Lucien Descaves, Edmond Perrier, Mme Séverine et autres vulgarisateurs⁹¹⁴.

Et comme, dans le condescendant entretien que j'eus avec mon éminent collègue, il fut question de la vacance dans la section de géométrie⁹¹⁵, je me suis demandé si l'épidémie régnait aussi à St Paul des Fonds⁹¹⁶ et si, au souci de la rédaction de vos conférences, s'ajoutait encore le pensum d'une notice⁹¹⁷. Fasse le ciel miséricordieux, et hélas très pluvieux, qu'il n'en soit rien et que la mauvaise humeur dont peut-être vous accablez Mme Borel ne soit due qu'à votre travail scientifique trop intense ou à l'appréhension du mal de mer.

C'est sans doute bientôt que vous prendrez quelque avant-goût des tribulations réservées à ceux qui font de l'exportation au-delà des mers⁹¹⁸; aussi je vous adresse cette lettre, vide, rue d'Ulm. Pendant que vous deux vous vous dorloterez dans le confort britannique, moi je travaillerai à Nancy, Dijon, etc. Car mon séjour ici touche à sa fin. J'ai trouvé à Pornic les miens en bonne santé, mais fort en peine à cause du mauvais temps. A peu près aucun jour de beau temps. Depuis 15 jours sauf hier et avant-hier pluie continue; deux jours passables, on se croyait sauvé, mais aujourd'hui à midi déluge et tout est à réespérer. C'est au milieu de trombes d'eau que je me précipite de Pornic, ici, et *vice versa*. La distance de Pornic à Nantes est assez grande, ou les trains assez malcommodes, pour que je sois littéralement obligé de me toujours précipiter. Je règle mon temps au lycée à la minute. A ma porte, les heures de commencement et de fin d'examen sont marquées à la minute, ainsi que les heures ou pour mieux dire les minutes où les professeurs sont autorisés à venir me dire que c'est leur meilleur élève celui qui vient de si mal passer. Grâce à quoi je n'ai pas encore manqué le train.

Au sujet d'un candidat à St Cyr, j'ai reçu "au nom de la confraternité mathématique" une lettre de G. Humbert me demandant ce que je "pense ou penserai" d'un candidat. Formule à retenir. Cette lettre vient d'Arthon¹¹⁶³, Savez-vous si c'est l'Arthon de la Loire Inférieure, à côté de Pornic. Reçu les équations intégrales de Hilbert⁹¹⁹. Naturellement ne regarderai pas de sitôt; ça m'a eu l'air comme à l'habitude de résoudre tous les problèmes mathématiques dignes qu'on se les pose. Ça ne doit pas avoir beaucoup

de commun avec Volterra, sauf le bluff.

Madame Borel n'a pas dû souffrir cette année de la chaleur méridionale, j'espère que tous deux vous aurez des tas de choses drôles à me raconter quand j'aurai le plaisir de vous rencontrer. Amitiés aux Drach. J'ai été trop vidé pour leur écrire.

Cordialement,

H. Lebesgue

CCV

Ker Amélie en Gourmalon
Pornic, le 14 septembre 1912

Mon cher Ami,

Je rentre assez abruti par les trains de chez Mme Bernard que j'ai trouvée en bon état physique et moral.

Nous sommes navrés que le mariage de Madeleine Guitton⁹²⁰ bouleverse les projets des Drach et les empêche de séjourner à Paris à une époque où nous y serons et nous voudrions bien les voir ici ne fût-ce qu'un ou deux jours. Il nous a semblé qu'il serait très indiqué que les Drach aillent vous accompagner à St Nazaire⁹²¹. J'irais les accueillir là, les ramènerais à Pornic et par La Roche-sur-Yon et Niorçils atteindraient de là très facilement Rouillé⁹²² à peine après la date indiquée, vers le 25.

Je compte sur vous comme sur un auxiliaire puissant pour la réussite partielle de mon projet. Partielle car au début je trouvais tout naturel que les Drach et Dobelmann passent par ici, je n'y compte plus, mais qu'ils envoient une délégation.

Du haut de mon abrutissement je vous envoie ainsi qu'à Mme Borel mes amitiés et celles de ma femme.

H. Lebesgue

CCVI

Mon cher Borel⁹²³,

Voici des notes⁹²⁴. Je ne vous donne pas celles des carrés⁹²⁵,

ils ne venaient pas. Comme assiduité méritent d'être signalés : Deltheil, Marty, Berthiot, Vimeux, Desbats, Durand, Marcantoni⁹²⁶.

Desbats et Marcantoni sont bien faibles. Durand et Berthiot sont passables, le premier paresseux, le second pas très malin. Vimeux a du bon sens et Marty est un hurluberlu sympathique. Deltheil⁹⁵⁵ est très solide.

Antoni n'est pas bête. Piglowski est très intelligent. Bardy n'est pas fort.

J'ai déjà réfléchi plusieurs fois à cette question de la charge de St Cyr. Je crains que ce ne soit pas très proche et j'ai déjà songé aux 1000 F de loyer que je vais m'offrir en plus à ma rentrée dans Paris. Actuellement j'ai 6000 + 4000 + 3000 (je compte 4 seulement pour St Cyr), c'est plus qu'il ne m'est nécessaire, mais je crois qu'il ne serait prudent de lâcher St Cyr que si je trouvais à peu près 3000 et ça n'est pas facile.

J'ai fait cette année 2 colles, ça me fera dans les 700. Je lâcherai l'an prochain, ça coupe bêtement le temps.

C'est aussi à cause du total nécessaire à la vie que je trouve légitime toute augmentation du traitement de Vessiot qui a plus de charges que moi.

A vous.

H. Lebesgue

Moi : ...

Le Dr Malapert répondant : Ah! oui, X., il fait très gentiment l'article qu'on lit aux cabinets.

Voici les notes dans l'ordre des leçons :⁹⁵⁷

Gaudiot 12 (concavité)

Ballongue 14 (asymptotes)

Flavien 15 (courbes en t)

Gorlier 12 (courbes unicursales)

Tissier 16 (enveloppes)

Parmentier 11 (courbure)

Martin 13 (courbure espace)

Marchand 13 (homographie)

Antoine 14 (points à l' ∞)

Lafosse 13 (faisceaux de coniques)⁹²⁷.

L'impression est meilleure que la note pour Parmentier et Gaudiot. Mais bonne pour Ballongue.

La note donnée à Antoine ne signifie rien, elle a été donnée en pensant à la difficulté du sujet.⁹⁵⁸

CCVII

Paris, le 4 août 1913

Mon cher Ami,

J'ai fait mon billet circulaire et St Pierre et St Paul n'y figurent pas. J'ai bien consulté l'indicateur ; pour aller vous voir à St Paul il me faudrait passer en chemin de fer la nuit du 24 au 25, puis aussi celle du 26 au 27 et cela pour arriver à Marseille à 6 h 50 du matin et commencer à 8 h à interroger les candidats. Pour arriver à Marseille le 26 à 9 h 1/2 du soir, il me faudrait aller prendre à Tournemire le train de 12 h 50 dans la journée du 26 et voyager toute la journée, sans doute par la chaleur. Ce serait aussi fatigant. Ce ne serait pas raisonnable de se mettre dans d'aussi mauvaises conditions pour achever la tournée. D'autant que si j'étais obligé de m'interrompre dans mes oraux, fût-ce pour une demi-journée, je dérangerais toute l'organisation, car je n'aurais pas le temps de me rattraper. C'est seulement entre Toulouse et Marseille que nous avons 2 jours, entre les autres centres 1 jour ou 1/2 jour.

Croyez que je pleure d'être obligé de renoncer à la *Fräulein*.

Néollier⁹²⁸, que Madame Borel comprend si bien, n'a pas été compris du jury⁹²⁹ qui lui a mis 8 pour sa seconde leçon ; encore était-ce parce que le sujet étant : les erreurs, on a admis qu'il avait été assez naturellement entraîné à en commettre pas mal pour l'exemple. Dans l'esprit du jury ce 8 coule Néollier, on lui a mis 8 par charité, mais on baisserait ce 8 s'il était nécessaire pour le refuser. Il a fait très mauvaise impression. Je ne comprends d'ailleurs rien à la façon de juger de ce jury ; il semble être beaucoup plus sensible à la prestance de l'orateur, à la plénitude de sa voix, à son assurance et à sa façon de qu'au fond de la leçon. Le jury a mis 13 (un 13 qui sera peut-être baissé) à Leroy⁹³⁰ pour une leçon sur les forces - $\frac{1}{x^2}$ au cours de laquelle Leroy a dit

en somme que la position et la vitesse initiales ne pouvaient être tout à fait arbitraires, mais devaient vérifier une certaine condition d'inégalité, dans laquelle il a conclu à la convergence de u_n parce que $u_n - u_{n-1}$ tendait vers zéro ; dans laquelle il a trouvé tant de propriétés géométriques à ses trajectoires qu'il serait bien beau qu'il y ait une conique répondant à la moitié de ces conditions.

Pigowski est tiré d'affaire sans être brillant : 11 et 12 je crois.

Pugibet⁹³¹ a 16 et 9.

Monpeurt⁹³² 11 ; Martinon⁹³³ 10 ou 11 ?

Les élèves de l'école ont bien fait leur calcul.

Après que tous les admissibles avaient fait une première leçon, 12 seulement avaient au-dessus de 10.

Suzanne⁹³⁴ a presque la température normale. Mais elle tousse toujours et a encore quelques râles discrets et disséminés dans les deux poumons. Promenez votre oreille sur le dos d'une personne, vous entendez un soufflet de forge puissant et sourd ; si, de plus, vous entendez une petite plainte comme celle des moutons à soufflet d'enfants, vous prenez un air grave et dites qu'il y a des râles. S'ils ne sont pas réguliers, et s'entendent de ci de là, ils sont discrets et disséminés. Nous attendons leur disparition.

Le Matin d'aujourd'hui attrape Bouglé, sans doute que le fils de la maîtresse de l'amant de la femme du concierge de Stéphane⁹⁶² Lauzanne a mal passé en philo à St Cyr. Perdez, je vous prie, cette habitude de rougir sans raison comme un jeune homme et jouissez des vacances pour vous et pour moi. Bien cordiales amitiés à vous deux, bon souvenir à vos hôtes.

H. Lebesgue

CCVIII

Jeudi matin⁹³⁶

Mon cher Ami,

J'ai reçu l'autre jour une lettre anonyme, stupide, comme

toutes les lettres anonymes. Il y était question d'un A, lauréat d'un concours et ayant reçu pour prix 30 F et d'une prime de 14 F qu'on hésitait à donner à A ou B. Mais cela n'a aucun rapport avec aucune réalité. Un observateur superficiel pourrait croire qu'on doit poser le problème : Pour prix du concours, A a reçu 30 F avec l'obligation de faire un certain travail ; il existe à distribuer une prime de 14 F sans obligation aucune, à qui doit-on la donner ? Mais cela serait encore faux. En réalité A fait un certain travail pour lequel il reçoit 30 F et B fait un travail qu'on peut considérer comme équivalent et il reçoit $20 F + 14 F = 34 F$. Si B ne veut plus faire le travail qui lui est donné il continue à toucher 14 F, si A ne fait plus le travail il ne touche plus rien.

Bien entendu A et B ont d'autres travaux, ceux qu'ils avaient avant le concours, et ils reçoivent pour cela le même traitement à des différences près qui sont dus à la différence d'âge et qui ne comptent pas.

A ne réclame rien, il ne crie pas à l'iniquité, mais il se refuse à se laisser persuader qu'il a reçu comme prix du concours des sommes faramineuses, il se refuse à pleurer sur le malheureux sort de B.

Et A oublie que l'an passé un travail supplémentaire était à faire à l'Ecole Normale, il fut donné à B comme compensation de je ne sais plus quoi, d'avoir vu son traitement augmenté, je crois. Il ne compte pas non plus l'obligation dans laquelle il est chaque année de se demander si oui ou non il bénéficiera de la prime de 30 F.

A ne rouspète pas, encore une fois ; il sait bien que ses amis ont fait pour lui tout ce qu'ils ont pu, tout ce qui leur a semblé juste de faire. Et comme A pense parfois aux autres, il accorderait volontiers peut-être après discussion que les choses ne pourraient pas être autrement ; mais il peut bien dire à ses amis : "Voyez comme ce B est encombrant et comme malgré tout il est puissant. Quoi que vous vouliez faire, vous arrivez sous prétexte de m'avantager à l'avantager toujours un peu plus."

Et c'est pourquoi le lâche anonyme, qui a étudié les lois du hasard, ne peut rien comprendre à la question où le hasard ne joue aucun rôle, où le sort est réglé par une volonté ferme au service d'une rapacité opiniâtre.

Mais pourquoi, dira l'anonyme, homme pratique pour qui l'argument sentimental n'existe pas, parler de tout cela puisque vous ne récriminez pas. Mais parce que jusqu'ici A ne connaissait B que comme un individu fort prétentieux et qu'il n'est pas fâché de l'avoir mieux catalogué. Qu'il tient à faire connaître ses découvertes à cet égard et qu'il a été fort heureux de faire connaître hier à B lui-même son opinion. La chose se fit en deux fois.

A avait écrit à B : "La combinaison Fénelon reçoit un accroc du fait de votre nomination à l'X, je n'y puis rien ; M fait 1/3 du cours donc il était certain sans accroc que vous, vous ne le feriez pas tout entier. Est-ce 12 leçons de plus de moi qui rendent accroc scandaleux." Et A persistait dans son désir d'être nommé pour un semestre. B répondit, textuel : "Je vous ai expliqué que je n'étais pour rien dans l'invention de la combinaison ; je vous ai exprimé mon désir. Mais je reconnais très volontiers que, du moment qu'on vous demande un arrangement - et bien que cet arrangement soit fait pour M et me dérange moi-même - votre désir doit primer le mien."

A répondit qu'il croyait avoir rendu un service, banal, à B et M, mais que puisqu'il en était ainsi il se refusait pour obliger M à désobliger B et que, s'étant seul dérangé jusqu'ici pour cette affaire, il estimait qu'il avait assez fait preuve de bonne volonté et qu'il ne s'occupait plus de rien. Qu'il attendait que ceux qui avaient besoin de lui, à supposer que ces gens existent, se mettent d'accord entre eux et viennent lui demander quelque chose.

Cette lettre amena une engueulade entre B et M au cours de laquelle M : Cette combinaison vous est profitable comme à moi, puisqu'elle vous permet de reprendre, de conserver, les travaux pratiques. B : Ça c'est une satisfaction matérielle, ne parlons pas de cela. M : C'est en général pour de semblables satisfactions matérielles que nous travaillons et la combinaison A a pour but de nous permettre de cumuler plusieurs telles satisfactions.

A la fin de cette discussion M reçut de A une lettre dont voici l'esprit : B m'écrit "Je vous ai expliqué ... voir plus haut". Tu comprends que dans ces conditions je ne pourrais formuler aucun désir sans faire figure d'obligé ce que tout de même je ne veux pas. Mais puisque B est dérangé par cette combinaison, qu'on lui laisse son service tel qu'il l'avait fixé et nous permuterons nous

deux. M qui n'est pas idiot compris que cette lettre, remarquablement polie pour B, était destinée à lui être montrée. B fit une gueule en pente en la lisant, il se dépêcha de repousser toute idée de combinaison que A proposait et qui faisait perdre à B les travaux pratiques et le résultat fut d'abord une visite de B et M à St Mandé. A n'y était pas⁹³⁷, alors B alla attendre A à Louis-le-Grand où il fait une colle à 4 h 1/2. Là B admit qu'il était l'obligé, pas au même titre que M cependant. A l'arrêta et lui dit que c'était là une affaire à régler entre B et M, mais qu'il suffisait de ne pas être nul en arithmétique pour voir que la combinaison n'était défavorable ni à B ni à M et que ce qui l'avait mécontenté c'était de voir que B déclarait que la combinaison le gênait lui de sorte que A seul n'avait pas le droit de dire ce qu'il voulait. Que A ne demandait de reconnaissance à personne, "mais qu'il n'admettait pas qu'on se foute de lui".

A expliqua à B qu'il se refusait à passer aux yeux de qui que ce soit pour le subordonné de B. Cela en particulier parce que sans doute la prochaine compétition entre A et B aurait lieu à l'occasion de la chaire de Mathématiques générales⁹³⁸. Que d'ailleurs A ne tenait pas du tout à la permutation et que si B voyait avantage à éloigner A du service de Mathématiques générales, il était libre de chercher telle combinaison qu'il voudrait.

B partit se demandant s'il ne pourrait pas trouver quelque chose.

Mon opinion est nette : B qui cria à l'iniquité quand A eut la prime de 30 F, ayant besoin de A a l'hypocrisie de dire que c'est M qui en a besoin, c'est un vil personnage.

Le lâche anonyme n'ose pas résoudre les problèmes posés ; ils sont fort sérieux. Surtout celui relatif aux 2000 supposés récupérés sur le traitement de P⁹³⁹, car on n'osera jamais retirer à B sa prime de 14 F.

Amitiés.

H. Lebesgue

Profession de foi. J'ignore que Vessiot reçoit une indemnité de 1400, si je le savais je ne pourrais admettre qu'il ait pu me proposer une permutation de service sans permutation de traitement.

Car nul homme raisonnable n'a pu me dire à moi que Vessiot

touchait 1400 comme compensation parce que j'avais un service aux Hautes Etudes.⁹⁶⁴

Problème I. Etant donné que Vessiot touche actuellement 11400 à la Sorbonne comme compensation parce que je touche 9000, combien Vessiot devrait-il toucher si j'étais titularisé ? (Remarque: Vessiot désire que je sois titularisé au plus tôt.)

Problème II. On suppose Painlevé blackboulé⁹⁴⁰ et on récupère astucieusement 2000 sur son traitement. A qui iront ces 2000 F ? Solution : A Drach et Lebesgue ; quant à Vessiot, qui perdra 1400 F, le pövre, il aura par compensation 3000, la conférence des Hautes Etudes ; Lebesgue qui l'aura eue 2 ans 1/2 sera mal venu à se plaindre.

Problème III (très intéressant). Etant donné que Vessiot touche 1400 F parce que Lebesgue touche 3000, combien devrait toucher Lebesgue pour que Vessiot reçoive une compensation de 100.000 F ?

Problème IV (sans intérêt). Etant donné que Vessiot touche 1400 F de compensation parce que Lebesgue touche 3000 F, quelle compensation doit toucher Lebesgue parce que Vessiot touche 1400 F ? Quelle nouvelle compensation doit recevoir Vessiot parce que Lebesgue reçoit cette première compensation. Généralisez et passez à la limite.

Prière de ne pas montrer cette lettre à Babinski⁹⁴¹ ni à nul autre aliéniste, car cette lettre est la raison même.

CCIX

Mardi, 7 heures⁹⁴²

Mon cher Borel,

Je finirai par trouver, avec Poincaré, que le métro est un excellent endroit pour travailler. Il est seulement nécessaire que, comme il arrive toujours heureusement aux heures où je le prends, il y ait assez de monde pour qu'on soit collé sans avoir besoin de se cramponner à rien.

D'une étude humaine faite dans le métro il résulte que je ne puis avoir aucune opinion sur les 88 premières pages du livre de Dienes⁹⁴³ que vous avez gardées. Mais j'ai une opinion sur la

Note⁹⁴⁴ : C'est une exposition faite dans tous les détails pour Mittag-Leffler du raisonnement même de Riemann [bien que Dienes parle de simplification du raisonnement "tant discuté"⁹⁴⁵ (1^{ère} nouvelle) de Riemann]. Je dirais que ça se trouve exactement dans mon petit livre si je n'avais ainsi l'air de réclamer quelque chose alors que je n'ai fait que recopier Riemann en tenant compte des notes de Weber⁹⁴⁶. En somme Dienes a compris Riemann, alors il a cru avoir inventé.

A vous.

H. Lebesgue

CCX

Mon cher Borel⁹⁴⁷,

Ce n'est pas un incident de salle c'est un incident d'élèves.

Arrivé à 2 h moins le quart je rencontre Bouligand⁹⁴⁸ avec lequel je cause dans le couloir d'en bas. Je vois passer à côté de nous divers conscrits avec leurs cahiers, dont le cacique.

A 2 h 3, je monte ; j'ouvre une première porte, j'entends⁹⁹⁶ Simon ; j'ouvre une seconde, je vois, à la présence d'une jeune fille⁹⁴⁹, qu'il s'agissait des cubes (je n'avais pas vu que c'était vous qui étiez là).

Je ne vois personne dans le couloir ; je me dis : les conscrits doivent me chercher en bas dans le vestibule ; en bas je ne vois personne. Je remonte, personne encore dans le couloir ; je demande dans les salles du 1^{er}, on me dit que les élèves que je cherche sont logés au rez-de-chaussée. Je vais vers les salles d'étude de 1^{ère} année. J'ouvre une porte, personne ; je n'ai pas ouvert les autres portes. J'ai jugé que cette disparition totale des élèves de 1^{ère} année ne pouvait être que concertée, que j'avais fait plus que je n'avais à faire pour les trouver, et que, s'il fallait chercher les élèves dans les caves ou sur les toits, ce n'était pas à moi de le faire.

Je suis monté chez Dupuy⁹⁶⁶, en voyage, chez vous, j'ai appris alors que vous étiez en conférence. Il ne me restait qu'à profiter du soleil pour aller me promener, ce que je fis.

A vous.

CCXI

Que vos formules sont élégantes, mon cher Ami !⁹⁵² Vers le 15 juillet, priez moi donc de vous rendre le service d'accepter que vous payiez mon terme. J'accepterais de vous rendre ce service, comme aujourd'hui.

H. Bohr fait mercredi une *conférence* sur l'état de la question $\zeta(s)$ ⁹⁶⁷ ; la façon dont on a annoncé le fait sous la forme ordinaire, et avec le mot communication, me fait craindre que le public soit particulièrement mince. Et comme je suis le père de cette conférence, je vous prie de me rendre le service d'y venir et d'en parler, à l'avance précisons, aux gens rencontrés et à quelques élèves de l'Ecole qui seraient à tendance arithmétique (Lambert = $a^2 + b^2$)⁹⁶⁸.

Je suis certain que Drach est d'une mentalité assez inférieure pour ne pas avoir eu même une angoisse rétrospective en voyant combien il avait été léger en n'étant pas inquiet. C'est agaçant.

Mes condoléances à vous et aux 4027 autres⁹⁶⁹.

H. Lebesgue

CCXI

Pornic, le 8 septembre 1914

La Neva, en Gourmalon, Pornic

Mon cher Ami,

Lundi à 1 h 1/2 environ, j'ai eu la grande joie de recevoir un télégramme de ma soeur⁹⁷⁰ m'annonçant leur passage à Tours en route sur Royan. Je n'ai pas encore de nouvelles détaillées sur leur fuite ; le principal est qu'elles aient fui. Beauvais aurait eu, d'après ce qu'on m'a dit, la visite d'uhlans dimanche ou lundi (30 ou 31 août) ? En tout cas Beauvais n'a pas été sérieusement occupé et (considération très égoïste mais si aigue) les miens étaient partis samedi ; je ne sais pas encore comment. Il sont, paraît-il, passés par Paris sans doute entre deux trains et conduits d'office d'une gare à une autre comme on a fait pour beaucoup de réfugiés de ma région et de l'Oise en général.

Le lundi je venais de m'occuper de miens cousins et je rentrais à 8 h du soir à la rue Boissy d'Anglas quand on m'apprit qu'il y avait toute une famille de réfugiés de nos amis, de Verberie entre Compiègne et Senlis, qui allaient partir le soir avec mes belles soeurs. C'était moi qui devait les conduire ; je protestais tout d'abord, mais ces pauvres gens qui étaient partis pendant qu'on minait tout leur village et qui portaient dans quelques paquets tout leur avoir certains étaient si lamentables que, n'ayant plus à attendre ma mère, je me décidais à filer. J'allais faire ma valise en hâte et à 10 h j'embarquais mes 18 personnes dans le train, à commencer par une vieille de 86 ans à finir par un gamin de 3 ans. Ce ne fut pas une petite affaire que de conduire ici tout cela en passant par Granville, Dol, Rennes et Nantes, par les trains tels que nous avons mis 2 h 1/2 pour atteindre Versailles.

Enfin me voici ici, heureux d'avoir eu un motif honorable pour partir, pas très fier d'avoir fui. A la gendarmerie ici, on m'a dit qu'on m'occuperait peut-être comme infirmier ; il y a pas mal de blessés dans la région. En tout cas actuellement on ne donne pas ici de billets pour Paris pour les voyageurs. Ça va sans doute s'arranger, car nous voyons par les lettres que les rapports avec Paris sont assez réguliers.

Je viens de recevoir la lettre ci-jointe de Caullery⁹⁷¹. Je n'ai pas reçu la circulaire dont il parle et je ne sais s'il n'y a pas eu quelque chose de paru dans les journaux. Je ne puis donc rien faire et il y a à faire. Mais il est bien inutile que ce soit au nom de l'Association. S'il n'y a rien eu encore de fait peut-être pourrait-on faire passer aux journaux (*Le Petit Parisien* arrive ici, pas *Le Temps*, *Les Débats*, ni *L'Humanité*) dans le sens indiqué au nom des quelques professeurs (non dénommés) une note invitant les collègues à autoriser l'agent payeur à verser en leur nom chaque mois telle fraction de leur traitement au Secours National.¹¹⁶⁴ Par exemple 5 % pour les traitement au-dessous de 6000, 10 % pour les autres.

J'ai trouvé ici tout le monde anxieux mais en bonne santé. Nos meilleures amitiés.

H. Lebesgue

Des Canadiens et des Ecossais ont débarqué ces jours-ci à St Nazaire. On attendait des Russes ???

CCXII

Mon cher Borel⁹⁷²,

J'ai été surpris de ce que vous m'avez dit hier soir :
"Pourquoi racontez-vous à Mme Dobelmann qu'il existe un service de repérage par le son⁹⁷³, qu'il y a eu une voiture Nordmann prise."⁹⁷⁸

Je viens de faire une petite enquête et voici ce que j'ai trouvé : J'ai, causant avec Mme Drach des derniers événements avant-hier, dit qu'un des ennuis de la reculade asphyxiée avait été l'abandon d'une voiture de repérage ; et, d'autre part, que je croyais que Lebeau⁹⁷⁴ allait aller à Dunkerque à cause du bombardement.

Telles sont exactement les indiscretions inexactes, mais ce n'est pas une circonstance atténuante, dont je me suis rendu coupable. Mme Drach n'avait pas parlé de ces choses à Mme Dobelmann, mais voyant Mme Borel elle lui en a parlé (*sans lui rien apprendre*) devant Mme Dobelmann.

Si vous croyez que c'est moi qui ai appris, il y a deux ou trois jours, à Mme Dobelmann qu'il y a des méthodes de repérage par le son, vous êtes d'une jeunesse que j'envie. Moi j'en ai entendu parler il y a 4 mois au moins d'abord par mon beau-frère, puis par Fatou, etc., etc. Un beau jour, entrant à l'Ecole, je trouve plusieurs équipes de chauffeurs qui en causaient fort librement sur le trottoir. Essayez donc de trouver 10 universitaires scientifiques qui ignorent la question, vous aurez quelque mal.

Quant à moi je n'ai jamais cru devoir exposer à personne la méthode de repérage en question. J'ai parfaitement attendu que vous m'en parliez, *sans impatience* ; j'ai évité d'aller au laboratoire de physique, je n'ai pas cherché à vous rencontrer. Quand, après, vous m'avez parlé de la partie mathématique j'ai été gêné par le fait de ne pas tout connaître et d'ignorer la partie physique, mais je ne me suis pas permis d'aller voir les appareils ; je vous ai quitté toutes les fois que vous m'emmeniez à la physique et c'est *jeudi au champ de tir* que je les ai vus pour la première fois. Personne autout de moi n'a appris *de moi* qu'il y a des méthodes différentes de repérage que les uns utilisent ceci, les autres cela. Vous ne vous considérez pas comme un criminel de n'avoir pas découragé Mme Duclaux qui désire visiter les voitures

sur lesquelles travaille son mari⁹⁷⁵.

Je crois de même ne pas être criminel de ne pas avoir pris un air idiot quand quelqu'un m'a demandé si je savais qu'on faisait du repérage et qu'il existait des canons, car je sais cela aussi.

Il est évident que je ne suis pas atteint de cette maladie féminine : confondre la discrétion avec la manie des mines mystérieuses. Je sais aussi que quand une femme, qui ne devrait rien savoir et qui en fait ne sait rien, trouve une autre femme qui en sait autant, c'est-à-dire aussi peu qu'elle, il lui est impossible de le supporter, surtout s'il s'agit d'une amie - mais qu'y puis-je ?

J'aurais certainement mieux fait de ne rien dire sur Dunkerque. Quant à la voiture prise, je ne l'ai pas appris aux Allemands, qui l'ont su avant moi. Il est vrai qu'autrefois on m'a dit que si on ne nous avait pas annoncé la prise de Maubeuge, c'était pour la laisser ignorer aux Allemands.

La vérité c'est qu'on parle toujours trop ; moi comme les autres, les autres comme moi. Chacun trouve que ses indiscretions sont sans importance, mais celles des autres, Seigneur !

C'est pourquoi il n'est pas mauvais que les uns et les autres se rappellent à l'ordre de temps à temps. Dans cet état d'esprit, je vous remercie.

Cordialement.

H. Lebesgue

CCXIII

Mon cher Borel⁹⁸¹,

Si cela vous est utile, je veux bien faire des calculs. Mais alors dites moi expressément, et dans le détail, les opérations que je dois faire. Je veux bien être une machine à calcul, mais rien de plus. Ceci parce que j'ai toujours été incapable de traiter un problème de physique et que tous les raisonnements de physique que j'ai entendus n'ont jamais pu obtenir de moi comme marque d'admiration que : astucieux, bien imaginés, mais, après tout Dans ces conditions je ne puis et ne veux prétendre raisonner.

Je ferai donc les calculs que vous me demanderez à la façon d'un bon employé idiot ; rien de plus. Pour ceux dont vous m'avez parlé l'autre jour c'est avec un manque d'entrain particulier que je les entreprendrai, car ils ne seraient concluants (et encore, pour les croyants seulement) que s'ils conduisaient à des rapports de petitesse accablante. Dans ces conditions un calcul d'ordre de grandeur et non plus des calculs systématiques permettraient de conclure tout aussi bien (ou mal).

Mais vraiment quelle est cette maladie calculatrice, alors que l'on a fait (paraît-il) et qu'en tout cas on peut faire des expériences. Il y a certainement en France des endroits où l'on fait des tirs réels au 75, qui diffère peu du 77 allemand, et puis il y a le front⁹⁸².

Ce que je comprends particulièrement peu c'est que votre colonel fasse l'objection de l'onde de choc⁹⁸³ si tard et qu'il en conclut l'infériorité des méthodes à rupteurs sur les méthodes à microphones. Si tard, cela m'étonne : parce qu'il revient du front expérimenter des microphones et qu'il ne peut en conclure la supériorité des microphones que si la question s'est posée pour lui et qu'il a pu la résoudre. Alors il devait faire l'objection dès le début, dire comment il la lève avec les microphones et par suite donner les renseignements expérimentaux auxquels on essaiera en vain de suppléer par le calcul.

S'il entendait deux bruits, le claquement puis la détonation initiale et qu'il savait faire la distinction c'est qu'il y a entre eux le temps de réarmer les rupteurs. Tout au plus si cet intervalle est petit faudrait-il imaginer des rupteurs en cascade, le premier annonçant le second. Ce serait une supériorité pour les rupteurs.

Dans la pratique n'entendrez-vous pas le sifflement avant la détonation. Si oui, comme le claquement précède évidemment le sifflement, il serait insignifiant et la question serait réglée.

Cordialement.

H. Lebesgue

Problème : Trouver un couvercle d'aire minimum pour les triangles de périmètre donné⁹⁸⁴.

Un cuisinier a beaucoup de casseroles cylindriques de formes

diverses et baroques, mais dont la largeur est au plus ℓ ;



il commande à un ferblantier un unique couvercle pour toutes ces casseroles en lui fournissant, comme seule donnée, ce nombre ℓ . Quelle forme le ferblantier doit-il donner à son couvercle pour user le moins de matière possible ?

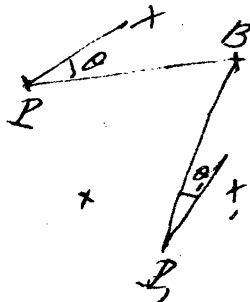
Qui aurait cru qu'un métier aussi modeste que celui de ferblantier exigeât la solution de questions si difficiles ?

CCXIV

Mon cher Borel⁹⁸⁵,

Vous m'expliquiez que vous aviez le droit de vous tromper sur λ et μ , ou k et ℓ je ne sais plus, quand cette mauvaise nouvelle nous est arrivée.

Ce droit de vous tromper que vous réclamez c'est le droit de mal placer les éléments de base : milieu des bases et directions de ces bases. Or si vous l'avez, moi je l'ai aussi ce droit ; or remarquez que le droit de mal placer une direction origine c'est



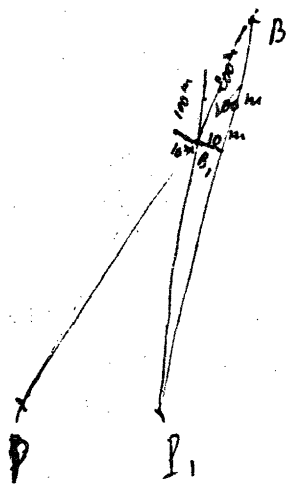
le droit de se tromper sur θ . Et avec tous ces droits-là, je graphiquerais encore mal !

Je crois que la vérité c'est que les uns réussiront mieux par le graphique et les autres par le calcul, et je crois que le graphique est plus à la portée, plus dans les habitudes des artilleurs.

Quant aux recherches d'approximation dont vous me parlez, ça n'est pas dans mes cordes ; je n'ai jamais eu le sens de ces choses-là. De plus, dans le cas actuel, il s'agit de faire des approximations alors que moi, qui n'ai pas vu l'appareil ni ne sais ce qu'il donne, je ne connais l'ordre de grandeur de rien.

A ce sujet. Au début, à une observation que je faisais, on me dit : arriver à une approximation de 200 m ce serait pour nous l'idéal. J'ai basé mes réflexions sur ce fait et sur ce qu'on m'avait dit : 2 postes de 300 m distants d'un km, placés entre la batterie française et l'autre 3 . Et il s'agissait des batteries de campagne dont la distance normale de combat est de 3 à 4 km. Nous sommes loin des 10 km dont vous me parliez samedi.

Certes avec ces 10 km le graphique serait cause d'erreur, mais si l'angle en B est aigu pour le graphique il l'est à tous les points de vue. J'en étais bien certain et, samedi, je cherchais à tort l'effet de cette acuité dans l'effet d'une erreur sur le milieu d'un des postes. J'aurais dû la chercher sur une erreur dans la direction d'un poste. Une erreur de $\frac{1}{1000}$ sur cette direction, sur chaque direction, fait une erreur de 200 m sur la distance. Chose naturelle d'ailleurs, on connaît PBP_1 à $\frac{2}{1000}$ près donc



avec une erreur relative de $\frac{1}{50}$, et on trouve une erreur relative de $\frac{200}{10000} = \frac{1}{50}$ sur les distances.

Or répondre du / 1000 dans la direction de PB me paraît, à moi profane, répondre du $\frac{1}{1000}$ de seconde en temps et de bien d'autre chose encore. Par conséquent, dans le cas des 10 km le graphique devient plus imprécis, mais en somme comme les données elles-mêmes.

Certes le calcul a cet avantage qu'il nous permet, à nous mathématiciens, de nous laver les mains de toute erreur. Il nous suffit de laisser les physiciens faire toutes les déterminations et de faire, à grand renfort de décimales s'il y a lieu, des calculs exacts. Mais cela n'est pas la méthode pratique et simple.

Il me semble d'ailleurs qu'il y a lieu de distinguer. Le cas dont on m'avait parlé était celui des batteries de campagne peu distantes mais très mobiles, avec lesquelles il faut aller vite. Le cas dont vous me parliez samedi, 10 km, est celui d'une batterie lourde tirant de loin, peu mobile, donnant le temps aux longs calculs et valant la peine de ces longs calculs. Alors en avant les théodolites et les géographes de l'armée.

Je recourrais d'autant plus volontiers dans ce cas à de longs calculs que je crois bien, ce qui ne sera pas pour vous déplaire, qu'il faudra dans ce cas faire des probabilités et ne pas calculer un seul couple θ, θ_1 .

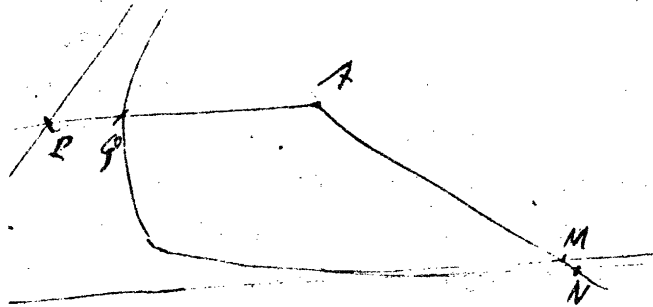
Je vois aussi le calcul dans un autre cas. Dans la guerre de siège actuelle on peut prévoir l'installation de postes qui ne bougeront pas de longtemps. Si mon hypothèse est exacte, il n'y aurait pas de mal, bien au contraire, à les placer avec toute la précision possible au prix, s'il est nécessaire, d'un ou deux jours de déterminations. Et si ces postes doivent séjourner je ne verrais qu'avantage à calculer pour chaque poste complet (4 appareils, méth. W.C., 3 : méth. N.D.)⁹⁸⁶ un tableau à double entrée en $\sin \theta$, $\sin \theta_1$, pour la région que se poste double surveillance. Ces tableaux à double entrée donneraient x et y .

Mais dans le cas où l'on se déplace vite, ce qui est le seul cas où le problème Cotton se posera, alors je ne vois que le graphique et je ne crois pas à la détermination de batteries éloignées.

Hier, moi aussi j'avais ^{fait} du taupin. Puisque les conditions de mes calculs primitifs n'étaient plus remplies j'ai voulu reprendre la question du remplacement des hyperboles par leurs asymptotes⁹⁸⁷. Je crois que ça va encore, mais je n'en suis pas entièrement certain. Sans doute on est plus loin, donc plus près des asymptotes, mais ces asymptotes se coupent sous un angle plus aigu et l'on perd peut-être ainsi ce que l'on gagne. Mes calculs n'ont pas tiré la question tout à fait au clair. Il me semble que ça va, mais il faut s'entendre sur les dimensions et ce que l'on veut comme

approximation.

Au cours de ces calculs j'ai fait une découverte magnifique qui explique certains résultats qui m'avaient fort étonné lors de mes premiers calculs : on ne gagne pas indéfiniment en remplaçant les hyperboles par leurs asymptotes quand on s'en va viser un point de plus en plus loin. En d'autres termes la méthode comporte une erreur systématique. Vous vous en rendrez compte de suite en pensant à l'erreur que vous commettriez en remplaçant une hyperbole par



son asymptote pour la recherche du point de rencontre de cette courbe avec une droite passant par un point fixe et la coupant fort loin. En assimilant, en somme, M et N. Quand MN vont à l'infini on commet l'erreur (absolue) PQ.

La même chose se passe pour 2 hyperboles.

Au fond la chose ne m'intéresse plus :

1° parce que j'ai constaté que je ne vois dans les lunettes que les objets brillamment éclairés ;

2° parce que le problème est celui des topographes et que nous n'empêcherons pas (fort heureusement peut-être) les topographes de faire comme ils voudront puisqu'il s'agit d'une chose qu'ils connaissent ;

3° parce que, s'il y avait par hasard un problème à résoudre dans cette affaire pratique, Esclangon aura pour le faire des lumières (et des qualités) qui me font totalement défaut.

Cordialement.

H. Lebesgue

CCXV

Paris, 31 mars 1915

Mon cher Ami,

Il est urgent que, pour la cordialité de nos relations futures, nous nous engueulions quelque peu.

Le motif apparent sera l'incident d'hier, bien qu'il n'ait rien à voir avec la question, et que je me refuse à lui accorder une importance quelconque à moins que vous m'en priiez absolument. Je pense même qu'il vous a échappé : Hier, j'étais avec Montel, vous vous êtes précipité sur lui, sans répondre à mon bonjour. Je suis intervenu dans votre conversation, vous ne m'avez pas entendu. J'ai continué à accompagner Montel, vous m'avez fermé la porte au nez. Je suis resté dans une salle sur le passage, vous êtes sorti sans me voir et sans me chercher.

Je n'attache à cela aucune importance ; permettez-moi de vous dire seulement que vous seriez imprudent en généralisant cette façon de faire.

Cet incident est sans importance, mais il m'a mis en colère cependant, preuve que j'avais eu tort de ne pas régler les questions en suspens, sur lesquelles je reviens donc.

Je n'avais pas demandé à être mêlé à ces histoires de repérage ; vous m'avez un jour convoqué. Dès que j'ai compris que je ne comprenais pas ce qu'on attendait de moi je vous ai écrit ; vous ne m'avez pas répondu ni par écrit, ni même nettement quand je vous ai vu, bien qu'alors je vous ai posé, à vous-même, la question.

Après deux séances d'arpentage je vous ai récrit en vous disant les raisons qui me faisaient me désintéresser de plus en plus de la chose. A ce moment une indisposition m'a empêché d'aller au Mont Valérien avec vous et je ne vous ai vu que huit jours après. Il a fallu que ce soit moi qui mette la conversation sur le sujet de repérage ; vous m'en avez parlé très vaguement, si vaguement que vous m'avez dit : "Oh ! si ça vous intéresse vous pouvez venir avec moi au laboratoire de physique".

Qu'auriez-vous pu dire d'autre à quelqu'un qui se mêlerait d'une affaire dont on ne lui aurait jamais parlé ?

Cette forme de congé m'a surpris assez de vous à moi pour que je n'ai rien trouvé à dire sur le moment et pour que, naturellement, j'enrage depuis de ne rien avoir trouvé à vous dire. Surtout ne me dites pas que je vous avais déclaré me désintéresser de la chose et ne faites pas semblant de ne pas avoir compris que, quand vous me disiez qu'il y avait à faire pour des mathématiciens, et que moi je vous répondais que la question ne m'intéresse pas parce que je n'y voyais rien à faire, cela voulait dire : voici ce que j'ai cru comprendre, expliquez-moi en quoi je me trompe et montrez-moi les motifs d'intérêt.

Si vous me trouviez vraiment un collaborateur indésirable, pour mon scepticisme ou pour toute autre raison, de vous à moi ça pouvait se dire. Ce que je n'admets pas c'est la façon oblique, *sans histoire*, dont la question s'est réglée.

Je hais le *sans histoire*.

Il y a un an, à l'occasion de la mécanique céleste, vous m'avez fait comprendre que bien des gens n'hésitent pas entre deux solutions dont l'une est sans histoire⁹⁸⁸. Et j'avais été choqué que ce soit moi que vous attrapiez. Je vous en prie, réagissez, ou vous prendriez l'habitude du sans histoire pour ligne de conduite. Je le regretterais beaucoup car vous n'avez pas eu peur jusqu'ici des histoires.

Bien entendu cette lettre n'appelle aucune conclusion pratique ; ça ne veut pas demander du tout qu'on me réinvite à porter un piquet ou une chaîne d'arpenteur. J'ai trop la sensation de mon inutilité et trop d'orgueil pour accepter que certains puissent me croire utile alors que je me sais inutile. La conclusion de cette lettre est seulement ceci : ce ne serait pas la peine d'être des amis (ou plutôt la joie) si l'on ne devait pas se parler franchement et sans réserve même et surtout quand on n'est pas d'accord.

Bien à vous.

H. Lebesgue

Reçu une carte de St Jean le Thomas.¹¹⁶⁶

CCXVI

Paris, le 4. 4. 1915⁹⁹⁰

Mon cher Ami,

Si j'avais à faire des calculs trop monotones et trop nombreux pour que j'en sois rassasié (et j'ai assez bon appétit en cette matière), je tâcherais d'obtenir de l'armée des auxiliaires habitués aux calculs fastidieux, mais je ne m'adresserais à vous qui si vraiment il n'y avait pas moyen de faire autrement, car vous avez un meilleur emploi de votre temps. Du moment que vous appelez *physiques* ces questions de balistique, c'est une manière d'indiquer qu'elles ne vous intéressent pas ; il vaut peut-être mieux alors que vous vous en désintéressiez. Je le regrette beaucoup, car il me semble que la nature d'esprit qui vous poussait il y a quelques années à étudier les dés parallélépipédiques ou plus récemment à des problèmes numériques sur les polyèdres⁹⁹¹ serait extrêmement précieuse pour la solution de quelques-unes des questions dont nous avons parlé. Quant à vous renseigner sur les expériences faites ou à faire, il ne faut pas me demander de vous expliquer avec clarté ce qui est pour moi tout à fait obscur. Tout ce que je crois savoir, c'est que les expériences sont difficiles car on fait rarement des tirs réels à longue portée *entièrement en territoire ami*, ce qui est nécessaire pour que l'on sache quelle expérience est faite. Si c'est l'ennemi qui tire, comment savoir s'il tire 1 ou 2 coups ?

Cordialement.

E. Borel

CCXVII

Mon cher Ami⁹⁹²,

1) Voilà l'erreur. Tous nous voudrions être utiles, recommencer Leblanc en 1793 ou Berthelot en 1871 et avoir notre nom dans les ¹⁰¹⁶histoires de France ; mais nous nous considérons comme propres à être des chefs et non des ouvriers, voir des manoeuvres. Le seul moyen utile c'est d'être ouvrier. Parmi les ouvriers, il surgira des chefs au hasard des qualités et des circonstances.

En tout cas je ne fais rien, je n'ai donc pas mieux à faire que d'être manoeuvre. La besogne d'arpenteur⁹⁹³ était bien une besogne de manoeuvre, utile seulement si on voulait aller au front dans une équipe. Or cela je ne le voulais pas, je vous dirai pourquoi un jour.

2) J'appelle physiques ces questions parce que je les crois justifiables de l'expérience seule ; par là j'indique que je ne suis pas compétent, non qu'elles ne m'intéressent pas. J'indique par là que je ne puis prétendre jouer là le rôle de chef ou de sous-chef, sans être nuisible.

Quoique vous pensiez de mes admirables recherches sur les dés pipés, que je ne publierai jamais parce que je n'y crois pas, je n'ai rien de ce qui fait le physicien. Je n'ai jamais lu un mémoire de physique mathématique (j'en ai tout de même lu une vingtaine, sans éprouver pour le passage de chaque équation à la suivante cette impression qu'avec Hadamard vous qualifiez de "roman feuilleton"). C'est pourquoi aussi j'ai écrit dans le Bulletin de Marotte⁹⁹⁴ que je ne croyais pas à la théorie de l'équilibre du solide, par suite au principe des vitesses virtuelles, ni aux équations de Lagrange. C'est pourquoi aussi j'écrivais à Appell en octobre que je ne savais pas traiter le problème proposé au certificat de mécanique ; c'est pourquoi je suis empiriste.

Pour faire de la physique mathématique utilement il faut (à mon avis) être guidé à chaque pas moins par la logique mathématique que par l'intuition physique : on met les mathématiques au service de l'imagination, je réussis seulement parfois à mettre l'imagination au service des mathématiques.

Or ce que vous proposez c'est bien de faire oeuvre pure d'imagination. Connaissant seulement ceci : "il y a des conditions (inconnues) dans lesquelles on perçoit une onde de choc qui pourrait être gênante, sachant en particulier que cela arrive avec le 130 allemand et des canons de marine français", mais rien de plus. Vous voulez faire des calculs prouvant que, dans telle circonstance déterminée, ça n'arrive pas à être gênant avec le 77.

Il me paraît facile à imaginer des romans permettant de conclure que le rapport des effets sera $\frac{77}{130} = \frac{1}{2}$ ou $(\frac{1}{2})^2$, ... , mais de là à tirer des raisons d'agir il y a loin.

3) Je ne vous demande aucun renseignement sur les expériences.

Les questions que je vous ai faites méritent des réponses, mais moi je n'ai pas besoin de connaître ces réponses. Mon but est seulement de vous persuader que vous ne pourrez rien sans renseignements donnés par l'expérience ; je voudrais aussi vous amener à penser que ces expériences ou pour mieux dire ces observations seront peut-être de nature très banale. (Perçoit-on 2 coups ou non ? Répétition dans le temps du sifflement et du coup perçu si l'on en perçoit un seul.) Qu'il n'y a donc pas lieu de s'en effrayer et de les considérer avec terreur avant de les entreprendre, elles qui seraient concluantes.

Quant à votre objection finale sur les 2 coups peut-être tirés par l'ennemi, permettez-moi de sourire. Si on n'entend ou perçoit qu'un coup, tout va bien. Si on entend toujours 2 coups (toujours, pour les mêmes conditions), et si cela correspond à 2 coups de canon, les officiers des tranchées remarqueront vite que les obus arrivent par couple. Or il faudrait admettre que pour embêter le repérage ils tirent 2 coups à 30 degrés à la fois ou un coup réel et un coup à blanc. Ma foi alors ils auraient bien mérité d'embêter le repérage et ils ne l'embêteraient qu'à moitié puisque le repérage aurait pour conséquence un gaspillage de munitions chez les Allemands.

Quoi qu'il en soit : 1° je ne fais rien et 2° je ne vois guère comment être utile dans la question mais je ne m'en désintéresse pas (elle m'intéresse - par là je ne demande pas à être au courant en curieux ; il y a toujours trop de curieux ; quand on m'en parle on m'intéresse, voilà tout - je ne trouve pas à agir : distinguer). 3° Le seul service que je crois que je puisse rendre c'est d'essayer de vous persuader (et alors vous sauriez persuader Driancourt) que 2 postes de repérage et un poste d'expérience sur le front y rendraient plus de services que 3 postes de repérage (mais moins que 3 postes de repérage + 1 poste d'expérience). Qu'au bout de très peu de jours on saurait alors s'il y a ou non une onde de choc et si oui qu'on y parrerait (car on y parrerait).

Car je déclare, moi sceptique sur les mathématiques, qu'il est déplorable que tout cet effort se voit contrecarré par l'atmosphère de scepticisme qui est jusqu'ici le seul effet perceptible de l'onde de choc des 77, à ma connaissance du moins, comme disent les gens prudents.

Cordialement.

H. Lebesgue

Reçu une lettre de Drach ; il a tué un cochon.

CCXVIII

Mon cher Ami⁹⁹⁵,

Le Dictionnaire de Sonnet¹⁰¹⁸, qui est tout ce que je possède en fait de connaissances appliquées, parle longuement des travaux du général Didion (Balistique), lequel remplaça la loi de résistance kv^2 de Newton par $A(\alpha v^2 + \beta v^3)$ où A est la section du boulet (alors sphérique) et α et β deux coefficients donnés (effectivement !!). Il paraît que ça colle.¹⁰²⁰

On ne peut pas intégrer, mais en admettant à un moment que c'est la parabole du vide ça donne des formules qui marchent. Cet artifice a produit grand effet chez les balisticiens d'après une citation du livre de Buat¹⁰²¹; lequel livre m'apprend que ce sont toujours les méthodes de Didion ou à peu près qu'on continue à employer.¹⁰²² Avec ces méthodes on construit des tables pour tous les canons existants ou à construire. De plus un certain général¹⁰²³ que j'ai oublié a donné une formule approchée "qui peut être employée sur le terrain". Tout cela serait à prouver avant de faire des calculs au hasard. Buat cite souvent Letourmy, *Balistique extérieure*.¹⁰²⁴

Au reste, pour votre but, la vulgaire parabole de Galilée ne suffirait-elle pas ? En prenant votre tableau je viens de me convaincre que non.

Cordialement, amitiés à Madame Borel.

H. Lebesgue

J'ai pris votre recueil secret.

CCXIX

Mon cher Ami⁹⁹⁸,

Vous êtes peut-être étonné de ne rien avoir encore reçu de moi⁹⁹⁹. J'avoue que j'ai remis plusieurs fois avant de vous écrire, j'ai trop peur de ne pas savoir vous dire bien ce que je devrais vous exprimer sans peine : le sentiment d'amitié profonde et

jalouse que j'ai pour vous. Il ne s'est manifesté à vous que par des attrapages rudes, durs et parfois injustes ; c'est qu'alors je vous en voulais aprement de ne pas avoir été complètement ce que j'aurais voulu à tort ou à raison que vous fussiez.

Aujourd'hui je voudrais vous convaincre que je sens quel déchirement profond vous cause la mort de Fernand, quel vide elle crée dans vos rêves d'avenir.

Au reste j'ai bien peu de mérite à le sentir car j'ai vu combien autour de vous on estime justement l'intimité des liens qui vous unissaient. Quant à lui, Fernand, il était sympathique à tous ; ceux qui, comme moi, le connaissaient assez peu ne pouvaient cependant pas ne pas être frappés de la parfaite santé morale de ce garçon simple et droit. Un petit bout de conversation avec lui et l'on se sentait redevenir jeune élève de l'Ecole tranchant toutes les questions par oui ou par non avec l'absolue certitude de la jeunesse. Après je ne sais quelle élection vous me disiez : "Fernand, lui, a voté pour Hervé¹⁰⁰⁰". Votre raison le blâmait certes, mais vous étiez content et même peut-être un peu fier qu'il ne soit pas plus "raisonnable".

Il est resté le même jusqu'au bout et son désir de quitter le repérage en est la plus évidente manifestation. Vous avez du moins la certitude, m'a dit Madame Borel, qu'il est parti en plein succès et subitement.

J'ai trouvé Madame Borel travaillant courageusement à l'Hôpital¹⁰⁰¹, se fatiguant trop peut-être, mais vous avez raison : ce n'est pas le moment de l'inaction.

Montel vous a dit ce que nous faisons. Nous avons trouvé en Driencourt un homme plus intelligent, plus ouvert que nous nous¹⁰¹⁷ y attendions. Il semble que des froissements d'amour propre aient mal aiguillé cet homme qui aurait pu bien faire et qui doit, au moins par moment, désirer bien faire.

De La Vallée Poussin, retour d'Amérique, m'avait demandé s'il ne lui serait pas possible de faire quelque enseignement à Paris. Hadamard s'est chargé des démarches. On lui a donné une conférence Michornies double plus une subvention (au total 6000 F) pour un cours au Collège de France¹⁰⁰². Maintenant se pose la question de l'auditoire ; si bien que je vais sans doute être obligé cet hiver d'aller étudier au Collège de France les intégrales

de Lebesgue (que c'est vieux ces choses-là).

Faites mes amitiés à Debierne, Buisson et aussi à Chavannes¹⁰⁰³, Gregory que je connais peu. Et voyez toujours en moi, malgré mon sale caractère, un ami bien sincère.

H. Lebesgue

CCXX

NÉCESSITÉ DE LIRE¹⁰⁰⁴

j'ai dit "de Lire" car je ne pourrais causer avec vous seul à seul.

Mon cher Ami, vous avez besoin de Montel à cause de ses qualités d'ordre général et non à cause de ses qualités mathématiques. Et pour cette raison vous lui offrez cette situation, *franchement inacceptable*, d'être un membre inavoué du cabinet¹⁰⁰⁵. Avez-vous un besoin quelconque de moi pour mes seules qualités mathématiques et ne me faites vous pas une proposition, très vague, que parce que vous avez besoin de Montel ?

Mon amour propre n'est nullement en jeu et je vous trouverais simplement un peu benêt de ne pas m'avoir dit nettement : j'ai besoin de Montel.

Laissez-moi résumer : a) votre petit bleu : désir de causer un de ces jours ; je ne pense pas du tout à être membre du cabinet.

b) Vous me proposez cette besogne qui me plaît d'intégrer le tir sur avion, mais il est question d'un bureau au ministère. Oh ! me dis-je mais c'est faire partie du cabinet : pourquoi la chose n'est-elle pas dite ?

c) Aujourd'hui la chose est dite, mais en même temps vous nous informez qu'elle est impossible parce que nous sommes en sursis d'appel et aurions l'air d'embusqués.

Ainsi nos connaissances et notre situation scientifiques nous ayant permis d'être mis en sursis d'appel pour l'étude des questions scientifiques intéressant la défense nationale nous deviendrons des embusqués en nous y intéressant dans un autre bâtiment. Soit, bien que je ne comprenne pas.

Et vous nous offrez d'être des gens de la 20^{ième} section, des dactylographes par exemple, qui acquerraient de l'importance à l'intérieur de bâtiment - comme Bernheim¹⁰⁰⁶ à l'ambulance de

l'Ecole.

Toute question de personne mise à part, la situation de maître de conférences à la Sorbonne est suffisante pour permettre à Painlevé de nous demander, non comme employés quelconques, mais¹⁰¹⁵ comme membres du cabinet technique s'il a besoin de nous. Ce serait au reste la seule manière qu'il puisse employer pour ne pas nous "embusquer" que de définir nettement notre position vis-à-vis de l'autorité militaire.

Ceci pour la forme ; mais pour le fond. Avez-vous besoin de moi ? Hier vous me parliez d'un besoin précise ; vous n'insistez pas aujourd'hui pour que je m'en charge et vous me parlez de Gossot et de l'utilité d'emboutir des canons français.¹⁰²⁵ Que dois-je comprendre ? Si je n'accepte pas, cherchez-vous un autre mathématicien comme vous cherchez un naturaliste ?

Répondez-moi franchement mon cher Ami et croyez que vous m'embarrassez terriblement en ne me disant pas toute votre pensée. Car si je pouvais vous être vraiment utile, si je pouvais être vraiment utile je voudrais l'être.

Bien cordialement.

H. Lebesgue

CCXXI

Mon cher Ami¹⁰⁰⁷,

J'ai vu hier soir dans les journaux que le commandant en second serait sauvé. Je pense que c'est à cela que votre bleu fait allusion - cela donne en effet toutes raisons d'espérer.¹⁰⁶¹

Bien cordialement.

H. Lebesgue

CCXXII

Mon cher Borel¹⁰⁰⁸,

Voici reproduit, avec la disposition que j'avais adoptée, votre abaque du $\varphi_{\rho}CS$.

Toutes les graduations ont les mêmes amplitudes et les mêmes échelles que dans la votre. Mais les échelles des portées et des vents sont plus tassées. Voici ^{si} ce que je propose (et qui est plus clair) est suffisant. Il se peut fort bien que non. C'était suffisant avec la dimension 40/60 de Goybet.

Pour ma part je crois aux avantages des petits papiers. J'y crois tant que j'étais opposé aux abaquages pour le 75. Mais, quand vous m'avez apporté le Le Pelletier¹¹⁶⁹, à la seule objection que je vous ai faite : "mais c'est bien grand", vous m'avez répondu : "Les artilleurs trouvent que ça n'a pas d'inconvénient".

Vous êtes versatile comme une jolie femme. Le papier petit est plus ennuyeux à établir et il peut exiger des embrouillaminis comme dans votre abaque, mais il a l'avantage d'être d'un emploi plus facile ; quoique théoriquement moins sûr, il est plus sûr pratiquement à cause de l'influence moindre des variations du papier. Pour être bien utilisées ces abaques ne doivent pas être pliés ; on les collera donc sur une planchette et l'humidité aidant ça deviendra ce que ça pourra. C'est un des avantages des graphiques sur les abaques.

La disposition est à étudier sérieusement car pour la commodité il faudrait adopter si possible la même pour presque toutes les pièces. Celle que je vous propose a le grand avantage de mettre chaque chose dans un coin pour cette chose. Je crois qu'il faut que vous cherchiez dans ce sens. Je vais vous dessiner sommairement le 75.

Imprimez-vous en trois couleurs ? Si oui, le vert serait pour la correction de gargouesse¹⁰⁰⁹ (vert à cause de la chimie).

Pour votre φ CS il semble d'après les échelles de portée qu'il y a un trou entre la charge 0 et la charge 1 ?

Amitiés.

H. Lebesgue

CCXXIII

Mon cher Borel¹⁰¹⁰,

Votre dernière lettre, sans me satisfaire entièrement, me donne satisfaction suffisante pour que je n'insiste pas.

Quand j'ai parlé de la perspective je n'ai pas fait allusion à l'emploi de trois échelles en triangle (que nous utilisons d'autre part pour $X = V \cos \alpha$ et inversement dans une abaque pour Rouch¹¹⁷⁰ - c'est peu pratique), mais à l'emploi de 2 échelles parallèles et d'une oblique (joignant les zéros des premières), ce qui est le cas pour tous les systèmes de 3 échelles de l'abaque du 75.

S'il n'y a aucune difficulté à graduer les échelles obliques (vent ou portées) en se servant des résultats connus à obtenir, je ne vois au contraire pas comment graduer (sans calculs auxiliaires) l'échelle oblique (T, air) sans perspective.

Pour moi, j'ai déterminé la place de cette échelle par la condition que¹⁰²⁶

H = 685	$\Delta = 1,050$	T = 30°
H = 785	$\Delta = 1,203$	T = 30°
H = 685	$\Delta = 1,2097$	T = - 10°
H = 785	$\Delta = 1,3863$	T = - 10°

Puis

H = 760	$\Delta = 1,293$
---------	------------------

donne T = 0 . Et alors je fais la perspective de 40 parties égales de façon que la division

0 air	-10 de T pour perspective
10 air	0 de T pour perspective
40 air	+30 de T pour perspective.

Je vous ai dit dans le téléphone qu'une expérience des petits Goybet¹⁰²⁷ pour le 75 nous a convaincus que c'était plus rapide (pour la partie donnée par les 2 abaques comparées) que le notre. Mais il faut autant d'abaques Goybet que de charges ou d'obus d'une part et d'autre part il faut une feuille autre pour le calcul des composantes du vent.

Décidez si oui ou non vous faites *dessiner* le 75 qu'on vous a envoyé. Si cependant votre dessinateur était occupé, ou si pour toute autre raison vous ne le dessinez pas en ce moment il conviendrait sans doute de mettre sur la même feuille les obus auxquels correspond la table de tir du 29/2/1916 (obus à balles, obus explosif, fusée percutante) que paraît-il on tire encore. Ceci se fait facilement. En faisant cela je modifierai l'abaque dans le sens auquel j'ai réfléchi pour St Chamond¹⁰¹¹.

Nous faisons exécuter par Charlet (qui travaille très bien, sans perdre de temps, mais très lentement) une table du 75 qui donne à l'oeil toutes les corrections. Elle pourrait dispenser de l'abaque. Mais chaque obus doit avoir sa *table*, naturellement.

Vous avez l'explication du tableau hygrométrique de Goybet sur l'épreuve renvoyée (avec des abaques) ce matin par Montel. J'ai oublié de corriger les nombres de ce tableau ; il faut évidemment les arrondir à l'unité sans décimale (et c'est déjà bien beau !).

Si vous êtes prêt à dessiner le St Chamond avant nous je vous transmettrai croquis avec dimensions exactes à employer, à mettre entre les mains du dessinateur sans autres explications à lui fournir. Puisque vous aimez les masticateurs qui préparent le bol alimentaire.

Je ne suis pas candidat au portefeuille de la Guerre¹⁰¹².

A vous.

H. Lebesgue

CCXXIV

Date du courrier¹⁰¹³

Mon cher Borel,

J'étais très fâché de vous avoir promis d'aller à Vitry. Quand la nécessité s'est imposée à moi de prendre des précautions à cause du froid et de rester ici je n'en ai pas été mécontent. Ce qui me gêne c'est d'aller là-bas sans motif sérieux. Déjeuner ensemble ce serait agréable mais cela ne légitime pas la dépense du voyage¹⁰¹⁴, même si elle est soldée par l'Etat. C'est donc pour un but précis que vous nous avez demandé de venir, or ce but je l'ignore et je ne le devine pas.

Si important qu'il puisse être de faire des connaissances je ne me sens pas de taille à faire une visite solennelle sans un prétexte plausible.

Montel qui n'approuve pas ma manière de voir a cependant décidé de ne pas aller là-bas quand je lui ai dit que je n'irai pas.

Vous savez que je ne comprends jamais rien à ce que les autres

écrivent sur les probabilités et moi je n'écris rien sur ce sujet. Montel a donc bien voulu se charger de regarder votre envoi sur ces questions auxquelles je reste étranger.

Bien cordialement.

H. Lebesgue

M. d'Ocagne¹⁰³⁰ reconnu officiellement par Breton va seul se charger de la question des abaqués dont en fait sinon *encore* officiellement nous sommes désaisis. Malfitano¹⁰³¹ me rapporte vos lettres oubliées par Levailant¹⁰³² je puis donc ajouter que le désaisissement est fait et élégamment fait.¹⁰³³

CCXXV

Mon cher Borel¹⁰³⁵,

Hier deux personnes sont venues nous voir et ont tiqué sur votre Bureau.

La première a dit : on dirait entrer chez de nouveaux pauvres qui ont pu sauver un peu de leur riche mobilier du désastre.

La deuxième a dit : vous avez l'air de deux expéditionnaires aux ordres du Ministre dont le superbe Bureau vous surveille.

La question qui se pose est bien celle-là.

Etes-vous un réfugié auquel nous donnons asile, ou le Bureau des calculs a-t-il acquis un Directeur général ?

Etes-vous un agent de liaison entre la quatrième Armée et les Inventions ou êtes-vous le Généralissime du Bureau des Calculs, donnant ses ordres du front ?

Il y a évidemment lieu que nous sachions s'il y a ou non quelque chose de changé dans notre petit coin - ne serait-ce que pour répondre à votre question incompréhensible sans cela : Faut-il que j'aille parler au Colonel Emery¹⁰³⁶ et que nous agissions en conséquence. J'avoue qu'il me serait personnellement très désagréable que notre liberté soit tout à coup changée et que cela se trouve un jour accompli par un de ces détours auxquels je ne comprends rien et que je me trouve en face du fait accompli.

Je m'empresse d'ajouter, parce que Montel m'a dit qu'il avait vu hier dans mes paroles une protestation personnelle qui n'y

était pas, que lorsque je disais hier que c'était fort peu que de devenir généralissime des calculs, que c'était mal vous utiliser, je le disais sans aucune pensée personnelle.

Mais aujourd'hui je vous répéterai ce que je vous ai jadis écrit au sujet de l'*Encyclopédie* (à l'article de laquelle j'ai cependant contribué plus que vous) que je n'accepterai que les Directions par moi librement consenties.

Je regrette de vous écrire cela. Mais on ne vous voit pas et puis ça aurait été moins net¹⁰³⁷.

Bien à vous.

H. Lebesgue

Je réponds immédiatement à une objection possible que je ne suis indispensable à rien ici.

CCXXVI

Mon cher Borel¹⁰³⁸,

Votre lettre est très nette, mais les apparences me conduisaient à me demander si oui ou non il y avait ici quelque chose de changé. Il est certain qu'à votre avis je vois les choses toujours sous un jour inattendu mais, en l'occasion, ce n'est pas moi qui ai eu l'idée. Malgré l'intelligence dont vous me gratifiez je comprends très lentement, et je me suis si souvent placé en face du fait accompli, sans avoir rien pressenti, que je prends les devants même quand il n'y a rien. Donc, en fait, quand vous êtes sorti de cette pièce mardi, Montel a dit : Je crois que le Bureau des calculs vient d'acquiescer un Directeur général etc. Nous en avons causé ensemble et nous sommes arrivés à la conception du généralissime des calculs.

Je ne m'en excuse pas, car si vous voyiez l'air de supériorité et d'autorité que vous prenez très souvent même avec vos amis, cela ne vous surprendrait pas.

La seule chose importante est de taper sur les Boches. Oui, mais quand dans l'affaire Dreyfus, on criait : "vive l'armée, vive la France", malgré ce qu'il y avait de sympathique dans ce cri, j'étais plein de méfiance.¹⁰⁶⁷

A force de trouver qu'une seule chose comptait on n'a rien fait pour l'obtenir. Les personnes ne comptent pas, donc : Dumézi¹⁰⁵⁰, Gossot, Joffre et Bricaud. Les partis ne comptent plus et les curés ont fait aux armées et dans les hôpitaux une pression telle qu'elle a écoeuré et démoralisé des masses de poilus, etc., etc.

Ne faisons pas graver de maxime en lettres d'or, travaillons à notre but. Et pour cela, il nous faut tous nous juger sagement nous-mêmes.

Je n'applique pas seulement ma psychologie aux autres, je me l'applique et c'est vous qui êtes responsable de ma psychologie. C'est vous qui m'avez appris que bien des hommes sont mus par des mobiles bien mesquins, que ce sont des polichinelles dont les ficelles sont en fils blancs. Mais moi je fais ces remarques seulement pour sourire, mépriser ou souffrir, c'est de la pure psychologie, ce n'est pas du sens pratique.

Je crois que vous auriez gagné à moins bien découvrir les ficelles qui font mouvoir les hommes, qu'il eût mieux valu que vous ne remarquiez pas que Painlevé a plus réussi parce qu'il a dit qu'il était un type chic que parce qu'il est effectivement chic. Que paraître est plus utile qu'être.

Et, pour revenir au Bureau des calculs, qui est si peu de choses qu'il n'est à peu près rien, je tiens, tant que j'y serai, qu'il ne prétend pas à plus que ce qu'il est. Tout organisme qui se gonfle, qui fait croire indûment en lui, empêche une réforme, une organisation voisine qui serait peut-être apparue si on avait su l'insuffisance ou l'inexistence de l'organisme primitif. Il ne faut pas dire : voilà j'ai fait ceci et encore celà ; non, il faut dire : voilà seulement ce que j'ai fait, voilà seulement pour quelle besogne restreinte et limitée vous pouvez compter sur moi. Il faut plus étaler ses insuffisances que ses succès.

C'est parce qu'il m'apparaît qu'il n'est pas dans votre ligne de conduite de faire ainsi que je ne pourrais accepter que votre introduction au Bureau des calculs lui donne figure trop importante. Je connais cet argument qui si on ne prend pas d'importance on laisse de plus médiocres prendre cette importance. Non on laisse passer plus de gens dans les places importantes et on augmente par suite les chances que parmi ces gens-là il y en ait à la hauteur de la tâche. Je ne crois pas pour ma part que l'intérêt général me

commande de travailler à augmenter mon importance. Trop souvent en vue du travail qu'on fera quand on aura acquis une importance assez grande, en vue de ce travail d'intérêt général, on passe toute sa vie à augmenter son importance personnelle ; et plus de la moitié de ma vie est maintenant écoulée.

Le fait de ne pas vouloir me mettre au premier plan et de me retirer pour des raisons personnelles ne m'empêche d'ailleurs nullement de collaborer en sous-ordre ou anonymement quand je crois qu'il y a intérêt à le faire. Et c'est à un petit exemple que je pensais quand je vous rappelais que j'avais travaillé à l'*Encyclopédie*.

Pour votre table, qui détruit vraiment l'intimité de notre pièce et n'y est pas dans la note. Donnez-la à Perrin. Entendez-vous avec lui pour conserver un droit sur le meuble si vous voulez, mais prêtez-la lui. Je crois que vous lui ferez plaisir car il ne méprise pas les signes extérieurs de l'autorité et je m'empresse d'ajouter qu'il n'en a demandé aucun. Que pour les imbéciles qui passent par le Bureau du secrétaire de Breton, celui de Chaumat,¹⁰⁴⁹ le Bureau de Buisson¹⁰³⁹ et celui de Perrin, Perrin apparaîtra comme un bien petit bougre. Et cela n'est ni nécessaire, ni désirable.

Donc donnez votre table à Perrin et nous lui prendrons à la place une table plus petite qui nous encombrera moins et sera suffisante pour quand vous serez là.

Pour votre visite à Emery je ne comprends plus. Sans bien voir ce que vous pourriez lui dire, car moi je ne trouve presque jamais que ce soit la peine d'aller déranger les gens, je concevais que vous y alliez en tant qu'attaché à ce ministère. Mais en tant qu'officier de la 4^{ième} armée je suis incompetent et ne peut pas deviner ce que vous pourriez lui dire.

Après que vous aurez été à l'Ecole de Chalons, que vous aurez visité des batteries, que vous aurez feuilleté quelques pages dans vos soirées, à une de vos prochaines visites à Paris vous pourriez alors aller causer avec Emery de questions précises sur lesquelles vous lui donneriez l'impression d'un individu compétent et non d'un homme du monde ou comme on dit à St Thomas d'Aquin d'un sorbonnoïde.¹¹⁷⁵

Sans doute la visite de cette fois n'empêcherait pas une prochaine visite, mais, à mon avis, elle serait plutôt nuisible.

Mais bien entendu mon opinion est dominée par le fait que je ne devine pas l'objet de la visite.

Bien cordialement.

H. Lebesgue

CCXXVII

Note à M. Borel¹⁰⁴⁰.

Vous vous préoccupez l'autre jour de votre livre. Je l'ai reçu.

J'ai vu avec plaisir que, bien que dans votre dernière notice, vous réclamiez la mesure des ensembles linéaires "bien définis" comme vous étant "entièrement due", il me reste comme travail "entièrement personnel" l'introduction des mots "de mesure nulle"¹⁰⁴¹.

H. Lebesgue

CCXXVIII

Note¹⁰⁴².

Ceci avait été envoyé en prévision de la possibilité d'en introduire une fraction dans une n^{ième} édition de la brochure sur le réglage des tirs¹⁰⁴³.

Avant la liquidation combien d'exemplaires de cette brochure désirez-vous ?¹⁰⁴⁴

H. Lebesgue

CCXXIX

Mon cher Borel¹⁰⁴⁵,

Quand, il y a quelque temps, nous n'avons pas pu aller déjeuner chez vous, voici ce qui était arrivé : nous étions pris le jeudi en question et moi j'étais persuadé que ce n'était pas ce jeudi-là. Mais je ne puis dire que j'ai été fâché de ce contretemps.

Je n'avais pas le courage de repousser vos aimables avances, mais elles ne m'étaient pas agréables. Je vous l'ai dit, dans la

pièce n°7 où il y avait un si beau canapé, je n'ai plus en vous la même confiance qu'autrefois. J'ai refusé alors toute discussion, je la refuse encore ; je ne crois plus aux paroles. Mais je souhaite, sans l'espérer, je souhaite avec une ardeur extrême d'être un jour obligé de vous faire les excuses les plus complètes.

Pour le moment, toute relation qui sortirait de la banalité de la camaraderie serait, de ma part, une hypocrisie. Ce ne serait pas avec vous que je déjeunerais, ce serait avec de vieux souvenirs. Il est faux que nous devions aller à Beauvais pendant les vacances du jour de l'an ; je n'ai pas eu le courage de vous dire franchement "non" l'autre jour.

Le genre de relations que nous avons eu depuis un an vous a assez fait sentir mon état d'esprit pour que cette lettre ne vous surprenne pas trop. Je crois cependant qu'elle vous fera quelque peine et j'ai conservé trop d'amitié cachée pour vous pour ne pas en être peiné moi-même¹⁰⁴⁶.

H. Lebesgue

CCXXX

Le 10 octobre 1918

Mon cher Borel,

J'espérais que le travail dont Montel vous a parlé¹⁰⁵¹ serait paru avant que ne soit réglée la succession de Raffy que je postule humblement¹⁰⁵².

Comme il n'en est pas ainsi et qu'il ne me convient pas, ni certainement à vous, que notre différent ne soit soulevé publiquement qu'après que j'aurais eu la présentation de la faculté, j'ai fait le nécessaire ici¹⁰⁵³.

Je souhaite que vous n'arriviez pas au grade de commandant¹⁰⁵⁴.

Bien à vous.

H. Lebesgue

CCXXXI

Mon cher Borel¹⁰⁵⁵,

J'ai répondu¹⁰⁵⁶ :

Monsieur le Doyen,

Dans sa notice, M. Borel opposait "la définition de l'intégrale" à ses "conséquences", lesquelles m'étaient "entièrement personnelles", déclarait-il.

C'est là un fait que j'avais le devoir d'indiquer puisqu'il pouvait influencer sur le jugement de mes collègues, et je ne pouvais le faire sans protester catégoriquement.

De la lettre que M. Borel vous a écrite et qu'il m'a communiquée je ne retiens que cette conclusion, qui s'en dégage, me semble-t-il ; il n'y a pas à tenir compte de la phrase de M. Borel dans le jugement de ma candidature.

Veillez agréer

Bien à vous.

H. Lebesgue¹⁰⁶⁵

CCXXXII

Mon cher Borel¹⁰⁵⁹,

Quand, en mars dernier, Dupuy m'a demandé si je comptais ou non conserver les Hautes Etudes, j'ai dit non. Mais maintenant, en décembre, je compte les conserver au moins quelque temps. Peut-être conviendrait-il que Julia¹⁰⁶⁰ ne compte pas trop sur mon héritage prochain.

A vous.

H. Lebesgue

NOTES

1 En mettant de l'ordre en 1988 dans l'in vraisemblable entassement de livres déposés depuis des années au sous-sol de l'Institut Henri Poincaré,⁴¹³ Jean Lefebvre a mis à jour la correspondance de Borel qui avait dû rester après sa mort en 1956 dans son bureau de l'Institut dont il était le directeur. Ces lettres ont été répertoriées par Denise Lardeux*.

Les trois premières lettres sont classées approximativement ; elles se trouvaient dans une enveloppe portant le cachet de la poste du 7 mai 1901. Lebesgue était alors professeur de la classe de Centrale au Lycée de Nancy et Borel maître de conférences à l'E.N.S.

2 Voir [1]. Cette note a été présentée par E. Picard le 29 avril 1901. Elle définit l'intégrale de Lebesgue et celui-ci y écrit (p.197) :

"Dans le cas des fonctions continues, il y a identité entre les notions d'intégrale et de fonction primitive. Riemann a défini l'intégrale de certaines fonctions discontinues, mais toutes les fonctions dérivées ne sont pas intégrables au sens de Riemann."

3 Dans [2], p.381, il est précisé que V. Volterra a donné un exemple d'une fonction dont la dérivée n'est pas intégrable au sens de Riemann. Cet exemple figure dans [3], p.17-18. Lebesgue l'exposera dans ses *Leçons sur l'intégration* ([4], 93-94).

Pour les nombres de Dini, voir également ces *Leçons* p.67.

4 E. Borel écrit, p.46, de ses *Leçons sur la théorie des fonctions* ([5]) à propos de sa définition d'un ensemble mesurable :

"On comparera avec fruit les définitions que nous allons donner avec les définitions plus générales que donne M. Jordan dans son *Cours d'analyse*."

C. Jordan a développé sa théorie de l'intégration dans son mémoire [6] de 1892, théorie qu'il a reprise dans la deuxième édition de son *Cours d'analyse* ([7], 75-95).⁷⁶⁷

5 Lebesgue semble reconnaître à cette époque-là qu'il a "fait une application" de la définition de la mesure de Borel.

6 Il semble que Lebesgue pose ici la question de la mesure des

* Nous n'avons pas pu trouver les lettres de Borel à Lebesgue. J. Lebesgue, fils d'Henri Lebesgue, nous écrivait le 7 mai 1973 que son père n'avait pas "l'habitude de garder les lettres reçues ni de prendre des doubles de celles qu'il envoyait".

ensembles non boréliens, problème qu'il abordera en 1904.

7 Emile Lacour, né en 1854, élève de l'Ecole Normale Supérieure, professeur à l'Université de Nancy. Au nom de Lacour, dans le dossier F 17 21041 des Archives Nationales, nous n'avons trouvé aucune information sur Emile Lacour et nous n'avons pas donc pu établir la date de sa nomination.¹¹¹¹

8 La condition donnée par Lebesgue est suffisante, mais elle n'est pas nécessaire. (Il suffit de considérer la fonction $\cos \frac{1}{x}$.) Il énoncera une propriété analogue dans [9], p.336.

Lebesgue reprendra ce problème, sous d'autres formes, dans [4], chapitre V.

9 Comme le signale T. Hawkins ([8],139), Lebesgue a repris ce terme dès 1903 dans [9], p.1229, note 1.³²⁷

10 G. Perrin élève de l'Ecole Normale Supérieure de la promotion 1892.²⁹²

11 La correspondance de V. Volterra est déposée à l'Accademia dei Lincei à Rome et elle est actuellement en classification.⁷³

12 Lebesgue développera ces idées p.215-217 de sa thèse ([10]).

13 Cette remarque montre l'influence de Jordan dans la genèse des idées de Lebesgue¹⁶¹, qui utilisera un procédé de Jordan pour construire la mesure dans sa thèse ([10]) et dans [4].

14 Voir p.213-215 de [10].

15 Dans son livre de 1904 ([4],102), Lebesgue appellera "problème de la mesure" la question de savoir s'il est possible d'étendre la mesure (de Lebesgue) à un sous-ensemble quelconque. Dès 1905, G. Vitali ([15],231-235) montrera que cela n'est pas possible. En 1914, F. Hausdorff, dans son livre *Grundzüge der Mengenlehre* ([16],469-472), élargira le "problème de la mesure" à la recherche des prolongements additifs de la mesure de Lebesgue à tous les ensembles de points. Ce problème sera résolu pour la droite et le plan par S. Banach en 1923 ([17]), Hausdorff ayant donné une réponse négative pour \mathbb{R}^3 . On consultera avec profit l'article [18] de S. Banach et K. Kuratowski sur cette question.⁴⁵⁷

16 Il nous semble intéressant de citer ici le passage suivant de la *Notice sur les travaux scientifiques* de Lebesgue ([11],100) :

"M. Borel, qui a toujours beaucoup espéré de la théorie des ensembles, a été, je crois, le premier à penser que mes travaux auraient une utilité en quelque sorte pratique. Il l'a, en tout cas, pensé bien avant moi ; je me vois encore hésitant avant de me

décider à présenter, comme thèse de doctorat, le mémoire où j'ai abordé presque toutes les recherches que j'ai développées par la suite."

17 Notons d'abord que Lebesgue reconnaît ici avoir seulement "très légèrement modifié le langage".

Il s'agit, dans cette lettre, de la définition des ensembles mesurables au sens de Lebesgue, telle qu'elle a été exposée dans [1], p.198. Voir aussi la note 1 de [1].

18 De [5].

19 De [5].

20 De [5].

21 Cet argument sera repris dans la thèse de Lebesgue ([10], 214).

22 Ensemble des fonctions de la classification de Baire.

23 Lebesgue montrera en 1904 seulement qu'il y a identité entre les fonctions de la classification de Baire et les fonctions mesurables au sens de Borel ([12]).

24 Il s'agit de la forêt domaniale de Haye en Lorraine, à l'ouest de Nancy, dominant la vallée de la Meurthe.

25 Elève de l'Ecole Normale Supérieure de la promotion 1896.¹¹¹²

26 Il est probable que E. Picard a suggéré à Lebesgue de renforcer les applications géométriques de ses recherches sur l'intégration exposées dans sa thèse. Bien que Darboux ait été le premier en France à poser des questions nouvelles sur les fondements de l'analyse dans son mémoire *Sur les fonctions discontinues* ([13]), en 1902, il avait oublié ce "pêché de jeunesse" et n'appréciait que très modérément les efforts de Borel et Baire pour introduire en analyse la nouvelle théorie des ensembles de points élaborée, en particulier, par G. Cantor.

27 E. Picard faisait partie du comité de rédaction des *Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*.

28 Imprimeur des *Annales*.

29 Voir [14]. J. Clairin était l'élève de l'Ecole Normale Supérieure de la promotion 1896 et en 1902 agrégé préparateur à l'Ecole.¹¹¹³

30 J.-M. Dunoyer de Segonzac nous écrivait le 3 décembre 1970 que, "après la mort de son grand-père Emile Picard", gendre d'Hermite, "plusieurs valises contenant la correspondance de Ch. Hermite ont

été entreposées dans un garde-meuble à Paris, lequel a totalement brûlé quelques mois plus tard". Ainsi, probablement, les lettres de Lebesgue à Picard sont parties en fumée avec la plus prestigieuse correspondance mathématique de tous les temps, celle d'Hermite.

- 31 La thèse de Lebesgue sera publiée dans les *Annali di Matematica*.
- 32 C. Jordan dirigeait le *Journal de mathématiques pures et appliquées*.
- 33 R. Baire, ayant obtenu en février 1898 une bourse d'études de la Faculté des Sciences de Paris, part pour Turin auprès de Vito Volterra d'où il reviendra fin mai. Sa thèse, dédiée à Dini et à Volterra, a été publiée dans les *Annali di Matematica* de 1899.
- 34 19.000 F de 1989.
- 35 664 F de 1989 : aujourd'hui le billet de seconde coûte 348 F.
- 36 La lettre porte la date du 4 février 1902, ajoutée probablement par Borel.
- 37 Au Cours Peccot du Collège de France. Lebesgue sera finalement chargé de ce cours pendant l'année universitaire 1902-1903.⁴¹⁵
- 38 C. Wolf, professeur d'astronomie à la Sorbonne, né en 1827, p.¹¹¹⁴ Appell, professeur à la Sorbonne, né en 1855, et P. Painlevé, maître de conférences à l'École Normale Supérieure, né en 1863. Il semble donc que Wolf devait prendre sa retraite, remplacé par Appell, qui à son tour devait être remplacé par Painlevé.
- 39 Rappelons que C. Hermite avait épousé la soeur de Joseph Bertrand, E. Picard la fille de C. Hermite, P. Appell celle d'Alexandre Bertrand, frère de Joseph, et E. Borel celle de P. Appell. Gendre d'Appell et neveu de Picard, Borel semble avoir été bien au courant des "mouvements" de carrière des mathématiciens.
- 40 Lebesgue était à Nancy et Baire, maître de conférences à Montpellier, devait être chargé du cours Peccot pour 1902-1903. Il était donc question que Lebesgue le remplace durant cette période à Montpellier.
- 41 Pour être candidat au cours Peccot il fallait avoir moins de 30 ans, or P. Langevin est né le 23 janvier 1872.¹⁰⁷¹
- 42 La lettre porte la date du 7 février 1902 de la main de Borel. C'est la seule lettre de cette période qui commence par "Mon cher Borel".
- 43 L. Liard (1846-1917), philosophe, directeur de l'enseignement supérieur de 1884 à 1902, puis vice-recteur de l'Université de Paris. Sa thèse de 1873 s'intitule *Des définitions géométriques et des*

définitions empiriques.

- 44 M. Servant, né en 1877, chargé de cours de géométrie supérieure à la Sorbonne, probablement candidat de Darboux au cours Peccot.¹⁰⁷²
- 45 H. Collin, directeur des Services d'Archives de Meurthe et Moselle, nous a écrit le 3 novembre 1989 :
- "Malgré un certain nombre de recherches effectuées dans nos collections, il n'a pas été possible de trouver trace de Duvigneau de Laneau."⁸⁷⁰
- 46 Voir [19]. Lebesgue y cite Darboux p.253, 255 et 257.
- 47 Lebesgue adhérera effectivement à la Société Mathématique de France en 1902 et publiera [20] dans le *Bulletin* de la Société.
- 48 Lebesgue énonce dans [21] - la note du 10 mars 1902 présentée par E. Picard - la proposition suivante :
- "Si la partie réelle d'une série de Taylor est convergente sur le cercle de convergence et a une somme inférieure à M , elle a aussi une somme inférieure à M à l'intérieur du cercle."
- Il ajoute que ce résultat subsiste si on exclut "un ensemble fermé de mesure nulle".
- Lebesgue démontrera ces résultats dans [22].
- 49 Sur la lettre figure la date du 18 juillet 1903.
- Lebesgue était de 1902 à 1906 maître de conférences à la Faculté des Sciences de Rennes.
- 50 Elève de l'Ecole Normale Supérieure de la promotion 1867¹⁰⁷⁴.
- 51 Il s'agit de [4] qui paraîtra en 1904.
- 52 M. Lerch (1860-1922) était à cette époque professeur de mathématiques à l'Université de Fribourg en Suisse.
- 53 Voir dans [23] p.237 (énoncé du théorème d'Arzela) et p.299 : il s'agit du théorème de Montel. Le théorème d'Arzela figure dans [24].
- 54 Voir [23], p.315-316. Il s'agit du théorème suivant :
- "Considérons une fonction de z de première classe $F(z)$, je dis que, dans tout domaine, on peut en trouver un autre où cette fonction est analytique et où la suite qui a pour limite $F(z)$ converge uniformément."
- 55 Les démonstrations de cette lettre ont été reprises dans [25]. Voir aussi [4], 2^e édition, p.339.
- 56 Cette lettre a dû être écrite avant le 3 octobre 1903.
- 57 Voir [4], p.130-136.

- 58 Ensemble dérivé introduit par Cantor : ensemble des points d'accumulation d'une partie d'un espace topologique.
- 59 Voir [48].
- 60 C'est dans le chapitre V, *La recherche des fonctions primitives* ([4],79), que Lebesgue utilise "une généralisation heureuse de la notion de limite inférieure et supérieure" due à Baire. C'est en effet une notion qui joue un rôle essentiel dans la théorie de l'intégration de Lebesgue ([317],75).
- 61 Cette remarque de Lebesgue sur l'"originalité" en mathématiques nous paraît très importante. Elle souligne l'influence décisive de Baire dans l'introduction du "presque partout" en analyse : celui "topologique" de Baire et le "métrique" de Lebesgue.
- 62 Voir [49] qui a 124 pages. Le livre de Lebesgue ([4]) en aura 138.
- 63 Voir la note 1, p.45 de [4].
- 64 Voir p.120-125 de [4].
- 65 Il semble que Montel ^{n'ait} rien publié sur ce sujet ([50],267). Les papiers de P. Montel ⁶¹⁵ sont déposés aux Archives de l'Académie des Sciences de Paris.
- 66 Lebesgue, né à Beauvais, y avait encore sa mère et sa soeur Claire.
- 67 R. Baire écrira à E. Borel, lorsque cette histoire du cours Peccot sera réglée, le 12 novembre 1903 ([51],64) :
- "Mon cher ami,
Merci pour la bonne nouvelle, mais surtout pour avoir fait en sorte qu'elle fut bonne."
- R. Baire n'a pas non plus conservé les lettres de Borel.
- 68 Pour le cours Peccot.
- 69 Borel a fait pendant trois ans le cours Peccot au Collège de France.
- 70 Voir les lettres V et VI de Lebesgue, p.6-7.
- 71 Voir la lettre de Baire à Borel du 22 mai 1903 ([51],63).
- 72 Baire était souffrant, par intermittence, depuis 1900. Un certificat médical du 20 novembre de cette année précise ([30],307) qu'il est "atteint de troubles neurasthéniques caractérisés par une grande faiblesse musculaire, inaptitude à tout travail intellectuel et forte dépression nerveuse". Notons que G. Cantor, un autre mathématicien grand utilisateur de la théorie des ensembles, souffrait

également de très fortes dépressions nerveuses.

73 G. Israel a bien voulu nous envoyer une photocopie de la correspondance de V. Volterra avec H. Lebesgue qui contient 25 pièces, s'étendant de 1901 à 1940. La lettre n° 1 est en réalité la 2^e lettre de Lebesgue à Volterra (c'est la lettre n° 3 qui est la première, car on y parle de l'exemple de Volterra : voir ici p.1). La lettre n° 1 de Lebesgue contient, comme le précise Lebesgue "une analyse" de sa thèse (analyse qui, nous ne savons pas pourquoi, porte le numéro 23 dans le classement de la correspondance). Lebesgue y écrit à propos de la question de la mesure :

"Le problème est possible et d'une seule manière pour une catégorie très étendue d'ensembles, que j'appelle mesurables, qui comprend les ensembles au sens de Mr Borel et au sens de Mr Jordan. Je ne connais pas d'ensemble non mesurable. En existe-t-il ?"

Lebesgue écrit dans sa lettre :

"Je désirerais faire paraître ce travail dans les *Annali*, parce que, en Italie bien plus qu'en France, on connaît et on s'occupe des fonctions discontinues. Mon travail a des rapports étroits avec certaines des questions que traite Mr Dini dans son ouvrage et en particulier des relations entre l'intégration, au sens de Riemann, avec la recherche des fonctions primitives."

Cette lettre apporte un témoignage très intéressant sur l'influence de Baire sur Lebesgue¹⁶² :

"Je ne me sers pas des résultats de Baire, mais j'ai travaillé un peu dans le même ordre de questions et il me semble que beaucoup des idées qui m'ont guidé découlent de celles qu'expose Baire."

Dans la lettre n° 2 (on y a ajouté : 1902), Lebesgue remercie Volterra "d'avoir bien voulu le recommander à Mr Dini" pour la publication de sa thèse dans les *Annali di Matematica*. Il écrit ensuite, ce qui confirme que la lettre n° 3 est la première de cette correspondance, à propos de [3] :

"Vous avez bien voulu, l'an dernier, me dire qu'il contenait un exemple de fonction à dérivée non intégrable."

Lebesgue explique dans cette lettre n° 2 comment il se sert de ce mémoire de Volterra :

"Je pars de la dérivée et appliquant l'intégration généralisée je retrouve les fonctions primitives."

La lettre n° 4, datée du 25 mai 1901, où Lebesgue remercie Volterra pour l'envoi du "renseignement demandé", doit être la 2^e lettre de cette correspondance. Elle semble confirmer que la lettre I de Lebesgue à Borel est du 7 mai 1901.

Dans la lettre n° 10, du 22 mars 1926, Lebesgue demande à Volterra son appui - appui déjà obtenu de Borel, Hadamard, Montel et Denjoy - pour attribuer à N. Luzin une bourse de la fondation Rockefeller pour qu'il puisse continuer ses recherches en France, et Lebesgue écrit :

"M. Nicolas Luzin, professeur à l'Université de Moscou, vient de passer quelques mois en France. J'ai pu à cette occasion constater mieux combien il est regrettable que cet homme distingué n'ait pas publié sous une forme plus complète ses travaux qui l'ont conduit en particulier, avec son élève malheureusement disparu Souslin, à introduire dans la science toute une catégorie de fonctions et d'ensembles non considérés jusque-là. Et il semble que, en dehors de leur propre intérêt, ces fonctions et ensembles auront cet effet d'entraîner à des nouveaux modes de raisonnement dont l'influence pourra être sensible dans un très vaste domaine."

Le 5 août 1932, Volterra écrit à Lebesgue :

"Hier j'ai été à Genève où j'ai lu à la bibliothèque la nécrologie de Baire que vous avez publiée dans les *Comptes Rendus* [[([25], 66-63)]. J'ai d'abord admiré la manière parfaite par laquelle vous avez su esquisser la figure du regretté confrère et vous avez su donner une idée de l'ensemble de ses recherches mathématiques. J'ai été ensuite très touché en lisant les mots que vous avez bien voulu consacrer à mes rapports avec lui et au temps qu'il a passé à Turin."

Dans la lettre n° 16, du 28 octobre 1936, Lebesgue précise son apport à la notion de semi-continuité et écrit :

"Il y a une dizaine d'années de la Vallée Poussin m'écrivait : "Avec Baire la notion de semi-continuité était une remarque philosophique curieuse, avec vous, et les applications que vous en avez faites au calcul des variations, elle est devenue une notion mathématique." La phrase dépasse sans doute la pensée de de la Vallée Poussin, mais remarquez qu'il est vrai qu'avec Baire la notion venait d'une profonde remarque critique ; qu'on ne rencontrait la semi-continuité des fonctions que s'il vous plaisait de considérer *exprès* des fonctions baroques, alors que, dans ce que je faisais, la notion s'imposait, était *indispensable*, pour le plus simple et le plus fondamental de tous les concepts métriques, pour celui d'où dérive le nombre : la distance."

Remarquons que Baire avait noté, déjà vers ^{le} 25 novembre 1896, que la fonction $M(x) = \sup_{y \in [0, 1]} f(x, y)$, où f est séparément continue par rapport à x et y , dans $[0, 1] \times [0, 1]$, n'est pas en général continue, mais semi-continue supérieurement ([30], 315).

74 E. Levasseur, administrateur du Collège de France, et C. Jordan, professeur au Collège de France.

75 Nous situons cette lettre entre les 7 et 15 octobre 1903.

76 Il nous semble que l'opinion de Lebesgue lui-même, avancée en 1932, correspond assez à la vérité ([26],67-68) :

"Baire, le premier, consacra toute son activité scientifique à la théorie des fonctions de variables réelles. Il fit plus, il nous apprit à y consacrer de façon féconde notre activité."

Une simple analyse des premiers travaux de Lebesgue montre l'importance de l'influence de Baire sur lui. Quant aux fonctions de la classification de Baire, c'étaient les seuls exemples de fonctions qui n'étaient pas intégrables au sens de Riemann et l'étaient pour la théorie de l'intégration de Lebesgue ([10],229).

Rappelons également la lettre de Lebesgue à Volterra (voir la note 73) où il avoue "que beaucoup des idées qui l'ont guidé découlent de celles qu'expose Baire".

77 P. 17-18 de [27]. Baire cite cet article de Lebesgue dans sa thèse ([28],63) et écrit seulement :

"Une démonstration très simple du théorème de Weierstrass a été donnée par M. Lebesgue dans sa note *Sur l'approximation des fonctions*."

78 P. 95-101 de [28]⁸²¹ (Voir aussi la note 1115).

79 P. 130-136 de [4]. La "coïncidence bizarre" est due aux démonstrations identiques de Lebesgue et de Lindelöf du théorème : Tout ensemble fermé est la réunion d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble parfait ([4],136;[29],698).⁴¹⁶

80 Lettre du 15 octobre 1903 (cachet de la poste).

81 Il semble qu'à cette époque Borel considérait que les travaux mathématiques de Baire avaient une plus grande importance que ceux de Lebesgue, que celui-ci avait subi l'influence de Baire et qu'il n'avait fait qu'"appliquer" la théorie de la mesure de Borel.⁹⁵⁰

82 Lebesgue s'était probablement présenté à Lille contre Baire et il aurait fait échouer la candidature de celui-ci. (Voir la note 1087).

83 M. Berthelot (1827-1907), chimiste, nommé en 1877 l'inspecteur général de l'enseignement supérieur, ministre et sénateur, *cumulait* toutes les fonctions de la troisième république.

84 23 octobre 1903 (cachet de la poste).

85 *Traité d'analyse* de E. Picard, cité p.6 de [4].

86 Voir p.99-100 de [4] : il s'agit du problème de la nature des définitions en analyse.

- 87 Voir p.44 de [4].
- 88 Voir [30], p.364-365.
- 89 Effectivement, c'est R. Baire qui sera nommé cette année pour faire le cours Peccot au Collège de France, et nous savons que Borel y a contribué (voir la note 67).
- 90 A. Lefranc (1863-1952), spécialiste de la Renaissance, professeur au Collège de France; en 1903, il était secrétaire du Collège de France.
- 91 Officier de l'Instruction publique et officier des Palmes académiques. Il s'agit ici de l'Annuaire du Collège de France.
- 92 29 novembre 1903 (cachet de la poste).
- 93 Il s'agit probablement de la démonstration sur le recouvrement d'un intervalle $[a,b]$ par un nombre fini d'intervalles ouverts.
- 94 Il s'agit des deux démonstrations de Borel du théorème: de tout recouvrement dénombrable de $[a,b]$ par des intervalles ouverts on peut extraire un recouvrement fini ([31], 280-282 ; [5], 42-43).
- 95 C'est la démonstration de Lebesgue ([4], 104-106) du théorème : d'un recouvrement de $[a,b]$ par des intervalles ouverts on peut extraire un recouvrement fini.⁴⁹²
- 96 Dans sa note sur *La notion de fonction en général* ([5], 123-134).
- 97 ω est le premier nombre de la deuxième classe de nombres transfinis.
- 98 P.105 de [4].
- 99 P.208 de [10].
- 100 M. Brillouin (1854-1948), professeur de physique mathématique au Collège de France depuis 1900.
- 101 G. Mittag-Leffler (1846-1927), professeur de mathématiques à l'Université de Stockholm et rédacteur des *Acta Mathematica*.
- 102 [29].
- 103 P.136 de [4].
- 104 Lebesgue succédera effectivement à Baire comme chargé du cours Peccot au Collège de France. Notons, à propos de Jordan, ce que Baire écrivait à Borel le 4 février 1902 ([51], 49) :
- "D'ailleurs, Lebesgue et moi, nous ne rencontrons sans doute pas, chez Jordan, chez Hadamard, les mêmes mauvaises volontés qu'ailleurs."

105 Borel a marqué sur la lettre : décembre 1903. Il s'agit probablement de la première lettre avant celle du 17 décembre.

106 Voir p. 13-14 de [27].

107 Dans [37]. C. Severini (1872-1951) était à cette époque maître de conférences à l'Université de Bologne.

108 Voir [38], [39] et p.V de [40].

109 Voir [25] et note 1, p.339 de la 2^e éd. de [4].

110 Voir [9], p.337, où Lebesgue énonce, sans démonstration, la propriété : "toute suite convergente de fonctions mesurables est uniformément convergente quand on néglige certains ensembles de mesure ϵ , ϵ étant aussi petit que l'on veut".

Ce théorème a été démontré par Egorov dans [34], où il ne cite pas la note [9] de Lebesgue.

Dans [9], p.337, ainsi que dans [4], p.125, note 1, Lebesgue énonce le théorème : "toute fonction mesurable est continue quand on néglige les ensembles de mesure ϵ , ϵ étant aussi petit que l'on veut".

Ce théorème a été précisé et démontré par Luzin dans [36].¹⁵⁸

Voir aussi [45] et note 216.

111 P.124-125 de [4].

112 La discussion entre Borel et Lebesgue doit se rapporter au cours que Borel était en train de faire et qui sera publié dans [40]. Borel a publié I et II dans [45].

113 P. 136 de [4] et p.338-340 de la 2^e éd.

114 Il s'agit probablement de la deuxième lettre écrite avant la lettre du 17 décembre 1903.

115 Voir la note 1, p.136 de [4].

116 Lebesgue répond ici à une remarque que Borel a fait en note ([33], 760).

117 P.124-125 de [4].

118 Voir la note 110.²¹⁶

119 Lebesgue n'a pas renoncé à publier ce résultat. Il figure dans [9], p.36-37, où l'on trouve la phrase :

"Si l'on adopte les idées de M. Baire relativement à la définition du maximum et du minimum d'une fonction,"

120 Voir [35].

121 La lettre porte la date du 17 décembre 1903 ajoutée par Borel.

122 P. Appell a écrit à l'Administrateur du Collège de France ([30], 366) le 6 novembre 1903 que "les deux candidats M. Lebesgue et M. Baire sont également intéressants".

Rappelons que E. Borel était le gendre de P. Appell.

123 J. Tannery a écrit à l'Administrateur du Collège de France ([30], 364) que Baire et Lebesgue sont tous les deux "d'excellents mathématiciens" et qu'ils ont "travaillé sur des sujets analogues".

124 [41].

J. Tannery écrit dans son compte rendu ([42], 123-124) :

"Ainsi que M. Lebesgue a bien voulu me le faire remarquer, la définition de M. de la Vallée Poussin conduit, dans tous les cas, aux mêmes nombres que celle de Jordan."

Il ajoute :

"Les différences entre cette définition et celle que M. Borel, d'une part, a adopté pour les ensembles mesurables, et, d'autre part, celles que M. Lebesgue a données dans sa thèse *Intégrale, longueur, aire* des mesures extérieure et intérieure d'un ensemble sont d'une nature beaucoup plus profonde."

125 Voir [43].

126 Voir la lettre XI.

127 On notera le changement de ton avec celui souligné dans la note 5 et qui sera relevé par Borel (voir lettre XVIII, p.34).

128 Voir [10], p.262-266, et [4], p.61-64.

129 [21].

130 [22].

131 Voir [40], p.50-61.

132 [44].

133 Voir [40], p.75-82 de la première et de la seconde édition, ainsi que [53].

134 Le mot "identique" de la note 1, p.136 de [4].

135 P.760 de [33].

136 La note manuscrite est jointe à la lettre. Elle a été présentée ([9]) à l'Académie le lundi 28 décembre 1903. (Voir 216).

137 Voir la note 110.

138 Voir la note 39.

139 Voir la lettre XVII, p.30, alinéa 4.

140 Fonction caractéristique d'un ensemble (voir [4], p.101-102). Dans sa thèse ([10],227), Lebesgue n'utilise qu'incidemment les fonctions caractéristiques. Notons que les fonctions caractéristiques des ensembles quelconques ont été utilisées par Baire déjà en 1897 dans sa première note ([46],694) et ensuite dans sa thèse en 1899 ([28], 8).

Lebesgue a amélioré dans son livre ([4]) la présentation de sa théorie et il y a énoncé des résultats nouveaux. Ce livre fait suite à ses cours au Collège de France. Remarquons à ce propos que ce cours a été suivi par Montel, avec qui Lebesgue, comme nous le verrons, a eu de nombreuses discussions sur son contenu. C'est pourquoi l'article de P. Montel *Intégration et dérivation*, publié dans l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* présente un intérêt historique certain ([63]). On peut noter également qu'Egorov a suivi le cours de Lebesgue au Collège de France en 1903 ([52],145).

Il est intéressant de lire aussi l'article de L. Zoratti - publié dans le même fascicule 2 de l'*Encyclopédie*, fascicule "rédigé sous la direction de E. Borel" - *Les ensemble de points*, où Zoratti présente([64],154-157) *La mesure pour Borel et Lebesgue*.

141 Voir [4], p.74-82, 120-125. Λ_f désigne un des nombres dérivés de f ([4],68).

142 Schoenflies écrit ([47],220) que ce fut Baire qui "révéla ce qu'on pouvait atteindre" avec les théories cantorienne.

143 Borel a mis la date du 10 janvier 1904 sur cette lettre.

144 P. VI de [4].

145 Aucun des livres de la *Collection des monographies sur la théorie des fonctions*, publiée sous la direction de E. Borel, ne comporte d'index.

146 Voir la note 133. (Il s'agit du théorème de Weierstrass.)

147 Voir la note 125.

148 Baire écrit à Borel ([51],66) le 14 décembre 1903 que Tannery a commis "quelques inexactitudes évitables" si Baire "avait été consulté".

- 149 Il s'agit de la note [29] de Lindelöf. L'énoncé de Schoenflies se trouve dans [47], p.75-76.
- 150 [65].
- 151 G.N. Wyrouboff (1843-1913), nommé professeur d'histoire des sciences au Collège de France contre Paul Tannery (1843-1904), en remplacement de P. Laffitte (1823-1903)⁴⁵⁹.
- 152 Voir la note 133.
- 153 P.80 de [40].
- 154 P.11 de [27].
- 155 Lebesgue donnera une démonstration du théorème de Baire caractérisant les fonctions de classe 1 dans sa note *Démonstration d'un théorème de M. Baire* ([40],149-155).
- 156 P.39-43 de [28].
- 157 P.17 de [27].
- 158 Au cours d'une conversation téléphonique (le 13 décembre 1989) avec A.P. Youschkevitch à Moscou, celui-ci nous a signalé que F.A. Medvedev a également noté l'influence de Lebesgue sur Egorov et Luzin. En effet, nous avons retrouvé cette remarque de Medvedev ([66],45) dans son important livre sur *L'école française de la théorie des fonctions et des ensembles à la fin du XIX^e et au début du XX^e siècles*.¹⁹²
- 159 Lebesgue a déjà utilisé le théorème de Borel dans sa thèse, théorème que celui-ci a donné dans sa thèse également ([31],281) :

"Si l'on a sur une droite une infinité d'intervalles partiels, tels que tout point de la droite soit intérieur à l'un au moins des intervalles, on peut déterminer effectivement un nombre limité d'intervalles choisis parmi les intervalles donnés et ayant la même propriété (tout point de la droite est intérieur à au moins l'un d'eux)."

Le mot "droite" employé par Borel signifie évidemment un segment borné de la droite (comme le montre sa démonstration). Remarquons aussi que Borel ne dit pas que son segment de droite est fermé, ce qui est visible, d'une part, sur sa démonstration et, d'autre part, par le fait qu'il utilise le théorème des intervalles emboîtés de Cantor ([31],282). D'ailleurs, cette démonstration implique que le recouvrement est supposé être dénombrable.

Borel a précisé cet énoncé dans ses *Leçons sur la théorie des fonctions* ([5],42) indiquant qu'il s'agit "d'un segment limité de

droite" et d'une "infinité dénombrable d'intervalles partiels".

Lebesgue a utilisé ce théorème de Borel dans sa thèse ([10], 209) pour montrer que "la longueur d'un segment somme d'un nombre fini ou d'une infinité d'autres segments, n'empiétant pas les uns sur les autres", est "la somme des longueurs de ces segments".

Lebesgue remarque simplement :

"Des propriétés des longueurs il résulte qu'il en est bien ainsi si les segments composants sont en nombre fini ; cela est encore vrai s'ils sont en nombre infini. (Voir les *Leçons sur la théorie des fonctions* de Mr Borel.)"

Dans ses *Leçons sur l'intégration*, Lebesgue signale ([4],104) que l'intervalle en question est fermé et que, pour les applications dans sa thèse "du théorème de M. Borel, il était nécessaire qu'il soit démontré pour un nombre d'intervalles ayant la puissance du continu"¹¹¹⁶

160 Borel a mis sur la lettre la date du 17 janvier 1904 qui était effectivement un dimanche. Cela semble indiquer que Borel a dû mettre cette date en recevant la lettre de Lebesgue.

161 Lebesgue écrira aussi dans son étude sur la vie et l'oeuvre de Jordan ([26],57) :

"Après Jordan, on ose étudier les fonctions réelles générales."

162 F.A. Medvedev signale ([66],61) que Baire a introduit dans sa thèse ([28],72-73,81) les ensembles de la forme $E[\{f(x) \geq a\}]$ et que Lebesgue ([4],101-102,110-112,115,118-119,121) "a posé ces ensembles à la base de la construction de la nouvelle intégrale" et qu'avec leur aide il a déterminé aussi "la notion de fonction mesurable".⁴⁵⁰

163 Le *Bulletin des Sciences mathématiques* était "rédigé par MM. G. Darboux, E. Picard et J. Tannery", et il avait publié une lettre de Lerch ([54]), concernant l'article [44] de Lebesgue.

164 Voir la note 2, p.21 de [55].

165 Voir l'article de Weierstrass d'août 1880 ([57],167-168,182). Ce mémoire de Weierstrass est cité par Lebesgue dans son article de 1903 ([44],61). Il est intéressant de noter que, dans cet article de 1880, Weierstrass démontre ([57],159-160) le théorème de Borel-

Lebesgue suivant : de tout recouvrement d'un ensemble fermé et borné de \mathbb{R}^2 par des disques ouverts on peut extraire un recouvrement fini.

- 166 Voir la note 1, p.61 de [44] qui renvoie à [57].
- 167 [4].
- 168 Voir la note 3, p.153 de [25], ainsi que la p.470 de [58].
- 169 Voir p.189 de [59] et p.315-329 de [23].
- 170 Ce "mémoire en commun" n'a jamais été mené à son terme.
- 171 Il s'agit de la note [9].
- 172 Il s'agit peut-être de la note [60] de Steklov citée par Lebesgue dans sa note 1, p.89, de [55].
- 173 Voir p.57 de [51].
- 174 C'est la note [25] de Lebesgue. Dans la note III de [40] Borel écrit :
- "Si l'on prouvait, par exemple, que toutes les fonctions sont de classe 0,1,2 ou 3, la plus grande partie de la classification de M. Baire serait sans intérêt. Nous allons voir qu'il n'en est rien."
- 175 Borel expose les théories de Baire dans le chapitre II de [40], où il présente également l'intégrale de Lebesgue.
- 176 Chapitre IV de [40].
- 177 Voir la note 2, p.88 de [61].
- 178 Voir p.92-96 de [55] qui simplifie la méthode donnée dans [62].
- 179 Les tirés à part, ainsi que la bibliothèque de Lebesgue, sont conservés à la Bibliothèque de Mathématiques de l'Université Paris-Nord à Villetaneuse, comme nous l'a signalé J.-M. Strelcyn.
- 180 L'écrivain Camille Marbo qui a publié en 1968 ses souvenirs ([67]).
- 181 J.-M. Le Roux (1863-1949), professeur, et G. Moreau (1868-1935)¹⁰⁹¹, doyen de la Faculté des Sciences de Rennes.
- 182 J. Cavalier (1869-1907), E.N.S. 1888, professeur de chimie à la Faculté des Sciences de Rennes. Il sera recteur à Poitiers (1909), Toulouse (1914), Lyon (1922) et directeur de l'Enseignement supérieur.
- 183 E. de Martonne (1873-1955), professeur de géographie à l'Université de Rennes. Il sera professeur à la Sorbonne.
- 184 A. Job (1870-1928), maître de conférences de chimie à la Faculté des Sciences de Rennes. Il sera professeur à la Sorbonne et au C.N.A.M.

- 185 25 janvier 1904 (date ajoutée par Borel).
- 186 Voir la note 91.
- 187 4 février 1904 (date ajoutée par Borel).
- 188 Lebesgue avait été à Nancy professeur de la classe préparatoire à l'Ecole Centrale.
- 189 P. Appell était aussi professeur d'analyse mathématique à l'Ecole Centrale.
- 190 R. Thamin (1857-1933), philosophe, recteur de l'Université de Rennes de 1900 à 1904, puis recteur à Bordeaux.
- 191 Voir la lettre XXI.
- 192 N. Bourbaki avait déjà signalé en 1957 ([68], 280, note ***⁶⁶⁵) ce fait ; il renvoie également à l'article [69] de 1905 de Vitali.
- 193 Il s'agit probablement de A. Hermann libraire-éditeur, fondateur de la maison d'édition Hermann.
- 194 I. Bendixson s'intéressait à cette époque à l'étude des points singuliers des équations différentielles poursuivant le travail de H. Poincaré entrepris en 1881 ([70], 654).
- 195 W.F. Osgood a été le premier à poser le problème général sur la convergence non uniforme et l'intégration des séries dans [71].
- 196 Le dernier travail mathématique de Cantor est de 1897 ; il a été traduit en français dans [48].
- 197 Nous ne connaissons aucune réaction de Poincaré aux travaux de Borel, Baire et Lebesgue.
- 198 Voir [22], ainsi que la note 163.
- 199 G. Robin (1855-1897), chargé de cours à la Faculté des Sciences de Paris ; L. Raffy (1855-1910), professeur à la Faculté des Sciences de Paris. Raffy a publié le tome III des *Oeuvres* de Robin ([72]) dont parle ici Lebesgue. J. Tannery a donné un compte rendu très intéressant de ce livre de Robin ([73]).
- 200 Ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure.¹¹¹⁷
- 201 Il est probable que Borel avait raconté à Lebesgue la mésaventure arrivée à Poincaré à propos du prix du roi Oscar II de Suède. H. Poincaré s'était déjà vu attribuer le prix, lorsque G. Mittag-Leffler lui écrivit le 16 juillet 1889, son mémoire

étant déjà imprimé pour être publié dans les *Acta Mathematica* ([74], 185-186) :

"Monsieur Phragmen vient de fixer mon attention sur quelques passages de votre mémoire sur le problème des trois corps qui lui ont paru un peu obscurs et qu'il a jugé dignes de vous être signalés."

H. Poincaré, ayant repris la rédaction de son mémoire déjà couronné écrit à Mittag-Leffler le 1er décembre 1889 :

"J'ai écrit ce matin à M. Phragmen pour lui parler d'une erreur que j'avais commise et il vous a sans doute communiqué ma lettre. Mais les conséquences de cette erreur sont beaucoup plus graves que je ne l'avais cru d'abord."

Finalement, le mémoire de Poincaré corrigé exigera une réimpression entièrement remaniée qui, elle, sera finalement publiée dans les *Acta*.

Signalons que le nom de Phragmen comme rédacteur apparaîtra dans le tome des *Acta* de 1890.

202 Baire écrivait à Borel le 4 février 1902 ([51], 49) :

"Un résultat que j'ai obtenu me transforme en quasi-conviction cette idée que je soupçonne depuis longtemps, qu'une fonction discontinue définissable est développable en une série *triple* de polynômes, qu'en tout cas il n'y a pas de classe 4."

L'existence des fonctions de toute classe finie a été établie par Borel dans la note III de [40] (voir la note 174) et celle des fonctions de toute classe par Lebesgue dans [77].

C'est Ludmila Keldych, élève de N. Luzin, qui construira en¹¹¹⁸ 1930 une fonction effectivement de classe 4 ([51], 94, note 15 ; [440], 64-65).

203 M. Fréchet avait rédigé le livre [40] de Borel¹⁰⁷⁰

204 Cette erreur (voir notes 174 et ^{209/}) n'a été reprise nulle part par Lebesgue.

Notons qu'ici encore Lebesgue reprend une idée de Baire pour la mener à bien. Ce ne sera pas la dernière fois.

205 Voir la thèse [75] de Goursat.

206 Le raisonnement inexact de Lebesgue semble l'avoir conduit à la conclusion, étant donné l'identité entre l'ensemble des fonctions de la classification de Baire et l'ensemble des fonctions boréliennes, qu'il devait être immédiat de construire une fonction qui ne soit pas borélienne.

Voir aussi p.139 de [77].

- 207 Cette note n'a pas dû être envoyée, car (voir la note 174), Borel a probablement informé Lebesgue de l'inexactitude de ce théorème de Baire. (Voir aussi les lettres XXIX et XXX et la note 202).
- 208 Voir la note 72.
- 209 P. Niewenglowski (1846-1934), ^{nommé,} inspecteur général de l'enseignement secondaire, ^{en 1903} avait été le professeur de mathématiques spéciales de Borel au Lycée Louis-le-Grand en 1888-1889.
- 210 Les 4 derniers noms ont été ajoutés par Borel.
- 211 10 mars 1904 (date ajoutée par Borel).
- 212 Le lundi 14 mars 1904 (CRAS, 138(1904), 674).
- 213 19 mars 1904 (cachet de la poste).
- 214 Voir [12].
- 215 Voir [76] et la note 262.
- 216 Cet énoncé, qui a été repris par Borel ([45]) est ^{"inexact dans sa} forme", ainsi que l'a remarqué Lebesgue ([9], 337, note 1).
- 217 Voir p.50 de [40], ainsi que les notes 131 et 146 et la lettre XVII.
- 218 Voir p.323-324 de [78].
- 219 Il s'agit de la démonstration du théorème de Weierstrass ([27]).
- 220 Voir p.316 de [78]⁶⁴². (Pour un historique des séries de Bürmann-Lagrange voir [441]).
- 221 Voir p.12 de [27] et p.60 de [40]³⁷⁷.
- 222 Voir exercice 3, p.359 de [78].
- 223 Voir p.4 de [40].
- 224 Voir la note 4, p.2 de [40].
- 225 Nous ne savons pas de quelle notion il s'agit.
- 226 R. d'Adhémar n'est pas particulièrement aimable dans sa thèse ([79]) pour le mémoire de Volterra *Sur les vibrations des corps élastiques isotropes* ([80]) dont il s'inspire.⁵⁹⁴
- 227 Voir la note [81] du 4 juillet 1904 qui est développée dans le mémoire [77]. Ce mémoire fondamental est le point de départ des recherches de Luzin et de Souslin. N. Luzin écrit à ce propos ([82], XIII) :

"Ce sont les travaux de M. H. Lebesgue qui m'ont fourni la matière même de mes recherches. Son célèbre mémoire *Sur les fonctions*

représentables analytiquement est non seulement le point de départ de mon travail, mais il est si étroitement lié à cet ouvrage que ce dernier peut être considéré simplement comme un développement sur quelques points de ce mémoire."

Signalons à ce propos un fait qui nous semble intéressant. W. Sierpinski travaillait au début de la première guerre mondiale à Lvov. Il fut interné pendant cette guerre, comme le précise K. Kuratowski ([87],10), "par les autorités de la Russie tsariste, d'abord à Viatka, ensuite à Moscou. Deux éminents mathématiciens russes, Egorov et Luzin, l'accueillent cordialement à Moscou et lui offrent des conditions favorables pour la poursuite de son travail scientifique."

C'est de cette période que date sa collaboration scientifique avec N. Luzin. C'est ainsi, d'après le témoignage de Sophie Piccard amie de W. Sierpinski (comme elle nous l'écrivait le 4 novembre 1976), que Souslin étudiait ce mémoire de Lebesgue *Sur²⁴⁶ les fonctions représentables analytiquement* (Souslin, né en 1894, était en 1916 étudiant de troisième année à l'Université de Moscou) :

"Sierpinski était au courant de tout. Il était chez Luzin quand Souslin vint chez Luzin avec le mémoire de Lebesgue, que Luzin lui avait fait étudier et déclara qu'il y avait trouvé une erreur grave. Luzin ne voulait d'abord pas le croire, puis il dit à Souslin de lui laisser le travail et après examen s'assura que Souslin avait raison. Ce fut le départ de la théorie des ensembles analytiques."

228 P.143 de [77].

229 12 juillet 1904 (cachet de la poste).

230 Borel ne considère dans [40] que les fonctions d'une variable, sauf p.63-64.

231 Le 3^e Congrès international des mathématiciens s'est tenu à Heidelberg du 8 au 13 août 1904. Borel y a présenté sa note [53], reprise dans [40], p.79-82.

232 Borel n'a pas supprimé ce théorème VII ([40],154-155).

233 Saint-Paul des Fonts, dans l'Aveyron, où Borel possédait un "domaine" ([67]).

234 Note I, p.101-148 de [40], *Sur le développement des fonctions analytiques*.

235 P. Boutroux (1881-1922) ([67]).

236 Lebesgue a fait le cours Peccot 1904-1905 sur la théorie des fonctions trigonométriques ([55],Préface).

- 237 Baire restera encore cette année à Montpellier ; il sera nommé le 28 juillet 1905 chargé de cours à la Faculté des Sciences de Dijon, succédant à Méray qui prenait seulement cette année sa retraite.
- 238 R. Levavasseur (1862-1930) était en 1903 professeur au lycée de Toulouse ; il deviendra professeur à l'Université de Lyon.
- 239 Lebesgue fait probablement allusion à la thèse de Levavasseur ([83]) présidée par C. Hermite et dédiée à E. Picard.
- 240 C. Maurain (1871-1967) était en 1903 maître de conférences de physique à la Faculté des Sciences de Rennes.
- 241 A. de Saint-Germain (1839-1914), professeur de mécanique et doyen de la Faculté des Sciences de Caen.
- 242 On avait demandé à Lebesgue de rédiger un article pour la nouvelle édition de l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*.
- 243 Notons que la généralisation par Borel du théorème de Bernoulli a été *seulement* publiée en 1909 ([84]), rédigée en novembre 1908. Nous ignorons comment Blumenthal pouvait être informé de ce fait en 1904 !

La première note de Borel sur les probabilités a été publiée en 1905 ([85]) et elle ne contenait pas de généralisation du théorème de Bernoulli.¹⁰⁴⁷

- 244 L. Olivier, ⁽¹⁸⁵⁴⁻¹⁹¹⁰⁾ directeur de la *Revue générale des Sciences*, ^(fondée en 1890) Cet article n'a jamais été publié. Il s'agit probablement de l'inédit ([86]) de 1905 publié par G. Choquet.
- 245 Camille Marbo, pseudonyme de Marguerite Borel, femme d'Emile Borel,⁴¹⁴ raconte dans ses *Souvenirs et rencontres* ([67], 83-84) comment a été fondée *La Revue du Mois*, dont le premier numéro paraît le 10 janvier 1906 et dont Emile Borel était le directeur. Il existe, dans les papiers laissés par Borel à l'Institut Henri Poincaré à Paris, 330 lettres de sa correspondance à propos de cette revue.
- 246 C'est Souslin qui a le premier détecté le théorème inexact de Lebesgue ([77], 155-156) :
- "Si E est mesurable B , sa projection l'est aussi." ([11], 60; [82], préface),
- 247 J. König avait fait une conférence au Congrès international des mathématiciens qui s'est tenu du 8 au 13 août 1904 à Heidelberg

intitulée *Zum Kontinuum-Problem* (Sur le problème du continu) dans laquelle il "démontrait" que le continu ne peut pas être ordonné. Dans sa conférence, publiée en 1905 dans les Comptes rendus du Congrès, König reconnaît ([90],147) que sa démonstration contenait une "lacune essentielle".

Il nous semble intéressant de noter que Borel était persuadé que la démonstration de König était correcte. O. Blumenthal, rédacteur des *Mathematische Annalen*, écrit à Borel - à propos de la note de Zermelo sur la *Démonstration que tout ensemble peut être bien ordonné* ([89]) - pour le remercier de l'envoi d'une note, datée du 1er décembre 1904 ([88]), le 3 décembre :

"Mais je me permettrai une remarque relative aux dernières lignes de la Note qui ont déjà été démenties par l'histoire.

Il paraît, en effet, que vous ne connaissez pas encore l'étrange sort du fameux discours de M. König, qui, en vérité, était la raison primitive du travail de M. Zermelo. Peu de temps après le Congrès, plusieurs mathématiciens à la fois se sont aperçus que la démonstration de M. König était fautive. C'était donc, d'abord, M. König lui-même qui, essayant de rédiger pour les *Mathematische Annalen* sa démonstration du théorème de M. Bernstein, vit avec effroi qu'elle n'était pas valable ; il en a écrit à M. Hilbert, employant les termes : "la catastrophe du Congrès". C'étaient ensuite, indépendamment les uns des autres, MM. Cantor, Bernstein, Zermelo."

Remarquons encore que Cantor, qui a assisté à ce Congrès, fut ([91],248) "scandalisé et furieux" à la suite de la conférence de König.

248 Voir p.1857 de [92], où Hadamard cite Lebesgue, qui semble ici prophétique.

249 [27].

250 P.60-61 de [40].

251 P.12-13 de [40].

252 P.12 de [27].

253 P.61 de [40] : cette méthode de Lebesgue a été finalement adoptée.

254 P.74-75 de [40].

255 [93].

256 P.156-158 de [40].

257 Voir les lettres XXVII et XXX.

258 P.175 de [77].

259 P.72 de [94].

260 E. Heine a publié dans le *Journal* fondé par Crelle ([95]) une démonstration du théorème ([95],188) : "Une fonction $f(x)$ continue de $x=a$ jusqu'à $x=b$ (pour toutes les valeurs particulières) est aussi uniformément continue."

Le problème qui va être débattu dans la correspondance de Lebesgue avec Borel était de savoir si Heine avait déjà énoncé, plus ou moins implicitement, le théorème de Borel-Lebesgue.

Veblen démontre dans son article *The Heine-Borel theorem* la proposition I ([96],436-437) :¹⁰⁶⁹

If every number of an interval AB belongs to at least one segment σ of a set of segments $[\sigma]$, then there exists a finite subset of $[\sigma]$, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n$, such that every number of AB belongs to at least one of the segments $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$.

Et Veblen a ajouté :

Proposition I is essentially involved in Heine's proof of the theorem of uniform continuity, but has first been stated in explicit form by Borel, who was careful to specify that the set of segments of which he spoke should be at most numerably infinite. The theorem, however, is valid whatever be the set $[\sigma]$.

261 La définition de la convergence uniforme, donnée par Goursat dans son cours de l'Ecole Normale Supérieure, ne doit pas être celle qui figure dans son traité, *Cours d'analyse mathématique* ([97],406) paru en 1902, car elle est identique à celle qui se trouve dans le *Traité d'analyse* de Picard ([98]) de 1891, qui fait intervenir la convergence uniforme du reste de la série vers zéro dans un intervalle $[a,b]$. C'était peut-être celle

introduite par Baire dans ses *Leçons sur les théories générales de l'analyse* ([105],VII) :

"Bien qu'à mon avis l'introduction de termes nouveaux ne doive se faire qu'avec une extrême prudence, il m'a paru indispensable de caractériser par une locution brève le cas le plus simple et de beaucoup le plus courant des séries uniformément convergentes, celui des séries dont les termes sont moindres en module que des nombres positifs formant série convergente (ce qu'on appelle quelquefois critère de Weierstrass). J'appelle ces séries *normalement convergentes*."

262 Pour l'énoncé de la condition d'Arzela, voir p.42-43 de [40].

263 Lebesgue écrira à ce propos en 1907 ([99],133)⁵⁷⁰ :

"Cette démonstration avait été obtenue en 1898 par M. Vieille-¹¹²¹fond ou par moi-même, je ne sais plus, alors que nous étudions ensemble la thèse de M. Borel. Je dois avouer d'ailleurs que, bien que j'aie plusieurs fois cité l'énoncé de M. Borel, mon attention n'avait pas été retenue par le mot *dénombrable* qu'il contient et c'est pourquoi, dans ma thèse, dont les résultats ont été publiés en 1901, j'ai employé, sans l'énoncer, le théorème modifié."

264 P.27-28 de [40].

265 Voir la note 159.

266 A. Schoenflies avait déjà en 1900 énoncé et démontré dans son rapport sur le développement de la théorie des ensembles le "théorème de Borel", qui "étend un théorème connu de Heine", sous la forme suivante ([47], 51-52) :

"Si l'on a sur une droite une suite infinie d'intervalles δ tels que tout point de l'intervalle $a...b$ soit point intérieur d'un au moins des intervalles δ , alors il existe toujours une sous-suite finie de tels intervalles."

Schoenflies donne ensuite des indications pour une extension de ce théorème "au plan et à l'espace".

267 § VIII de [77].

268 C'est le sujet de l'article [89] de Zermelo.

269 Voir p.247-250 de [91].

270 Fréchet a rédigé les leçons [40] de Borel.

271 [100] et [101].

272 P.28 de [102].

273 [103] : Borel cite cette note déjà en 1898 dans [5], p.84.

274 C'est peut-être le projet que Borel a réalisé en 1914 et dont le livre ([104]) a été publié en 1917.³⁰²

275 La démonstration du théorème donné dans la note 260. Nous donnons ici la démonstration complète de Heine, d'après une traduction inédite de M. Guillemot :

"Si l'on désigne par 3ϵ une grandeur quelconque, alors il existe un nombre tel que, de $x=a$ jusqu'à lui, $f(x)-f(a)$ est en valeur absolue $\leq 3\epsilon$. Une valeur, qui réalise cela, est la plus grande et rend en même temps $f(x)-f(a)-3\epsilon=0$. Soit x_1 cette valeur. De la même façon, on trouve un nombre x_2 comme étant le plus grand qui réalise que, de $x=x_1$ jusqu'à $x=x_2$, $f(x)-f(x_1)$ reste toujours $\leq 3\epsilon$. On continue ainsi ; si, en un nombre fini n d'opérations, on arrive à $x_n=b$, où si l'on trouve que, de $x=x_{n-1}$

jusqu'à $x=b$, $f(x)-f(x_{n-1})$ ne dépasse pas encore 3ε , la proposition est démontrée.

Il reste encore le cas où il n'existe aucun n , donc que les grandeurs x_1, x_2, \dots forment une suite infinie de grandeurs croissantes qui sont inférieures à b . Alors cette suite serait une suite-de-nombres [[suite de Cauchy]], dont le symbole de nombre [[la classe d'équivalence]] serait X ; il en résulte la propriété d'après laquelle, pour tout n , on a l'égalité $f(x_{n+1})-f(x_n) = 3\varepsilon$. Soit maintenant η_0 tel que $f(X)$ diffère de $f(X-\eta)$ de moins de ε , tant que $\eta < \eta_0$. Entre les nombres $X-\eta_0$ et X peuvent tomber x_n, x_{n+1}, \dots de la suite-de-nombres précédente, de sorte que $f(x_{n+1})-f(x_n)$ soit plus petite que 2ε , tandis que, d'autre part, elle devrait être 3ε . De là l'hypothèse de base est impossible et la fonction est uniformément continue."

276 Nommé professeur de Mathématiques supérieures au lycée de Montpellier.

277 Pour le cours Peccot.

278 P.II de [40].

279 Il s'agit des corrections de la note [25] de [40].

P.152 est devenue 150.

280 P.151 du livre.

281 P.152 du livre.

282 Thèse publiée en 1899, comme c'est indiqué p.153 du livre.

283 P.154 du livre : contenus.

284 P.158 du livre.

285 u_n .

286 Borel écrit dans sa préface ([40], V-VI) :

"Je dois adresser aussi mes remerciements à M. Lebesgue qui, non seulement a écrit une Note des plus importantes, mais a bien voulu lire entièrement les épreuves et me faire de nombreuses observations, judicieuses et profondes, qui m'ont été souvent très utiles."

287 [106].

288 Dans [40] et [25] sont exposées aussi les théories de Baire, développées systématiquement dans [106].

289 Voir la correspondance d'Appell avec Volterra ([30], 359-363).²⁹⁵

290 Voir les notes 77 et 78.

291 P.17-18 de [28].

292 Notre conviction est maintenant qu'il s'agit de Jean Perrin (1870-1942), élève de l'Ecole Normale Supérieure, prix Nobel de physique en 1926. Il fera partie du comité de rédaction de *La Revue du Mois* dont Borel sera le directeur et sera la plus fidèle ami de Borel ([67]).

293 Ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure.¹⁰⁸²

294 Baire écrivait à propos de ce compte rendu de Picard ([108]) le 27 mars 1903 à Borel ([51],63) :

"J'ai vu que Lebesgue a fait une note aux *Comptes Rendus*, que d'autre part, Picard a fait un compte rendu de sa thèse dans le *Bulletin des Sciences Mathématiques*, très élogieux, comme il sied, et se terminant par ces mots (dois-je les prendre pour moi ?) : "L'auteur fait preuve, en même temps que d'une grande puissance d'abstraction, du souci d'*appliquer les généralités à des exemples particuliers*." Je constate sans trop de dépit que le *Bulletin* a fait autour de ma thèse à moi la conspiration du silence."

295 Baire cite Volterra p.94-95 de sa thèse [28].

296 P.88 de la thèse de Baire ([28]).

297 [35].

298 Baire énonce dans son livre le théorème suivant pour les fonctions de plusieurs variables ([106],124) :

"La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction quelconque finie ou infinie soit limite de fonctions continues est qu'elle soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait."

299 P.121-123 de [106].

300 Dans sa thèse, Baire écrit ([28],62) :

"Nous avons prouvé que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit représentable est qu'elle soit ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait."

301 E. Picard écrit dans son compte rendu du livre [4] de Lebesgue ([107],183) :

"Il n'est pas rare, ajoutons-le, que dans maintes théories on ait des démonstrations plus rapides et plus compréhensives en se plaçant à un point de vue plus général ; la vue du cas trop spécial peut cacher les raisons simples des choses. Il ne faut pas d'ailleurs que ceci devienne une excuse pour les amateurs de théorèmes dont la généralité nuit à l'intérêt, mais je n'ai pas besoin de dire que ce n'est pas le cas de M. Lebesgue qui termine par quelques applications sur la recherche des fonctions primitives et la rectification des courbes. On se rappelle aussi que, dans sa thèse, M. Lebesgue a montré qu'il a le souci des problèmes particuliers, en traitant diverses questions très curieuses relatives aux surfaces et aux courbes gauches."

- 302 Il s'agit plutôt du livre *Leçons sur les séries de polynômes à une variable complexe*, qui a été annoncé ([55], 2^e page de garde) *En préparation*, mais qui, à notre connaissance, n'a jamais été publié.
- 303 Baire est cité p.104,105,107,112,115,123,124,142,146,147,149,153, 163,167 et 168 de [77].
- 304 Normale Supérieure.
- 305 Baire n'a conservé aucune des lettres de Lebesgue.
- 306 [106].
- 307 Voir la note 288.
- 308 [25].
- 309 *Exemples simples*, p.1 à 6 de [106] ; de même p.69-80 du chapitre IV.
- 310 E. Picard a fait le compte rendu du livre de Lebesgue *Leçons sur l'intégration* ([4]) dans lequel ([107]) il cite les noms de tous ceux qui ont contribué au développement des notions d'intégrale et de mesure sauf celui de Borel à qui pourtant il est apparenté (voir la note 39) !
- 311 Dans le livre [106] de Baire.
- 312 Voir la note 294.³¹⁴
- 313 Voir ici p.29, ainsi que [43].
- 314 Baire écrivait à Borel le 28 octobre 1904 ([51], 74-75) :
- "Le littéraire égaré dans la science que j'ai pris autrefois comme rapporteur de ma thèse [[Picard, qui sera d'ailleurs élu à l'Académie Française en 1924]] a, dans le *Bulletin des Sciences Mathématiques* de juin, des sévérités inattendues pour "les amateurs de théorèmes dont la généralité nuit à l'intérêt". Il ferait bien d'éclairer sa lanterne. J'accorde très bien qu'un théorème peut être général et manquer d'intérêt, mais je conteste que la généralité puisse enlever de l'intérêt à un théorème."
- 315 Le livre [40].
- 316 [94].
- 317 Cette phrase ne figure pas dans le compte rendu de Picard du livre de Lebesgue ([107]).
- 318 Picard a été le rapporteur de la thèse de Lebesgue (Archives Nationales, AJ¹⁶ 5538).
- 319 [108].

320 Voici comment Picard conclut son compte rendu du livre de Lebesgue *Leçons sur l'intégration* ([107], 183) :

"Souhaitons que, quelque jour, les notions nouvelles que l'on s'efforce d'introduire dans l'analyse mathématique montrent leur fécondité en avançant la solution de tant de problèmes depuis longtemps posés, ou que pose chaque jour le développement régulier des théories aujourd'hui classiques tant en analyse pure qu'en physique mathématique. Le mot *inutile* n'a guère de sens, quand il s'agit des abstractions mathématiques ; nous aimons à nous dire, avec Lagrange, que "*tout est bon en mathématiques*". On peut craindre seulement que certaines spéculations soient parfois prématurées, et penser qu'il ne faut pas d'excès même dans des choses aussi excellentes que la philosophie des mathématiques."

E. Picard est d'accord ici avec son beau-père C. Hermite qui écrivait à G. Mittag-Leffler le 13 avril 1883 à propos du théorème de G. Cantor sur l'existence d'une bijection entre \mathbb{R} et \mathbb{R}^2 ([113], 209) :

"L'impression que nous produisent les mémoires de Mr Cantor est désolante ; leur lecture nous semble à tous [[Hermite, Picard et Appell]] un véritable supplice, et en rendant hommage à son mérite, en reconnaissant qu'il a ouvert comme un nouveau champ de recherches, personne de nous n'est tenté de le suivre. Il nous est impossible, parmi les résultats qui sont susceptibles de compréhension, d'en voir un seul ayant un *intérêt actuel* ; la correspondance entre les points d'une ligne et d'une surface nous laisse absolument indifférents, et nous pensons que cette remarque, tant qu'on n'en aura point déduit quelque chose, résulte de considérations tellement arbitraires, que l'auteur aurait mieux fait de la garder et d'attendre."

- 321 C'est la seule information, de seconde main, que nous avons sur l'intérêt de Poincaré pour la "nouvelle" analyse de Borel, Baire et Lebesgue.
- 322 Nous ne savons pas où d'Ocagne a fait son compte rendu du livre de Lebesgue.
- 323 Cachet de la poste : 18.
- 324 Note [25] de [40].
- 325 A. Denjoy, encore élève de l'Ecole Normale Supérieure, qui a suivi le cours de Baire au Collège de France et rédigé [106].
- 326 Voir la lettre VII.
- 327 Voir [62] et p.195, note 2, et p.196 de la 2^e édition de [4].
- 328 [110] : il s'agit probablement des articles 17, 18, 19 et 23 de Tchebichev sur l'interpolation ([110], V-VI).

329 Il s'agit de l'article [109]. Baire écrivait à ce propos à Borel le 13 novembre 1904 ([51],77) :

"Je suppose que Denjoy ne serait pas fâché si quelqu'un lui donnait le conseil de publier quelque chose ; certains des topos qu'il m'a envoyés pendant les vacances ressemblent un peu, pour le résultat, à la démonstration de la Note II [[[25]]] (sauf qu'il conserve l'emploi des nombres transfinis) ; autant que je me rappelle, il n'y avait pas là-dedans sensiblement plus que dans le théorème lui-même. Il y a davantage dans ce qu'il vient de m'envoyer. Mais j'avoue reculer un peu devant la responsabilité d'un conseil en pareille matière. En d'autres pays, en Italie par exemple, les gens font venir l'imprimeur pour beaucoup moins, mais nous ne sommes pas en Italie."

330 P.98 de [106].

331 E. Perrier (1844-1921), naturaliste, directeur du Muséum d'histoire naturelle de Paris, auteur du livre *Les colonies animales et la formation des organismes*, publié en 1881.

332 P.84-85, ainsi que la Note VI (p.331-340) de la 2^e édition de [4].

333 Ce fut Pierre Ossian Bonnet qui donna une nouvelle démonstration, bien que lacunaire, du théorème des accroissements finis, publiée en 1868 dans le *Cours de calcul différentiel et intégral* de J.-A. Serret ([114],17-19).

Il commence d'abord par ce ramener au théorème de Rolle et suppose ensuite que toute fonction continue sur un intervalle borné est monotone par morceaux. Soit donc x_0 un point où l'on a un extremum. Ossian Bonnet introduit alors les rapports

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \quad \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$$

et conclut que $f'(x_0) = 0$.

334 P.63 et 122 de [4].

335 Voir la Note VI, p.331-340 (particulièrement p.338) de la 2^e édition de [4]. Voir aussi [8], p.134-135.

336 Grace Chisholm, épouse de W.H. Young.¹¹²²

337 W.H. Young(1863-1942).

338 [111] et [112].

339 [115].

340 [71].

- 341 P.231 de [10], où d'ailleurs Lebesgue cite [71].
- 342 Note [116], présentée par Picard.
- 343 Voir [117] : Young, né en 1863, n'a commencé à publier qu'à partir de 1900.
- 344 Voir la note 335.
- 345 P.281-282 de [31].
- 346 [109].
- 347 Il s'agit du critère de compacité des familles de fonctions holomorphes dû à Montel ([59], 470) dont s'occupera également Fréchet, comme il le précisera en 1928 (voir la note 376).
- 348 Nous ne voyons pas bien à quoi Lebesgue fait allusion.
- 349 [109] et [94].
- 350 De son cours Peccot 1904-1905 au Collège de France sur les séries trigonométriques.
- 351 M. Fréchet ne semble pas avoir publié ce théorème à cette époque.⁷⁰⁹
- 352 [49] et [9] ; voir aussi la note 110.
- 353 P.201-207 de [62] ; voir aussi p.94 de [55].
- 354 C'est inexact, voir [119] et [120].
- 355 Dans la correspondance de Borel conservée à l'Institut Henri Poincaré à Paris, il existe plusieurs lettres de L. Couturat à Borel. Dans sa lettre du 13 décembre 1904, Couturat envoie à Borel son compte rendu des livres [40] de Borel et [106] de Baire qui devait paraître dans la *Revue de Métaphysique et de Morale*. Il joignait également à sa lettre des *Remarques d'un logicien* sur ces deux ouvrages.

Couturat écrit à Borel le 19 décembre 1904 :

"J'ai reçu en effet de Lebesgue une lettre fumiste et canularique à laquelle je ne réponds pas, parce qu'il n'y a rien à répondre. Elle prouve seulement beaucoup de légèreté d'esprit. Je ne vois pas, d'ailleurs, ce qui a pu lui "déplaire" dans mes remarques, qui n'étaient nullement des critiques, et qui ne le visaient en tout cas nullement. Je vous dis simplement ceci : Vous savez, vous employez certains concepts que les logiciens (qui étaient aussi des mathématiciens non méprisables : Boole, Schröder, Peano) manient depuis 50 ans ; ils les désignent autrement. Ne serait-il pas bon de vous entendre avec eux sur le vocabulaire et les notations ? C'est ce qui arrive tous les jours dans les domaines mitoyens entre diverses sciences, où des chercheurs venus de côtés opposés se rencontrent souvent sans le savoir. Il vaut mieux qu'ils le sachent, voilà tout. Quant à la "Logique nouvelle", fondée, je le répète, par des mathématiciens et issue de l'étude des mathématiques, ce n'est pas à des mathématiciens qu'il convient de la méconnaître ;

et ils sont malvenus à nous renvoyer à Aristote ! Le divorce séculaire de la Logique et des Mathématiques vient justement de ce que la logique aristotelicienne ne s'appliquait pas aux mathématiques. La Logique nouvelle est au contraire la Logique des mathématiques, et c'est pourquoi l'entente entre mathématiciens et logiciens est naturelle et désirable. Mais il ne faut pas que les mathématiciens confondent la nouvelle Logique avec l'ancienne dans un égal dédain, et l'ignorent de parti-pris.

Je n'ai pas besoin de te dire que ces réflexions ne s'adressent pas à toi en particulier, mais aux idées explicites ou implicites de Baire et de Lebesgue, que tu connais mieux que moi."

Sur la réaction de R. Baire, voir p.80 de [51].

- 356 J. Guinchant, né en 1868, physicien, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Caen et qui a publié de nombreuses notes dans les *Comptes Rendus*.¹¹²³
- 357 A. Turpain, né en 1867, physicien, professeur adjoint à l'Université de Poitiers ; il sera titularisé à Poitiers en 1908.
- 358 [121] et [122]. Il présentera à l'Académie des Sciences de Paris sa note [123] le 6 février 1905. Les travaux mathématiques de Fatou ne sont pas encore, à notre avis, mis pleinement en valeur. S. Mandelbrojt (1899-1983) nous avait dit être chargé par le Comité National des Mathématiciens d'éditer les *Oeuvres* de Fatou. Il serait souhaitable qu'on reprenne ce projet.⁹⁵¹
- 359 Fatou soutiendra sa thèse [124] le 14 février 1907.
- 360 P.48-54 de [55].
- 361 18 février 1905 (cachet de la poste).
- 362 [89]. Sur ces questions on peut lire la thèse [125] de M. Guillemot. Voir aussi la note 643, ainsi que p.172-256 de [421].
- 363 Elève de l'Ecole Normale Supérieure de la promotion 1898.¹¹²⁴
- 364 Voir la note 247.
- 365 20 février 1905 (cachet de la poste).
- 366 P.514 de [89].
- 367 Traducteur de [48] de Cantor. Marotte était professeur de mathématiques au lycée Charlemagne à Paris¹¹²⁵, il nous a été impossible de retrouver la correspondance de Marotte avec Cantor.⁴¹²
- 368 § 5 de [48].
- 369 P.179 de [77].
- 370 22 février 1905 (cachet de la poste).

371 Voir la lettre XIV.

372 Il s'agit probablement de la loi de deux ans de service militaire. Nous avons écrit au Service historique de l'armée de terre pour lui demander si c'était le cas.⁵⁵⁰

373 En 1873 Cantor démontre ([126],102) que l'ensemble des nombres algébriques réels est dénombrable. C'est J. Liouville qui construit en 1844 ([126],96-99) une infinité de nombre transcendants.

374 P.213 de [10].

375 [40].

376 Fréchet écrit à ce propos ([127],88) :⁸⁰⁸

"Nous avons démontré en 1906 ([128],49), complétant ainsi les résultats partiels antérieurement acquis par Arzela ([129],6) et par Montel ([58]), que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble de fonctions holomorphes dans une aire donnée soit compact est que ces fonctions soient bornées dans leur ensemble dans tout domaine complètement intérieur au précédent. (Postérieurement à l'introduction de la notion d'ensemble compact, l'usage s'est établi de donner aux ensembles compacts de fonctions holomorphes le nom de familles *normales*, ceci a l'inconvénient de ne pas mettre en évidence le lien de cette notion particulière avec une notion plus générale, qui joue un rôle fondamental dans le calcul fonctionnel et l'analyse générale.)"

377 A propos de la démonstration de Lebesgue du théorème de Weierstrass, N. Bourbaki écrit que ce théorème ([63],258), "qui déjà s'était révélé un outil de premier ordre en analyse classique", a pu être étendu "à des cas beaucoup plus généraux par M.H. Stone" ([130]), "développant une idée introduite par H. Lebesgue".

378 Lebesgue reprendra ces idées de sa lettre p.264-269 de [131].

Notons que parmi les lettres de Lebesgue à Borel se trouve la lettre manuscrite de Borel à Hadamard ([131],272-273), avec des corrections, datée du 16 mai 1905.

379 Nous datons cette lettre du 4 mars 1905.

380 P.52-86 de [132].

381 Lindelöf n'est pas cité dans [55].

382 Voir la note 1, p.75 de [132]. M.Schaar (1817-1867), mathématicien belge.

383 P,90 de [55].

384 P,84 de [131].

385 8 mars 1905 (cachet de la poste).

- 386 R. Lardé (1870-1897), E.N.S. 1892.
- 387 Association amicale de secours des anciens élèves de l'Ecole Normale Supérieure, fondée le 1er janvier 1846.
- 388 Elève de l'Ecole Normale Supérieure de la promotion 1861.¹¹²⁶
- 389 C'est la première fois que Lebesgue écrit à Borel : "Mon cher Ami" !
- 390 Elève de l'Ecole Normale Supérieure de la promotion 1894.¹¹²⁷
- 391 Méray, élève de l'Ecole Normale Supérieure de la promotion de 1854, prendra sa retraite cette année, remplacé à Dijon par Baire.
- 392 L'opinion de Borel semble avoir évolué depuis 1903 (voir la note 91).
- 393 Voici la liste des bénéficiaires de la bourse Peccot depuis sa création jusqu'en 1906 ([133],64) : E.Borel (1900), E. Borel (1901), E. Borel (1902) [Borel est né le 7 janvier 1871], H. Lebesgue (1903), R. Baire (1904), H. Lebesgue (1905) et G. Servant (1906).
- 394 Boutroux fera le cours Peccot en 1907 et 1908.
- 395 Zoretti fera le cours Peccot en 1909. L. Zoretti, né en 1890, professeur de mécanique à l'Université de Caen, mériterait une étude pour ses recherches ([134],1413) qui s'arrêteront avant 1914.⁸⁶⁹
- 396 [131].
- 397 [62].
- 398 D. Pompeiu (1873-1954) ([134],995), docteur ès sciences mathématiques à Paris en 1905, professeur à la Faculté des Sciences de Bucarest.
- 399 [135].
- 400 [25].
- 401 7 avril 1905, d'après la fin de cette lettre.
- 402 Il s'agit peut-être de la nomination pour le cours Peccot du Collège de France où sera nommé en 1906 G. Servant, protégé de Darboux (voir la note 44).
- 403 P.-E. Levasseur (1828-1911), économiste, administrateur du Collège de France ; A. Barbier de Meynard (1826-1908), orientaliste, professeur d'arabe au Collège de France.
- 404 *Annuaire du Collège de France.*
- 405 Le journal fondé en 1904 par Jean Jaurès (1859-1914).

- 406 *La Revue du Mois* paraîtra le 10 janvier 1906.
- 407 A. Cotton et L.-J. Simon faisaient partie du comité de rédaction de la revue.¹¹²⁸
- 408 Elève de l'École Normale Supérieure de la promotion 1862.¹¹²⁹
- 409 La note [136] du 22 mai 1905.
- 410 L'article [137] a paru en septembre 1905.
- 411 C'est seulement en 1910 qu'il y publiera [138].
- 412 Il nous semble intéressant de noter ce que Cantor écrivait à Hilbert le 24 juin 1908 à propos de la réception de la théorie des ensembles en France ([139], 229) :

"Den Akademikern diessseits und jenseits des Rheins (ich meine Berlin und Paris) wird ihr träger, kraft- und saftloser Widerstand nichts helfen, sowenig wie die neueren vergifteten Pfeile ihrer Pioniere Poincaré, Picard, Borel, König, etc. Sie werden von dem Riesengewicht der Mengenlehre schliesslich niedergerissen und erdrückt werden, um daran zu ersticken !"

("Aux accadémiciens de ce côté et de l'autre côté du Rhin (je pense à Berlin et à Paris), leur opposition active, puissante et insipide, ne sera d'aucun secours, pas plus que les nouvelles flèches empoisonnées de leurs pionniers Poincaré, Picard, Borel, König, etc. Ils seront enfin abattus et écrasés par l'extraordinaire importance de la théorie des ensembles, à en être soufflés.")

Notons que Borel a été élu à l'Académie des Sciences seulement en 1921.¹¹³⁰

- 413 C. Maurain, doyen de la Faculté des Sciences de Paris, disait à Borel le 14 janvier 1940 à propos de cet Institut inauguré en automne 1928 ([140], 9) :

"Tu as créé l'Institut Henri Poincaré, grâce à un don généreux de la Fondation Rockefeller dû à ta haute autorité, auquel s'est ajouté un don d'Edmond de Rothschild, et tu as fait de cet Etablissement un centre admirable, où se rencontrent les savants et les chercheurs de tous les pays."

- 414 Il est plaisant d'apprendre par C. Marbo ([167], 61) que "la rumeur publique" avait fiancé Borel "avec la fille du mathématicien Darboux". Borel aurait-il hésité entre la fille de Darboux et la fille d'Appell ? Voici ce que dit Borel dans son discours du 14 janvier 1940, en présence de sa femme ([140], 30) :

"Venu à Paris pour entrer dans la classe de mathématiques élémentaires supérieures de Bernès, puis dans la classe de spéciales de Niewenglowski, j'eus la bonne fortune d'avoir comme camarade le fils de Gaston Darboux. Cette circonstance me valut d'être accueilli dans la famille de l'éminent mathématicien. Le simple appartement

du cinquième étage de la rue Gay-Lussac s'ouvrit avec une bonhomie cordiale devant le jeune lycéen arrivé de province. J'y appris bien des choses et notamment que l'Ecole Normale n'ouvrait pas seulement la carrière de l'enseignement, mais préparait aussi à la Recherche scientifique, et je commençai à pressentir quelles joies intellectuelles peut donner une vie consacrée à la recherche. L'influence de Gaston Darboux fut ainsi décisive sur l'orientation de ma carrière. C'est pour essayer de me rapprocher de l'idéal qu'il incarnait à mes yeux que je suis entré, en 1899, à l'Ecole Normale."

415 Le cours Peccot est ([140],32) "une fondation due aux conseils de Joseph Bertrand" (1822-1900).

416 Borel a fait la connaissance de Lindelöf en 1899. N. Zeilon écrit ([141],VII) que I. Fredholm "passe le printemps 1899 à Paris en compagnie de E. Lindelöf"⁴⁵⁸.

E. Borel disait dans son discours du 14 janvier 1940 ([140], 35) :

"Je voudrais enfin donner une pensée affectueuse et émue à Ernst Lindelöf, avec lequel je me suis lié d'une de ces amitiés de jeunesse qui durent toute la vie, alors que nous étions l'un et l'autre aux approches de la trentaine, en cette période de l'existence où l'on ne sait pas bien si l'on est déjà professeur ou encore étudiant. Nous nous sommes revus souvent depuis et pour la dernière fois en 1934, à Helsinki."

Dans ce discours, où le nom de Lebesgue n'est pas mentionné, Borel disait aussi ([140],34) :

"Parmi les Français, je voudrais évoquer la mémoire de mon ami René Baire, mort encore jeune après une longue maladie qui avait interrompu ses belles recherches ; son nom restera attaché à l'essor pris à la fin du siècle dernier par la théorie des fonctions de variables réelles."

Il est possible que l'amitié de Borel pour Baire et Lindelöf dans les années qui nous occupent actuellement ait porté ombrage à Lebesgue.

417 Voir p.31 de [142]. Le docteur E. Gérard était maire de Beauvais ([427]).

418 La conférence du 19 janvier 1905 : *Sur la convergence des séries de Fourier* (BSMF, 33(1905), 1).

419 P.351-352, 378-379 de [124]. Lebesgue avait traité le cas des fonctions (mesurables) bornées dans [62] (voir note 531).

420 [143].

421 P.93 de [131].

422 Cette lettre ne figure pas dans [131].

423 P.83-84 de [131]:

"A. Un nombre x étant donné, il existe des nombres y qui ne sont liés à x par aucune équation algébrique à coefficients entiers."

"B. Il existe des fonctions y de x telles que, pour aucune valeur de x , y n'ait ni une valeur algébrique, ni une valeur liée à x par une équation algébrique à coefficients entiers."

On peut lire à ce sujet aussi avec intérêt [144] et [145].

424 Voir la note 242, ainsi que la lettre suivante.

425 Voir la note 244.

426 Il s'agit du mémoire [146] couronné par l'Académie des Sciences.

427 Voir la note 391.

428 H. Minkowski (1864-1909), professeur à l'École Polytechnique de Zurich de 1896 à 1902, depuis cette date professeur à Göttingen.

429 Voir la note 393.

430 Voir la note 243.

431 Voir [147], p.46-50 de [148] et p.51-58 de [149].

432 [148]. (Voir notes 226 et 594).

433 Il s'agit ici d'une discussion sur les nominations répétées pour le cours Peccot. (Voir la note 393). Borel, né le 7 janvier 1871, avait plus de 31 ans lorsqu'il fit pour la troisième fois le cours Peccot ; Lebesgue est né le 28 juin 1875.

434 F. Gonnessiat (1856-1934), chargé de cours d'astronomie à l'Université de Lyon, puis, en 1901, astronome pour 5 ans à l'Observatoire de Quito (Equateur) et enfin professeur d'astronomie à l'Université d'Alger. Il a été élu correspondant de l'Académie des Sciences le 10 juillet 1916.

435 A l'agrégation. (Denjoy fut reçu premier à l'agrégation de 1905.)

436 De [55].

437 Borel a dû demander à Lebesgue des renseignements pour le dépôt de vente de sa *Revue du mois* qui allait paraître.

438 Le livre aura exactement 128 pages.

439 Baire écrivait à Borel à propos de l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques* le 24 mars 1905 ([51], 83) :

"Les divers articles de l'*Encyclopédie* ne pourront qu'être, à mon avis, présenter d'homogénéité dans leur ensemble."

440 P.1 de [150].

441 [35].

442 [27].

443 Il nous semble intéressant de citer ici la lettre de C. de la Vallée Poussin à Baire du 20 octobre 1916 à propos de son livre ([157]) *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire* ([158], 37) :

"Je suis loin de méconnaître la part de vérité qu'il y a dans vos réflexions sur les généralisations que M. Lebesgue a données de votre beau théorème sur les fonctions de classe 1.

Je vous ferai cependant observer que je n'ai pas dit le contraire. Lisez attentivement les numéros 131, 139 et 142 de mon exposé, vous y verrez très clairement dit que je ne considère pas le théorème de ce dernier numéro comme une véritable généralisation du vôtre. Il n'y a généralisation que du procédé de raisonnement et non du résultat.

Je vous trouve cependant trop sévère dans votre appréciation sur ces recherches de Lebesgue. Elles partagent de la profondeur de vos propres recherches, dont elles dérivent et le mérite de cette profondeur vous revient en premier lieu.

Les recherches de Lebesgue, sur les relations entre les classes et les ensembles $E(\xi > \text{ou} < A)$, ont assurément une prétention plus modeste, mais elles conduisent à un résultat définitif et il serait injuste d'en méconnaître l'intérêt."

C. de la Vallée Poussin écrit encore à Baire le 4 février 1922 à propos de sa conférence faite en 1920 ([159]) au Congrès international des Mathématiciens à Strasbourg ([158], 38-40) :

"J'ai dit dans ma conférence que c'est l'intégrale de Lebesgue qui a surtout dévoilé l'importance de la classification de Baire. Vous protestez en contestant que l'intégrale de Lebesgue doive dominer la notion de fonction de Baire. Mais je suis entièrement d'accord avec vous et je n'ai ni dit ni pensé que l'intégrale de Lebesgue doive dominer la fonction de Baire. Cela n'empêche que c'est par l'intégrale de Lebesgue que presque totalité des mathématiciens qui ont étudié la question ont aperçu l'importance de la classification. C'est une question de fait qui est vraie pour moi en particulier et tous les mathématiciens que je connais personnellement.

Je n'ai jamais eu l'intention de classer par ordre d'importance les découvertes mathématiques considérées *en elles-mêmes* et à un point de vue purement philosophique. Je crois que c'est une oeuvre vaine, parce que chacun jugera différemment suivant sa tournure d'esprit. Mais il y a des découvertes qui intéressent tout de suite beaucoup de monde et d'autres qui n'intéressent qu'un cénacle. C'est là le grand avantage (je ne dis pas mérite) des premiers travaux de Lebesgue sur les vôtres et sur ceux de Borel. L'intégrale de Lebesgue est apparue immédiatement aux mathématiciens comme un instrument perfectionné, dont ils pouvaient se servir dans une foule de questions courantes, et sa fécondité éclatait aux yeux.

Et ceci m'amène à votre autre protestation contre la Note où je dis "négligemment" que M. Baire avait trouvé une propriété se conservant à la limite, mais qui *paraissait* devoir rester *stérile*.

Vous vous indignez contre ce mot *stérile* comme si j'avais dit que ce théorème est stérile, alors que la phrase dit au fond le contraire. J'ai voulu dire que votre théorème paraissait, aux mathématiciens contemporains de la thèse de Lebesgue, une sorte de

curiosité métaphysique dont ils ne voyaient rien d'utile à tirer pour eux. En vous laissant de côté, je crois bien que c'est là l'expression stricte de la vérité.

Vous vous étonnez que l'importance des conclusions que vous avez tirées dès alors de ce théorème n'ait pas été reconnue plus universellement, comme si un *complot* de demi-silence s'était fait autour de vos travaux. Soyez assuré qu'il n'y a pas de complot, mais il y a un fait : ce genre de recherches philosophiques est trop loin de la mathématique courante pour intéresser beaucoup de personnes et votre tournure d'esprit est une exception. Il n'y a pas de médaille sans revers.

Les travaux de Lebesgue sur l'intégration ont renouvelé une théorie qui est l'une de celles ayant intéressé avant lui le plus grand nombre de mathématiciens, celle des séries de Fourier. Tous, ceux-là en particulier, ont attaché tout naturellement beaucoup d'importance à son intégrale. Combien de mathématiciens, pensez-vous, ont lu ses travaux sur les fonctions d'ordre α avec attention ? Croyez-vous qu'il soit plus heureux que vous sur ce point-là ?

Qu'y voulez-vous faire ? Les gens s'intéressent aux choses qu'ils pensent pouvoir *utiliser* ; ils ne s'intéressent guère à celles dont ils ne voient pas le moyen de se servir, ou qui les dépassent.

Les théories de l'intégration de Lebesgue sont devenues classiques avant les vôtres. Ce n'est ni une preuve de supériorité ni une injustice. Cela prouve peut-être uniquement que vos travaux anticipent plus que les siens sur l'évolution de la science mathématique. Lorsque vous affirmez à la fin de votre lettre que vous n'êtes pas inférieur comme novateur à Lebesgue et Borel, je pense que vous avez parfaitement raison et la thèse que vous les surpassez tous les deux est soutenable. "

Et de la Vallée Poussin se rencontre ici avec Lebesgue lorsqu'il écrit :

"Vous n'acceptez pas qu'on dise que *ce qui importe dans votre oeuvre c'est ce qui a servi à d'autres*. Cher Monsieur, prenez garde que la solitude dans laquelle vous vivez ne soit mauvaise conseillère. Que voilà donc une parole vaine ! Il faudrait bien changer l'humanité pour que les gens n'estiment pas surtout dans votre oeuvre ce qui leur profite. Il n'est pas légitime de s'isoler dans la science, c'est une oeuvre *humaine* et partant *collective*. Vous prétendez que l'on doive juger votre oeuvre sans en sortir. Jugez-la donc vous même alors et soyez logique jusqu'au bout ; fichez-vous du jugement des autres."

444 P.47 de [150].

445 15 novembre 1905 (cachet de la poste).

446 Il n'y a pas de partie III dans le chapitre III, ni de partie IV dans le chapitre V de [55].

447 A. Blanc, physicien, et F.-J. Picavet (1851-1921), philosophe,¹¹³¹

448 Il s'agit de [151] et [152]. Young écrit ([151], 448) :

"The remainder of the paper is devoted to the discussion of

the inner and outer measures of the integral of any function, and in the case when they are equal of the generalised integral of a function, which is, in this generalised sense, integrable. In particular it is shown that such functions are none other than the functions which Lebesgue has named *summable*, and the generalised integral is shown to be identical with the Lebesgue integral in the case when S is a finite segment ; a geometrical interpretation of the integral, similar to that used by Lebesgue, is given in the general case."

- 449 [111].
- 450 Sur l'influence de Baire sur Lebesgue voir aussi la remarque de Hawkins p.127 de [8].⁴⁵⁶
- 451 Sur la théorie de l'intégration de Young on peut lire p.127 et 148-154 de [8].
- 452 [137] (voir la lettre LXIV).
- 453 [62].
- 454 V. Basch (1863-1944), professeur de littérature allemande/, assassiné sous l'occupation par la milice, H.G. Dottin (1863-1920), linguiste, H. Sée (1864-1936), historien, et A. Le Braz (1859-1926), professeur de littérature française à la Faculté des lettres de Rennes¹¹³².
- 455 [153] (note du 23 octobre 1905), [154], [155] et [156].
- 456 Voir aussi p.73 de [160].
- 457 Voir aussi [161] et p.38-43 de [160].
- 458 Dans la correspondance de E. Borel conservée à l'Institut Henri Poincaré à Paris se trouvent 32 lettres de Lindelöf à Borel écrites entre le 3 janvier 1900 et 13 avril 1911.

E. Lindelöf écrit le 25 juin 1903 :

"Je me permettrai de vous communiquer une démonstration assez simple du théorème fondamental de MM. Cantor et Bendixson, relatif aux ensembles fermés (*abgeschlossen*) non dénombrables à laquelle j'ai été amené au commencement du mois de mai et qui paraîtra peut-être dans les *Acta Mathematica*.

J'ai d'ailleurs hâte d'ajouter que la simplification que j'ai apportée à la démonstration des dits auteurs se réduit, à vrai dire, à un changement de terminologie. Toutefois il me semble que je suis parvenu à m'affranchir complètement du concept du transfini et à fonder la démonstration sur des notions plus familières aux mathématiciens."

Le 24 août 1903, répondant à une lettre de Borel (nous ne savons pas si la correspondance de Lindelöf est conservée en Suède), Lindelöf écrit :

"Dans votre lettre, vous appelez mon attention sur le théorème que vous aviez énoncé dans les *Comptes Rendus* du 4 mai 1903. Ce théorème ne m'avait pas échappé, mais je voudrais faire remarquer qu'il ne s'applique qu'aux ensembles *fermés* (c'est évidemment par inadvertance que cette condition ne figure pas dans l'énoncé de votre théorème ; d'ailleurs cette omission ne saurais guère égarer personne, puisque la condition dont il s'agit joue un rôle essentiel dans la démonstration p.42-43 de vos *Leçons sur la théorie des fonctions*, à laquelle vous renvoyez à l'endroit cité), tandis que c'est précisément dans le cas d'un ensemble non-fermé qu'il me faudra appliquer la proposition énoncé à la fin de ma dernière lettre, pour établir le théorème de MM. Cantor et Bendixson.

Cependant, votre remarque m'a amené à examiner de nouveau ces questions et, après quelques efforts, j'ai enfin trouvé qu'on peut atteindre le but visé à l'aide d'un théorème très élémentaire, qui constitue d'ailleurs l'extension directe de votre théorème aux ensembles non-fermés."

Le 23 septembre 1903, Lindelöf écrit à Borel :

"Ces théorèmes ont été démontrés par Cantor à l'aide des nombres transfinis. Vous voyez que votre théorème rend ce bagage inutile. En somme, il me semble que cette construction, sans doute très belle et surtout très hardie, des nombres transfinis n'intervienne actuellement dans les mathématiques que comme une notation, très commode et assez suggestive, c'est vrai. Il sera bien différent le jour où l'on réussira à démontrer que tout ensemble infini, et en particulier le continu, peut se mettre sous forme d'un ensemble "bien ordonné". Mais ce jour-là est sans doute encore loin et, en attendant, je pense que la plupart des mathématiciens préféreront éviter le transfini en ayant recours à votre théorème et son extension aux ensembles non-fermés."

Le 27 octobre 1903, Lindelöf écrit à Borel à propos des *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* de Lebesgue en cours d'impression :

"Je vous remercie bien de votre lettre du 20 octobre et des épreuves que vous m'avez envoyées du livre de M. Lebesgue. Son exposition m'a beaucoup intéressé, bien que, je dois l'avouer, son style me paraisse un peu flottant et pas très clair. Dans des questions aussi abstraites une exposition un peu plus dogmatique est certainement à préférer. J'ai éprouvé ce même sentiment en feuilletant sa thèse, où il est difficile de puiser des renseignements à moins qu'on ne la lise en entier."

Le 6 novembre 1903, Lindelöf revient sur son jugement sur le "style" de Lebesgue, à la suite de la lettre de Borel :

"Je regrette un peu les expressions que j'ai écrites dernièrement relativement à la rédaction de M. Lebesgue. C'est bien possible que je ne me suis pas donné assez de peine pour la juger en connaissance des faits. C'est précisément pour me renseigner sur ce qu'il avait fait dans la théorie de la mesure et tout particulièrement pour connaître les applications qu'il avait fait de votre théorème, que j'ai parcouru, à la hâte, sa thèse au mois d'août dernier. Le fait est que je n'ai pu découvrir ce que je cherchais. Peut-être aurais-je meilleure chance en recommençant."

Et Lindelöf ajoute :

"Si M. Lebesgue, dans sa thèse, a fait des recherches, *ayant ce même but*, à savoir de s'affranchir des nombres transfinis, je suis le premier à lui reconnaître la priorité, et dans ce cas je serais infiniment obligé si vous vouliez bien faire ajouter à ma note - s'il y a encore le temps à cela - une remarque conçue à peu près dans ces termes (en bon français !) :

"M. Borel a bien voulu me faire observer que les résultats contenu dans ce numéro (où il s'agit de la mesure) présentent une certaine (ou une *grande*, suivant les circonstances) analogie - ou bien "se correspondent en partie" - avec ceux établis par M. Lebesgue dans sa thèse".

Quant à la note de M. Lebesgue, dont vous m'avez envoyé les épreuves, elle n'a aucune tendance à s'affranchir du transfini, et pour ce qui concerne le théorème de Cantor-Bendixson, la démonstration qu'en ont donné ces auteurs me semble supérieure à celle de M. Lebesgue pour la clarté et la précision."

Lindelöf écrit encore à ce propos dans sa lettre du 5 mars 1905 :

"Je persiste à penser que la démonstration de M. Lebesgue n'est pas identique à la mienne, et je m'étonne encore qu'il ait pu le dire."

459 Sur cette nomination voir p.88-89 de [152].

450 Il s'agit de la remarque de Lebesgue sur Riesz à la fin de sa dernière lettre. Baire a dû donner à Borel une carte pour Lebesgue, que Borel lui a transmise, contenant la référence de la rectification de Schoenflies ([155]) apportée à l'article de Young ([154]).

461 Philipot, élève de l'Ecole Normale Supérieure de la promotion 1890¹¹³³ ; Borel était de la promotion 1889. Voir aussi la lettre de Lebesgue du 28 novembre 1905.

462 Il s'agit probablement de [131].

463 Lebesgue reprendra l'étude de ces questions en 1911 ([163]).

464 P.53-54 de [55]. (Voir note 582).

465 [164]: note présentée le 27 novembre 1905.

466 Nous situons cette lettre vers le 26 novembre 1905,

467 J. Seunes, né en 1849, professeur de géologie à l'Université de Rennes, assesseur du doyen.

468 E. Schou, Danois, membre de la Société Mathématique de France depuis 1897. Borel note à côté de son nom : "simplification d'Hadamard".¹¹³⁴

- 469 Du livre [4].
- 470 Note 1, p.25 de [55].
- 471 P.27-30 de [165].
- 472 [118].
- 473 Lebesgue a repris cette question dans [166].
- 474 Note 1, p.23 de [55].
- 475 Note 1, p.27 de [55].
- 476 P.182-183 de l'article [167] de P.E.B. Jourdain (1879-1919).
- 477 L'Académie des Sciences de Paris a attribué à Borel le 18 décembre 1905 le prix Petit d'Ormoys "pour l'ensemble de ses travaux mathématiques", par une commission composée de P. Appel, Jordan, Darboux, Picard, Painlevé et Humbert et dont le rapporteur était Poincaré.⁵⁷²
- 478 M. Loewy (1833-1907), directeur de l'Observatoire de Paris, Membre de l'Académie des Sciences, né en Autriche, naturalisé français en 1864.
- 479 P.126-127 de *La Revue du Mois* du 10 janvier 1906.
- 480 [158].
- 481 Nous situons cette lettre entre les 30 janvier et 7 février 1906.
- 482 Hermite écrivait à Stieltjes le 20 mai 1893 - et nous pensons qu'il faut prendre ses affirmations avec une certaine dose d'humour car Hermite aimait bien plaisanter ([171],318) :
- "Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées".
- Dans son article, Darboux invite ([169],332) les "jeunes géomètres" à lire "la correspondance la plume à la main et à y démêler les idées originales qui s'y trouvent à profusion". Il insiste "surtout sur le côté moral de cet échange de lettres, sur les réflexions générales" des deux mathématiciens "à l'occasion de leurs recherches" et il termine ([169],336) par la "réflexion" d'Hermite citée par Lebesgue.
- Voir aussi p.57 de [170].
- 483 8 février 1906 (cachet de la poste).
- 484 C. Barrois(1851-1939), géologue, professeur à la Faculté des Sciences de Lille, élu à l'Académie des Sciences le 9 mai 1904.
- P. Curie (1859-1906), prix Nobel de physique 1903.

La Revue du Mois du 10 février 1906 signale (p.243) la constitution de *L'Association amicale des professeurs* créée "sur la proposition des professeurs de la Faculté des Sciences de Caen".

La revue signale dans son numéro du 10 mars que l'Association "comprend 191 noms, soit plus des deux tiers du nombre total des professeurs pouvant en faire partie d'après les statuts"(p.372).

Le 10 avril, la revue donne (p.510) la composition du bureau de l'Association : Président : C. Barrois, vice-président : P. Curie et trésorier : N. Bernard.

485 L. Charve (1849-1937), élève de l'Ecole Normale Supérieure de la promotion 1869, professeur de mathématique à la Faculté des Sciences de Marseille, doyen de la faculté de 1899 à 1910 et adjoint au¹¹³⁵ maire de Marseille.

486 26 février 1906 (cachet de la poste).

487 Il s'agit de l'article *Les principes de la théorie des ensembles* paru (p.248-250) dans *La Revue du Mois* du 10 février 1906, probablement rédigé par Borel, qui écrit :

"Les mathématiciens sont tous d'accord sur le fait qu'ils ne doivent raisonner que sur des notions *bien définies* ; mais que doit-on entendre exactement par *bien défini* ? Pour certains, comme M. Hilbert, il faut et il suffit, pour qu'un objet soit bien défini, que son existence n'implique pas contradiction ; pour d'autres, la définition doit permettre de distinguer pratiquement l'objet défini de tout autre objet analogue avec lequel on pourrait être tenté de le confondre.

Il semble qu'il y ait lieu de distinguer suivant que l'on veut définir une classe d'objets, ou un objet déterminé de cette classe. On constatera, par exemple, qu'il n'y a pas contradiction à supposer l'existence de nombres autres que les nombres commensurables, mais cela ne donne pas la définition d'un nombre incommensurable bien déterminé.

En disant qu'un objet mathématique (nombre, fonction, ensemble) est *défini* lorsque l'on sait le distinguer des autres objets analogues, on ne dit pas encore quelque chose de parfaitement clair, si l'on ne précise pas la nature des opérations par lesquelles cette distinction sera possible. Cette difficulté peut se présenter même s'il y a seulement hésitation entre deux valeurs simples pour l'objet défini. En voici un exemple : on a démontré en 1882 l'impossibilité de la quadrature du cercle, c'est-à-dire l'impossibilité de construire par la règle et le compas un carré équivalent à un cercle donné ; supposons qu'avant cette démonstration, en 1880, quelqu'un ait dit : "Je définis un nombre comme il suit : si la quadrature du cercle est possible, il est égal à un ; si elle est impossible, il est égal à deux." Ce nombre aurait-il été *défini* ? Pour certains esprits, la réponse affirmative ne fait pas de doute, car la quadrature du cercle est possible ou impossible. Mais, d'autre part, on conçoit que, sans les beaux travaux d'Hermite et de Lindemann, des siècles auraient pu s'écouler, les races humaines

disparaître, sans que l'on ait jamais su si le nombre *défini* était égal à un ou à deux. On comprend donc qu'une définition de cette nature puisse paraître insuffisante.

Il se présente des difficultés encore plus grandes dans la définition des ensembles et dans celle des fonctions ; c'est de cette dernière que s'occupe M. Lebesgue dans le mémoire cité plus haut [[[77]]]. Il arrive à des résultats remarquables, notamment au suivant, qui était inattendu : il définit une fonction qui n'est susceptible d'aucune représentation analytique. Ces spéculations n'ont pas seulement un intérêt philosophique ; outre les résultats mathématiques précis auxquels elles ont déjà conduit, elles peuvent amener d'autres que les mathématiciens à réfléchir davantage sur les définition qu'ils emploient, et une telle étude peut être l'origine de progrès positifs pour la science."

488 9 mars 1906 (cachet de la poste).

489 [172] : publié en février 1906.

490 Le *Bulletin des Sciences Mathématiques* a d'abord publié une rectification de Pompeiu ([173] , en mars 1906), puis l'article de Montel ([59], p.191-192) en juin 1906.

491 F. Houssay (1860-1920), biologiste, professeur et doyen de la Faculté des Sciences de Paris. "Iamarckien", auteur de l'article [174] publié dans la revue du 10 mars 1906.

F. Houssay écrit ([174], 258) :

"Assurément, l'homme primitif s'est intéressé de bonne heure au cours du soleil en remarquant la correspondance du jour et de la nuit avec la présence et l'absence de l'astre. Il n'a pu méconnaître la différence des nuits sombres et des nuits claires et le rapport compliqué de leur rythme avec les phases lunaires. L'étincellement des cieux nocturnes n'a pas manqué d'éclairer ses rudimentaires réflexions. Certainement, les orages, les ouragans ont fixé fortement sa pensée en le remplissant d'effroi momentané. Mais, manifestement aussi, il a en même temps, sinon même tout d'abord, porté une investigation non moins intelligente sur les phénomènes biologiques qui l'entouraient immédiatement.

Les vérités élémentaires sont les vérités alimentaires. Et l'on pourrait presque affirmer que la première connaissance de l'homme, héritée de ses ancêtres arboricoles et frugivores, est relative à la sexualité du dattier."

Il ajoute ensuite ([174], 259) :

"Si l'on est convaincu que nos pensées même celles qui sont considérées comme les plus hautes et les plus philosophiques, ont leur origine dans le plus humble réalisme, on ne peut s'empêcher de réfléchir à leur déterminisme précis."

F. Houssay affirme ([174], 250) :

"Le régime frugivore est, en effet, celui qui, *toutes choses égales d'ailleurs*, tend le plus à développer les qualités de prévoyance et d'ingéniosité."

492 Voir sur ce théorème p.97-100 de [175].

493 A. Petit d'Ormoy (1811-1881), propriétaire domicilié à Marolles en Hurepoix canton d'Arpajon, institua légataire universel l'Académie des Sciences. Les prix étaient décernés tous les deux ans depuis 1883. Il y avait deux prix : un prix pour les sciences mathématiques de 10.000 francs (160.000 francs 1990) et un prix pour les sciences naturelles également de 10.000 F.

Les prix Petit d'Ormoy ont été attribués à Darboux (1883), Halphen (1885), Laquerre (1887), Appell (1889), Goursat (1891), Stieltjes (1893), Ribaucourt (1895), Tisserand (1897), Moutard (1899), Hadamard (1903) et Borel (1905).

Pour ce prix voir p.293-295 de [176].

Emile Borel avait reçu les prix suivants :

- le grand prix des sciences mathématiques (fondé en 1795) de 3000 F en 1898 (pour le sujet : chercher à étendre le rôle que peuvent jouer en analyse les séries divergentes) ;

- prix du général Poncelet de 2.000 F en 1901 ;

- prix Vaillant de 3.000 F en 1904 (sujet : déterminer et étudier tous les déplacements d'une figure invariable dans lesquels les différents points de la figure décrivent des courbes sphériques).

Lebesgue recevra son premier prix (Houllevigue) de 3.000 F en 1912.

494 W. Wirtinger était un des rédacteurs du tome II, *Analysis*, de l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*.

495 Husson, élève de l'Ecole Normale Supérieure de la promotion 1893, et Vieillefond de celle de 1892. (Voir notes 1100 et 1121.)

496 Il s'agit probablement de A. Castex (1851-1942); chirurgien.

497 [173] : voir la lettre LXXXVI.

498 [177] : thèse dédiée à H. Poincaré et présidée par lui; dont Koenigs et Goursat étaient les examinateurs.

499 Voir la note 2, p.129 de [59].

500 Voir la lettre XXI.

501 Voir la lettre suivante du 28 mars 1906.

502 [178].¹¹³⁶

- 503 [179]. Le compte rendu d'Hadamard du livre de Gibbs *Elementary principles in statistical mechanics* ([180]) a joué un rôle important dans l'étude de ces questions en France.
- 504 Lebesgue fait allusion au dessin de la page 1677 de [178].
- 505 Voir la lettre précédente et p.84 de [67].
- 506 Il s'agit des corrections de Lebesgue à la thèse de Fatou ([124]) envoyées probablement début avril 1906.

Borel avait écrit sur les épreuves de la thèse : "Voici quelques corrections ; tenez-en compte dans la mesure du possible ; je vous enverrai la suite dans quelques jours quand j'aurai le tout. Renvoyez-moi ces épreuves s'il vous plaît." 598

- 507 P.335-336 de [124].

Pour la théorie de Jordan voir la note 4.

Ni Borel, ni Fatou n'ont tenu compte de cette remarque de Lebesgue.

Fatou écrit ([124], 335) :

"Le problème de la mesure des ensembles a été abordé pour la première fois par M. G. Cantor ; ses définitions ont été précisées et complétées par M. Jordan dans son cours d'analyse ; mais c'est M. E. Borel qui a donné pour la première fois à cette notion de mesure une portée assez générale pour la rendre vraiment utile au point de vue des applications."

Fatou ajoute (p.336) que Lebesgue, dans sa thèse, "a repris et complété le problème de la mesure d'après M. Borel et en a fait une application des plus importantes à la définition de l'intégrale". Il est probable que Lebesgue n'était pas très satisfait de cette formulation (voir les notes 17 et 81).

- 508 P.336 : a été corrigé.
- 509 P.337 : rien n'a été changé. Borel avait écrit sur les épreuves : "Quel rapport y a-t-il entre leur somme et les valeurs des a_n, b_n ?"
- 510 P.339 : rien n'a été corrigé. Borel écrit en marge : "Les dérivations sous le signe \int sont-elles légitimes ?"
- 511 Poisson n'est pas cité et Fatou n'a pas tenu compte du changement proposé par Borel à l'alinéa 2 : "Rappelons une remarque due à Poisson". Voir à ce sujet p.52 de [55] qui donne la référence exacte.
- 512 P.345 : Fatou a ajouté la note 1. Borel écrit : "Est-il légitime

de dériver sous le signe \int ? On pourrait directement démontrer que le second membre est égal au troisième."

- 513 P.346 : rien n'a été changé. Il n'y a aucune indication sur les épreuves.
- 514 P.347 : aucun changement. Borel avait simplement remplacé "peine" de la ligne 6, alinéa 1, par "grande difficulté".
- 515 P.348 : rien n'a été changé. Borel écrivait : "Sommable ou intégrable (au sens de Lebesgue)."
- 516 P.349 : Ces corrections ont été faites. Fatou a introduit la fonction H_1 et ses dérivées partielles, au lieu de

$$\frac{dH}{du}, \frac{dH}{d\theta},$$

et il a ajouté la note 1. Borel écrit : " H est une fonction de u ; qu'est ce que $\frac{\partial H}{\partial \theta}$?"

- 517 P.349 : pas de changement, Borel écrit à propos de l'alinéa 1 : "Souligner cet énoncé pour en marquer l'importance."
- 518 P.351 : rien n'a été changé, Borel écrit : "Notation de Lebesgue, l'expliquer ou citer Lebesgue." Voir à ce sujet la note 162 et p.148 de [11].
- 519 P.352 : pas de changement de notation. Borel n'a fait aucune remarque sur les épreuves.
- 520 Il s'agit de [181], Fatou n'a pas mentionné, ni Borel d'ailleurs, le mémoire de Harnack.
- 521 P.360 : inchangée, Borel n'a rien noté.
- 522 A été fait.
- 523 P.361 : Fatou a supprimé, après la ligne 5 la phrase :
- "C'est là un résultat qui a déjà été donné par différents auteurs notamment par M. Pringsheim."
- 524 P.362 : a été fait.
- 525 P.367 : inchangée.
- 526 P.368 : la ligne 7 était ainsi rédigée : "Pour tous les points où $f(u)$ et $g(u)$ sont les dérivées...".
- 527 P.371 : rien n'a été corrigé.
- 528 P.373. Les 7 premières lignes du § 3 étaient ainsi rédigées :

"Cette étude est plus délicate que lorsque $f(u)$ est une fonction bornée. Si $f(u)$ était, sauf aux points d'un ensemble de

mesure nulle, égale à la dérivée de son intégrale indéfinie, on pourrait raisonner exactement de la même manière que lorsque $f(u)$ est bornée, et l'on arriverait aux mêmes conclusions que dans le premier chapitre. Mais M. Lebesgue a montré qu'il n'en est pas toujours ainsi, de telle sorte que nous ne sommes pas en droit d'appliquer l'intégration par parties. Pour lever la difficulté nous ferons une hypothèse sans doute artificielle mais qui nous permettra d'obtenir des résultats rigoureux."

529 P.374 : inchangée.¹¹³⁷

530 1er juin 1906 (cachet de la poste).

531 Fatou, dans sa thèse, p.373-379, suppose seulement que la fonction est de carré intégrable, tandis que Lebesgue supposait dans [62]¹¹³⁸ qu'elle est bornée. Fatou énonce et utilise dans sa démonstration le "lemme de Fatou" (p.375-376).⁵⁵³

532 Voir [182] et les réponses de Lebesgue : [183] et [184]. (Voir aussi p.123 de [11]).¹¹⁷⁶

533 Nous situons cette lettre en juin 1906.

534 Cette lettre est écrite sur papier à en-tête de l'"Ecole Centrale, Ministère du Commerce, de l'Industrie, des Postes et des Télégraphes".

535 Levavasseur est nommé en 1907 titulaire de la nouvelle chaire de calcul différentiel et intégral de Lyon créée par le ministre.

536 A Poitiers.

537 Garbe, élève de l'Ecole Normale Supérieure de la promotion 1872.¹¹³⁹

538 Pictaves, peuple de la Gaule établi autour de Pictavi (Poitiers).

539 Lebesgue répond ici à une lettre de Borel du 4 janvier 1907 ; sa lettre doit être du 5 janvier. Voici ce que lui écrivait Borel :

"Paris, le 4,1,1907

Mon cher Lebesgue,

Inclus la copie textuelle d'une note que Schoenflies me demande de faire communiquer à l'Académie [[[185]]]. Voudriez-vous me dire *avant lundi* ce que vous en pensez ?

Je pense que vous voilà acclimatés à Poitiers ; j'espère que vous vous y trouvez bien et vous entendez avec les Drach [[amis de Borel]].

La thèse de Montel a tous les sacrements ; il ne reste qu'à l'imprimer [[Montel soutiendra sa thèse le 25 mai 1907, avec Appell comme président et Painlevé et Borel comme examinateurs]]. Montel va tâcher de se faire nommer à Paris si le décès de Piéron [[élève de l'Ecole Normale Supérieure de la promotion 1866]]. produit un¹¹⁴⁰ mouvement.

Cordialement,

Emile Borel"

540 Schoenflies écrit dans sa note présentée à l'Académie des Sciences de Paris par Appell le 7 janvier 1907 ([185],22) :

Les théorèmes dont il est question ici ont été discutés plusieurs fois dans ces *Comptes Rendus* [[[188],[29],[187],[189]]]. Le théorème de Heine énonce la continuité uniforme d'une fonction continue dans tous les points d'un ensemble fermé et, d'après le théorème de Borel, si pour chaque point d'un ensemble fermé il y a un domaine entourant ce point, on en peut choisir un nombre fini jouissant de la même propriété ; d'ailleurs ce théorème est vrai, que le nombre supposé des domaines soit dénombrable ou non.

On peut dire que le théorème de Borel fixe le fondement géométrique de la démonstration connue de Heine dans sa forme la plus pure et la plus générale. Cette relation intime qui lie les deux théorèmes et leur condition nécessaire et suffisante ont été constatées pour la première fois, au moins essentiellement, dans le rapport sur la théorie des ensembles publié par moi dans le *Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung* [[[47], p.51-52]]. Mais les Notes citées plus haut qui traitent la question ne font aucune allusion à ce rapport ; qu'il me soit donc permis de constater ici le fait historique.

En effet, à la page 51, en disant que le théorème de Borel (dans sa première forme) représente une généralisation du théorème de Heine et en le nommant *théorème de Heine-Borel*, j'ai donné expression à la relation géométrique des deux théorèmes, et aussi à plusieurs endroits j'ai donné clairement expression à la condition nécessaire et suffisante de ces théorèmes, en disant qu'il ne sont vrais que pour des ensembles fermés (p.109,119, 128-129).

En profitant de cette occasion j'ajoute une démonstration générale de ce théorème qui me paraît la plus simple possible et vaut également pour tous les ensembles fermés et bornés de n'importe quel \mathbb{R}_n ; la première partie de cette démonstration est tout à fait conforme à celle contenue dans mon rapport (p.119)."

541 Il parle p.140 de [77] seulement du théorème de Borel, Lebesgue veut se référer ici à sa lettre XL.

542 [186].

543 Cauchy a seulement utilisé implicitement ([175],91) la notion de continuité uniforme pour démontrer en 1823 l'existence de l'intégrale définie d'une fonction continue. C'est Dirichlet qui démontre, dans ses cours sur l'intégration vers les années 1850, qu'une fonction continue sur un intervalle fermé et borné est uniformément continue sur cet intervalle. Il écrit même ([175],93) comme conclusion de sa démonstration :

"Il en résulte que l'intervalle $b-a$ contient seulement un nombre fini de sous-intervalles ayant la propriété exigée,"

Dirichlet était aussi en avance, non seulement sur Heine, mais sur Borel et Lebesgue, car il démontrait que la fonction définie par $f(x) = \sin(x^2)$, qui est continue sur \mathbb{R} , n'y est pas

uniformément continue.

544 Note 1, p.105 de [4].

545 P.103 de [175].

546 [187]. F. Riesz (1880-1950), l'un des grands analystes de ce siècle, comme le reconnaîtra plus tard Lebesgue (voir note 710).

547 [112] ; voir aussi p.306-307 de [99].

Il nous semble intéressant de citer quelques passages du livre de Laurence Young *Mathematicians and their times*, fille de W.H. et G.C. Young.

Lors de sa conférence à l'Institut Henri Poincaré en 1937 elle a été présentée par Lebesgue ([190],258) :

" "Our last speaker", he announced, "is the youngest among us". The auditorium at the Institut Henri Poincaré was packed : the small audience of earlier sessions had suddenly been increased by an influx from a meeting on intellectual cooperation. It was, for me, a big moment ; yet I couldn't help remembering Lebesgue's favourite joke : "We are all of us young - some of us since long ago"."

Voici comment s'est déroulée la visite à l'Exposition Universelle ([190],259) :

"Lebesgue took us straight to the Pavilion of the Wines, where he was a perfect host and a most interesting Chairman."

Ses remarques sur René Baire présentent de l'intérêt, car ses parents ont connu Baire lors de son séjour en Suisse pendant la première guerre mondiale ([190],299) :

"The great René Baire (1874-1932), who devised upper and lower semicontinuity, and who lectured in Paris on discontinuous functions at the Collège de France in the academic year 1903-1904, was relegated to a provincial backwater of a university at Dijon, from which he soon had to retire in an exhausted state, as a possible hostage, like Georg Cantor, to the Conservation of Ignorance,

[[...]]

René Baire was the most original and creative of a small group of Set Theorists, in the first uncertain blooming of the seeds sown by Georg Cantor. Theirs was a comradeship of pioneers, not unlike that of the Bourbaki group some 30 years later in France. It was not without a struggle that their ideas, especially those of Baire, were finally accepted."

Elle écrit encore à ce propos ([190],302) :

"Even so, the work of Zermelo and Erhard Schmidt, important though it was, and the fine work of Hausdorff, do not compare with the extraordinarily fruitful ideas introduced by Baire."

L. Young soulève également le problème de priorité dont parle

Lebesgue dans sa lettre ([190],305) :

"It is quite evident that Borel and Lebesgue were intended by nature to form a famous collaboration like that of Hardy and Littlewood, unfortunately they could not abide one another. Borel's covering theorem, Borel's measure, and the Lebesgue integral should all be considered joint contributions with other names associated as well. A number of people, either "knew it all before", or else "did it much better", or so they imagined. Between my father and Lebesgue, a priority dispute was hardly thinkable : they became close friends, generous to one another. Others, like Osgood, as we shall see, felt differently, but that is another story."⁵⁵¹

548 Nous n'avons pas trouvé trace de cette "petite page" ; on peut lire à ce sujet p.133-135 de [99].

549 L'adresse des vacances de Borel : Saint-Paul-des-Fonds, par Tournemire, Aveyron.

550 Le général R. Bassac, chef du Service Historique de l'Armée de Terre, Château de Vincennes, 94304 Vincennes Cedex, nous écrit le 16 mars 1990 :

"Par votre lettre de référence, vous m'avez demandé des renseignements sur la loi de 2 ans.

J'ai l'honneur de vous faire savoir que la loi de 1905 a été promulguée le 21 mars 1905 et publiée au *Journal Officiel* le 23 mars."

551 L. Young écrit encore à propos du refus, au début de ce siècle, d'accepter "the new concepts" ([190],310) :

"Some places held out rather a long time, and their diehard opposition became rather ridiculous : Norbert Wiener, who liked to boast of the progressive attitude of the Massachusetts Institute of Technology, used to harp on the rejection of the Lebesgue integral at rival Harvard, where a frustrated Osgood saw nothing better than the green grapes of the fable in an integral he had come near discovering himself."

Il nous semble toutefois que le rôle d'Osgood dans le développement de l'analyse moderne est encore aujourd'hui incomplètement étudié. Sur son apport à la théorie de l'intégration voir p,113-115, 118, 128, 149 de [8].

552 Voir p.106 de [175].

553 L.A. Lyusternik note ([191],138) que A.M. Lyapunov a démontré en 1896 l'égalité de Parseval pour les fonctions de carré Riemann-intégrables ; voir aussi [192], p.187.⁵⁷¹

554 [47].

555 E. Blutel, né en 1862, inspecteur général de l'enseignement

secondaire. L. Raffy était secrétaire et Blutel membre du Conseil de la Société Mathématique de France.

Signalons qu'à la séance du 13 novembre 1907 (BSMF, 36(1908), 1) Paul Lévy a été élu, "à l'unanimité", membre de la Société, présenté par Blutel et par son père Lucien Lévy. Blutel avait été en 1904 le professeur de P. Lévy à Saint Louis ([447], 29).

556 L. Raffy était encore secrétaire de la SMF au début de l'année 1909 (BSMF, 37(1909), V).

557 Il existe près de 35 lettres de Molk à Borel dans la correspondance de Borel conservée à l'Institut Henri Poincaré entre les 17 décembre 1903 et 11 mars 1914.

J. Molk est mort à Nancy en 1914 et il nous a été impossible de retrouver ses archives concernant l'*Encyclopédie*. Une partie de ces archives doit se trouver encore, avec des manuscrits inédits probablement, chez Gauthier-Villars, dont les archives sont actuellement inaccessibles et, vraisemblablement, dans les archives de Teubner qui se trouvent actuellement, semble-t-il, à Heidelberg et qui viennent d'être ouverts au public.

558 A. Thybaut (1870-1958), professeur au lycée Henri IV.

A. Tresse, né en 1868, professeur au Collège Rollin à Paris.

G. Fontené (1848-1923), inspecteur général de l'enseignement secondaire.

559 Tresse a été élu membre du Conseil de la Société Mathématique de France.

560 Nous avons écrit à J. Mawhin, éditeur des "Oeuvres" de la Vallée-Poussin, pour lui demander des éclaircissements sur ce point.⁶¹³

561 Voir [194] et p.280 de [68].

562 Voir la note [193] présentée par Poincaré, ainsi que les § 5, *The expressions of de Geöcze*, et § 6, *Integrals of the expressions of Geöcze*, p.171-177 de [194] (le livre de Saks, traduit en anglais par L. Young, fille de W.H. Young). Toute cette lettre porte sur [193] et la thèse qui devait l'accompagner : la thèse a été publiée en 1910 en Hongrie (p.334 de [194]), en français. Sur l'insuffisance de la théorie de Lebesgue des aires de surfaces, voir p.163-164 de [194].⁵⁹⁵

563 Voir p.86 de [175].

564 Collaborateurs de l'édition française de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*.

565 P.227-239 de [195].

566 Dans le tome II, volume 1, paraîtra en 1912 la section II.2 :

Recherches contemporaines sur la théorie des fonctions, rédigé sous la direction de E. Borel.

L. Zoretti, *Les ensembles de points*, p.113-170,

P. Montel, *Intégration et dérivation*, p.171-209,

M. Fréchet, *Développements en séries*, p.210-241.

567 [196].

568 Probablement sur la couverture de la revue, comme on peut trouver des renseignements intéressants sur les couvertures de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, en particulier sur l'exemplaire qui se trouve à l'Institut Henri Poincaré à Paris.

569 10 février 1908 (cachet de la poste).

570 Lebesgue y écrit aussi ([99],132) :

"Ce qui me paraît le plus caractéristique c'est le chapitre sur la mesure. On trouve là un petit historique contenant les noms de Riemann, Smith, Hankel, Cantor et ceux-là seuls. On sera sans doute étonné de ne pas voir citer M. Jordan, mais le plus étonnant c'est que l'historique n'est relatif qu'aux définitions qui ne sont pas adoptées et que le lecteur peut ignorer à qui est due la théorie actuelle, car M. Borel n'est jamais cité dans les 45 pages de ce chapitre. Sans doute, M. Borel n'a pas parachevé la théorie, mais il en a donné les fondements ; il m'a été facile, quand j'en ai eu besoin, de compléter et de mettre au point la théorie ébauchée par M. Borel."

571 J. Mawhin a bien voulu nous envoyer la *Note sur quelques applications de l'intégrale de Poisson* de C. de la Vallée Poussin de 1893, extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t.XVI, 2^e partie, p.1-16, où il démontre le même résultat.⁶¹²

572 La seule trace de ce "rapport" de Poincaré (CRAS, 141(1905) : 1140) que nous avons trouvée dans les Archives de l'Académie des Sciences de Paris figure dans le *Comité secret 5 janvier 1903 - 24 juin 1912*, p.107, à la date du 30 octobre 1905 :

"Au nom de la commission du prix Petit d'Ormay, Sciences mathématiques M. Poincaré propose de décerner le prix à M. Emile Borel, pour l'ensemble de ses travaux mathématiques.

Cette proposition mise aux voix est adoptée par l'Académie."

573 Molk avait écrit à Borel le 25 janvier 1908 pour lui demander "quelques conseils au sujet de la distribution des articles concernant la théorie des fonctions d'une ou plusieurs variables réelles", et,

en particulier, de "prendre la direction de ce plan général et de cette distribution de chapitres de la théorie des fonctions de variables réelles". A la suite de cette demande, Borel adresse le 30 janvier une lettre circulaire à P. Boutroux, Fréchet, Lebesgue, Montel, Zoretti et Baire, en précisant qu'il est disposé, "en principe, à accéder au désir" de Molk - et nous sommes étonné par l'activité protéiforme de Borel - car "il y a à sa réalisation un intérêt scientifique et un intérêt français", et demandant aux destinataires de lui faire "toutes les suggestions qui peuvent être utiles".

574 Borel avait proposé Montel comme "secrétaire" du comité de rédaction.

575 La note et son complément de E. Cartan [197] ont été publiés dans les *Comptes Rendus* des 30 décembre 1907 et 21 janvier 1908.

Il est intéressant de noter que E. Cartan ne cite pas Lebesgue, par contre il mentionne ([197], 11) les *Leçons* de Baire où celui-ci traite ([198], 210) de l'aire d'une surface courbe, sans y nommer également Lebesgue.⁹⁰⁰

E. Cartan écrivait le 21 janvier 1908 :

"Je demande à l'Académie la permission d'ajouter un mot à une Note, que j'ai eu l'honneur de présenter le 30 décembre dernier, sur les difficultés que soulève la définition, autrefois classique, de l'aire d'une portion de surface courbe comme limite de l'aire d'une surface polyédrale à faces triangulaires inscrite dans cette surface courbe, sur la manière dont on peut lever ces difficultés et sur un essai de définition de l'aire d'une surface courbe n'admettant pas de plans tangents. On m'a fait remarquer, depuis que la Note a paru, que les difficultés en question avaient déjà été signalées par M. Schwarz, en particulier dans une communication faite à Hermite en 1882. M. Schwarz donne l'exemple, presque identique à celui que j'indique dans ma Note, d'une surface polyédrale inscrite dans un cylindre de révolution (au lieu d'une sphère), et dont l'aire augmente indéfiniment quand les dimensions des faces tendent vers zéro."

La "communication" de Schwarz ([199], 309-311) *Sur une définition erronée de l'aire d'une surface courbe* a été d'abord publiée dans le *Cours* de C. Hermite, professé pendant le second semestre 1881-1882, 2^e édition, Paris (Hermann), 1883, p. 35-36.

Il s'agit de la définition suivante donnée par J.A. Serret dans son *Cours de calcul différentiel et intégral* ([200], 293) :

"Soit une portion de surface courbe terminée par un contour C ; nous nommerons aire de cette surface la limite S vers laquelle tend l'aire d'une surface polyédrale inscrite formée de faces

triangulaires et terminée par un contour polygonal Γ ayant pour limite le contour C ."

Et Serret précise :

"Il faut démontrer que la limite S existe et qu'elle est indépendante de la loi suivant laquelle décroissent les faces de la surface polyédrale inscrite."

Schwarz écrivait à Hermite ([199], 309) :

"Si l'on voulait examiner la démonstration de cet énoncé essayée par l'illustre savant, on trouverait qu'elle donne lieu à des objections sérieuses, mais il n'est pas nécessaire de faire cet examen. On pourra démontrer, au contraire, que, si la surface donnée est une surface courbe et si le polyèdre inscrit n'est pas assujéti à certaines conditions additionnelles et restrictives (par exemple, que chaque face du polyèdre fasse un angle infiniment petit avec le plan tangent de la surface en un point infiniment voisin de cette face), *l'aire de la surface du polyèdre inscrit peut surpasser une quantité donnée.*"

576 Voir [201]. En 1913, Lebesgue revient sur cette question dans [202] en faisant des observations sur une communication de Z. de Geöcze.

577 Voir [203] et les lettres XVII et XXXVIII.

La correspondance a débuté à propos de l'article [204] de Landau, suivi d'*Extrait d'une lettre à M. E. Landau* ([156]) du 24 février 1908. Nous signalons également le commentaire de [204] p.84 de [205]. La lettre [156] de Lebesgue annonce son mémoire fondamental [206] sur les intégrales singulières⁶⁸⁵.

578 Cette lettre écrite sur papier à en-tête^{du} *Prytanée militaire* indique qu'on doit la situer au moment du concours de l'Ecole de Saint-Cyr, probablement en juillet 1908.

579 E. Esclangon (1876-1954), astronome et physicien, élève de l'Ecole Normale Supérieure de la promotion 1895, astronome à Bordeaux.

J. Mascart (1872-1935), E.N.S. 1891, aide astronome puis astronome adjoint à l'Observatoire de Paris (1900-1912), est nommé en 1912 directeur de l'Observatoire de Lyon.

580 Lebesgue faisait probablement allusion au fait que J. Mascart était le fils de E. Mascart (1837-1908), membre de l'Académie des Sciences, professeur au Collège de France, physicien. (Voir note 369).

581 Il s'agit peut-être de [207].

582 A. Paraf (1861-1911), professeur de mathématiques à l'Université de Toulouse.

583 H. Padé (1863-1953)¹¹⁴¹.

584 Bernard, ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure de la promotion 1894, (Voir notes 483 et 851).

- 585 P. Cousin (1867-1933), maître de conférences à Bordeaux, ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure de la promotion 1886.
- 586 C. Pérez (1873-1952), E.N.S. 1895, zoologiste, professeur à Bordeaux puis à Paris en 1909, élu à l'Académie des Sciences en 1935.
- 587 E. Delassus (1868-1926), professeur de mathématiques à l'Université de Toulouse, ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure de la promotion 1886.¹¹⁴²
- 588 Ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure de la promotion 1887.¹¹⁴³
- 589 Nous situons cette lettre au début de décembre 1908.
- 590 Allusion aux pages 1271-1272 de [207].
- 591 [145].¹¹⁴⁴
- 592 J. Dieudonné écrit ([208], 95) :

"Cartan was one of the most profound mathematicians of the last hundred years, and his influence is still one of the most decisive in the development of modern mathematics."¹¹¹⁹

- 593 Borel écrit ([84], 1079) :

"Il existe certainement (si ce n'est point un abus d'employer ici le verbe *exister*) dans le continu géométrique des éléments qui ne peuvent pas être définis : tel est le sens réel de l'importante et célèbre proposition de M. Georg Cantor : le continu n'est pas dénombrable."

(1874-1942)

- 594 R. d'Adhémar était un disciple de E. Le Roy (1870-1954) (voir [209]). Il était professeur à la Faculté des Sciences de l'Univ. cath. de Lille.
- 595 Z. de Geöcze a passé une thèse de doctorat d'université à Paris ([210]) en 1909.

- 596 P.14-15 de [5]. Le point de vue de Borel sur cette question a changé en 1908 : voir [207] et [213].

- 597 P.1066 de [84]. Voir sur cette question [211], où Faber écrit⁶⁴⁵ (p.400) :

"L'ensemble des points, pour lequel $\overline{\lim} \frac{v_n}{u_n}$ est différent de 1, est de mesure nulle.

[[u_n est le nombre de 0 dans le développement dyadique, v_n le nombre de 1, d'un nombre réel de $[0,1]$.]]

Ce théorème me paraît intéressant à plusieurs points de vue.

Il donne, d'abord, un exemple simple d'un ensemble qui est non seulement partout dense mais en outre, quel que soit un intervalle, aussi petit que l'on veut, il a la puissance du continu et malgré cela il est de mesure nulle.

Peu après que Monsieur Borel a élaboré les définitions appropriées sur la probabilité d'un ensemble dénombrable d'objets [[[84]]], il a démontré que la probabilité pour qu'un point appartienne à l'ensemble ci-dessus est égale à zéro. La comparaison du théorème précédent avec le résultat de Borel suggère la question :

La probabilité - d'après la définition de Borel, qui devrait éventuellement être élargie pour répondre à cette question - qu'un nombre appartienne à un ensemble donné de mesure nulle est-elle toujours égale à zéro ? Et réciproquement : un ensemble est-il toujours de mesure nulle, si la probabilité pour qu'un point lui appartienne est nulle ?"

Ce point n'a été élucidé de façon complète que dans [212].

Voir aussi sur cette question p.419-422 de [16].

598 Il nous semble intéressant de signaler l'article de H. Steinhaus *Résolution d'une question de M. Fatou* (Krak. Anz., 1918, 69-71).

599 Sur les définitions de "simplement", "entièrement" et "absolument normal" voir p.1068-1069 de [84]. Borel y écrit :

"Dans l'état actuel de la science, la détermination effective d'un nombre absolument normal paraît un problème des plus difficiles : il serait intéressant, soit de le résoudre en construisant un nombre absolument normal, ou en montrant qu'un nombre irrationnel connu est absolument normal, soit de démontrer que, parmi les nombres pouvant être réellement définis, aucun n'est absolument normal : si paradoxal que paraisse cet énoncé, il n'est nullement incompatible avec le fait que la probabilité pour qu'un nombre soit absolument normal est égale à l'unité."

Cette "détermination effective" a été faite en 1917 par Sierpinski ([214])⁶¹⁴.

600 H. Lebesgue a développé cette démonstration dans [215], à la suite de l'article [214]. Il écrit dans ce mémoire, publié après sa polémique avec Borel dont nous parlerons plus loin ([215], 279) :

"Dans une lettre, adressée à M. Borel, et qui accompagnait l'envoi de l'article précédent, M. Sierpinski se demandait si cet article devait être publié, s'il ne ferait pas double emploi avec une démonstration que j'avais indiquée à M. Borel et que celui-ci a signalée dans la deuxième édition de ses *Leçons sur la théorie des fonctions* (p.198).

Comme on va le voir, les deux articles, loin de faire double emploi, se complètent : ce qui est traité un peu trop rapidement dans l'un est complètement traité dans l'autre et inversement.

Le présent article avait été écrit en 1909, à la demande de M. Borel, pour être mis en note d'un de ses ouvrages. M. Borel n'a pu le publier à l'époque."

Notons que la lettre de Sierpinski ne se trouve pas dans la correspondance de Borel conservée à l'Institut Henri Poincaré. Il

est probable que Borel avait envoyé cette lettre à Lebesgue.

Lebesgue écrit ensuite ([215], 280-281) :

"Voici ma thèse : si l'on a pu démontrer que le complémentaire $B [B=(0-1)-A]$ d'un ensemble A , formé de nombres compris entre 0 et 1, est de mesure inférieure à 1, de la démonstration même on peut déduire la définition d'un nombre de A .

Bien entendu la démonstration ne saurait résulter de l'écriture des lettres A et B , il faut connaître sur A autre chose que son nom A ; mais si A est donné par ses propriétés caractéristiques et si, de ces propriétés, on a déduit logiquement la preuve que la mesure de B est inférieure à 1, on est dans le cas que je considère.

C'est la légitimation de cette affirmation générale qui est la partie principale de ma note. Je l'applique ensuite aux nombres absolument normaux, mais sans préciser aussi nettement que M. Sierpinski la preuve que la mesure de l'ensemble de ces nombres est égale à 1. J'avais cependant repris cette démonstration, parce que le raisonnement de M. Borel prêtait à quelques objections à cause de l'emploi de probabilités dont l'indépendance n'est pas évidente (c'est à l'occasion d'observations analogues (Bernstein, *Math. Ann.*, Band 71; Borel, *Math. Ann.*, Band 72 [[p.430 de [217], [218] et [219]]]) que cet article a été recherché dans les papiers de M. Borel), et surtout pour avoir une fois de plus, et dans un cas un peu plus compliqué, l'occasion d'appliquer les procédés qui m'avaient déjà servi dans mes *Leçons sur l'intégration* et dans mon mémoire du *Journal des Mathématiques* [[[77]]], pour prouver que certains ensembles sont mesurables B . Ces procédés, bien connus aujourd'hui, étaient encore nouveaux alors. Il convient de rappeler que la seule fois où, dans ses *Leçons sur la théorie des fonctions*, M. Borel rencontre l'occasion d'appliquer ses idées sur la mesure à la solution d'une question de la théorie des fonctions, il ne peut affirmer que l'ensemble étudié est bien mesurable B (page 67, note 1). C'est dans une note de 1904 [[[12]]] et dans mon mémoire de 1905 [[[77]]] que j'ai fixé la portée, tout à fait insoupçonnée alors, de la notion d'ensemble mesurable B ."

Borel a publié l'article [84] comme note V dans la deuxième édition de ses *Leçons* où il écrit seulement en note ([216], 2^e éd., 198) :

"Depuis que ceci a été écrit, M. Lebesgue m'a indiqué une méthode pour définir un nombre absolument normal."

601 Il s'agit peut-être de [220].

602 P.1274 de [207], Borel introduit la notion d'ensemble "effectivement énumérable". Il reprendra ce concept en 1919 dans [221]. On peut considérer qu'il s'agit là d'une des premières introductions de la notion moderne d'algorithme.⁶⁷⁰

603 Voir p.281 de [215].

604 Voir la note 597. Il est intéressant de noter la difficulté que cette question représentait à l'époque.

- 605 Voir p.282 et 285 de [215].
- 606 Directeur des *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*.
- 607 Il semble que Borel voulait que Lebesgue publie une note sur cette question dans les *Rendiconti*, note parue finalement en 1917.
- 608 Voir [222] et p.179-182 de [8].⁷¹⁰ (Voir lettre suivante).
- 609 Voir P.J.71 de [222].⁶⁴⁴
- 610 Cette lettre forme le début des réflexions de Lebesgue sur la théorie de la dérivation qu'il développera dans [138], ainsi que dans [223] et qui complète ses premiers travaux ([4],[10]).
- 611 F. Masson (1847-1923), historien de Napoléon et de sa famille.

C. de Pomairols (1843-1916), romancier et poète ; il n'est pas devenu membre de l'Académie Française.

F. Masson disait dans son discours du 28 janvier 1909 ([224], 1-2) :

d'autant "Lorsque vous avez sollicité d'être admis dans notre Compagnie, vous faisiez déjà partie de trente-cinq Académies. Elles vous avaient spontanément recherché ou elle vous avaient accueilli avec un empressement marqué. Où que vous alliez dans le monde, vous êtes assuré de trouver des confrères qui s'honorent plus de célébrer votre venue qu'ils en reçoivent l'apparence d'avoir compris vos travaux. En France, vous êtes "le Maître" pour quiconque participe aux études mathématiques ; vous présentez dans notre pays l'unique exemple d'une supériorité unanimement reconnue, et votre réputation, formée dès vos débuts par vos camarades de l'Ecole Polytechnique, soutenue par vos collègues de la Sorbonne, répandue par vos confrères de l'Académie des Sciences, proclamée plébiscitairement par les savants de l'Europe entière, s'est établie comme un axiome ; celui-là, Monsieur, vous ne le contesterez pas.

Ainsi porté par les suffrages de tous ceux qui étaient dignes de vous entendre, vous vous êtes présenté à nous. L'Académie n'a sur une oeuvre telle que la vôtre aucune juridiction ; mais par une tradition plus que trois fois séculaire, à chaque fois que, dans l'Académie des Sciences sa soeur cadette et son émule, elle a vu s'élever un homme d'un mérite exceptionnel, qui fût en quelque sorte désigné par le suffrage de ses pairs, elle a désiré se l'adjoindre, non seulement parce qu'elle tient à honneur de rester ouverte à toutes les illustrations nationales, mais parce qu'il lui importe de s'assurer l'active collaboration de savants prêts à l'éclairer sur la signification et l'usage des mots que les sciences naturelles, physiques et mathématiques fournissent à la langue. L'évolution que cette langue subit depuis trois quarts de siècle pour acquérir des mots correspondants à des connaissances nouvelles lui rend l'accession d'hommes de science plus désirable qu'elle ne fut jamais."

Que "l'ensemble des travaux de Poincaré" soit "de la culture primaire" est une lecture un peu personnelle de Lebesgue, due

peut-être au résumé de son journal, car Masson est extrêmement élogieux pour l'oeuvre scientifique de Poincaré.

Voici la conclusion de Masson telle qu'elle figure dans le livre de Lebon sur Poincaré ([224], 13-14) :

"Lorsque vous entreprenez la critique de la Science même, vous en faites votre personnelle affaire, et, sans adopter aucune tradition, sans vous plier à aucune formule, vous marchez dans votre indépendance et parce qu'il plaît ainsi à votre esprit. Vous le laissez même courir, et si vite, et par de tels bonds, qu'il faut pour le suivre combler les vides et remplir les intervalles ; mais vous êtes ainsi. Original en mathématiques, vous le restez en cette branche de la philosophie ; vous y appliquez, en même temps, un goût développé pour la psychologie, une aptitude rare à observer sur vous-même les phénomènes physiologiques, et cette habitude du travail mathématique qui organise la précision et, en décuplant la subtilité, relie les arguments par des chaînes qui semblent imbrisables. N'étant arrêté par rien que vous acceptiez de confiance et *a priori*, vous élevez votre doute en face de cette science officielle et vous en sondez le néant. Ainsi votre oeuvre est double : par les mathématiques, vous dressez à la vérité scientifique un temple accessible seulement à quelques rares initiés, et, par vos engins philosophiques, vous faites sauter les chapelles autour desquelles s'attroupent, pour célébrer les mystères d'une prétendue religion de la science, des foules rationalistes et libérées qui, par un certificat d'études primaires, ont acquis le droit de ne croire à rien qui ne leur ait été démontré. Ah ! Monsieur, quel massacre vous faites dans ces démonstrations ! Rien n'échapperait à la rudesse des coups que vous portez, si, de temps à autre, vous ne vous arrêtiez pour vous gausser de vos victimes ou si, pris d'une sorte de remords, vous ne vous amusiez à paraître recoller les membres que vous avez brisés. Les axiomes que la sagesse des âges semblait avoir posés ne sont plus, où vous avez passé, que des définitions ; les lois, que des hypothèses, et de ces hypothèses, en même temps que le rôle essentiel, vous prouvez la médiocre durée, comme de ces définitions, en même temps que la commodité, la fragilité. Que reste-t-il ? Rien ou si peu que rien, et les plus précieuses idoles de la religion primaire s'en vont, dans des cieux dépeuplés, rejoindre les astres éteints.

Est-ce à dire, Monsieur, que vous doutiez plus de la Science que de la Vérité ? Ni de l'une ni de l'autre : mais celle-ci s'éloigne constamment devant celle-là et, à proportion que l'homme franchit une étape, les espaces qu'il devra parcourir reculent devant lui ; par delà la steppe dont son regard embrasse l'étendue, d'autres l'attendent, et toujours d'autres, car celui-là seul est assuré d'arriver à son but qui en est resté au rudiment et qui l'a appris par coeur"

612 J. Mawhin précise dans sa lettre du 12 avril 1990 que de La Vallée Poussin prouve l'égalité de Parseval "pour les fonctions Riemann-intégrables et pour les fonctions dont le carré est *improprement* intégrable au sens de Riemann".

613 J. Mawhin nous écrit le 12 avril 1990 :

"Quant à la définition dont parle Lebesgue dans la lettre CII, c'est la définition d'intégrale impropre ou généralisée d'une fonction non bornée par troncature de la fonction suivie d'un passage à la limite. Une telle définition apparaît pour la première fois dans le mémoire de La Vallée Poussin intitulé *Recherches sur la convergence des intégrales définies*, Journal de Mathématiques pures et appliquées (4) 8 (1892), 421-467 au chapitre I p.427, et constitue dans ce travail une notion d'*intégrabilité impropre absolue* dans le cadre de l'extension usuelle de l'intégrale de Riemann aux fonctions non bornées sur un intervalle borné (ce que de La Vallée Poussin appelle la propriété de *convergence absolue*). Cette définition est étendue, p.432, au cas des intégrales doubles, et c'est probablement cette situation qui a servi de motivation, puisque la définition de l'intégrale multiple impropre est plus délicate que celle d'intégrale simple impropre. La Vallée Poussin y revient dans son mémoire *Réduction des intégrales multiples généralisées*, Journal de mathématiques pures et appliquées (5) 5 (1899), 191-204.

Ce doit être à ces articles que se réfère Lebesgue en 1907, puisque je n'ai pas trouvé trace d'une définition semblable avant la *deuxième édition du tome I de Cours d'analyse infinitésimale* de La Vallée Poussin (Uystpruyst-Dieudonné, Louvain et Gauthier-Villars, Paris) publiée en 1909 et qui est la première des éditions de ce cours qui contient l'intégrale de Lebesgue. A la page 260, dans une section consacrée à l'extension de la définition d'intégrabilité-Lebesgue aux fonctions non bornées, La Vallée Poussin, après avoir rappelé l'approche classique de Lebesgue, poursuit : "On peut donner une seconde définition de l'intégrale, équivalente à la précédente : Soient p, q deux nombres positifs, si f est sommable dans F , son intégrale dans F sera la limite de son intégrale dans l'ensemble $E(p > \epsilon > -q)$ contenu dans F , quand p et q tendent arbitrairement vers l'infini. Réciproquement, si cette limite existe, f est sommable." La démonstration suit. Dans le tome 2 de cette même deuxième édition, publié en 1912, La Vallée Poussin revient sur ce procédé, p.67, dans la section "Nouvelle définition des intégrales généralisées élémentaires de fonctions positives" du chapitre II "Intégrales généralisées et fonctions d'un paramètre. Intégrales des différentielles totales exactes", le cas d'une intégrale double étant traité p.70. En outre, la même approche est utilisée pour définir l'intégrale multiple de Lebesgue d'une fonction non bornée au paragraphe 95, p.108. Le tome I de la troisième édition du *Cours d'analyse infinitésimale*, publié en 1914, ne définit plus l'intégrale de Lebesgue d'une fonction non bornée d'une variable qu'à partir de cette méthode de troncature (l'approche de Lebesgue n'est plus mentionnée) (cf. section 268, p.240), et il en est de même pour l'intégrale multiple dans les épreuves d'imprimerie inédites qui ont survécu à l'incendie à Louvain, chez l'imprimeur, à l'aube de la première guerre mondiale, de la troisième édition du tome II. L'intégrale de Lebesgue disparaît du *Cours d'analyse infinitésimale* à partir de la quatrième édition de 1922, mais la définition de La Vallée Poussin subsiste, dans le chapitre "Intégrales généralisées et fonctions d'un paramètre", dans une section intitulée "Nouvelle définition des intégrales généralisées élémentaires de fonctions positives". Il en sera ainsi jusqu'à la dernière (neuvième) édition du tome II de 1957, écrite en collaboration avec F. Simonart.

Pour en revenir aux articles, on retrouve la technique de

troncature, cette fois dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue, dans l'article *Réduction des intégrales doubles de Lebesgue. Application à la définition des fonctions analytiques*, Bull. Académie Royale de Belgique, Classe des sciences, (4) 12 (1911) 119-211, p.783-789, et dans l'article *Sur l'intégrale de Lebesgue*, Transactions of the American Mathematical Society 16 (1915) 435-501, p.444, à nouveau pour définir l'intégrale de Lebesgue d'une fonction non négative, mesurable et non bornée. Enfin, la même approche est utilisée, dans le même but, dans l'ouvrage *Intégrales de Lebesgue. Fonction d'ensemble. Classes de Baire*, Gauthier-Villars, Paris, 1916, p.45, et dans la deuxième édition de 1934, p.50.

On voit donc que cette technique a sans cesse joué un rôle dans les travaux de La Vallée Poussin consacrés à l'intégration. I.N. Pesin, dans son *Classical and Modern Integration Theories*, Academic Press, New York, 1970, y consacre d'ailleurs la section 2.7 de son chapitre 2, sous le titre *De La Vallée Poussin's integral* (p.21-23), ainsi que la section 2.9 (*Relationships between H- and (V-P)-integrals*, p.26-28). T. Hawkins, dans son *Lebesgue's Theory of Integration*, Chelsea, New York, 1975, mentionne aussi l'article de 1892 et la définition de La Vallée Poussin p.155."

614 Borel écrit dans la quatrième édition de [216], p.196⁶⁴⁰

"Depuis que ceci a été écrit, Lebesgue a indiqué une méthode pour "définir" un nombre absolument normal. Mais on peut discuter la question de savoir si ce nombre est bien défini."

Cette remarque s'applique évidemment aussi à la "détermination effective" de Sierpinski. Il ne semble pas qu'on sache actuellement "définir" explicitement un seul nombre absolument normal. En revanche, on connaît des nombres normaux qu'on sait écrire explicitement, en base 10 par exemple : le nombre de Champernowne 0,1234567891011... ([225]) ou le nombre de Copeland et Erdős 0,2357... , où intervient la suite de tous les nombres premiers ([226]). (Voir p.206).

Depuis Borel, on a trouvé d'autres exemples de ce fait "paradoxal", à savoir des ensembles de nombres ayant la mesure 1 et dont on ne connaît aucun exemple explicite.

615 Sophie Piccard avait commencé à préparer une biographie scientifique de Paul Montel, en se basant sur les papiers déposés aux Archives de l'Académie des Sciences de Paris. Nous ne savons rien sur l'achèvement de ce travail,

616 Borel a également suivi le cours de Lebesgue au Collège de France de 1903 ([227], 257),

617 Voir p.108-109 de [4],

618 Il semble que Borel pensait que Stieltjes avait eu déjà l'idée de la mesure,

619 [166].

620 Cette lettre a été écrite avant le 25 février 1909.

621 Borel écrit dans la *Revue générale des Sciences* du 15 avril 1909 ([228], 1291) :

"La définition de la mesure a été donnée par G. Cantor pour les ensembles fermés ; son extension pure et simple aux ensembles non fermés conduisait à des résultats non satisfaisants ; on a universellement adopté aujourd'hui la définition à laquelle j'ai été conduit par l'étude de problèmes particuliers et que M. Henri Lebesgue a systématisée. (Voir, dans mes *Leçons sur la théorie des fonctions*, le chapitre sur les ensembles mesurables et les *Leçons sur l'intégration* de M. Lebesgue.)"

Après avoir indiqué les principes de sa théorie de la mesure, Borel ajoute (p.1293-1294) :

"A cette théorie de la mesure, on peut rattacher la théorie nouvelle de l'intégration due à M. Henri Lebesgue. Nous y reviendront tout à l'heure, mais je tiens à me hâter de dire que ce n'est point là une de ces généralisations faciles, conséquence nécessaire des travaux antérieurs et qui doivent nécessairement être trouvées par quelqu'un. Cette théorie de l'intégration est une découverte capitale, dont l'importance dépasse de beaucoup la théorie de la mesure des ensembles ; c'est un instrument analytique nouveau, mis à la disposition des géomètres par M. Lebesgue ; nous indiquerons plus loin quelques-uns des progrès qui ont pu être réalisés jusqu'ici grâce à cet instrument ; il y a tout lieu de croire que leur nombre et leur importance ne cesseront de croître, mais on peut dès à présent considérer cette découverte de M. Lebesgue comme le plus bel exemple de progrès importants réalisés dans la théorie des fonctions et qui ne l'auraient pas été, du moins en ce moment et sous cette forme, si la théorie des ensembles n'avait jamais été cultivée pour elle-même."

522 Voir la note 590.

623 Prix Vaillant de l'Académie des Sciences, Hadamard écrit dans son mémoire ([229], 590-591) :

"Mais le procédé que nous voudrions indiquer ici diffère de ceux de M. Hilbert sous un autre point de vue qui nous paraît important.

Toutes les "démonstrations d'existence" qui figurent dans les différents chapitres du calcul intégral sont, avant tout, des méthodes théoriques. Elles fournissent toutefois, en général, une expression du résultat cherché. Seulement cette expression est plus ou moins compliquée, et leur but n'est pas de la simplifier.

Les méthodes de M. Hilbert occupent, à cet égard, une place à part. Elles se bornent strictement à la définition et à l'existence de la solution ; elles ne recherchent, pour calculer effectivement l'objet ainsi défini, aucun moyen, si pénible soit-il. (Il résulte même de cette particularité, comme l'a fait remarquer récemment M. Carathéodory, que les méthodes de M. Hilbert doivent être considérées comme inexistantes par les géomètres qui partagent, sur l'"existence" en mathématiques, les idées de MM. Borel, Lebesgue, Baire. Elles tombent sous le coup des critiques adressées,

à ce point de vue, à la démonstration connue de M. Zermelo par les géomètres que nous venons de citer.)"

624 Il s'agit de la note d'Hadamard publié dans *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, tome XV (1908), p.222 :

"M. J. Hadamard signale "les lacunes graves que renferme la démonstration par laquelle Cauchy a voulu établir le théorème sur l'égalité des polyèdres convexes : *Deux polyèdres convexes qui ont les faces égales chacune à chacune et assemblés de la même façon sont égaux ou symétriques*". M. Hadamard ajoute : "L'avenir montrera sans doute qu'il n'y a pas erreur à proprement parler, en ce sens que le théorème est probablement exact. Mais, jusqu'à présent, on ne doit point le considérer comme démontré, et la réfection de cette démonstration serait une tâche digne de tenter les chercheurs."

Lebesgue a répondu à cette question dans [230].

625 Il s'agit peut-être d'une remarque ironique de Lebesgue à propos de l'article [231] de Borel publié par *Scientia*.⁶⁴¹

626 Lettre écrite peu avant le 25 avril.

627 A cette lettre est jointe la lettre suivante :

"Poitiers, le 25 avril 1909

Monsieur le Doyen,

Il est certain maintenant que la candidature de mon collègue Cartan sera soutenue par tous les professeurs de mathématiques de la Sorbonne. Dans ces conditions, il me paraît tout naturel de retirer ma candidature devant la sienne, et cela aura l'avantage de dispenser l'un des professeurs de la Sorbonne de faire un rapport sur moi.

Je vous prie donc de ne plus me considérer comme candidat à la succession de M. Hadamard et je vous prie de croire à mes sentiments respectueusement dévoués.

H, Lebesgue"

Sur cette lettre est marqué "Vu Dx" (Darboux) et "Transmettre M. Borel" : c'est pourquoi probablement cette lettre figure dans la correspondance de Borel.

628 Cette lettre doit être du 27 avril.

629 Voir la note 575.

630 C'est Hermite, né en 1822, qui la démontre dans [232].

531 B. Riemann (1826-1866) a soutenu sa thèse [56] en 1851.

632 C.F. Gauss (1777-1855) publie [233] en 1801. Notons qu'il publie en 1827 *Disquisitiones circa superficies curvas*.

- 633 I. Fredholm (1866-1927) développe "son très important résultat" à partir de 1900 (voir p.VIII et 61 de [141]).
- 634 V. Volterra (1860-1940) publie des recherches voisines dans [234].
- 635 J. Hadamard (1865-1963).
- 636 Voir p.133-139 de [235].
- 637 Borel écrit à propos de la "méthode" de Poincaré (1854-1912) ([236], 2219-2220) :

"Si l'on doit renoncer à rendre accessibles les résultats des recherches par lesquelles M. Poincaré s'est classé à côté des cinq ou six grands mathématiciens du XIX^e siècle et au premier rang des mathématiciens du XX^e siècle, il n'en est peut-être de même pour la méthode employée dans ces recherches. Je voudrais essayer de caractériser brièvement cette méthode ; la tentative n'est pas indiscrete, car M. Poincaré n'a jamais cherché à dissimuler les démarches de son esprit.

La méthode de M. Poincaré est essentiellement active et constructive ; il s'attaque à une question, se met au courant de son état actuel sans s'inquiéter outre mesure de son histoire, trouve immédiatement les nouvelles formules analytiques par lesquelles la question peut avancer, rédige hâtivement les résultats essentiels et ... passe à une autre question. Il assure qu'après avoir achevé la rédaction d'un mémoire, il s'aperçoit toujours comment l'exposition pourrait être améliorée ; mais il ne lui vient pas un seul instant l'idée de consacrer quelques jours à cette besogne didactique ; ces journées seront mieux utilisées pour des découvertes nouvelles."

Borel répond dans cet article au discours de F. Masson (voir la note 611) ([236], 2220-2221) :

"Il serait peut-être intéressant de rechercher dans quelle mesure cette méthode de travail a pu influencer sur la philosophie de M. Poincaré ; les hommes d'action ont généralement un grand mépris des individus qu'ils pétrissent à leur gré ; de même, l'homme habitué à voir les formules se soumettre aux conceptions de son esprit peut être tenté de ne pas leur attribuer une valeur absolue supérieure à son jugement individuel. Je me contente de signaler l'intérêt qu'il pourrait y avoir à envisager à ce point de vue les conceptions philosophiques de M. Poincaré : leur portée véritable serait peut-être mieux comprise.

On a voulu y voir, je ne sais quelle réfutation au nom de la science de toute conception rationnelle et positive, comme s'il n'était pas contradictoire de condamner au nom de la science la base même de toute science. Récemment, dans une cérémonie académique et mondaine, un historien, après s'être vanté de n'avoir jamais compris les premiers éléments des mathématiques, a qualifié de "primaires" ceux qui n'interprètent pas comme lui les idées de M. Poincaré ; sans réfléchir que, pour les comprendre, il lui manquait bien des connaissances indispensables, y compris peut-être celles qu'on acquiert dans l'enseignement primaire. Comme cet historien, certaines personnes se refusent à admettre que la connaissance des éléments des sciences soit indispensable pour parler de "philosophie scientifique" ; elles préfèrent traiter avec mépris ceux qui

attachent quelque importance à l'acquisition de ces éléments."

- 638 Lebesgue est né le 28 juin 1875.
- 639 Lebesgue doit penser à C. Hermite (1822-1901) qui écrit en 1895 sur la fonction r ([237]).
- 640 Borel a repris cette critique p.118 de [238].
- 641 Sur cet article de Borel voir [239].
- 642 Borel utilise la série Bertrand-Lebesgue p.1212 de [240].
- 643 Lire aussi § 2.3 de [241] et p.179-185 de [242].
- 644 L'extension de l'intégrale de Lebesgue au cadre envisagé par Stieltjes a été faite par Radon et de La Vallée Poussin ([194], 67).⁶⁷⁶
- 645 Faber y redémontre aussi le théorème de dérivation de Lebesgue ([4], 124).
- 646 G. Floquet (1847-1920), E.N.S. 1869, doyen de Nancy de 1905 à 1919.
- 647 Pujet, élève de l'Ecole Normale Supérieure de la promotion 1860.¹¹⁴⁵
- 648 J. Molk (1857-1914), professeur de mécanique à la Faculté des Sciences de Nancy.
- 649 Il s'agit de la version définitive de [215] qui, rappelons-le, ne sera publiée qu'en 1917.
- 650 Il s'agit du raisonnement p.1066-1068 de [84].
- 651 Voir la note 1, p.290 de [215].
- 652 Lebesgue a parfaitement raison. Cette légitimation a été faite par Hausdorff dans [16].
- 653 P.1067 de [84].
- 654 Borel a écrit sur cette lettre : "A voir la question d'indépendance, Son rôle ici n'est pas essentiel ; il pourrait l'être ailleurs".
- Il a repris cette "question d'indépendance" en 1912 ([218]), après que Felix Bernstein lui ait fait la même objection dans [217]. Ici encore Lebesgue a bien jugé. La démonstration de Borel est fondamentalement juste, mais contient les deux fautes relevées
- 655 [149], paru le 21 mai 1909, par Lebesgue.
- 656 Note 62, p.17 de [149], ajoutée par Molk.
- 657 Dans [149] on cite dans la note 117, p.39, les noms de Bolzano et Cauchy pour ce théorème. Sur son histoire on peut voir [243].

- 658 Rolle a démontré le théorème qui porte son nom pour les fonctions polynômes en utilisant implicitement le théorème des valeurs intermédiaires ([244], 89).
- 659 P.38 de [149].
- 660 Note 122.
- 661 Il est possible que Borel ait voulu ajouter une note sur cette question dans [245], dont la préface est du 8 septembre 1909.
- 662 P.121-122 de [246] (note de Vogt).
- 663 [247].
- 664 [248] et [249].
- 665 Sur les relations entre les travaux de Lebesgue et ceux de Vitali il faut lire les deux lettres de Lebesgue à Vitali des 16 et 18 février 1907 ([250], 457-462). (Voir aussi la note 1, p.188 de la 2^e éd. de [4]).
- 666 Voir [251] et [252]. Lebesgue a traité ces questions dans [163] et [254]. H. Freudenthal a donné une excellente analyse de ces travaux dans [253], p.435-445.⁶⁸⁷
- 667 Baire n'a jamais écrit ce mémoire. Sur cette question voir la correspondance de Baire avec Brouwer ([30], 368-370 ; [269], 110-116).
- 668 Voir [163] et [254] : ainsi Lebesgue possédait déjà en 1909 l'essentiel de sa démonstration.
- 669 En 1897 ; voir [255].
- 670 Voir p.180-181 de [256] note 2.
- 671 Voir [256] et [257].
- 672 Dans son résumé du cours, qui n'a pas été publié, *Sur l'Analysis situs*, fait au Collège de France en 1923-1924, Lebesgue écrit (O.S., vol.I, p.178) :
- "Après l'étude de la division du plan par des lignes polygonales fermées, on est arrivé au théorème de Jordan sur les lignes planes fermées : au complément que Schoenflies a donné à ce théorème, enfin au théorème réciproque. On a cherché ensuite, en utilisant en particulier des procédés indiqués récemment par M. Antoine, à quelles conditions deux graphes sont transformables l'un dans l'autre par une homéomorphie du plan.
- A partir de là, il est facile d'entreprendre l'étude des surfaces, dans toute sa généralité. La segmentation des surfaces conduit à la notion de nombre de Betti."

- 673 Sur les nombres de Betti, voir p.20-21 de [270].
- 674 Il semble que Lebesgue n'ait rien publié sur cette question ; sur son historique voir [258].
- 675 Lebesgue écrit p.185 de [138] :
- "Je me suis proposé d'étendre aux fonction d'un nombre quelconque de variables les résultats démontrés dans le dernière chapitre de mes *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*. C'est surtout la dérivation des intégrales multiples que j'étudie."
- 676 Lebesgue a repris cette question dans [259]. Voir aussi p.129-130 de [11].
- 677 Annoncé dans [245] "en préparation".
- 678 [260] et [261].
- 679 P.150-154 de [11].
- 680 Voir p.154-159 de [11] : les mémoires [262], [263] et [264].
- 681 Lebesgue a été reçu troisième à l'agrégation ([265],36).
- 682 Les *Leçons* [245] ont été "recueillies et rédigées" par A. Denjoy.
- 683 [230].
- 684 Voir p.119-122 de [264], où Lebesgue ne cite pas le nom de Poincaré ([266],136).
- 685 Voir aussi [267] où Lebesgue, après Darboux et Stieltjes, utilise la méthode de Laplace.
- 686 Voir p.36-50, 89-108 de [268].
- 687 Voir aussi p.157-220 de [271].
- 688 Voir la note 624.
- 689 Probablement la préface de [245].
- 690 C'est la première lettre de ce jour.
- 691 [272]. Le tome I a été traduit en russe en 1910 par W.F. Kagan et publié par Mathesis à Odessa.
- 692 Sur Stäckel voir [273].
- 693 [274] et [245].
- 694 Voir la note 1, p.127 de [245],⁷²⁸
- 695 Chapitre V, p.118-158, de [245].

696 P.92 de [131].

697 P.181 de [256].

698 P.102 de [275].

699 Sous presse : P. Montel, *Leçons sur les séries de polynômes à une variable complexe*, et L. Zoretti, *Leçons sur le prolongement analytique*.

700 [276].

701 [277].

législatives de 1910 dans le

702 Painlevé était candidat aux élections ^{5^e} arrondissement de Paris ; il s'agissait donc d'assurer sa suppléance au moins pour 4 ans.

703 Borel a dû envoyer à Lebesgue le texte de ses deux notes ([278], [279]) présentées à l'Académie des Sciences les 14 et 28 février 1910. Borel écrit au début de sa note [278] :

"La lecture de l'important mémoire que vient de publier M. Lebesgue [[[206]]] m'a suggéré une nouvelle définition de l'intégrale définie, au sens de Lebesgue ; cette nouvelle définition est, avec la définition de M. Lebesgue, à peu près dans le même rapport que la définition que j'ai donnée de la mesure des ensembles avec celle de M. Lebesgue : les deux définitions sont identiques en ce sens que (en négligeant les cas exceptionnels) elles s'appliquent en même temps et conduisent aux mêmes nombres ; elles sont différentes, en ce sens qu'elles exigent des procédés de calculs différents, de sorte que, suivant les circonstances, l'une peut être plus commode à utiliser que l'autre.

Mon but est de rattacher le plus étroitement possible l'intégrale au sens de Lebesgue à l'intégrale au sens de Riemann."

Sur l'obtention de l'intégrale de Lebesgue comme limite de sommes de Riemann voir aussi p.140-141 de [281].

Borel va aller plus loin dans sa note du 28 février pour préciser les liens entre les notions de mesure et d'intégrale ([279],823) :

"En indiquant dans une note récente [[[278]]] un point de vue nouveau pour la définition de l'intégrale, j'ai insisté particulièrement sur les analogies avec les travaux et les idées de M. Lebesgue ; je voudrais montrer aujourd'hui comment on peut rattacher cette définition à mes premières recherches sur la mesure des ensembles."

704 Borel écrit à ce propos ([278],822) :

"Pour les fonctions non bornées, notre définition est plus générale que celle de M. Lebesgue."

Ou encore ([279],824) :

"Les résultats précédents équivalent à des résultats obtenus par M. Lebesgue ; ceux qui suivent me paraissent nouveaux."

Il est fort probable qu'au moment de l'impression de ses notes Borel ait tenu compte des remarques de Lebesgue.

705 P.322 de [278] et p.825 de [279]. Ici encore, il est probable, que Borel ait tenu compte des remarques de Lebesgue.

706 [152].⁷¹¹

707 P.299-301 de [280]. Il est possible que Lebesgue se soit inspiré de cet article fondamental pour entreprendre ses premières études [262],[263] et [264] sur le problème de Dirichlet¹¹⁴⁶

708 Borel a tenté de préciser ce point p.825 de [279].

709 Voir à ce sujet [282].

710 Voir [4], 2^e éd., p.261-262, note 1, ainsi que p.263, note 1, où Lebesgue écrit :

"J'imite dans ce qui suit la démonstration donnée par M. Riesz dans son mémoire des *Annales de l'Ecole Normale*, 1914. M. Riesz me fait là l'honneur de déclarer qu'une remarque que j'avais faite sur le rôle des suites monotones de fonctions l'a guidé. En fait, je n'avais que très imparfaitement compris ce rôle sans quoi je n'aurais pas écrit, dans ma Note de 1909, qu'il serait très difficile d'étendre la notion d'intégrale de Stieltjes par un procédé différent de celui que j'employais. Peu de temps après que j'eus commis cette imprudence, M. W.H. Young montrait que mon procédé était loin d'être indispensable et que l'intégrale de Stieltjes se définit exactement comme l'intégrale ordinaire par le procédé des suites monotones indiqué au Chapitre VII, p.134 (*Proceed. of the London Math. Society*, 1913).

Ce travail de M. Young est le premier de ceux qui ont finalement bien fait comprendre ce que c'est qu'une intégrale de Stieltjes. On n'a pénétré vraiment au fond de cette notion que grâce à la définition qu'en a donnée M. Radon (*Sitz. d. K. Ak. d. Wiss. in Wien*, 1913) et aux travaux de M. de la Vallée Poussin sur l'extension de la notion de mesure (voir, en particulier, dans cette collection, le livre déjà cité de M. de la Vallée Poussin). Mais pour que ces travaux soient eux-mêmes possibles, il avait fallu que soient dégagées les notions de fonction d'ensemble (Lebesgue), de fonction de plusieurs variables à variation bornée (Vitali, *Rend. della R. Acc. delle Sc. di Torino*, 1908), d'intégrale de Stieltjes d'une fonction continue de plusieurs variables (Fréchet, *Nouv. Ann. de Math.*, 1905), etc.

Comme je ne m'occupe dans ce livre que des fonctions d'une seule variable, la difficulté et l'importance de certains travaux y apparaissent mal. C'est pourquoi je tiens à dire que si, en ce qui concerne les fonctions d'une seule variable, le Mémoire de M. Radon ne nous a apporté qu'une définition nouvelle, particulièrement heureuse à la vérité, de l'intégrale de Stieltjes, pour le cas de plusieurs variables ce Mémoire fournit une véritable extension de la notion d'intégrale."

- 711 Lebesgue a présenté la conception de Young dans [4], 2^e éd., p.135-136.
- 712 Voir [283] et p.190 de [138].
- 713 Ce point sera repris par Lebesgue dans [284], p.306-309.
- 714 [138].
- 715 [4] et [206].
- 716 [259] et [285].
- 717 Voir p.46-94 de [7]; p.243-244 de [10]; p.304-305 de [284] et p.66 de [4].⁷²⁹
- 718 Voir la note 613, ainsi que [284], p.303, et [286].
- 719 Note 2, p.303 de [284].
- 720 Nous situons cette lettre avant le 21 mars. Elle est écrite sur le papier en tête de l'Université de Poitiers.
- 721 Nous supposons qu'il s'agit de la première rédaction de [287] paru en 1912.
- 722 [288], p.539, [289], [290] et [291].
- 723 P.539 de [288]
- 724 [289].
- 725 [292] et [293].
- 726 Région du Brésil,
- 727 S'agit-il de l'astronome A. Charlois, né en 1864, mort à Nice en 1910 ?¹¹⁴⁷
- 728 Développé par Lebesgue dans [294].
- 729 Voir aussi p.185-188 de [63].
- 730 Voir p.187 de [63].
- 731 Voir p.88 de [4], p.272 de [131] et p.201 de [63].
- 732 [295] et [148].
- 733 Painlevé écrit p.1157 de [296] :

"Il convient de signaler le rôle joué, dans ce résultat, par l'extension, due à M. Lebesgue, de l'intégrale définie. Grâce à cette opération (cette opération a déjà montré son utilité dans les problèmes analogues au problème de Dirichlet), que nombre de géomètres jugeaient artificielle et trop abstraite, une question naturelle, une question fondamentale qui restait indécise à

l'entrée de la théorie des fonctions uniformes, est aujourd'hui tranchée, et tranchée précisément dans le sens qui semblait le moins vraisemblable à la plupart des analystes. Bien des questions intéressantes restent à résoudre au sujet de ces mêmes ensembles de singularités. L'intégration de M. Lebesgue pourra contribuer là encore à la formation d'exemples décisifs."

- 734 C. Bouglé (1870-1940), professeur de sociologie à la Sorbonne.
- 735 E. Cosserat (1866-1931), professeur d'astronomie à l'Université de Toulouse, élu membre de l'Académie des Sciences le 31 mars 1919.
- 736 Elève de l'Ecole Normale Supérieure de la promotion 1880.
- 737 A. Legoux (1841-1909), professeur de mécanique appliquée à l'Université de Toulouse.
- 738 E. Gossart (1849-1909), professeur de physique à l'Université de Bordeaux.
- 739 R. Blondlot (1849-1930), professeur de physique à l'Université de Nancy.
- 740 Nous ne savons pas de qui il s'agit.
- 741 Elève de l'Ecole Normale Supérieure.
- 742 L. Marchis, né en 1853, professeur de physique générale à l'Université de Bordeaux, nommé en 1910 titulaire de la chaire d'aviation, créée à la Sorbonne par une donation de B. Zaharoff.
- 743 E. Blaise (1872-1939), professeur de chimie organique à la Sorbonne.
- 744 1897-1899.
- 745 C. Camichel (1871-1955), professeur d'électricité industrielle à l'Université de Toulouse, élu à l'Académie des Sciences le 17 février 1936.
- 746 J. Andrade (1857-1933), professeur de mécanique à l'Université de Besançon.
- 747 E. Fabry (1856-1944), professeur à Montpellier, puis à Marseille.
- 748 E. Cotton (1872-1950), professeur de mécanique à l'Université de Grenoble.
(1870-1955)
- 749 H. Dulac, professeur de mathématiques à l'Université de Lyon, élu correspondant de l'Académie des Sciences le 24 avril 1944.
- 750 A. Buhl, professeur de mathématiques à l'Université de Toulouse.
(1878-1949)
- 751 S. Carrus, né en 1873, Ecole Polytechnique 1895, nommé professeur à Alger en 1911.
- 752 Elève de l'Ecole Normale Supérieure de la promotion 1893.
(1882-1955)
- 753 J. Chazy, élève de l'Ecole Normale Supérieure de la promotion 1902, professeur de mathématiques à l'Université de Lille.

- 754 H. Andoyer (1862-1929), professeur d'astronomie à l'Université de Paris.
- 755 Voir à ce sujet la lettre de Painlevé à Vessiot du 17 octobre 1898 ([297], 53-54).
- 756 E. Vessiot (1865-1952), E.N.S. 1884 .
- 757 Allusion probable à [299].
- 758 Voir la liste des travaux et les commentaires placés à la suite de cette lettre.⁸⁰¹
- 759 Voir p.138-139 et p.144 de [11], où [1] = [19].
- 760 Voir p.169-170 de [11], où [2] = [20].
- 761 Voir p.139-140 de [11], où [3] = [21], et la note 163.
- 762 P. 125-126 de [11], où [4] = [22].
- 763 P.115-116, 123-126, 130, 151-154, 167-169 de [11], où [13] = [42], [14] = [43], [15] = [44], [16] = [45], [17] = [46], [30] = [8].
- 764 P.151 de [11], où [39] = [63].
- 765 P.115-118, 122-127, 150-154 de [11], où [47] = [85].
- 766 Voir la note 765.
- 767 Voir la note 4.
- 768 P.123 de [11], où [20] = [49].
- 769 P.123-125, 127-129 de [11], où [29] = [5].
- 770 P.125-127 de [11], où [33] = [75], [34] = [76], [35] = [77].
- 771 P.151-152 de [11], où [6] = [10].
- 772 P.131-134 de [11], où [18] = [47], [28] = [4].
- 773 P.133-135 de [11], où [31] = [65].
- 774 P.131 de [11], où [22] = [51].
- 775 P.131-136 de [11], où [49] = [87], [23] = [52].
- 776 P.140-141 de [11], où [45] = [1].
- 777 P.137 de [11], où [38] = [74].
- 778 P.138 de [11], où [46] = [2].

- 779 P.129-130 de [11], où [27] = [56].
- 780 P.141-143 de [11], où [11] = [15].
- 781 P.143 de [11], où [12] = [41].
- 782 P.144 de [11], où [48] = [86].
- 783 P.144 de [11], où [7] = [11].
- 784 P.143-146, 148-149 de [11], où [32] = [61].
- 785 P.147-148 de [11], où [36] = [9].
- 786 P.148 de [11], où [9] = [13].
- 787 P.154-159 de [11], où [37] = [73], [24] = [53], [25] = [54].
- 788 P.174 de [11], où [10] = [14].
- 789 P.173-174 de [11], où [43] = [67], [41] = [78].
- 790 P.169 de [11], où [40] = [64].
- 791 P.170 de [11], où [44] = [68].
- 792 Voir la note 787.
- 793 Elève de l'Ecole Normale Supérieure de la promotion 1863,¹¹⁴⁹
- 794 Darboux est né le 13 août 1842.
- 795 Picard, gendre d'Hermite, né en 1856, nommé à la Sorbonne en 1881.
- 796 C. Guichard était en 1910 titulaire de la chaire de mécanique rationnelle à la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand.
- 797 Dans [312] il y a 804 paragraphes numérotés pour 414 pages !
- 798 Nous n'avons trouvé aucune lettre de Lebesgue dans la correspondance [74] de Poincaré.
- 799 [249].
- 800 W. Gladstone (1809-1893), premier ministre anglais de 1868 à 1874 et de 1880 à 1885.
- 801 Voir la note 798. La liste et les commentaires qui suivent la lettre CXLVI doivent donc être placés après la lettre CLI.
- 802 J. Jaurès (1859-1914), un des chefs du parti socialiste français,
- 803 S. Lattès, ⁽¹⁸⁷³⁻¹⁹¹⁸⁾ professeur de mécanique générale et appliquée à l'Université de Toulouse, élève de l'Ecole Normale Supérieure de la promotion 1892.

Fréchet a passé sa thèse le 15 et Lattès le 19 juin 1906. Hadamard était l'examineur de la thèse ([313]) de Lattès.

- 804 Il s'agit probablement de 123 copies d'examen dont le sujet traite du volume de la sphère.
- 805 Il s'agit probablement d'une commission de l'Assemblée Nationale dont faisait parti Painlevé en tant que député.¹¹⁵²
- 806 [249].
- 807 [248]. H. Vogt (1864-1927), E.N.S. 1881, professeur à Nancy.
- 808 Sur cette querelle de priorité entre Montel et Fréchet voir le carton 24 des papiers de Fréchet, déposés aux Archives de l'Académie des Sciences de Paris: Fréchet écrit que des conditions suffisantes de compacité ont été données en 1903 par Arzela et en 1904 par Montel, mais que c'est lui qui a trouvé "un nom à cette propriété" ([118],849) et qu'il en a montré tout l'intérêt.
- 809 Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est publié par les Secrétaires de la Société qui étaient en 1910 Montel et Raffy, Raffy est mort en 1910 ; quant à l'article de Lebesgue, il s'agit de [300].
- 810 P. Boutroux est le fils de E. Boutroux (1845-1921), philosophe et professeur à la Sorbonne, beau-frère de H. Poincaré.
- 811 Elève de l'Ecole Normale Supérieure de la promotion 1867, E. Denis (1849-1921), professeur d'histoire moderne à la Sorbonne.
- 812 M. Sarraïl (1856-1929), général, directeur de l'infanterie.
- 813 Elève de l'Ecole Normale Supérieure de la promotion 1892, A. Maige (1872-1943), professeur de botanique à Alger, Poitiers et Lille.
- 814 A. Calmette (1863-1933), directeur-fondateur de l'Institut Pasteur de Lille.
- 815 G. Pruvot (1852-1954), professeur de zoologie à Grenoble puis à la Sorbonne, titularisé le 1er novembre 1910.
- 816 M. Molliard (1866-1944), premier titulaire de la chaire de physiologie végétale à la Sorbonne en 1913.
- P. Dangeard (1852-1947), botaniste, chargé de cours à l'Université de Paris en 1908, titularisé le 1er novembre 1921.
- 817 Certificat de physique, chimie et sciences naturelles,⁸⁵⁴
- 818 Allusion probable à l'intérêt de Borel pour l'aviation ([314], [315]),
- 819 [316].

- 820 Elève de l'Ecole Normale Supérieure de la promotion 1895.¹¹⁵⁴
- 821 Pour les travaux de Baire voir [317].
- 822 Ecole Polytechnique.
- 823 C'est ce que nous lisons.
- 824 Ecole Normale Supérieure des Garçons de Saint-Cloud fondée en 1880.
- 825 Grancher J.J. (1843-1907), Membre de l'Académie de Médecine en 1892.
- 826 Jean Magrou, cousin germain de N. Bernard avec qui il correspond¹¹⁵⁶ régulièrement.
- 827 M. Lévy (1838-1910), professeur de mécanique appliquée à l'Ecole Centrale, professeur de mécanique analytique et céleste au Collège de France, membre de l'Académie des Sciences.
- 828 O. Blumenthal (1876-1944), rédacteur des *Mathematische Annalen*, ami de Hilbert, mort en novembre 1944 dans le camp de concentration de Theresienstadt.
- 829 Lebesgue écrit sa lettre sur le papier avec en-tête : "Café de Castille, place d'Armes".
- 830 G. Doumergue (1863-1937), ministre, président de la République en 1924, radical-socialiste. (Voir note 847).
- 831 Epouse de B. Gambier (1879-1954), élève de l'Ecole Normale Supérieure de la promotion 1899, maître de conférences de mathématiques à l'Université de Rennes, titularisé en 1913.
- 832 H. Béghin (1876-1969), membre de l'Académie des Sciences en 1946.
- 833 Probablement la femme de Avacher, élève de l'Ecole Normale Supérieure de la promotion 1895.
- 834 [319]. E. Traynard, E.N.S. 1901, mort en 1967, Il sera professeur et doyen de la Faculté des Sciences de Marseille.
- 835 Voir la note 666.
- 836 [254]. Sur la réaction de Baire, voir la note 667 et p.531-536 de [317].
- 837 Guy de Téramond, feuilletoniste du *Temps*, pseudonyme d'Edmond Gautier (1869-1957), écrivain. Il publia dans *Le Temps*, du 28 avril au 29 mai 1910 un feuilleton intitulé *Maisons de Sciences*, publié ensuite comme livre ([318]). Il avait mis en exergue une citation d'Anatole France qui donne le ton de l'ouvrage :

"Ce géomètre enflammé rêvait sur des chiffres et sa Béatrice était une fleur d'arithmétique."

838 Lebesgue fait allusion à l'article de *La Solidarité*, numéro 113 du 1er novembre 1910 qui écrivait (page 2) :

"En Sorbonne,

La succession de M. Raffy est toujours vivement disputée. M. Vessiot de Lyon (promotion 1884) et M. Lebesgue de Poitiers (promotion 1894) sont candidats. M. Borel, gendre de M. Appell, a fait, dit-on, une campagne acharnée contre M. Vessiot, dont la nomination à la Sorbonne barrerait le chemin à des ambitions futures. Il a déterminé M. Picard à faire un rapport défavorable sur sa candidature et il a décidé la Sorbonne à se prononcer en majorité pour M. Lebesgue, dont la valeur est d'ailleurs reconnue. Mais comme il y a eu des absents et qu'on se plaint de certaines intrigues, l'affaire n'est pas encore réglée, et il se pourrait que le ministre ne ratifiât pas le choix de la Sorbonne. Et voilà comment les fautes de certains professeurs de faculté ébranlent le principe de la cooptation et donnent aux hommes politiques un prétexte pour passer outre.

S.S."

La Solidarité a été fondée en 1904 par L. Deschamps, né en 1849, qui en était directeur et rédacteur en chef. C'était l'organe des Amicales et des Fédérations des professeurs de l'enseignement secondaire. Notons que le droit syndical ne fut accordé aux fonctionnaires qu'en 1919. L. Deschamps, qui était chargé de cours à l'université et spécialiste d'histoire coloniale, écrit dans le numéro 212 bis de *La Solidarité* du 15 octobre 1919 que *La Solidarité* fut créée pour soutenir le mouvement amicaliste et obtenir des améliorations de traitement, l'indépendance et la dignité que l'on pouvait alors espérer pour le personnel de l'enseignement, et de servir de trait d'union entre tous les enseignants.

Dans le même numéro de *La Solidarité*, à la page 1, figure ⁸⁷² l'article *Comment on devient professeur en Sorbonne ?* où l'on peut lire :

"Quel dommage qu'Agathon ne s'occupe pas aussi de mathématiques, de physique et de chimie ! C'est là qu'il ferait de belles découvertes ! C'est là qu'il pourrait examiner de près la puissance du gendre et la monopolisation de l'enseignement par 2 ou 3 familles syndiquées."

L'auteur craint la disparition "de la pensée libre à la Sorbonne" et ajoute :

"Chaque secte reconnaîtra les siens, et il n'y aura point d'élus qui ne fassent partie de quelque groupement confessionnel."

Enfin, il demande qu'on commence par laïciser l'université.

Il est intéressant de remarquer qu'Agathon était le pseudonyme de H. Massis (1886-1970), écrivain, militant dans les rangs de l'Action française, élu en 1960 à l'Académie française, et de A. de Tarde (1880-1925). Ils publiaient du 27 juillet au 31 décembre 1910, dans *L'Opinion*, une étude sur *L'esprit de la nouvelle Sorbonne* ([322]) contre la réforme de la licence de lettres de 1907, contre "la manipulation scientifique des textes" inspirée par la philologie allemande, contre l'esprit de la nouvelle Sorbonne et contre G. Lanson (1857-1934) (qui, en particulier, dans son *Histoire de la littérature française*, tente d'appliquer la méthode historique à l'histoire littéraire, afin de lui donner une base positive). Agathon demande le retour aux études classiques.

839 *La Solidarité* du 1er janvier 1911, dans son numéro 117, page 3, écrivait :

"MM. Vessiot et Lebesque ont été nommés le même jour à la Sorbonne. M. Borel est nommé sous-directeur de l'Ecole Normale en remplacement de M. Tannery. Signalons à ce propos une jolie gaffe du *Temps*. Ce journal, après avoir félicité M. Borel, a ajouté naïvement la ligne suivante : "M. Borel est le gendre de M. Appell", et cela sans citer aucun des autres titres que peut avoir M. Borel. On a cru d'abord à une roserie. C'était simplement la gaffe.

S.S."

840 J. Tannery est mort le 11 novembre 1910 ; il était académicien libre depuis le 11 mars 1907. M. Brillouin s'est présenté à la place laissée vacante par le décès de D. Gernez (1834-1910) le 31 octobre 1910. Il sera élu seulement en 1921. C'est E. Tisserand (1830-1925),¹¹⁵⁸ directeur général de l'agriculture, qui sera élu académicien libre à la place de Tannery le 20 février 1911.

841 Elève de l'Ecole Normale Supérieure de la promotion 1897,⁹⁶⁰

842 Russell a fait une conférence ([321]) à l'Ecole des Hautes Etudes⁸⁵⁸ Sociales le 22 mars 1911.

843 M. Fouché, né en 1857, professeur de mathématiques au Lycée Voltaire, C. Bioche (1859-1950),¹¹⁵⁹ professeur de mathématiques au lycée Louis-le-Grand et E. Cahen, né en 1865, professeur de mathématique au Collège Rollin à Paris. (Voir note 872).

844 A. Blondel, né en 1863, professeur d'électricité à l'Ecole des Ponts et Chaussées à Paris,⁹⁵⁹

- 845 C. Bayet (1849-1918), élève de l'École Normale Supérieure de la promotion 1868, professeur d'histoire de l'art à l'Université de Lyon en 1879, directeur de l'Enseignement supérieur de 1902 à 1914.⁸⁵⁵
- 846 L. Liard était vice-recteur de l'Académie de Paris. Notons qu'à cette époque c'est le ministre de l'Instruction publique qui était le recteur.
- 847 G. Doumergue (1863-1937) était le ministre de l'Instruction publique du 4 janvier 1908 au 30 octobre 1910. Il battra Painlevé pour la présidence de la République le 13 juin 1924 par 515 voix contre 319.
- C'est M. Faure (1850-1910), poète, qui succédera à Doumergue au ministère de l'Instruction publique du 4 novembre 1910 au 27 février 1911.
- La Solidarité* du 1er novembre 1910, page 2, note que A. Briand a proposé à R. Viviani (1863-1925) le portefeuille de l'Instruction publique qui l'a refusé à cause de son opposition sur la question des manuels et des évêques :
- "M. Viviani a reproché à M. Briand de se laisser mener par les personnalités sucrières qu'il fréquente assidûment, par les journalistes antirépublicains et antiuniversitaires de *La Liberté*, de *L'Eclair*, de *l'Echo de Paris*, de *du Temps* et de *du Gaulois*."
- 848 P. Painlevé sera élu au second tour le 8 mai 1910 dans le 5^{ème} arrondissement de Paris.
- 849 Sur l'importance des travaux de Vessiot on peut voir [320].
- 850 M. Dufour (1843-1910), professeur d'ophtalmologie à l'Université de Lausanne depuis 1892.
- 851 N. Bernard (1874-1911), professeur de botanique à l'Université de Poitiers, directeur de la Station botanique de Mauroc, ami de Baire et de Lebesgue. Sur ses travaux, voir [324].¹¹⁶⁰
- 852 Bligny se trouve dans le département de l'Essonne, au sud d'Orsay.
- 853 S. Lattès (1875-1918) a traduit [325]. Ce livre contient des notes historiques très intéressantes. Le tome II ([335]) a été écrit directement en français.
- 854 Le PCM a été créé en 1894 comme formation scientifique préparatoire aux études médicales, c'est l'ancêtre du PCEM actuel.

855 Le bâtiment principal de la Faculté de Médecine de Toulouse et la Bibliothèque de Médecine et de Sciences de l'Université de Toulouse ont été détruits par un incendie le 27 octobre 1910 (Archives Nationales F¹⁷ 14561). C. Bayet^{et/} le doyen de la Faculté des Sciences de Toulouse P. Sabatier (1854-1941), prix Nobel de chimie 1912, ont profité de cette occasion pour agrandir les Facultés de Médecine et des Sciences et créer un Institut de chimie. Les travaux interrompus par la guerre de 1914 n'ont été terminés qu'après celle-ci.

856 Analysons ici la question de nomination de Lebesgue et Vessiot⁸⁷¹ à la Faculté des Sciences de Paris.

A la suite du décès de Raffy, Vessiot et Lebesgue ont été candidats au poste laissé vacant par sa mort. Lebesgue obtiendra 6 voix et Vessiot 5, mais ce n'était qu'un vote indicatif et Bayet laissera traîner l'affaire.

La situation s'est trouvée débloquée à la mort de J. Tannery et les deux seront nommés le même jour maîtres de conférences de mathématiques à Paris. Il faut noter qu'à cette époque il y avait deux cadres d'Enseignement supérieur : celui de Paris et celui de province ; ce qui faisait qu'un professeur de province pouvait être nommé à Paris maître de conférences sans diminution de salaire (voir sur ce point [326],[327] et [328]).

857 O. Garbe, physicien, né en 1850, doyen de la Faculté des Sciences de Poitiers.

858 L'Ecole des Hautes Etudes Sociales a été fondée en novembre 1900, 16 rue de la Sorbonne à Paris. En 1910, elle comportait 4 Ecoles : Ecole de Morale, de Philosophie et de Pédagogie, Ecole Sociale, Ecole de Journalisme et Ecole d'Art, sous la présidence d'honneur d'Emile Boutroux. Elle organisait le jeudi des conférences d'intérêt général. Sur la fondation et les programmes de l'Ecole voir [329].

859 Z. Janiszewski (1888-1920) était ([331],5) le "fondateur du périodique *Fundamenta Mathematicae*" et "l'un des créateurs de l'école mathématique polonaise". Il fut "promu docteur de l'université", sur "le sujet proposé par H. Lebesgue".

Sa thèse de juin 1911 a été présidée par H. Poincaré, Borel et Lebesgue étaient examinateurs, elle était dédiée à Marc Sangnier (1873-1950), fondateur du mouvement le "Sillon", militant pour un christianisme social.

Janiszewski écrit au début de sa thèse ([330],33) :

"Les notions fondamentales de la géométrie pure ne sont pas encore toutes rigoureusement définies et analysées. Seule l'étude de la notion de la droite est amenée à un degré de perfection dans les célèbres *Grundlagen der Geometrie* de M. Hilbert. Mais si l'on passe à l'étude des courbes et des surfaces, on s'aperçoit qu'il nous manque même une définition de ces notions. Grâce aux immortels travaux de Georg Cantor, qui nous ont appris à considérer toute figure comme un ensemble de points et à raisonner à partir de cette conception, cette question peut être posée aujourd'hui d'une façon nouvelle et plus claire : Quelles propriétés doit posséder un ensemble de points pour mériter d'être appelé *courbe*, *surface*, etc. (les points étant des êtres dont les propriétés sont définies axiomatiquement, comme le fait M. Hilbert). C'est le premier de ces problèmes que je traite dans cette thèse."

Il ajoute ([330],34) :

"L'idée directrice, l'étude de la notion de ligne étant la même dans le présent travail que dans le mémoire de M. Zoratti [*La notion de ligne* (Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, 26(1909))], je suis à peu près la même marche que lui."

Janiszewski expose ensuite sa méthode ([303],36) :

"Je tiens à me justifier d'avance et une fois pour toutes de la part que je réserve à certaines propositions qui peuvent paraître évidentes et n'avoir besoin d'aucune démonstration. Le fait que plusieurs propositions réputées évidentes ont été reconnues fausses explique mon extrême réserve. Aussi, je ne crains d'être long. Pour diminuer encore les chances d'erreurs, j'introduis des symboles qui, tout en abrégant certaines démonstrations, permettent de remplacer le raisonnement par un simple calcul. Ces symboles sont bien connus dans la théorie des ensembles, mais on n'a pas essayé jusqu'ici de s'en servir comme éléments de calcul."

Et, "avant de terminer" son *Introduction* ([330],37), il tient "à remercier ici M. Lebesgue pour ses gracieux conseils concernant la rédaction de cette thèse".

860 Note 1, page 15 de [330].

861 Montel était secrétaire de la Société Mathématique de France et donc responsable du *Bulletin de la Société Mathématique de France*.

862 Borel a dû soumettre à Lebesgue le projet d'une composition de mathématiques pour un examen de philosophes.

863 Cette lettre a dû être écrite peu après le 2 mai.

864 Il s'agit probablement de [332].

865 [324], "L'Idylle l'an 3000", c'est [333].

866 Nous situons cette lettre et la suivante également en mai 1911.

- 867 Fernand Lebeau, élève de l'Ecole Normale Supérieure de la promotion 1910, neveu et fils adoptif d'Emile Borel ([334],12).
- 868 Hadamard sera nommé professeur à l'Ecole Polytechnique en 1912.
- 869 Il nous semble intéressant de donner quelques informations sur le *curriculum vitae* de L. Zoretti.

A partir de 1918, il semble s'être orienté vers l'activité syndicale et politique. Il publie, en particulier, plusieurs livres sur les problèmes de l'enseignement ([336],[337],[338],[339] et [340]). Voir aussi [360].

A partir de 1937, il est secrétaire de rédaction de la revue *Education et culture*, avec V. Prihoda de l'Université Charles de Prague, publiée à Caen et à Prague, puis, après l'entrée de l'armée allemande à Prague le 15 mars 1939, à Caen seulement avec Zoretti comme secrétaire de rédaction. Dans le comité de patronage de la revue on trouve les noms de L. Jouhaux, secrétaire général de la C.G.T., P. Langevin et H. Wallon.

Il fait des conférences à l'Institut supérieur ouvrier, publiées dans la *Série éducation syndicale* ([341],[342] et [343]).

En 1939 il participe à un ouvrage sur le fascisme ([344]) et en 1941 il publie *France, forge ton destin* dont nous reparlerons ([345]). Ce dernier livre nous a été signalé le 19 septembre 1990 par M. Zerner.

L. Zoretti et V. Prihoda écrivent dans le premier numéro de novembre 1937 (p.1-2) que la revue est éditée par "les groupements d'éducateurs, instituteurs et professeurs des divers degrés, au sein de la Fédération Syndicale Internationale". C'est "une revue de culture, et avant tout de culture ouvrière". Elle comble une lacune "à l'époque où certaines idéologies, fascistes et autres, pénètrent si profondément les programmes et les méthodes éducatives".

Après le congrès de Royan du Parti socialiste en été 1938, G. Soulès (qui écrira sous le pseudonyme R. Abellio), prend la direction de la tendance *Gauche révolutionnaire* du Parti socialiste et il écrit ([346],t.II.304) :

"Les anciens dirigeants de Révolution Constructive reprisent contact avec nous. Composée surtout d'enseignants, cette tendance, qui ne jouait plus aucun rôle dans le parti, occupait en revanche des postes importants à la C.G.T., où Georges Lefranc et Ludovic Zoretti notamment animaient l'Institut supérieur ouvrier et le Centre confédéral d'Education ouvrière."

Zoretti proposa "de fusionner ce qui restait de nos deux tendances au sein d'un nouveau groupe baptisé "Redressement Socialiste", qui pouvait d'ailleurs disposer d'un journal mensuel portant le même titre et imprimé à Caen par ses soins".

G. Soulès a fait ses études à l'Ecole Polytechnique de 1927 à 1929 et il écrit à propos de ses professeurs ([346], t.II, 17) :

"Seul le professeur d'analyse, le sensible Paul Lévy, tout frémissant d'obscurité profonde, semblait inventer son cours à mesure. Parfois, la craie levée, il hésitait, il perdait le fil, il s'arrêtait. Immobiles et tendus comme lui, nous assistions alors à la difficile gésine d'une démonstration de remplacement."

Zoretti publie en septembre 1938 dans *Le Pays normand* un article qui lui vaudra ([347], 50) "une suspension provisoire de toute délégation" dans le Parti socialiste et où il affirme :

"Le peuple français n'a aucune envie de voir une civilisation anéantie et des millions d'être humains sacrifiés pour rendre la vie plus agréable aux cent mille Juifs de la région des Sudètes."

Le 13 septembre 1939 (la France a déclaré la guerre à l'Allemagne le 3 septembre), Zoretti signe ^{avec} Alain, Giono et M. Déat, l'appel à la "paix immédiate" ([347], 31), et le même jour il écrit à Obrecht, "président du Parti socialiste suisse" :

"Il sera essentiel qu'une intervention vigoureuse des puissances neutres, au jour prochain où des propositions de paix seront faites, appuyée, et je dirai même imposée, ces propositions."

A la suite de cet appel et de cette lettre, Zoretti fut ([346], t.III, 49-50) "suspendu de ses fonctions de professeur et inculpé devant le Tribunal militaire", et, "dans le courant d'octobre 1939, zoretti se trouva exclu du parti".

Dans *Education et culture* de décembre 1939, p.1, Zoretti écrit :

"C'est avec l'émotion que l'on devine que nous avons appris à la mi-novembre les événements de Prague, la fermeture des Ecoles supérieures tchèques, les arrestations et les exécutions d'étudiants et de professeurs."

Après l'occupation de la France, Zoretti adhère au Rassemblement national populaire de M. Déat ([347], 98 ; [346], t.III, 198).

En 1941 paraît *France forge ton destin*, achevé d'imprimer le 12 juillet 1941, dédié à ses "petits enfants Michel, Pierre, Juliette, Calude qui, avec ceux de leur génération, auront la tâche d'intégrer une France rénovée dans une Europe harmonieuse".

Notons que Zoretti annonce, "pour paraître prochainement", chez le même éditeur, *Témoignage*, qui n'existe pas à la Bibliothèque Nationale. Il écrit dans son *Avant-propos*, daté du 7 juin 1941 :

"Ce livre est terminé depuis novembre. Il a fallu plus de six mois pour vaincre les mêmes difficultés qu'avait rencontré Demartial pour publier *La guerre de l'imposture*."

Six mois "qui ne pouvait modifier ma pensée" et il était déjà alors "un partisan convaincu de la Révolution Nationale, pour l'Europe, par la collaboration".

Il y dénonce ([345],28) "la création factice de l'Etat Tchèque" et il demande ([345],39) de reconnaître "que nous sommes un peuple vieux, presque un peuple usé et que nous ressentons dans notre grand corps les effets habituels de la sénilité". Et ([345],92) "dans la mesure où il s'agit de juifs-francs-maçons ou bien encore des dirigeants des grandes affaires capitalistes", aucune disposition "ne paraîtra trop brutale". Quant à l'annuaire des anciens élèves de l'Ecole Polytechnique ([345],93), il y relève "29 Lévy contre seulement 15 Dubois et 14 Durand". De plus ([345],116), "le Français est peu à peu éliminé au profit de l'étranger sur de très grandes étendues"⁸⁹⁹.

Par contre ([345],123), le mouvement nazi, "financé par les forces capitalistes", a rompu aujourd'hui "tout contact avec le capitalisme" et "il se dresse pour l'Europe comme la seule force anti-capitaliste authentique". Le communisme ([345],130), "à la mode de Staline", règne "sur une masse de territoires et d'hommes formant une portion importante de la terre", mais "il ne cherche pas d'une manière trop ostensible à se mêler directement ni des affaires de l'Europe, ni de celles du Pacifique".

A la question qu'il pose ([345],209) : "Quel sera le chef de la future Europe ?", sa réponse est nette : "Ce ne peut être que l'Allemagne". Dans le paragraphe *Jeunesse et idéal* il conclut ([345],284) :

"Le Français, qu'il soit de droite ou de gauche, qu'il soit cléricale ou laïque, qu'il soit du P.S.F. [[Parti socialiste de France de M. Déat]] ou du Parti communiste, aime son pays, son grand pays et sa petite province. Il suffit de transformer cette affection souvent latente, qui s'ignore souvent, qui ne s'extériorise que dans les circonstances graves, en une passion motrice et féconde."

Zoretti fait encore partie en 1943 ([347],101) de la

commission permanente de treize membres du Rassemblement national populaire.¹⁰⁶⁶

D'après R. Abellio ([346], t.III, 50), "Zoretti est mort de la façon la plus misérable, en 1948, dans les prisons de l'épuration".

870 A.L. Duvigneau était directeur de l'Institution Duvigneau, école¹⁰⁷³ préparatoire à l'Ecole Centrale (fondée en 1829 pour former les ingénieurs civils par Lavallée, J.-B. Dumas Olivier et Pécllet), 71 boulevard Péreire à Paris. Rappelons qu'à cette époque Lebesgue était professeur de la classe préparatoire à l'Ecole Centrale à Nancy. Un décret du 14 avril 1900 avait autorisé A. Duvigneau à joindre à son nom celui de la famille de Laneau. Victor de Laneau (1758-1830) avait rétabli le Collège Sainte-Barbe en 1798 supprimé à la Révolution. Sa famille était restée liée au Collège Sainte-Barbe, le collège privé le plus coté du XIX^e siècle. Borel, Painlevé, Herriot et Jaurès sont d'anciens barbistes (voir [348]).

871 Le père de Vessiot, A. Vessiot (1829-1908), était Inspecteur général de l'Enseignement primaire.

Sur l'Enseignement supérieur pour l'année universitaire 1910-1911 voir [350].

Notons que P. Montel, professeur au lycée Buffon à Paris, a été appelé au même moment à faire des conférences de Mathématiques préparatoires (certificat de mise à niveau pour la licence de mathématiques) en remplacement de Blutel nommé Inspecteur général.

872 L'article anonyme *Comment on devient professeur à la Sorbonne* visait la nomination de E. Cahen, professeur de mathématiques au Collège Rollin, comme chargé d'un cours de théorie des nombres créé à la suite d'un don anonyme. Cahen a fait une thèse sur la fonction zêta de Riemann ([349]).

873 Brouwer a été nommé le 12 octobre 1909 chargé d'un cours de mathématiques à l'Université d'Amsterdam ; il sera nommé à cette université en 1912 professeur extraordinaire de théorie des ensembles, de théorie des fonctions et d'axiomatique.

874 Nous situons cette lettre au début du février 1912.

875 La notion de convergence asymptotique a été introduite par Borel dans [212] (p.1090) et dans [287].

Borel précise dans [351], p.1330, que la notion de séries

divergentes asymptotiques est due à H. Poincaré.

des fréquences de 0 et 1 dans un développement dyadique,
Le problème de la convergence asymptotique, (posé par Borel en 1912 dans [212], abordé ensuite par plusieurs mathématiciens, en particulier Hausdorff, Hardy, Littlewood et P. Lévy, a été résolu en 1924 par Khintchine : c'est la loi du logarithme itéré ([352])).

876 C'est tout à fait inexact. F. Riesz a introduit une autre notion, celle de convergence en mesure dans [353].

F. Riesz écrit ([353], 1303) :

"M. Lebesgue a remarqué que chaque suite convergente de fonctions mesurables tend aussi en mesure vers sa fonction limite, et naturellement ce fait subsiste encore si, pour un ensemble de mesure 0, la convergence n'a plus lieu. La démonstration de ce fait, donnée par M. Lebesgue (*Leçons sur les séries trigonométriques* [[[9], p.9-10]]), n'est pas tout à fait correcte, mais elle peut être aisément corrigée."

877 Il est probable que Borel avait donné à Lebesgue un projet de [297] avant sa publication.

878 8 février 1912 (date marquée probablement par Borel). Le papier à en tête est de *La Régence, café restaurant, place du Théâtre Français*, à Paris.

879 P.843-852 de [297].

880 Il s'agit peut-être de la démonstration donnée dans [287], p.841-842.⁸⁹⁸

881 P.67, note 1, de [5].

882 P.843 de [287].

Borel écrit p.844 de [287] :

"On arrive ainsi à obtenir la mesure de tout ensemble *bien défini* par les procédés mêmes au moyen desquels l'ensemble a pu être bien défini.

J'ai indiqué cette marche dans mes *Leçons sur la théorie des fonctions* [[[5]]]; comme j'avais surtout en vue les applications, je me suis contenté d'affirmer que le théorème fondamental [[Heine-Borel]], ou des procédés tout à fait analogues à ceux qu'on a employés pour démontrer ce théorème, permettent de justifier ces définitions en prouvant qu'elles ne sont jamais contradictoires entre elles. Mais j'ai omis toute démonstration, car la rédaction détaillée me paraissait devoir être longue et fastidieuse. Cette justification résulte indirectement des travaux de M. Lebesgue, publiés depuis, auxquels je pourrais renvoyer ; mais il me semble préférable de développer complètement la théorie en restant au point de vue des définitions constructives ; car c'est la forme sous laquelle j'ai été naturellement conduit à ces considérations, à

propos de questions qui se sont posées dans mes recherches de théorie des fonctions (notamment dans ma *thèse* [[[31]]]) et c'est aussi la forme sous laquelle les questions se posent dans les applications."

Borel écrit dans sa *Notice sur les travaux scientifiques* publiée en 1912 (une *Notice* de 1901, publiée par Gauthier-Villars, figure dans son dossier à l'Académie des Sciences) ([357],28) que "la définition de la mesure des ensembles linéaires bien définis m'est entièrement due" et il ajoute :

"M. Lebesgue a donné ultérieurement une définition de la mesure, entièrement équivalente à la mienne en ce sens qu'elle s'applique dans les mêmes cas et conduit aux mêmes résultats, mais différente quant à la forme en ce que, au moins en apparence, elle ne suppose pas les ensembles donnés par une définition constructive."

Borel précise ensuite ([357],29) :

"J'ai repris récemment la théorie de l'intégrale définie, en me plaçant au point de vue des définitions constructives que j'avais utilisées dans ma théorie de la mesure ; la théorie ainsi constituée est plus générale que celle de M. Lebesgue pour les fonctions non bornées d'une seule variable, équivalente à la théorie de M. Lebesgue, mais plus simple, pour les fonctions bornées."

P. Painlevé écrit dans son *Rapport sur les travaux de M. Emile Borel* du 2 décembre 1912 déposé dans le dossier Borel des Archives de l'Académie des Sciences de Paris :

"Si la théorie de l'intégrale de M. Lebesgue (sur laquelle reposent tous ses travaux) n'est pas une conséquence évidente de la définition de la *mesure des ensembles* de M. Borel, il existe entre les deux théories une sorte de parenté, de continuité logique."

883 11 février 1912 (date ajoutée par Borel).

884 [9] et [45].

885 A la différence, semble-t-il, de Lebesgue, Borel avait pris conscience de l'intérêt distinguer les différents modes de convergence. qu'il y avait à

886 [34].

887 4 juin 1912 (date marquée par Borel).

888 M. Caullery (1868-1958), professeur de zoologie à la Sorbonne et membre de l'Académie des Sciences en 1928.

889 Vogt, élève de l'École Normale Supérieure de la promotion 1881, et Puiseux de celle de 1875.

890 Nous situons cette lettre en été 1912.

891 Le tome II de [354].

892 [97] et [356].

893 J. Pierpont écrit ([354], t. II, VII)⁹⁰³:

"From this apparently trivial question [[p.337 du tome I de [354]]] results a theory of L -integrals which contains the Lebesgue integrals as a special case, and which, furthermore, has the great advantage that not only is the relation of the new integrals to the ordinary of Riemannian integrals perfectly obvious, but also the form of reasoning employed in Riemann's theory may be taken over to develop the properties of the new integrals."

894 Chapitre XII du tome II de [354].

895 Chapitre XIII du tome II de [354].

896 Intégrales de Riemann.

897 Cette lettre est probablement adressée à Madame Borel.

898 A propos du théorème de Heine-Borel voir aussi p.23-24 de [357].

899 Il nous semble intéressant de signaler qu'Elie Halévy, professeur à l'École des Sciences Politiques, mort en 1937, maître de Raymond Aron et Jean-Marcel Jeanneney, traite dans la *Cinquième partie* de son *Histoire du socialisme européen* ([358]) de *L'expérience socialiste en Russie soviétique*, et il y étudie *Le socialisme et l'Italie fasciste* ainsi que *Le socialisme allemand et l'hitlérisme*, dont le paragraphe 4 est intitulé *Le socialisme du régime hitlérien*.

En juillet 1940, un certain nombre de personnalités rédige une *Déclaration* qui, d'après F.-G. Dreyfus ([359], 184), résume "ce que réclament bon nombre des jeunes intellectuels français depuis une décennie", où l'on peut lire :

"La course vers une forme nationale du socialisme est universelle, à la seule exception de l'Angleterre parmi les grandes nations. Partout ailleurs, depuis le New Deal des Etats-Unis jusqu'au stalinisme de l'URSS en passant par les Etats totalitaires de l'Europe centrale et la péninsule Ibérique, les peuples ont cherché à atteindre par des voies spectaculairement différentes des buts identiques."

900 Henri Cartan nous a dit le 1er octobre 1990 qu'il possédait des lettres de Lebesgue à son père.⁹⁷⁷

901 Sur les travaux mathématiques de Zoretti voir Poggendorff tomes V et VI, ainsi que p.373-374 et 705 de [253].

- 902 Il manque le début de cette lettre, datée du 10 août 1912 (cachet de la poste).
- 903 Sur la théorie de l'intégration de Pierpont voir [361] et [362] (qui donne des informations intéressantes sur la pénétration de l'intégrale de Lebesgue aux Etats-Unis)⁹⁷⁹.
- 904 P.774 de [363].
- 905 [364]. Sur ces questions voir [372].
- 906 P.797 de [364].
- 907 F. Houssay (1860-1920), professeur de zoologie à la Sorbonne et ⁹⁵³ maître de conférences à l'Ecole Normale Supérieure (donc collègue de Lebesgue qui enseignait également à l'Ecole). (Voir aussi [174]).
- 908 Il s'agit de la succession de J. Chatin (1847-1912), membre de la section d'anatomie et zoologie de l'Académie des Sciences, mort le 4 juillet. Houssay ne sera pas élu, mais P. Marchal (1862-1942), élu le 4 novembre 1912.
- 909 La thèse [365] de R. Worms (1869-1926), sociologue.
- 910 *Le Journal*, quotidien de Paris, fondé en 1892 par F. Xau.
- 911 L'article de J. Lejeaux *Sur les poulets carnivores*, publié p.6 du *Journal* de 9 août 1912, rendant compte de [366].
- 912 L'article de R. Perrier *La forme des poissons* publié dans *Le Journal* du 16 août, rendant compte de [367] (page 6).
- F. Houssay est le fondateur de la morphologie dynamique française ; il a dirigé de 1910 à 1920 la Collection de morphologie dynamique éditée par Hermann. Dans [367], il étudie la stabilité structurelle et la morphogénese des poissons : c'est un précurseur de [368].
- 913 Il s'agit en fait d'un article du 6 août paru dans *Le Journal* et intitulé *Voulez-vous de beaux enfants ?* par le docteur Cabanès qui rend compte des travaux du premier Congrès international d'eugénique à Londres en été 1912 et auquel avait participé F. Houssay.

Rappelons que la Société française d'eugénique (pour la régénération et l'amélioration de l'espèce humaine) a été fondée en 1913. (Pour une histoire des mouvements eugéniques voir [369] et [370].)

914 L. Descaves (1861-1949), romancier, membre de l'Académie Goncourt depuis 1900.

E. Perrier (1844-1921), naturaliste, élu membre de la section d'anatomie et zoologie de l'Académie des Sciences le 12 décembre 1892, professeur de zoologie et membre de l'Académie de médecine.

Séverine, pseudonyme de C. Rémy, épouse Guebard, (1855-1929), libertaire, secrétaire de J. Vallès, directrice du *Cri du Peuple* (1886-1888).

915 Créée par la mort de Poincaré le 17 juillet 1912. C'est Hadamard qui sera élu à l'Académie des Sciences le 9 décembre 1912, Borel ne sera élu que le 11 avril 1921 en remplacement de G. Humbert, mort le 22 janvier 1921. Lebesgue sera élu le 29 mai 1922 en remplacement de C. Jordan mort le 21 janvier 1922.

916 Où se trouvait la maison de campagne de Borel.

917 [357]⁹⁸⁹

918 Borel a été invité à prononcer une conférence à l'inauguration de l'Institut Rice à Houston au Texas entre 10 et 12 décembre 1912, en remplacement de Poincaré ([371], 1773).

S. Mandelbrojt a été professeur au Rice Institute depuis 1926 ([375], 15).

919 [373].

920 Il s'agit peut-être de la fille d'un élève de l'Ecole Normale Supérieure de la promotion 1885, professeur au lycée Henri IV.

921 Avant le départ des Borel pour les Etats-Unis.

922 Commune du département de la Vienne près de Lusignan où les Drach avaient une maison de campagne.

923 Nous situons cette lettre en juillet 1913.⁹⁵⁶

924 L'Ecole Normale Supérieure était rattaché à l'Université de Paris par décret du 10 novembre 1903. Certains enseignants de l'Université étaient "délégués" à l'Ecole. En mathématiques c'étaient Borel, Cartan, Lebesgue et Vessiot.

925 Elèves de l'Ecole Normale Supérieure de la deuxième année.

926 Elèves de l'Ecole Normale Supérieure de la promotion 1909. R. Deltheil (1890-1972), le "cacique" de cette promotion, professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.

- 927 Elèves de l'Ecole Normale Supérieure de la promotion 1909.
- 928 Elève de l'Ecole Normale Supérieure de la promotion 1910. Borel⁹⁶¹ 954
était sous-directeur de l'Ecole et il y habitait.
- 929 D'agrégation.
- 930 F. Leroy (1889-1967), E.N.S. 1910, professeur de mathématiques spéciales à Rennes, où il a eu J. Leray comme élève.
- 931 C. Pugibet, mort en 1954, E.N.S. 1908, devint inspecteur général.
- 932 E.N.S. 1908.
- 933 E.N.S. 1909.
- 934 Fille de Lebesgue.
- 935 Il s'agit de l'élection à la chaire de calcul différentiel et intégral laissée vacante par la mort de J. Tannery. C'est E. Cartan qui y sera nommé ; il était maître de conférences depuis 1909.
- 936 Borel a marqué sur cette lettre : octobre 1913 ?
- 937 Lebesgue habitait à Saint-Mandé, donc A = Lebesgue. Comme A tutoie M, il est probable que M = Montel.⁹⁶³
- 938 Donc B = Vessiot.
- La chaire de Mathématiques générales était celle de Painlevé. Il s'agit en fait du mouvement qui a eu lieu à la suite de la mort de Poincaré, qui était titulaire de la chaire d'Astronomie mathématique et mécanique céleste. Painlevé a pris la chaire de Mécanique rationnelle d'Appell, Appell a pris la chaire de Poincaré qui a changé de nom : Mécanique analytique et mécanique céleste. Guichard, qui était chargé de cours en remplacement de Painlevé élu député, a pris la chaire de Mathématiques générales, Vessiot et Lebesgue ayant été candidats. Et c'est Drach qui a pris la place de Guichard.
- 939 Il s'agit probablement de Painlevé.
- 940 Painlevé a été réélu député.
- 941 J. Babinski (1857-1932), célèbre neurologue qui a étudié en particulier l'hystérie.
- 942 Borel a marqué sur la lettre : 1913 ? Nous la situons après la précédente.
- 943 [374].
- 944 Un théorème de Riemann, p.162-170 de [374].

- 945 Note 1, p.163.
- 946 P.113-117 de [55] ; sur Weber voir la note 1, p.116.
- 947 12 mars 1914 (cachet de la poste).
- 948 G. Bouligand (1889-1979), E.N.S. 1909, 3^e à l'agrégation en 1912, nommé membre correspondant de l'Académie des Sciences le 18 janvier 1937. Il était élève de Lebesgue et sa thèse de 1914 portait sur le problème de Dirichlet.
- 949 Dans la promotion de l'E.N.S. de 1910 se trouvait la première ^{jeune} fille admise à E.N.S. de ^{d'Ulm} la rue (7^e sur 22).⁹⁶⁵
- 950 Sur l'histoire des mathématiques à l'époque de la correspondance de Lebesgue avec Borel voir [376].
- 951 Sur Fatou, voir p.356-357 de [377].¹⁰⁸³
- 952 On doit situer cette lettre peu avant le 13 mai 1914.
- 953 F. Houssay était directeur du Laboratoire de zoologie de l'Ecole Normale Supérieure. La collection dirigée par Houssay chez Hermann *Exposés de morphologie dynamique* a été poursuivie sous la direction de A. Magnan, ⁽¹⁸⁸³⁻¹⁹⁵¹⁾ professeur au Collège de France où il était titulaire de la chaire *Mécanique animale appliquée à l'aviation*.
- 954 La moitié de la promotion de l'E.N.S. de 1910 a été tuée dans les premiers mois de la guerre 1914-1918 : on y trouve les noms de Berthiot, Antoni, Piglowski et Bardy.⁹⁷⁶
- 955 M. Marty (1890-1964) suivait les cours de Borel et Lebesgue qui préparaient les élèves de l'E.N.S. au certificat du calcul différentiel et intégral enseigné par Goursat à la Sorbonne. R. Deltheil (1890-1972), déporté en 1944, écrit à ce propos ([379]) :
- "M. Lebesgue nous arrivait de Poitiers tout auréolé de la renommée de ses travaux sur l'intégration ; j'ai conservé le souvenir de la sympathie particulière qu'il portait à Marty."
- 956 La liste qui se trouve à la fin de la lettre CCVI correspond à celle des élèves de l'E.N.S. qui ont passé l'agrégation en 1912 ; il faut donc placer cette lettre CCVI avant la lettre CCIV du 18 août 1912.
- 957 La moitié des élèves de cette liste a été tuée à la guerre de 1914-1918.
- 958 L. Antoine (1888-1971), élève de l'E.N.S. de la promotion 1909, blessé, pour la troisième fois, grièvement, il perd la vue.

H. Lebesgue a suggéré à Antoine ([381]) de s'occuper de

l'extension à des espaces de dimension supérieure à 3 de certains théorèmes valables pour les espaces de dimension 3. Mais Antoine ne réussit pas à démontrer les conjectures de Lebesgue. Il montrera enfin en construisant un contre-exemple que l'hypothèse de Lebesgue était inexacte. Il a soutenu sa thèse ([382]) à l'Université de Strasbourg en 1921 (voir le rapport [380] sur sa thèse).

959 Il s'agit plutôt de A. Blondel (1884-1914), élève de l'E.N.S. de la promotion 1904, premier à l'agrégation de mathématiques en 1907, tué à l'ennemi le 12 septembre 1914, qui écrit dans sa thèse ([383], 2) :

"Les nombreux calculs numériques qui ont été nécessaires pour étudier les marées de la mer Rouge m'ont été facilités par une machine à calculer, mise à ma disposition par M. Borel."

Blondel écrit à propos de ses calculs :

"Pour l'application numérique, j'ai employé la méthode de calcul de Ritz, qui m'a semblé beaucoup plus commode que la méthode de Fredholm ; il est vrai que je n'en ai pas démontré la légitimité, mais j'ai remarqué qu'elle conduit, dans un cas particulier, au résultat exact ; dans le cas actuel, la convergence des approximations successives ne fait aucun doute."

960 L. Dreyfus (1875-1944), professeur de mathématiques au lycée de Poitiers, déporté en 1944 avec les juifs de Poitiers et mort en déportation.

961 Néollier a été reçu à l'agrégation, dernier *ex aequo* avec Maupert, en 1913. Il a été tué à l'ennemi en 1914.

Au classement de cette agrégation de mathématiques de 1913, on trouve Deltheil (1er), Leroy (3^e), Pugibet (5^e) et Piglowski (9^e). J. Piglowski (1889-1915) est mort pour la France le 18 février 1915.

962 Dans *Le Matin* du lundi 4 août 1913, en première page, dans les deux premières colonnes : "*Parlez-moi de la culture de la vigne !*", "*Que pensez-vous du droit des minorités ?*" Voilà ce qu'on demande à nos futurs officiers par S. Lauzanne, rédacteur en chef.

Il décrit l'oral du concours de Saint-Cyr au lycée Saint-Louis de Paris et les questions posées à l'oral de philosophie :

"Au fond ce qu'il y a d'intéressant là-dedans, ce sont moins les questions elles-mêmes que la tendance qu'elles révèlent. On sent que la vague de phraséologie qui recouvre à cette heure les 3 quarts de la France pousse ses flots sonores et creux jusqu'au pied des remparts militaires. Le bazar de rhétorique sociale qu'on a ouvert en ce pays il y a une quinzaine d'années s'est agrandi de façon formidable : il a maintenant pignon sur toutes les rues et

comptera bientôt parmi ses actionnaires non plus seulement des politiciens, mais des universitaires, des magistrats, des officiers."

Et Lauzanne ajoute :

"La seule digue qu'on puisse opposer à son envahissement est l'inertie des acheteurs. On vous dit que le niveau intellectuel de l'armée baisse, que les candidats à St Cyr sont d'une médiocrité lamentable. Allons ! Tant mieux ! Si le niveau intellectuel consiste à ce qu'ils ignorent "le système de refonte du droit de propriété que demandent les socialistes" (question posée à l'examen de St Cyr par M. Bouglé), cette médiocrité ne sera jamais assez grande!"

Il propose enfin de diviser par 54 "les points obtenus pour l'épreuve dite de philosophie".

Bouglé enseignait la philosophie à l'Ecole Normale Supérieure, comme Lebesgue, et il était, également comme Lebesgue, examinateur pour le concours d'entrée à Saint Cyr. Bouglé était également chargé à la Sorbonne du cours d'Histoire de l'économie sociale.

963 M = Andoyer, et non Montel.

H. Andoyer (1862-1929) était professeur de mathématiques au lycée Fénelon à Paris qui avait une classe préparatoire à l'E.N.S. de Sèvres. En 1913-1914, il a été suppléé à Fénelon par Vessiot, qui était aussi examinateur d'admission à l'Ecole Polytechnique, et qui sera nommée la même année répétiteur d'analyse à cette Ecole.

H. Andoyer était professeur d'astronomie à la Faculté des Sciences de Paris et il sera élu le 30 juin 1919 membre de l'Académie des Sciences de Paris.

964 Lebesgue a été nommé chargé de conférences à l'Ecole des Hautes Etudes, 1ère section, en remplacement de J. Hadamard.

Notons que Lebesgue ne sera titularisé que le 1 décembre 1919 sur la chaire vacante depuis la mort de Raffy en 1910, et Vessiot le 1er novembre 1919. (Voir dans [384] l'histoire des chaires de la Faculté des Sciences de Paris pendant cette période.)

965 M. Rouvière⁽¹⁸⁸⁹⁻¹⁹⁶⁶⁾, élève de l'E.N.S. de la promotion 1910, agrégée de physique en 1913 (9^e), professeur de physique au lycée Victor Duruy à Paris. Elle a épousé J. Rivière, élève de l'E.N.S. de la promotion 1909, répétiteur de physique à l'Ecole Polytechnique, mort en 1975.

966 P. Dupuy (1856-1948), historien, surveillant général à l'E.N.S., auteur de [385] (voir [386]).

967 Conférence donnée le 13 mai 1914. Sur cette question voir [387]
[388] et [389].

968 Il s'agit peut-être de P. Lambert⁹⁹⁷.

969 S'agit-il des abonnés de *La Revue du Mois* ?

970 La famille de Lebesgue avait quitté Beauvais à la suite de
l'avance de l'armée allemande.

971 "Paris, le 31 août 1914

Mon cher Lebesgue,

Je reçois la circulaire de M. Appell relative à la retenue
de 5-10 % sur les traitements des non mobilisés en faveur du Se-
cours National. Vous la connaissez. Je lui répons :

Qu'il est impossible de consulter l'Association, que l'on
doit se contenter du bureau et que j'écris à Duboscq en même temps
qu'à vous.

Que pour faire connaître l'idée il faudrait faire publier la
circulaire dans *Le Temps*, *Les Débats* et *L'Humanité* en proposant
les combinaisons suivantes :

Que le prélèvement devrait être fait automatiquement par
le fonctionnaire payeur ;

qu'on pourrait faire commencer le taux de 10 % aux traitements
à 6000 F.

Si les réponses vous semblent raisonnables, faites passer la
note aux trois journaux, avec les explications nécessaires. Un
échange préalable de correspondance avec Duboscq (je ne suis pas
sûr qu'il soit à Montpellier, mais je le crois) serait trop long.
Je le préviens.

Croyez à mes meilleurs sentiments.

M. Caullery

Je suis obligé de quitter Paris demain. Je pense pouvoir
rentrer à la fin de la semaine."

Sur l'Association amicale des professeurs" voir la note 484.

972 2 janvier 1915 (cachet de la poste).

973 Dès la fin de l'année 1914, ont été expérimentés les premiers
systèmes de repérage des batteries par le son. (Sur ce
sujet voir p.639-649 de [390]). (Voir note 978).

A l'Ecole Normale Supérieure de la rue d'Ulm une pléiade de
savants s'est mise au travail et bientôt, sous la direction du
Service Géographique de l'armée (dirigé par le général R. Bourgeois
(1857-1945), élu à l'Académie des Sciences le 18 juin 1917), de

nombreuses sections de repérage furent constituées. Beaucoup de mathématiciens et de physiciens participaient à ces travaux, parmi lesquels E. Borel, G. Claude (futur administrateur de la Société Air liquide, élu à l'Académie des Sciences le 1er décembre 1924 ; l'Académie annule cette élection le 4 septembre 1944), A. Cotton, A. Dufour (futur professeur de physique à l'Université de Paris), J. Hadamard, H. Ollivier (futur professeur de physique à l'Université de Lille), P. Weiss (1865-1940) (futur professeur de physique à l'Université de Strasbourg, élu à l'Académie des Sciences le 21 juin 1926) et H. Abraham (1868-1943) (directeur du laboratoire de physique de l'E.N.S., mort en déportation). (Sur cette question voir aussi [391] et [392].)

974 F. Lebeau (1890-1915), élève de l'E.N.S. de la promotion 1910, fils d'un pasteur protestant mort en 1894 à Montauban. Sa mère, soeur de E. Borel, étant morte en 1903, Borel devient son tuteur, qui, n'ayant pas d'enfants, l'a adopté.

Agrégé de physique en 1913, mobilisé en 1914, il fut détaché dans une section de repérage par le son dirigé par C. Maurain. A sa demande, il reprit sa place dans un régiment d'infanterie et il sera tué en Champagne le 29 septembre 1915 (voir [393]).

975 J. Duclaux dirigeait la section n° 1 de repérage par le son. Beaucoup d'autres scientifiques de l'E.N.S. faisaient de même, en particulier : G. Darmois, E. Darmois, J. Cabannes, J. Chazy, C. Maurain et A. Cotton.

976 J. Dieudonné écrit à ce propos ([378], 13-14) :

"Dans le grand conflit de 1914-1918 le gouvernement allemand et le gouvernement français n'avait pas compris les choses de la même manière en ce qui concernait la science. Alors que les Allemands faisaient très sérieusement travailler leurs savants, mais pour augmenter le potentiel de leurs armées par leurs découvertes et par l'amélioration d'inventions ou de procédés que leurs servaient ensuite à mieux se battre, les Français, tout au moins au début et pendant un an ou deux, avaient, dans un esprit démocratique et certainement dans un élan patriotique que l'on ne peut que respecter, considéré que tout le monde devait être au front en première ligne, si bien que les jeunes savants aussi bien que les autres Français faisaient leur devoir sur la ligne de front. Le résultat fut une hécatombe effroyable parmi les jeunes scientifiques français et quand on ouvre les pages des promotions de la guerre de l'Ecole Normale, on voit d'énormes trous, d'énormes vides, de grosses capitales noires qui signifient que deux tiers d'une promotion a été fauchée par la guerre. Cette situation a eu des répercussions fâcheuses pour les mathématiques françaises."

977 Henri Cartan a bien voulu nous envoyer la seule lettre qu'il possède de Lebesgue à son père, datée du 14 avril 1930 (cachet de la poste) :

"Lundi

Mon cher Cartan,

M. de Rham qui, comme vous vous rappelez, s'occupe d'*Analysis Situs*, me remet le manuscrit de sa Thèse dont le dernier chapitre est consacré aux théorèmes que vous avez énoncés sur les intégrales multiples. Accepteriez-vous d'examiner cette thèse ? Le manuscrit très soigné est de lecture facile matériellement et la compréhension facilitée par le fait que M. de Rham a fait un exposé complet n'obligeant pas à se reporter aux mémoires (en partie faux, en partie rectifiés, en partie contradictoires) de Poincaré.

Si oui, et si vous n'êtes pas en ce moment parti en vacances, voulez-vous donner rendez-vous à M. de Rham (50 rue des Ecoles, Paris V) qui reste encore à Paris jusque samedi sans doute. Il irait vous porter son manuscrit et vous pourriez l'interroger.

Cordialement à vous.

H. Lebesgue" 1064

A gauche de la signature, comme le note H. Cartan, Elie Cartan a noté de sa main : jeudi 17 à 14 h 30.

G. de Rham (1903-1990) a passé sa thèse en juin 1931, avec E. Cartan comme président et P. Montel et G. Julia comme examinateurs. Il a dédié sa thèse à H. Lebesgue.

Cette thèse (p.23-110 de [70]) est suivie dans ses *Oeuvres mathématiques du Rapport sur la thèse de Georges de Rham* de E. Cartan (p.111-113 de [70]).

Lebesgue doit faire allusion au chapitre III de cette thèse *Variétés. Intégrales multiples* (p.75-100) ; de Rham a dû ajouter ensuite le chapitre IV *Construction des complexes* (p.101-110).

G. de Rham écrit dans son article *L'oeuvre d'Elie Cartan et la topologie* ([70],541) :

"Dans la liste impressionnante des travaux d'Elie Cartan, qui, de 1893 à 1947, s'étendent sur une période de 55 ans, ceux qui concernent au moins en partie la topologie ont été publiés entre 1925 et 1937. Il semble bien qu'ils ont tous été faits de 1924 à 1935. Ce n'est qu'à partir de 1924, donc à l'âge de 55 ans, qu'Elie Cartan s'est occupé activement de problèmes de nature topologique et, comme on sait, il y a apporté des contributions de la plus haute importance. Dans un opuscule intitulé *A mathematician's apology*, G.H. Hardy écrit que les mathématiques, plus que tout autre art ou science, sont un jeu de jeune homme. A l'appui de sa thèse, après Galois, Abel, Ramanujan et Riemann, il cite Newton (1642-1727) et Gauss (1777-1855) qui ne sont pas morts jeunes mais qui, dit Hardy, ont cessé de produire vers 40 ou 50 ans, et il ajoute : je ne connais

pas d'exemple de découverte mathématique importante faite par un homme de plus de 50 ans.

Eh bien, je ne connais pas d'exception plus éclatante à cette règle que les travaux d'Elie Cartan."

G. de Rham précise qu'en 1928 ([70], 645-646) il avait bénéficié "des précieux conseils et encouragements d'Henri Lebesgue" et qu'il s'était familiarisé "avec le calcul différentiel extérieur en suivant un cours d'Elie Cartan et en lisant ses *Leçons sur les invariants intégraux*. Les rares mathématiciens qui s'occupaient alors de topologie ne connaissaient guère le calcul différentiel extérieur." (Voir aussi p.657-660 de l'autobiographie de G. de Rham dans [70]).

978 C. Nordmann (1881-1940), astronome à l'Observatoire de Paris, a mis au point, sous le commandement du colonel R. Nivelles, les premiers appareils de repérage par le son dès octobre 1914. La première expérience a eu lieu au Bois de Boulogne le 17 novembre 1914 devant une commission présidée par le général Galiéni et dont faisait partie P. Painlevé, alors président de la Commission supérieure des inventions.

Nordmann a été le premier à repérer une batterie ennemie par le son le 8 décembre 1914. A la suite de ce succès, le Haut commandement décida la création des sections de repérage par le son. (Pour l'historique, voir [394]).

979 Dans les papiers de M. Fréchet, déposés dans les Archives de l'Académie des Sciences de Paris, dans le Carton n° 1, il existe une lettre de E.B. Wilson (1879-1964) (qui a passé l'année universitaire 1902-1903 à l'E.N.S. ^{et fut} professeur à M.I.T. de 1907 à 1922 et à Harvard de 1922 à 1945) du 24 mars 1917 approuvant la position de Fréchet contre Pierpont, et dans laquelle il écrit que G. Birkhoff (1884-1944) "pense que vous avez entièrement raison de dire que la définition de l'intégrale de Pierpont n'est pas bonne".

980 Il existe une correspondance de Fréchet avec Janiszewski dans les papiers de Fréchet déposés aux Archives de l'Académie des Sciences de Paris, Carton n° 1. On y trouve également une lettre de Borel à Fréchet du 10 mars 1912 sur la thèse de Janiszewski où il écrit que "l'idée de Janiszewski est ingénieuse".

981 Nous situons cette lettre vers le début de 1915,

982 Il s'agit des calculs pour la mise au point de nouveaux systèmes

de repérage par le son plus efficaces entrepris à l'E.N.S. au début de 1915 (voir [390]).

983 Sur le problème de l'onde de choc voir [390].

984 Ce type de problèmes a été abordé par Lebesgue en 1914 ([396] et [397]) à la suite d'une note de Bricard ([395])¹⁶⁵

985 Nous situons cette lettre vers février 1915.

986 W.C. = Weiss-Cotton , N.D. = Nordmann-Dufour.

987 La méthode simple de repérage par le son se faisait par l'intersection de deux hyperboles ([390]).

988 Lebesgue a dû poser sa candidature à l'occasion de la vacance de la chaire de Poincaré (voir la note 938).

989 Pour la laissée place vacante par la mort de Poincaré, l'Académie a fait le classement suivant (CRAS, 155(1912), 1205) :

En première ligne : Hadamard ;

en deuxième ligne (par ordre alphabétique) : Borel, Goursat ;

en troisième ligne (par ordre alphabétique) : Guichard,

Lebesgue.

Lors du vote (p.1216), Hadamard a obtenu 36 suffrages et Goursat 21. Goursat sera élu membre le 19 mai 1919 et Borel le 11 avril 1921.

990 Il s'agit d'une lettre de Borel à Lebesgue.

991 [230].

992 C'est la réponse de Lebesgue à la lettre précédente de Borel.

1) concerne les lignes 2 à 6, 2) les lignes 7 à 9 et 3) les lignes 14 à 20 de la lettre de Borel. (Lebesgue a renvoyé à Borel sa lettre avec ces indications.)

993 Voir la lettre CCXIV.

994 [309].

995 Nous situons cette lettre vers mai 1915.

996 J. Simon (1867-1925), sous-directeur du laboratoire de chimie de l'E.N.S. et chargé de conférences à la section de physique. Pendant la guerre 1914-1918, il a dirigé à l'E.N.S. le laboratoire de chimie appliquée à la défense nationale, laboratoire qui a notamment fabriqué des gaz de combat.

- 997 P. Lambert (1894-1915), admis second à l'E.N.S. à 17 ans, tué le 13 mars 1915. Il a écrit l'article [399] où $a^2 + b^2$ joue un rôle important. (Voir aussi [398]).
- 998 11 octobre 1915 (cachet de la poste).
- 999 F. Lebeau, fils adoptif de E. Borel, a été tué au combat le 26 septembre 1915.
- 1000 G. Hervé (1871-1944), professeur agrégé, a dû quitter l'université en 1901 à la suite d'un procès qu'on lui avait intenté à cause de ses articles antimilitaristes. Il fonda alors le journal socialiste *La Guerre Sociale*. A la déclaration de la guerre en 1914, il se signala par un ardent patriotisme.
- 1001 Un hôpital militaire, l'hôpital 103, était installé à l'E.N.S. et dirigé par le sergent E. Cartan, mobilisé à l'E.M.S., et Madame¹⁰⁴⁸ Borel ([67], 171).
- 1002 [157].
- 1003 Elève de l'E.N.S. de la promotion 1885.¹¹⁶⁷
- 1004 17 novembre 1915 (cachet de la poste).
- 1005 Il s'agit du cabinet ministériel de P. Painlevé, nommé ministre de l'Instruction Publique, des Beaux-Arts et des Inventions intéressant la Défense Nationale, dans le ministère de A. Briand du 25 octobre 1915 au 12 décembre 1916. P. Painlevé créa un service du ministère : la Direction des Inventions, à laquelle collaborèrent en particulier Lebesgue et Montel, rattachée au Cabinet technique.
- 1006 G. Bernheim (1876-1943), E.N.S. 1896, germaniste, mobilisé comme infirmier à l'hôpital de l'E.N.S. en 14-18, mort en déportation en Auschwitz le 2 novembre 1943.
- 1007 1er janvier 1916 (cachet de la poste).¹¹⁶⁸
- 1008 Nous situons cette lettre en 1916.
- 1009 Charge de poudre prête pour le tir d'une bouche à feu, placée dans un sachet en textile ou en papier.
- 1010 15 mars 1917 (le cachet de la poste).
- 1011 Fabrique d'armement.¹⁰²⁸ Lebesgue et Montel ont calculé les corrections de tir des 75 et 155 C. (Voir la note 1171).
- 1012 Le 18 mars 1917, le 6^{ième} ministère Briand est dissous et remplacé par un ministère A. Ribot (22 mars 1917 - 7 décembre 1917) et P. Painlevé est nommé ministre de la guerre.
- 1013 Nous situons cette lettre dans la seconde quinzaine de mars.

1014 Vitry-le-François dans la Marne est à 176 kilomètres de Paris.¹⁰²⁹

1015 Par décret du 11 août 1914 avait été créé la Commission supérieure des inventions présidée par P. Painlevé, à laquelle avait collaboré, dès septembre 1914, l'équipe de *La Revue du Mois* (en particulier Borel, Maurain, Langevin et Perrin). Lorsque Painlevé fut nommé ministre le 29 octobre 1915, il créa un nouveau service, la Direction des inventions (l'ancêtre du C.N.R.S.). Par décret du 16 novembre 1915 sa direction administrative fut confiée à Bijard, contrôleur de 1^e classe de la marine, et sa direction scientifique à E. Borel, avec le titre de Chef du Cabinet technique du ministère de l'Instruction publique (*Le Journal* du 15 novembre 1915 publie à cette occasion la photographie de Borel en première page). Dès le début de la guerre Borel s'était engagé et il servait ^{en 1915} comme sous-lieutenant d'artillerie territoriale dans une section de repérage par le son. A l'article 2 du décret du 13 novembre portant création de la Direction des Inventions il était précisé :

"Des officiers et des fonctionnaires pourront être détachés à la Direction des inventions."

C'est ce que Borel avait proposé à Lebesgue et dont il est question dans la présente lettre. (Lebesgue avait déjà travaillé avec Borel sur les questions intéressant le repérage par le son).

Signalons comme réalisations de la Direction des inventions utiles à la Défense Nationale le repérage par le son et le repérage des sous-marins par ultra-son développé par Langevin ([400], 29 ; [401]).

Le Journal Officiel du 14 novembre 1915 a publié le rapport des ministres de la guerre, de l'Instruction publique et de la marine à R. Poincaré, Président de la République, donnant l'exposé des motifs pour la création de la Direction des inventions :

"La guerre, à mesure qu'elle se prolonge, prend de plus en plus le caractère d'une lutte de science et de machines : la combinaison des anciennes méthodes de combat et des inventions les plus meurtrières de l'industrie moderne pose chaque jour les plus pressants problèmes. Les services techniques de la guerre et de la marine s'appliquent activement à les résoudre, malgré la tâche accablante que leur impose l'intensité de leurs fabrications.

Mais la complexité et la variété de ces problèmes, et la nécessité d'aboutir vite, exigent la collaboration de toutes les forces intellectuelles du pays : or, les ressources du génie inventif français sont loin d'être complètement utilisées. De merveilleux instruments d'études restent inemployés, en même temps que les cerveaux capables de les mettre en oeuvre : les chercheurs, isolés dans leurs laboratoires ou leurs ateliers, dispersent leurs

efforts, faute d'une liaison suffisante avec la ligne de feu.

Orienter vers des buts précis les tentatives des inventeurs et coordonner leurs recherches, démêler dans la multitude des propositions celles qui sont susceptibles d'être efficaces et collaborer à leur réalisation pratique : tel sera le rôle du nouvel organisme dont nous proposons la création.

Nous nous inspirons ainsi de l'exemple de la Convention nationale qui réquisitionnait, au service de la patrie, savants et ingénieurs aussi bien qu'armuriers et forgerons. Aujourd'hui plus qu'alors, la mobilisation industrielle doit être complétée par la mobilisation scientifique du pays."

Lebesgue et Montel ont appartenu jusqu'à la fin de la guerre à la Section de mathématiques de la Direction des inventions, où ils ont fait des calculs de balistique ([406], 440 ; [407], 319-324 ; [461], 26).

Remarquons que G. Fubini a fait également des recherches sur la balistique.

Sur ces questions d'études sur la balistique, voir [411].

Borel écrit sur ces recherches pendant la guerre ([413], 197) :

"Pendant les quatre années de la guerre, j'ai dû délaisser mes travaux scientifiques pour des travaux d'un ordre tout différent : je me suis occupé d'une manière théorique et pratique de repérage par le son et de diverses questions d'artillerie (corrections de tirs, vent balistique, etc.) L'historique détaillé de ces travaux serait long : il serait malaisé et d'ailleurs superflu de déterminer la part de chacun dans une oeuvre collective où tous n'avaient en vue que le bien du pays. En particulier, avec MM. P. Weiss, A. Cotton, H. Lebesgue, la collaboration a été parfois si étroite que la contribution de chacun serait difficile à fixer exactement : ce que je puis dire, c'est que j'ai contribué, pour ma part, à l'ensemble important qui a permis à l'artillerie française de dominer, en 1918, l'artillerie ennemie par la précision du tir et la connaissance des objectifs."

C. Maurain disait dans son *Discours* du 14 janvier 1940 ([414], 7-8) :

"Un quart de siècle après, la France était en guerre. Ta carrière et ton oeuvre scientifique s'étaient développées de la manière brillante que l'on pouvait prévoir, et ton active maîtrise s'était manifestée en bien des domaines. Aussi quand Painlevé, vers la fin de 1915, créa un Service scientifique de la Défense Nationale, c'est à toi qu'il demande de le diriger, et tu me fis l'honneur et la confiance de m'y appeler parmi tes collaborateurs immédiats. Là, et dans les hautes situations que tu occupas dans la suite de la guerre, ta pénétrante et souple intelligence, ta puissance de travail, ta connaissance des gens et des choses, l'autorité de ta personne, te permirent de rendre d'immenses services au pays. L'organisation était alors, est toujours, une question fondamentale, à laquelle tu donnas tous tes efforts, et consacras dans la suite un beau livre.

Dans les postes que tu as occupés pendant ces années de ¹¹⁷³

guerre, tu avais eu l'occasion d'acquérir une connaissance encore plus vaste et plus précise des grands problèmes nationaux et internationaux, et la vie publique, qui t'avait toujours intéressé, t'appela, sans pour cela que tu négliges tout enseignement et tes recherches. Au Parlement, dans les grandes Commissions, dans les Cercles Internationaux, au Gouvernement, à la Société des Nations, tu jouas dès lors un grand rôle, qui s'est orienté vers les questions d'un haut intérêt général et humain.

Et voilà que maintenant, après un autre quart de siècle, de nouveau la France est en guerre. Tu ne t'es point contenté du rôle élevé que te permet de jouer sur la scène française et la scène mondiale la situation que tu as acquise. Ton activité toujours jeune s'est reportée aux travaux de jadis. Tu as constitué un puissant centre de recherches mathématiques, de physique théorique, de statistique et de balistique, avec un grand laboratoire de calculs, qui travaille à plein pour la Défense Nationale, laquelle, dans cette guerre comme dans l'autre, te devra beaucoup."

1016 N. Leblanc (1742-1806), chimiste, membre de l'Assemblée législative, régisseur des poudres et des salpêtres, a trouvé de nouveaux procédés pour l'extraction du salpêtre. Il avait découvert en 1790 un procédé de fabrication de la soude artificielle.

M. Berthelot (1827-1907), chimiste, s'est consacré pendant la guerre de 1870 à l'étude des explosifs et il a découvert le phénomène de détonation et de l'onde explosive.

1017 L. Driencourt (1858-1940), polytechnicien, ingénieur hydrographe. En 1914, il est affecté au Service géographique de l'armée, service auquel était rattaché le repérage par le son. Il était inventeur en 1910, avec A. Claude (1858-1938), de l'astrolabe à prisme ([402]), auquel se rapporte la lettre CCXIV de Lebesgue.

1018 H. Sonnet (1803-1879), élève de l'E.N.S. de la promotion 1819, docteur ès sciences, professeur de mathématiques et inspecteur de l'Académie de Paris a publié un dictionnaire de mathématiques appliquées ([403]). Artiste et chef d'orchestre, il a écrit un opéra : *La jeunesse de Duguesclin* ([436]).

1019 I. Didion (1798-1878), élève de l'Ecole Polytechnique de la promotion 1817, général d'artillerie en 1858, membre correspondant de l'Académie des Sciences élu le 21 avril 1873, auteur d'un traité de balistique ([404]).

1020 Pour la formule $A(\alpha v^2 + \beta v^3)$ voir p.98 de [403] et p.57-58 de [404].

Didion attribue cette formule au général G. Piobert (1793-1871), élu membre de l'Académie des Sciences le 30 mars 1840.

1021 E. Buat (1868-1923), élève de l'Ecole Polytechnique de la promotion 1887, directeur du cabinet du ministre de la guerre Millerand,

colonel en 1915, général en 1916, chef d'Etat Major de l'armée en 1920. Il a collaboré en 1911 à la Nouvelle collection scientifique dirigée par Borel ([405]).

1022 Pour les "méthodes de Didion" voir p.74-75 de [405].

1023 Il s'agit du général V.-E. Tariel ([405],122).

1024 P.73 et 122 de [405].

1025 F. Gossot (1853-1935), élève de l'Ecole Polytechnique de la promotion 1874, général d'artillerie en 1905, nommé le 3 août 1915 inspecteur des études et expériences techniques de l'artillerie jusqu'au 21 juillet 1917 ([408] :ce livre contient une notice de Paul Lévy sur Roger Liouville (1856-1930)).

1026 Pour les notations H , Δ et T voir [461] : Δ représente la masse d'un mètre cube d'air à l'altitude H et à la température T .
1027 Goybet, enseigne de vaisseau, travaillait à la Commission de Gâvre de l'artillerie de la marine qui faisait les mêmes calculs que Lebesgue et Montel (pour les abaques de Goybet voir p.29 de [409]).

1028 Les canons St Chamond fabriqués par la Compagnie des forges et aciéries de la marine fondée en 1850 à Saint-Chamond(Loire).

1029 A Vitry était installé le Centre d'études d'artillerie créé en juin 1916 à l'initiative du général Pétain. C'était un centre d'études et de perfectionnement pour les cadres supérieurs de l'armée. Il procédait à des études et des essais de tir au camp de Mailly. Borel supervisait alors les services techniques de l'armée.

1030 M. d'Ocagne (1862-1938), professeur à l'Ecole Polytechnique, élu à l'Académie des Sciences le 30 juillet 1922, fondateur de la théorie mathématique des abaques ([412]).

A la demande de J.-L. Breton (1872-1940), il a dirigé à partir de la fin 1916 la Section de nomographie de la Direction des inventions ([409],2), détachée de la Section de mathématiques où travaillaient Lebesgue et Montel.

J.-L. Breton, député républicain socialiste - comme P. Painlevé - de Cher en 1898, avait participé à la Commission des inventions ^{dès 1914,} ingénieur, chimiste, il est à l'origine de diverses inventions dont les chars de combat. Il sera élu à l'Académie des Sciences le 29 novembre 1920.

Breton fut nommé le 15 décembre 1916 sous-secrétaire d'Etat aux armements et fabrications de guerre (inventions intéressant la défense nationale) et il s'est trouvé ainsi à la tête de la Direction des inventions, il était donc le nouveau chef de Lebesgue et Montel en remplacement de Borel, appelé à de plus hautes fonctions.

Il est nommé le 20 mars 1917 sous-secrétaire d'état à la ~~charge de la direction des inventions,~~ guerre, Painlevé étant ministre de la guerre (du 20 mars 1917 au 7 septembre 1917) ; il le sera encore du 12 septembre 1917 au 13 novembre 1917, Painlevé étant Président du Conseil.

La Direction des inventions fut transformée après la guerre en Office des recherches scientifiques et industrielles et des inventions dirigé également par Breton. Cet office a été rattaché au C.N.R.S. lors de sa création en 1939.

1031 G. Malfitano (1872-1941), chimiste, chef du Laboratoire de chimie-physique de l'Institut Pasteur.

1032 R. Levailant, chimiste.

1033 La lettre de Lebesgue a dû être accompagnée par la lettre suivante de P. Montel dont le côté empreint d'humour ne cache pas tout à fait, nous semble-t-il, le désir de ménager la susceptibilité de Lebesgue.

Au début de l'alinéa deux Lebesgue a noté en marge : "tu parles !" et à la fin : "retu parles !" :

"Non, je ne partage pas l'avis de Lebesgue et je pense que la vue de canons, d'artilleurs, d'instruments et autres objets concerts aurait donné plus d'intérêt au travail que nous faisons et nous aurait permis de nous mieux rendre compte des difficultés dans un certain nombre de cas.

Mais je ne me sentais pas l'autorité nécessaire pour représenter, à moi seul, tout le Bureau du calcul et faire une visite officielle dans laquelle, profitant lâchement de l'état de sante de Lebesgue, j'aurai occupé toute l'autorité qu'il apporte à notre section.

Et voilà pourquoi je me suis privé du plaisir de dîner avec vous et de prendre le café au coin de la petite place¹⁰³⁴.

En ce qui concerne les rapports, je veux bien les lire - mais, comme je l'ai dit à Lebesgue, plus pour mon instruction personnelle que pour porter un jugement sur des questions que je ne connais pas.

Bien cordialement.

Paul Montel"

1034 Le Centre d'études de Vitry était situé rue Dominé de Verzet.

1035 Nous situons cette lettre également en mars 1917, Borel ayant quitté la Direction des inventions (voir la note 1030)¹⁰⁶².

1036 I.E. Emery (1866-1928), élève de l'Ecole Polytechnique de la promotion 1886, futur général, a été nommé le 31 décembre 1916 colonel à la Section technique de l'artillerie au Ministère de la guerre, qui faisait aussi des tables de tir ([406]).

- 1037 On notera le ton très agressif de cette lettre de Lebesgue qui montre la détérioration des relations personnelles entre Lebesgue et Borel. Etait-elle due aux airs de "supériorité" de Borel et à ses hautes fonctions ? Les deux "amis" n'étaient-ils plus au même "niveau" ?¹¹⁷⁴
- 1038 Nous situons cette lettre également en mars 1917.
- 1039 H. Buisson (1873-1944), élu correspondant de l'Académie des Sciences le 9 mai 1932.
- 1040 Cette Note est écrite sur le papier en tête *Sous-secrétariat d'Etat des inventions, 23 bis, rue de l'Université*, et Borel a ajouté la date : 2 novembre 1917.
- 1041 Borel écrivait effectivement dans sa *Notice* de 1912 (à laquelle Lebesgue réagit à retardement en 1917 !) que ([357],28) "la définition de la mesure des ensembles linéaires bien définis m'est entièrement due", et il écrit dans une note de ses *Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe* publiées en 1917 ([104],88) :
- "Dans mes *Leçons sur la théorie des fonctions* [[([5],47)], où j'ai donné pour la première fois cette définition, j'emploie l'expression *mesure zéro* ; depuis l'expression *mesure nulle*, employée, je crois, pour la première fois par M. Lebesgue, a prévalu."
- 1042 17 novembre 1917 (cachet de la poste).
- 1043 Il s'agit de la *Note sur le réglage d'artillerie lourde*, par le Capitaine Valentin, jointe à la lettre, préparée pour une édition ultérieure de [461].
- 1044 A la fin du ministère Painlevé, en novembre 1917, le Sous-secrétariat d'Etat des inventions a été supprimé, mais la Direction des inventions a poursuivi ses activités dirigée par Breton.
- 1045 21 décembre 1917 (cachet de la poste).
- 1046 Avec son mémoire [284] - dont l'impression a commencé en juillet 1918 ([284],193) - Lebesgue va déclencher une pénible polémique avec Borel sur des questions de priorité.

Borel lui répondra dans son article [415] - imprimé en mars 1919 ([415],73). Borel écrit à propos de la mesure et de l'intégration ([415],89) :

"Aucune Note ou aucun Mémoire récent sur l'intégration ou sur la mesure n'a l'originalité des pages que j'ai publiées en 1898 sur la mesure, ni des pages que M. Lebesgue a publiées en 1901 sur l'intégration."

Il ajoute dans ses *Remarques finales* ([415],89-91) :

"Il m'a été particulièrement pénible de me trouver contraint de discuter avec M. Lebesgue des questions de priorité ; depuis vingt ans, en effet, j'ai été plusieurs fois directement ou indirectement au courant de discussions de priorité entre M. Lebesgue et divers mathématiciens et, si j'ai souvent pensé que les contradicteurs de M. Lebesgue avaient raison, je n'ai jamais cru que M. Lebesgue eût tort. Cette attitude, qui m'a souvent fait taxer d'injustice par ses contradicteurs, est basée sur l'opinion que j'ai de sa bonne foi et de la nature de son esprit. Je n'ai aucune raison pour modifier cette opinion du fait que je me trouve personnellement mis en cause."

Et Borel conclut :

"Je m'adresse à moi-même aujourd'hui cette exhortation, afin d'adoucir la peine que m'ont faite certains passages de son Mémoire."

Lebesgue répondra à Borel dans [227] et la réplique [416] de Borel clora cette discussion.

De La Vallée Poussin écrira à Baire le 4 février 1922 ([317], 542) :

"J'ai été mêlé, contre mon gré, à la querelle Lebesgue-Borel que j'aurais voulu empêcher. C'est à peine un débat scientifique, c'est surtout le conflit de deux caractères. Cela ne vous intéresse pas. Vous vous méprenez entièrement quand vous pensez que l'éloge que Lebesgue fait de vous tend à vous représenter comme un précurseur honorable. Lebesgue n'a d'autre but que de vexer Borel."

Une comparaison intéressante des conceptions de Borel et de Lebesgue se trouve dans le livre de N. Luzin *Leçons sur les ensembles analytiques* ([82],19).

E. Borel écrit dans son "autobiographie" ([417],39) :

"Ce n'est pas ici le lieu de développer les conséquences qu'a eues la méthode ainsi créée, méthode consistant essentiellement à construire les intervalles à partir des points qu'on étudie, au lieu de chercher à étudier la répartition de ces points dans des intervalles formés à l'avance d'après une règle fixe. Il me suffira de rappeler les résultats qu'a donné cette méthode pour l'étude des fonctions analytiques dans certains domaines singuliers, et de rappeler également que tout le développement de la théorie de la mesure des ensembles et de la théorie célèbre de l'intégration de M. Lebesgue se rattache directement à cette méthode."

A. Denjoy a fait en 1946 ([418],61-64) une comparaison intéressante des conceptions de Borel, Baire et Lebesgue, ^{a donné} et en 1957 ([265],71-73) son opinion sur la controverse entre Lebesgue et Borel, où il affirme dans sa conclusion :

"L'équité commande d'attribuer la mesure à Borel et l'intégrale à Lebesgue. Au surplus, Borel n'a jamais tiré parti d'une

intégrale différente de celle de Riemann. Et même il n'a eu à intégrer que des fonctions continues ou ayant une singularité isolée."

En 1959, E.F. Collingwood écrit dans son article sur *Emile Borel* ([419], 501-502) :

"Borel published two notes ([278],[279]) in which he put forward a constructive definition of the definite integral which he developed two years later in a modified form ([287]) (reprinted as note VI in the second edition of [5], 1914). The integral of a bounded function was defined by means of the limits of approximating polynomials in approximating finite sets of intervals. For the integral of an unbounded function whose singularities are a set of measure zero an analogous definition was given. As a matter of subsequent history, the constructive approach to the definite integral as developed by F. Riesz, using step functions as the approximating functions and requiring only the notion of measure zero, and by Hahn, both of them in papers which, according to their authors, were directly inspired by Borel's ideas, is now firmly established."

Et il ajoute :

"Six years later, in 1918, Lebesgue attacked this point of view and denounced Borel's definitions as ambiguous in a long and highly polemical paper ([284]) in which the issue of priority was also raised in sweeping terms. The latter issue was quite unreal since Borel's priority in the theory of measure and Lebesgue's in the theory of integration were alike incontestable. Borel's reply ([415]) to this onslaught was dignified and effective, but there was a further exchange of shots ([416] and [227]) before this rather painful controversy, which caused Borel much worry and unhappiness, finally petered out in 1920."

M. Fréchet exposera en 1965 ([334]) les points de vue de Borel et Lebesgue sur la mesure et l'intégration.

C.P. Bruter est revenu en 1987 sur cette controverse ([420], 130-135) et il écrit à la fin de son paragraphe *Lebesgue contre Borel* :

"Borel aura en définitive le dernier mot, et c'est justice. La présentation par Lebesgue de Borel frise parfois la mauvaise foi. Quant au ton de Lebesgue, il lui arrivait d'atteindre les limites de la civilité."

1047 Sur Borel et les probabilités voir [422]. S. Callens publiera en 1991 sa thèse sur le même sujet à l'Ecole Pratique des Hautes Etudes en Sciences Sociales.

1048 Sur ce sujet voir [423].

1049 H. Chaumat (1867-1942), professeur d'électrochimie à l'Ecole Supérieure d'Electricité, puis professeur d'électricité au Conservatoire National des Arts et Métiers.

1050 J. Dumézil (1857-1929), élève de l'Ecole Polytechnique de la promotion 1877, général, inspecteur général de l'artillerie du 8 août 1916 au 10 juillet 1917.

1051 Il s'agit de [284].

1052 Lebesgue a été nommé professeur titulaire de la chaire laissée vacante par la mort de Raffy.

1053 Il s'agit de l'adresse de Lebesgue A Messieurs les Professeurs de la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, jointe à la lettre à Borel, et qui a été publiée dans [424], sans la liste de ses Travaux scientifiques, ni ses Situations universitaires.

1054 Borel a terminé la guerre comme commandant d'artillerie.

1055 14 octobre 1918 (cachet de la poste).

1056 Borel avait envoyé à Lebesgue la copie de sa lettre adressée au Doyen de la Faculté des Sciences de Paris P. Appel, qui était son beau-père :

"12 octobre, S.P. ¹⁰⁵⁷ 223

Monsieur le Doyen,

Je reçois la circulaire de M. Lebesgue et je suis étonné d'y voir l'affirmation que j'ai revendiqué une part dans la définition de l'intégrale de M. Lebesgue. J'ai au contraire, à diverses reprises, et notamment dans un article de la *Revue générale des Sciences* en 1909¹⁰⁵⁸ dit toute mon admiration pour ce travail original de M. Lebesgue, et essayé d'en faire comprendre l'importance à une époque où cette importance n'était pas aussi généralement reconnue qu'aujourd'hui. Vous vous rappelez peut-être que, lors de la première candidature de M. Lebesgue comme maître de conférences à la Faculté, je fus seul, à me joindre à mon regretté maître Tannery, pour appuyer cette candidature.

Ce qui est exact, c'est que j'ai donné de la mesure une définition entièrement nouvelle, d'où dérivent comme M. Lebesgue l'a loyalement indiqué les travaux de M. Lebesgue sur la mesure. Ce n'est pas le moment de chercher à déterminer laquelle des deux méthodes, celle de M. Lebesgue ou la mienne, sera la plus féconde.

D'autre part, l'intégration des fonctions égales constamment à zéro ou à un est le même problème que celui de la mesure et M. Lebesgue a d'une manière très remarquable ramené l'intégration de toutes les fonctions à ce cas particulier. Il y a donc une certaine filiation logique entre les travaux de M. Lebesgue et les miens. On peut dire aussi que l'intégrale Lebesgue est à l'intégrale Riemann ce que la mesure Borel est à la mesure Cantor. Mais tout cela n'enlève rien à l'originalité de M. Lebesgue, qui a été effectivement le premier à orienter dans une voie nouvelle et très féconde le problème de l'intégration ; il n'a pas à protester contre une

prétention que je n'ai jamais eue et que tous mes écrits démentent.

Je vous serais obligé, Monsieur le Doyen, de communiquer cette lettre à la Commission des mathématiciens et au Conseil et d'ajouter que, si je pouvais assister à la séance, je voterais pour M. Lebesgue, car mon opinion sur sa grande valeur mathématique n'a jamais varié.

Veillez agréer, Monsieur le Doyen, l'hommage de mon respectueux dévouement.

Emile Borel"

1057 Secteur Postal : Borel était au front où il commandait une batterie.

1058 [228].

1059 3 décembre 1918 (cachet de la poste).

1060 Sur Julia, voir [425]. G. Julia avait reçu le 25 janvier 1915 une très grave blessure au visage, et Borel était un peu un père pour ce jeune normalien ([175], 83-85).

1061 Le 31 décembre 1915 le Ministère de la Marine a publié le communiqué suivant :

"Dans la nuit du 28 au 29 décembre le sous-marin Monge a été coulé par un croiseur autrichien devant Cattaro. [[...]] Une bonne partie de l'équipage a été sauvée."

Pierre Appell (1887-1957) beau-frère de Borel était enseigne de vaisseau sur le Monge et il est resté prisonnier jusqu'en 1918. Il avait fait l'Ecole Navale en 1905 et deviendra député républicain socialiste - même tendance politique que Painlevé - de La Manche de 1928 à 1936.

1062 Lorsque Painlevé était ministre de la guerre (28 mars 1917 - 12 septembre 1917), Borel était nommé à la Direction des services techniques du ministère de la guerre, il était donc supérieur hiérarchique de Lebesgue.

Quand Painlevé est devenu président du conseil (12 septembre 1917 - 16 novembre 1917), Borel a été nommé secrétaire général de la Présidence du Conseil.

1063 Hilbert écrivait à propos de "l'introduction d'une notion" en mathématiques ([426], 93) :

"La fécondité est en effet nécessaire ; c'est aussi, en la matière, le tribunal qui juge en dernier ressort, et devant lequel tout le monde s'incline."

1064 Henri Cartan a bien voulu nous remettre encore une lettre de Lebesgue à son père qu'il venait de retrouver :

"Paris, le 19 octobre 1925

Mon cher Cartan,

Le jeune Madelain ne m'intéresse aucunement, mais Dautry m'intéresse beaucoup.

Dautry, ancien élève de Spéciales chez Montel, à Poitiers, est entré au Chemin de fer du Nord après Polytechnique. Il y est chargé de tout ce qui est construction, voies, ponts, bâtiments, etc. Il a fait preuve là des plus grandes qualités techniques, artistiques et débrouillardes ; son avancement a été très rapide. Montel l'a en grande estime.

Pour moi j'apprécie surtout qu'il est homme de coeur. Pendant la guerre il a aidé de toutes manières, grâce surtout aux possibilités d'emploi des chemins de fer et des usines de ses amis industriels, quantité de malheureux auxquels il continue de s'intéresser et qu'il fait monter dans l'échelle sociale s'ils en ont l'étoffe morale et intellectuelle. Je ne lui ai jamais recommandé quelqu'un en vain et le jeune Reisa dont il parle dans sa lettre est justement l'un de mes protégés qu'il a tiré d'une misère noire et qui devient quelqu'un.

Faites donc, pour Dautry, le plus que vous pourrez. Merci à l'avance.

Vous m'avez parlé, il y a quelque deux ans, du plan projectif complexe et vous m'avez demandé ce que c'est au point de vue de l'*Analysis situs*.

Dans mon cours de l'an dernier, après avoir exposé les travaux de Poincaré et de ses suivants, j'ai traité des exemples pris parmi les multiplicités que fournissent la géométrie et l'analyse et j'ai en particulier considéré le cas du plan projectif complexe. Voici les caractéristiques de cette variété (j'entends les caractères qui permettent de la distinguer de certaines autres mais qui ne sont pas, peut-être, suffisantes pour la différencier de toutes les autres - car c'est là que nous en sommes en *Analysis situs*.)

D'abord elle est bilatère.

Les nombres de Betti-Poincaré sont :

$$BP_1 = BP_3 = 1 \quad ; \quad BP_2 = 2 \quad ;$$

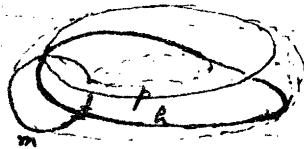
il n'y a pas de coefficients de torsion. Enfin le groupe fondamental se réduit à l'opération indentique. Ceci est curieux car jusqu'au bout Poincaré avait pensé, espéré, que seules les variétés simplement connexes auraient un tel groupe fondamental.

La division de cet espace en polyèdre à éléments simplement connexes ne parle guère à l'imagination ; elle peut se faire avec 4 sommets, 12 arêtes, 14 faces, 6 cases, 3 hypercases. C'est un polyèdre déjà très costaud ; je veux essayer de vous en donner une idée.

Soient H_1, H_2, H_3 les trois hypercases, chacune est homéomorphe à $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq 1$, par définition même ; les 3 frontières

de ces hypercases sont 3 hyperplans $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$, c'est-à-dire 3 espaces ordinaires à 3 dimensions E_1, E_2, E_3 ; dans chacun desquels il n'y a qu'un point à l'infini (espace de l'inversion). Mais les points de E_1, E_2, E_3 se correspondent 2 à 2 puisque les E_i servent à relier les H_i .

Imaginez dans E_i un tore T_i qui partage E_i en 2 parties. Nous aurons ainsi les parties A et B dans E_1 ; C et A dans E_2 ; B et C dans E_3 . Les lettres vous donnent la correspondance entre parties; pour fixer la correspondance entre points il suffit de fixer la correspondance pour les trois surfaces T_i qui se correspondent toutes 3 point à point. Voici: sur chaque tore traçons un méridien, un parallèle et une hélice torique à 1 seul tour, ou ainsi: m_i, p_i, h_i ; la correspondance est



$$m_1 \equiv p_2 \equiv h_3$$

$$p_1 \equiv h_2 \equiv m_3$$

$$h_1 \equiv m_2 \equiv p_3$$

Maintenant, si vous voyez clairement, c'est que vous avez les yeux diablement pénétrants.

Cordialement à vous.

H. Lebesgue"

R. Dautry (1880-1951), entré aux Chemins de fer du Nord, sut, au cours de la Première Guerre mondiale, adapter l'organisation de ce réseau aux besoins militaires.

En 1928 il devint le Directeur général du réseau de l'Ouest-Etat, puis président de la Conférence des directeurs des grands réseaux et il prépara leur fusion en 1938 dans la S.N.C.F.

Il sera ministre de l'Armement (1939-1940), puis ministre de la Reconstruction et de l'Urbanisme (1944-1945). Il deviendra en 1946 l'Administrateur Général du Commissariat de l'énergie atomique.

Lebesgue a fait, pendant l'année universitaire 1924-1925, un cours au Collège de France sur *Les divers ordres de connexion des espaces supérieurs* (O.S., tome I, p.178-179).

1065 L. Félix a tracé un intéressant portrait de H. Lebesgue dans son livre *Message d'un mathématicien* ([427],3-19).

1066 Sur Zoretti voir aussi [428], p.38. P. Gerbod écrit à ce propos¹⁰⁶⁸ ([428],162) :

"L'étude des dossiers individuels des personnels de l'Instruction publique et de l'Education nationale est intéressante. Elle permet de préciser certains points biographiques. Mais cette documentation n'est qu'en partie accessible (cf. la sous-série F 17 aux Archives nationales)."

1067 P. Gerbod écrit dans son livre *Les enseignants et la politique* (qui nous a été signalé par M. Zerner) ([428],13):

"La lutte contre le "péril cléricale" va de pair avec la bataille antimilitariste. L'affaire Dreyfus a révélé aux militants socialistes le danger de l'armée, tel que l'a laissé subsister la République "bourgeoise". N'est-elle pas au service du capitalisme en maintenant dans la rue l'ordre établi, en brisant les grèves ouvrières et en fondant l'Empire colonial ? Elle est livrée à un corps d'officiers formés dans "les Jésuitières", cléricale et anti-républicain, "caste orgueilleuse" qui impose "un esprit archaïque" et fait de la caserne l'asile de "survivances anachroniques"."

P. Gerbod signale aussi ([428],52) que "l'idéologie radicale-socialiste" a conservé "dans le milieu enseignant une audience indéniable" : ainsi, dans le recueil collectif publié en 1924, intitulé *Politique républicaine*, collaborent, entre autres, Herriot, Painlevé, Borel et Daladier. Le radicalisme "inspire" l'action de la Ligue des Droits de l'Homme, dont le Comité central de 1924 comprend Hadamard, Brunschwig et Langevin.

En 1931 ([428],63) est fondée l'Union rationaliste "dont le but est de répandre l'esprit et les méthodes de la science dans un climat de libre pensée". On trouve dans son comité d'honneur Borel et Hadamard.

1068 C. Goyard note ([429],25) que pendant les dix-huit premiers mois de l'épuration de 1944 à 1945, 3.285 mesures d'épuration ont été prises "dans le seul département de l'Education Nationale, qui comportait 234.854 enseignants" ; il y a eu 1.068 "exclusions définitives".

J. Tulard propose dans la *Conclusion* de ce colloque sur *Les épurations administratives, XIX^e et XX^e siècles*, de lancer des études ([429],125) "sur le destin des épurés et des épurateurs à partir d'études de cas individuels".

- 1069 Voir aussi sur ce sujet l'article très complet de T.H. Hildebrandt que nous venons de voir pour la première fois le 19 novembre 1990 ([430]). Un point de cet article ([430],472) a été précisé par W. Sierpinski dans [431].¹¹²⁰
- T.H. Hildebrandt a développé [430] dans [432], suivi d'un appendice de E.J. McShane ([433]).¹¹⁷²
- 1070 W. Sierpinski a construit en 1927 une fonction de classe 4 dans [434]. G.M. Fichtengolic rendant compte de cet article écrit (p.241 du tome 53(1927) de *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*) :
- "Die Methode lässt sich auf höhere Klassen ausdehnen."
- 1071 H. Lebesgue écrit à P. Langevin ([435],116) : "Tu t'intéresses à une physique mathématique qui est des mathématiques" et "à ce titre tu nous appartiens, tu es même une espèce à part dans le genre mathématicien".
- 1072 Maurice Servant, élève de Darboux, docteur ès science en 1899 à 22 ans, préparateur et chef de Travaux pratiques à la Sorbonne en 1899, était chargé de cours de géométrie supérieure à la Sorbonne en 1904. Cette année il a obtenu le Prix Brodin dont le sujet était *Développer et perfectionner la théorie des surfaces applicables sur le parabololoïde de révolution*. En 1907 il est nommé maître de conférences adjoint, chargé de conférences de mécanique physique et expérimentale. Il prendra sa retraite en 1929.
- 1073 B. Belhoste nous indique que l'Institution Duvigneau a été fondée en 1849 par J. Victor Duvigneau, né en 1823.
- 1074 A. Hervieux (1846-1906), professeur de mathématiques spéciales au lycée de Nancy pendant 20 ans, était chargé de la préparation à l'agrégation de mathématiques à la Faculté des Sciences de Nancy. Il a pris sa retraite en 1903.
- 1075 P. Montel (1876-1975), élève de l'Ecole Normale Supérieure de la promotion 1894 (reçu 15^e, Lebesgue était 4^e), agrégé de mathématiques en 1897 (reçu 2^e devant Lebesgue 3^e, Béghin étant 1^{er}), professeur de mathématiques spéciales à Poitiers de 1898 à 1901, pensionnaire de la Fondation Thiers de 1901 à 1904. Il retrouvera son ami Lebesgue en 1911 à la Sorbonne, après avoir été professeur de mathématiques spéciales à Nantes (1904-1907), puis au lycée Buffon (1907-1911).

- 1076 Lebesgue, entré à l'Ecole Normale Supérieure en 1894, agrégé en 1897, resta "boursier" de l'E.N.S. de 1897 à 1899, date à laquelle il fut nommé au lycée de Nancy.
- 1077 Voir p.79 et 86 de [4], 1^e éd., et p.67 de la 2^e éd., ainsi que la note VI, p.335. Voir aussi les lettres L et LI.
- 1078 Le livre [4] contient un grand nombre de résultats fondamentaux qui n'ont pas été mis en valeur ; par exemple les théorèmes de convergence de Lebesgue (p.114), énoncés dans un cas particulier, ou le théorème sur l'absolue continuité, cité incidemment en note (p.129), sans démonstration (p.188, 2^e édition).
- 1079 Voir la lettre XVII, p.31, et la note 133.
- 1080 Borel s'occupa lui-même, avec l'aide de sa femme, de 1904 à 1914, de sa ferme de l'Aveyron ([67], 74-75).
- 1081 Il s'agit de J.-P. Lagrula, né en 1870, licencié ès sciences mathématiques, calculateur à l'Observatoire de Lyon en 1896. Après sa thèse passée à Lyon en 1901, il est nommé aide-astronome à l'Observatoire de Lyon et chargé de cours d'astronomie à l'Université de Lyon de 1901 à 1905. Au commencement de juillet 1905, à la suite de Gonnessiat, il part pour Quito occuper un poste de professeur de mathématiques à l'Ecole supérieure des sciences de cette ville. A son retour en 1910, il est nommé astronome adjoint à l'Observatoire de Nice qui dépendait de l'Université de Paris, poste qu'il occupe jusqu'en 1924, date à laquelle il devient sous-directeur de l'Observatoire d'Alger, dont il sera directeur en octobre 1931 en remplacement de F. Gonnessiat.
- 1082 P. Morin, né vers 1830, mort en 1903, empêché de se présenter à l'E.N.S. au début du Second Empire, est maître d'études pendant 5 ans et ingénieur hydrographe à Arles pendant 10 ans. Il est docteur ès sciences en 1867. Nommé chargé de cours de mécanique à l'Université de Marseille en 1869, il deviendra professeur de mécanique à Marseille, puis à Rennes en 1876 ; il prend sa retraite en 1902. Le Roux, élève de Morin, alors maître de conférences à Rennes depuis 5 ans, est nommé à sa chaire, libérant un poste de maître de conférences qu'occupera Lebesgue.

Morin a collaboré notamment à la publication de la *Théorie des surfaces* de Darboux et des *Oeuvres de Fourier* (voir p.VI, tome I, des *Oeuvres de Fourier*).

- 1083 P. Fatou (1878-1929), élève de l'E.N.S. de la promotion 1898. En 1902 J. Tannery l'avait fait nommer à l'Observatoire de Paris, où il restera toute sa vie. Il ne sera nommé astronome titulaire qu'en 1928.
- 1084 Marguerite Borel décrit longuement dans ses souvenirs ([67], 92-95) ces soirées où se retrouvaient Langevin, Perrin, Montel, Lebesgue, Drach, N. Bernard et les Curie.
- 1085 E. Mascart (1837-1908), élève de l'E.N.S. de la promotion 1858, physicien, professeur au Collège de France (1872), directeur du bureau central météorologique, fut chargé de 1893 à 1906 de l'inspection générale des facultés des sciences. Il fut notamment président du Comité des inventions relatives à la Défense Nationale ([436]).
- 1086 D'abord institutrice à Merlemont (Oise), la soeur de Lebesgue était depuis 1899 responsable de la classe enfantine du lycée Félix Faure de Beauvais.
- 1087 En 1903, J. Drach, maître de conférences à Lille, est nommé professeur de mécanique rationnelle à Poitiers. On avait dû proposer à Lebesgue de prendre le poste laissé vacant par Drach. Lebesgue ayant refusé, c'est J. Clairin qui fut nommé ; il sera titularisé en 1906 dans la nouvelle chaire de mathématiques générales créée à Lille.
- 1088 Il s'agit de F. Lebeau (1890-1915), dont E. Borel était le tuteur depuis la mort de sa mère, soeur de Borel, en 1903. Il était en 1905 élève au lycée Louis le Grand. Après son baccalauréat de philosophie, il entra à l'Ecole de physique et chimie industrielle de la Ville de Paris, où enseignait P. Langevin. Il sera admis en 1909 à l'E.N.S.
- 1089 Voir la dernière ligne de la page 99.
- 1090 J. Bertrand (1822-1900) dont l'ironie était féroce.
- 1091 Moreau, élève de l'E.N.S. de la promotion 1887, docteur ès sciences physiques (Paris 1893), était professeur de physique et doyen de la Faculté des Sciences de Rennes.
- 1092 Beauvais dépendait alors de l'Académie de Paris.
- 1093 La classe enfantine du lycée de Beauvais n'a pas été fermée ; Mlle Lebesgue y enseignait encore en 1914. Elle est morte à 47 ans, après la guerre 14-18.

- 1094 Notation adoptée par Lebesgue ([55], 54).
- 1095 Il s'agit peut-être de H. Ebert (1861-1913), professeur à Munich (Technische Hochschule), astrophysicien. Aucun Ebert ne semble avoir été astronome à Paris.
- 1096 C. Bayet(1849-1918), élève de l'E.N.S. de la promotion 1868, historien d'art, recteur de l'Académie de Lille en 1879, directeur de l'enseignement primaire au ministère de l'Instruction publique en 1896 et enfin directeur de l'enseignement supérieur de 1902 à 1914; engagé volontaire en 14-18, il fit partie de l'état-major du général Sarrail à Salonique.
- 1097 Voir p.173-174 de [11].
- 1098 Maillard (1845-1906), élève de l'E.N.S. de la promotion 1864, docteur ès sciences en 1871, professeur du calcul différentiel et intégral à Poitiers depuis 1872, mort le 5 septembre 1906.
- 1099 Il n'y avait que deux chaires de mathématiques à Poitiers, celle de calcul différentiel et intégral occupée jusqu'en 1906 par Maillard et celle de mécanique rationnelle occupée par J. Drach (1871-1949) - élève de l'E.N.S. de la promotion 1889 comme Borel. Drach avait remplacé Padé, transféré à Bordeaux, en 1902. Il partira à son tour à Toulouse en 1908 sur sa demande, puis il sera nommé en 1913 à Paris (élu à l'Académie des Sciences le 10 juin 1929).

J. Drach avait échoué à l'agrégation de mathématiques de 1892 et il ne se représenta pas, préférant se consacrer à son oeuvre qui est d'une grande originalité. A sa mort, Borel écrivait (*Ass. am. E.N.S.*, 1950, 9-11) :

"Le rêve de Drach était évidemment d'être le Galois de sa génération, sans se croire cependant obligé de mourir prématurément. Sa tournure d'esprit plus romantique que classique l'amenait à percevoir par intuition les théories avant d'avoir bâti les démonstrations ; il avait d'ailleurs conçu une méthode, qu'il avait nommée "intégration logique" et qui s'apparentait aux méthodes axiomatiques développées depuis, sans cependant se confondre avec elles. J'ai indiqué, et Henri Lebesgue a indiqué aussi, combien la méthode imaginée par Drach nous fut précieuse pour nos théories de la mesure et de l'intégration."

En 1906, Drach prit la chaire de calcul différentiel et intégral et Lebesgue remplaça Drach dans celle de mécanique rationnelle. Après le départ de Drach en 1908, Lebesgue prit la chaire de calcul différentiel et intégral et Boutroux fut chargé du cours de mécanique. P. Boutroux ne resta qu'un an à Poitiers, il partit

pour Nancy et fut remplacé par M. Fréchet qui se trouvait à Rennes. Fréchet sera titularisé à Poitiers dans la chaire de mécanique rationnelle en 1910.

On comprend que Lebesgue, qui venait de prendre enfin la chaire de calcul différentiel et intégral, ait hésité à postuler une chaire dans une "grande" université provinciale où il aurait dû accepter des enseignements moins intéressants pour lui.

- 1100 E. Husson (mort en 1959), élève de l'E.N.S. de la promotion 1893, docteur ès sciences en 1905, a succédé à Lebesgue comme maître de conférences à Rennes en 1906. Il fut ensuite professeur à Caen (1908) en remplacement de Saint Germain, puis à Nancy (1911).
- 1101 Drach dût être candidat en second à la chaire de M. Lévy au Collège de France où fut nommé J. Hadamard le 15 avril 1909. Hadamard était professeur adjoint à la Sorbonne depuis 1900 et il suppléait M. Lévy au Collège de France depuis 1897.
- 1102 C. Guichard (1861-1924) sera nommé à Paris le 25 juin 1910 chargé du cours de mathématiques générales (en remplacement de Painlevé élu député) et sera titularisé en 1913 dans la même chaire.
- E. Vessiot (1865-1952), élève de l'E.N.S. de la promotion 1884, sera nommé à Paris en même temps que Lebesgue en novembre 1910.
- E. Cotton (1872-1950), élève de l'E.N.S. de la promotion 1892, ne sera jamais nommé à Paris, il restera professeur à Grenoble.
- 1103 Les postes de Raffy et J. Tannery étaient en surnombre à la Sorbonne, ils provenaient du rattachement de l'E.N.S. à l'Université de Paris en 1904.
- 1104 Borel, maître de conférences à l'E.N.S. depuis 1897, avait été nommé professeur adjoint à la Sorbonne en 1904 ; il n'était donc pas titularisé en février 1909. Son cours de "Théorie des fonctions" sera institué en chaire magistrale le 1er novembre 1909. Une augmentation de crédit au budget de l'Etat permit la création d'un cours de physique céleste dont fut chargé P. Puiseux, alors professeur adjoint. Enfin Cartan remplaça Hadamard.

P. Puiseux (1855-1928), élève de l'E.N.S. de la promotion 1875, astronome, était ami et voisin de P. Appell ([67]) ; il avait été nommé maître de conférences à la Sorbonne en 1881 et professeur adjoint en 1897.

- 1105 J. Hadamard(1865-1963), reçu premier à l'E.N.S. en 1884 et second (derrière Vessiot) à l'agrégation de mathématiques en 1887, maître de conférences à la Sorbonne en 1897, professeur adjoint en 1900, était aux yeux de la Sorbonne le grand rival d'Emile Borel (1871-1956) qui fut reçu premier à l'E.N.S. en 1889 et à l'agrégation de mathématiques en 1892.
- 1106 C'est P. Boutroux qui succéda à E. Cartan à Nancy à la rentrée 1909. Mais il ne resta que peu de temps à ce poste, il retourna dès l'année suivante à Poitiers occuper la chaire de calcul différentiel et intégral laissée vacante par le départ de Lebesgue à Paris en 1910. Husson fut alors nommé à sa place dans la chaire de calcul différentiel et intégral à Nancy, où il resta.
- 1107 Borel avait dû rappeler à Lebesgue, comme il aimait à le faire, que Painlevé avait été collé au baccalauréat et que Poincaré avait faillit l'être avec un 0 en mathématiques, que Drach et Lippmann n'avaient jamais réussi l'agrégation et que les concours et les examens étaient suivant la formule de Joseph Bertrand "la moins mauvaise façon de choisir au hasard les candidats" (*Assoc. Amicale E.N.S.*, 1950, 9-11).
- 1108 J. Boussinesq (1842-1929), titulaire de la chaire de calcul des probabilités et physique mathématique depuis 1896, ne prendra sa retraite que le 1er novembre 1919 et sera remplacé par E. Borel.
- G. Darboux (1842-1917) sera titulaire de la chaire de géométrie supérieure jusqu'à sa mort. Il sera remplacé par l'un de ses élèves C. Guichard qui avait accepté d'être chargé du cours de mathématiques générales le 25 juin 1910 en remplacement de Painlevé ; il sera titularisé dans cette chaire le 1er janvier 1913. La place que Borel proposait à Lebesgue n'était donc pas si mauvaise que Lebesgue semblait le croire à ce moment-là.
- 1109 Le premier tour des élections législatives de 1910 eut lieu le 25 avril et le second le 8 mai. Painlevé était bien sûr de son succès pour préparer son remplacement dès janvier. Pourtant son adversaire était coriace. Il avait en effet contre lui J. Auffray (1852-1916), avocat nationaliste, brillant et combatif, qui avait déjà battu dans cette circonscription en 1902 l'un des ténors socialistes indépendants l'avocat R. Viviani (1863-1925). Ce dernier, qui avait repris son siège en 1906, préféra se présenter en 1910 dans la Creuse où il fut élu dès le premier tour.

Au premier tour, Painlevé - qui se présentait comme socialiste indépendant, dans la coalition "d'union et de concentration républicaines" dirigée par A. Briand (1862-1932) - obtint 3896 voix contre 4745 à J. Auffray et 1474 à Poli membre de la toute nouvelle S.F.I.O. (créée en 1905). Poli s'étant désisté en sa faveur, Painlevé fut élu le 8 mai avec 5526 suffrages contre 4883 à Auffray. Painlevé fut constamment réélu député républicain socialiste du 5^e arrondissement jusqu'en 1928.

- 1110 J. Joyeux-Laffuie (1852-1917), professeur de zoologie à la Faculté des Sciences de Caen et directeur du Laboratoire maritime de Luc sur Mer, fut élu député de la Vienne en 1906 ; il fut battu aux élections de 1910. Originaire de la Vienne, il y possédait des vignes.
- 1111 E. Lacour (1854-1913), E.N.S. 1874 (2^e derrière Picard), professeur de spéciales de 1881 à 1896 aux lycées Janson de SAILLY et Saint Louis, nommé maître de conférences à Nancy en 1896 après sa thèse (1895), il sera titularisé à Nancy en 1901 et ira en 1907 à Rennes où il retrouvera Lebesgue. Lacour était un grand ami de P. Appell.
- 1112 J. Dubesset (mort en 1942), reçu premier à l'agrégation en 1900, a été nommé en 1901 professeur de mathématiques spéciales au lycée de Nancy en remplacement de A. Hervieux gravement malade. Dubesset fut notamment professeur de mathématiques spéciales au lycée Janson de SAILLY et proviseur du lycée de Nîmes.
- 1113 Clairin (1876-1914), reçu premier à l'E.N.S. en 1896, docteur ès sciences en 1902, professeur de mathématiques spéciales à Dijon, maître de conférences à Lille en 1903, titularisé en 1906, est mort pour la France le 26 août 1914.
- 1114 C. Wolf (1827-1918), professeur d'astronomie physique à la Sorbonne, a pris sa retraite en 1902. Ce n'est pas Appell qui lui a succédé et qui aurait ainsi libéré sa chaire de mécanique rationnelle, mais H. Andoyer (1862-1929) qui était alors maître de conférences d'astronomie. Quant à P. Painlevé (1863-1933), professeur adjoint à la Sorbonne depuis 1895, il a été nommé la même année 1902 titulaire de la nouvelle chaire de mathématiques générales créée par l'Etat après avis favorable du Conseil de l'Université. Partout en France à cette époque furent créées des chaires de mathématiques générales préparatoires aux licences de mathématiques et de physique.

1115 En 1922, Lebesgue reconnaît dans [11] (p.143) que, "peu de temps après, M. Baire simplifia et modifia sa démonstration primitive, ce qui la rendait applicable au cas général" (voir [317], p.173-179).

1116 Dans sa thèse ([10]), Lebesgue a utilisé le théorème de Borel en deux occasions et de deux façons différentes:

lorsqu'il définit la mesure ([10],209-210), il suppose alors seulement, comme Borel, le recouvrement dénombrable et l'intervalle recouvert quelconque;

lorsqu'il démontre le théorème : "la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale de la dérivée d'une fonction dérivable existe est que cette fonction soit à variation bornée. S'il en est ainsi, la fonction est l'une des intégrales indéfinies de sa dérivée" ([10],237-240). Le recouvrement est alors quelconque, sans plus de précisions, et Lebesgue utilise le théorème de Borel sans s'apercevoir qu'il le généralise.

Ce n'est que dans ses *Leçons sur l'intégration* qu'il précisera : "pour les applications que j'ai faites dans ma thèse", il "était nécessaire que le théorème de Borel" soit "démonstré pour un nombre d'intervalles ayant la puissance du continu" ([4],104-105, note 1 ; 2^e éd., 112-113, note 2 ; 298).

Notons que l'énoncé de la thèse de Lebesgue cité ci-dessus, p.237 de [10] (voir, par exemple, p.168 de [437]), est le point ultime atteint par Lebesgue en 1902 dans sa théorie de la dérivation à laquelle il attachait lui-même grand prix (voir ici p.302) et qu'il a mis au point progressivement. Ce n'est que dans son livre de 1904 que Lebesgue énoncera son théorème de dérivation des fonctions à variation bornée, "l'un des plus frappants et des plus importants de l'analyse réelle" ([438],5), et sous deux formes encore restrictives : - "une fonction à variation bornée et à nombres dérivés finis a une dérivée pour un ensemble de points dont le complémentaire est de mesure nulle" ([4],123) ;

- "toute fonction à variation bornée (continue) $f(x)$ a une dérivée sauf pour un ensemble de mesure nulle" ([4],128).

La théorie de Lebesgue n'atteindra sa forme définitive qu'en 1910, après les travaux de Vitali, qui dégagera le premier d'une remarque de Lebesgue la notion d'absolue continuité, de G.C. et W.H. Young et de Lebesgue lui-même dans [138]. (Voir le chapitre IX

de la 2^e édition de [4], en particulier p.185-188).

Notons que Fréchet énoncera, dans sa thèse en 1906 ([128]), le théorème de Borel-Lebesgue dans le cadre des "espaces abstraits" (en fait des espaces métriques). Il montrera ensuite l'équivalence entre la propriété de Borel-Lebesgue et la définition de la compacité qu'il avait adoptée (propriété de Bolzano-Weierstrass), sous des conditions assez générales ([439]).

1117 J. Merlin, E.N.S. 1897, reçu 3^e à l'agrégation des mathématiques en 1903, nommé chargé de cours d'astronomie à Lyon en 1904 (en remplacement de Lagrula parti à Quito), aide-astronome à l'Observatoire de Lyon en 1905, a été tué à l'ennemi le 29 août 1914.

1118 L'exemple de L. Keldych est remarquable ([440],65) :

"Si l'on réduit en fraction continue un nombre irrationnel x compris entre 0 et 1

$$x = \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3 + \dots + \frac{1}{\alpha_n + \dots}}}}$$

la fonction $\{x\}$ égale à 1 si parmi les quotients incomplets $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ il existe une infinité de quotients incomplets différents dont chacun est répété une infinité de fois, et égale à 0 dans le cas contraire, est une fonction précisément de classe 4."

1119 Sur la présentation de thèmes importants de la recherche actuelle en mathématiques et en physique mathématique dans des domaines où Elie Cartan a joué un rôle de pionnier voir [442].

1120 Pour une démonstration du théorème de Heine-Borel dans le cadre de l'analyse non standard voir [443].

1121 A. Viellefond (1871-1938), E.N.S. 1892, reçu 3^e à l'agrégation en 1896, professeur dans la classe de St Cyr à Reims (1900), puis à Nancy (1907), professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint Louis (1910-1936).

1122 G.C. Young (1868-1944) était elle-même mathématicienne ; élève de F. Klein, elle soutint une thèse à Göttingen en 1895. Elle avait épousé en 1896 W.H. Young dont elle eut 6 enfants, parmi lesquels

deux mathématiciennes Rosalind Cecily Young et Laurence Chisholm Young (voir note 547).

Cette lettre du 14 décembre 1904 pourrait sans doute montrer que W.H. Young ne connaissait pas les travaux de Lebesgue quand il a publié ses premiers travaux [115], [116] et [151], mais qu'il les connaissait quand il a publié en 1905 sa première construction de l'intégrale de Lebesgue ([152]). Lebesgue finira par reconnaître l'originalité de W.H. Young (voir notes 448 et 710).

- 1123 C. Maurain fut cependant nommé professeur titulaire de la chaire de physique à Caen en 1905 en remplacement de L. Houllevigue parti à Marseille. Il est possible que P. Appell ait été prévenu du classement de la Faculté des Sciences de Caen et soit intervenu au Conseil supérieur de l'Instruction Publique auquel il appartenait. Guinchant resta professeur adjoint. Il fut cependant nommé en 1909 titulaire de la chaire de physique expérimentale à Bordeaux.
- 1124 M. Desouches (1877-1956), reçu premier à l'agrégation de mathématiques en 1901 ; il remplace Lebesgue dans la classe de Centrale du lycée de Nancy en 1902. Il est ensuite pensionnaire de la Fondation Thiers pour préparer une thèse. Il abandonne la recherche pour une carrière de professeur de mathématiques spéciales à Louis-le-Grand, Janson de Sailly, Saint Louis et Sainte Geneviève (après 1945).
- 1125 F. Marotte (1873-1945), professeur de mathématiques spéciales de 1901 à 1935. Il avait été agrégé préparateur à l'E.N.S. (1896-1899), donc de Lebesgue, et avait soutenu une thèse en 1899. (Signalons son livre [444]).
- 1126 E. Combette (1841-1913), agrégé de mathématiques, professeur au lycée Saint Louis (1873), inspecteur de l'Académie de Paris (1891), inspecteur général de l'économat (1891), inspecteur général de l'enseignement secondaire (1907-1911), Combette était examinateur d'admission à l'Ecole Centrale ([436], 257).
- 1127 Dubreuil, élève de l'E.N.S. de la promotion de Lebesgue, était en 1905 professeur de technologie et matières premières au Collège municipal Chaptal, où il fit toute sa carrière. Il est mort en 1922.

En 1905, P. Langevin suppléait E. Mascart au Collège de France et enseignait la physique à l'Ecole municipale Lavoisier.

1128 A. Cotton, E.N.S., physicien, élu membre de l'Académie des Sciences le 26 novembre 1923, frère de E. Cotton (1872-1950), mathématicien, élu membre de l'Académie des Sciences le 8 novembre 1943.

J. Simon (1867-1925), E.N.S. 1887, chimiste, docteur ès sciences en 1895, préparateur de chimie au P.C.N. de la Sorbonne depuis sa création en 1894, chef de travaux au P.C.N. en 1906, il sera maître de conférences adjoint en 1917 et deviendra titulaire d'une chaire de chimie au Muséum en 1919 (voir la note 996).

1129 J.J. Compayré (1843-1913), philosophe et historien de l'éducation, professeur à l'E.N.S. de Fontenay dès sa fondation en 1882, inspecteur général de l'Enseignement secondaire de 1905 à 1913 ([436]).

1130 Borel a été convaincu très tôt (1892) de l'importance de la théorie des ensembles (voir notes 16 et 621), même s'il a semblé s'en détacher ([422]). Il écrivait encore en 1935 ([417], 2101) :

"J'ai été extrêmement séduit, dès l'âge de 20 ans, par la lecture des travaux de Georg Cantor dont je n'eus le plaisir de faire la connaissance que quelques années plus tard au Congrès de Zurich en 1897. Georg Cantor a apporté dans l'étude des mathématiques cet esprit romantique qui est l'un des côtés les plus séduisants de l'âme allemande. Weierstrass, au contraire, a essayé de soumettre la théorie des fonctions de variables imaginaires découverte par Cauchy à cette discipline stricte et sévère qui est aussi un des côtés du caractère allemand. Il y a eu certainement pour moi un très grand plaisir intellectuel à montrer, grâce à la théorie des ensembles de Cantor, que les fonctions ne se laissent pas aussi facilement discipliner qu'avaient pu croire Weierstrass et ses disciples."

1131 A. Blanc (1878-1946), E.N.S. 1898, a succédé en 1911 à C. Maurain, nommé à la Sorbonne, dans la chaire de physique de l'Université de Caen. Il sera doyen de la Faculté des Sciences de Caen.

F.J. Picavet, secrétaire du Collège de France à partir de 1905 en remplacement de A. Lefranc, directeur d'études à l'E.P. H.E. en histoire des dogmes.

1132 A. Vacher (1873-1920), E.N.S. 1895, géographe, chargé de cours de géographie à Rennes en 1905 puis professeur adjoint en 1909, après sa thèse en 1908. Il sera ensuite chargé de cours à Lille en 1912.

J. Loth (1847-1934), philosophe, spécialiste de la littérature celtique, doyen et professeur de langue et littérature celtique à la Faculté des Lettres de Rennes, professeur au Collège de France en 1909.

B. Bourdon (1860-1943), docteur ès lettres en 1892, professeur de philosophie au lycée de Rennes, puis maître de conférences de philosophie à Lille en 1894, maître de conférences à Rennes en 1895, enfin professeur de philosophie à la Faculté des Lettres de Rennes de 1896 à sa retraite.

1133 E. Philipot (1872-1950), philologue, agrégé de grammaire en 1893, boursier de la Fondation Thiers (1894-1898), maître de conférences à l'Université de Lund en Suède (1898-1903) (il a dû rencontrer les Mittag-Leffler à Stockholm où il séjournait souvent). Il est nommé maître de conférences à la Faculté des Lettres de Rennes, où il fait toute sa carrière. Il sera professeur en 1923 et prendra sa retraite en 1939.

En 1914 il soutiendra une thèse sur Noël du Fail (1520-1591). Il était érudit et brillant, ses cours à Rennes étaient parmi les plus suivis. Spécialiste de Rabelais, des romans bretons, des légendes du moyen-âge, il était aussi très versé dans les langues scandinaves. Il fut notamment l'ami et traducteur du grand philologue danois K. Nyrop (1858-1931).

1134 E. Schou (1873-1928), d'abord ingénieur, il soutint finalement sa thèse à Copenhague en 1912. Il fut nommé professeur à l'École Polytechnique de Copenhague en 1917. Il a dû étudier à l'E.N.S. en même temps que Lebesgue.

1135 A. Magnin (1848-1926), interne des Hôpitaux de Lyon, docteur ès sciences, enseigne à Lyon jusqu'en 1884 date à laquelle il est nommé à Besançon, où il sera professeur de botanique et doyen de la Faculté des Sciences de 1902 à 1911. Il prend sa retraite en 1919. Il fut adjoint au maire de Besançon de 1888 à 1892.

1136 Ce mémoire contient notamment (p.1688-1692) la démonstration de Borel de la loi des vitesses de Maxwell à l'aide de l'évaluation du volume d'une sphère dans un espace de très grande dimension, reprise dans [445] et [446].

1137 Fatou utilise en fait le théorème de Beppo Levi qu'il considère comme allant de soi d'après la p.114 de [4] (voir note 532).

1138 Rappelons que Lebesgue n'énonçait son théorème de convergence dominée que pour les suites de fonctions bornées par une même constante ([4], 114). Lebesgue ajoutait simplement ([4], 115) :

"Les définitions et les résultats précédents peuvent être étendus à certaines fonctions non bornées."

Lebesgue n'a pas rédigé complètement sa théorie de l'intégration dans le cadre des fonctions mesurables non nécessairement bornées. Dans les questions d'intégration terme à terme les résultats de Fatou (pour la convergence dominée) et de Beppo Levi (pour la convergence monotone) marquent incontestablement un progrès, comme le reconnaît Lebesgue lui-même (voir notes 529, 532 et 710).

- 1139 O. Garbe (1850-1913), professeur de physique et doyen de la Faculté des Sciences de Poitiers.
- 1140 N. Piéron (1847-1906), professeur de mathématiques spéciales au lycée Charlemagne puis à Saint Louis (1877-1892), inspecteur de l'Académie de Paris (1892-1894) et enfin inspecteur général (1894-1906).
- 1141 H. Padé, professeur à Poitiers, puis à Bordeaux, où il était doyen, recteur de Besançon (1909-1917), Dijon (1917-1922) et Aix-Marseille (1922-1934).

La chaire de mécanique de Bordeaux, occupée par Padé nommé recteur à Besançon, se trouvant libre, Borel a dû proposer à Lebesgue de se porter candidat. C'est Delassus, professeur de calcul différentiel et intégral à Besançon, qui fut nommé à Bordeaux en janvier 1909.

- 1142 E. Delassus, maître de conférences à Toulouse en 1898, Grenoble en 1900, Besançon en 1902, il est nommé titulaire de la chaire de calcul différentiel et intégral à Besançon (1903-1908). A la suite d'un différent avec le recteur Ardaillon, signalé par Lebesgue dans cette lettre, il demande et obtient son transfert à Bordeaux.
- 1143 E. Ardaillon (1867-1926), historien, Ecole d'Athènes 1892, professeur à la Faculté des Lettres de Lille (1895-1904). Il est recteur à Besançon de 1904 à 1908, date à laquelle il est nommé recteur à Alger.
- 1144 J.-A. Richard (mort en 1956), E.N.S. 1884, agrégé de mathématiques en 1887, docteur ès sciences mathématiques (1902), d'abord professeur de mathématiques au lycée de Tours, il fut professeur de mathématiques élémentaires supérieures au lycée Carnot de Dijon de 1901 à 1910. Il fut ensuite professeur au lycée de Châteauroux où il terminera sa carrière. Il a publié en 1903 un long essai sur la philosophie des mathématiques qui ne se trouve pas à la Bibliothèque Nationale. Richard, qui a beaucoup collaboré à la

revue *L'Enseignement mathématique* ([448],[449]), semble n'être connu que par son paradoxe publié de nouveau en 1906 dans les *Acta Mathematica* ([450]). Sur la position de Borel sur cette question, voir [451]. N. Luzin reprit en 1930 les thèses de Borel sur ce que l'on doit entendre par un nombre bien défini ([440], 48-51).

- 1145 Pujet (mort en 1925), d'abord professeur aux lycées de Vesoul, Rennes et Poitiers, fut chargé du cours de mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Rennes en 1873 et y resta jusqu'en 1903, date à laquelle il fut remplacé par E. Lacour (voir note 7).
- 1146 Lebesgue a repris ce sujet à deux reprises, en 1912 quand il donnera le premier exemple simple d'impossibilité du problème de Dirichlet, qui a été décisif pour l'orientation des recherches ultérieures sur la question, et en 1923-1924 quand il montrera le rôle des ensembles de capacité nulle dans la théorie des fonctions harmoniques et construira l'exemple de point irrégulier connu sous le nom d'épine de Lebesgue. (Sur l'histoire du problème de Dirichlet de 1905 à 1930 voir [452] qui étudie l'apport de Lebesgue).
- 1147 A. Charlois, astronome à l'Observatoire de Nice, il découvrit notamment 104 petites planètes et 77 astéroïdes. Il étudia particulièrement Mercure et Eros et retrouva Andromaque qui avait été perdue. Il fut assassiné dans la nuit du 26 mars 1910 devant son domicile de l'Observatoire par le beau-frère de sa première femme le Dr G. Brengues pour une question d'héritage contesté (voir *Le Matin* du 28 mars au 10 avril 1910, première page).
- 1148 L. Brazil, docteur ès sciences en 1904, sera nommé professeur adjoint de zoologie à Caen lorsque Joyeux-Laffuie réintégrera sa chaire.
- 1149 C. Jeanmaire (1841-1912), docteur ès lettres (1882), professeur de philosophie aux lycées de Bourg et d'Alger, il fut inspecteur d'académie à Tarbes et Toulouse, recteur à Besançon de 1883 à 1884, recteur à Alger de 1885 à 1908, enfin recteur de Toulouse de 1909 à 1911.
- 1150 J. Gautier (1856-1936), E.N.S. 1875, inspecteur général en 1903, directeur de l'Enseignement secondaire de 1907 à 1910, conseiller d'Etat.

- 1151 Koenigs et Andoyer étaient comme Vessiot examinateurs à l'École Polytechnique. Borel avait dû proposer à Lebesgue de prendre la charge de conférencier laissée vacante par E. Blutel nommé inspecteur général. Ce fut P. Montel qui fut nommé sur ce poste (note 871). Entre temps une autre opportunité de nomination à Paris avait été ouverte par le décès le 9 juin 1910 de P. Raffy, titulaire de la chaire d'application de l'analyse à la géométrie créée le 1er novembre 1904 et sur laquelle Lebesgue sera nommé chargé de cours le 16 novembre 1910, puis titularisé le 1er décembre 1918. Lebesgue sera nommé le 1er décembre 1921 professeur au Collège de France en remplacement de G. Humbert et Drach prendra sa chaire à la Sorbonne.
- 1152 Il s'agit de la "Commission d'études chargée d'examiner les divers systèmes de la Représentation Proportionnelle" (R.P.). Cette commission présidée par P. Appell réunissait notamment E. Picard, H. Poincaré et E. Borel pour les mathématiciens ; elle rendit son rapport en décembre 1910. Tout en indiquant qu'il ne saurait y avoir de meilleur système de R.P. dans l'absolu, elle recommandait le "système des moyennes". H. Poincaré, partisan du "système du nombre uniforme", fit paraître son opinion dans une tribune séparée (voir *Le Petit Temps*, supplément du *Temps*, des 17 et 25 décembre 1910). (Voir p.158 de [453], *Le Temps* du 1er décembre 1910 et p.314 de [454]).
- 1153 C. Jordan (1838-1921) était professeur au Collège de France. G. Humbert (1859-1921), son suppléant en 1904, lui succédera en 1912 ; il fut à son tour remplacé par Lebesgue en 1921.
- 1154 J. Duclaux (1877-1978), reçu premier à l'E.N.S. en 1895, agrégé de physique en 1896 (reçu premier), avait épousé Germaine Appell soeur de Marguerite Borel ; il était donc beau-frère de Borel ([67]). Duclaux a collaboré à *La Revue du Mois*. Chimiste, il sera professeur de biologie générale au Collège de France. Elu membre de l'Académie des Sciences le 20 mars 1939. Son père, P. Duclaux (1840-1904), beau-frère de E. Mascart, directeur de l'Institut Pasteur, membre de l'Académie de médecine, avait été élu membre de l'Académie des Sciences le 26 novembre 1888.
- 1155 N. Bernard est mort le 26 janvier 1911.

- 1156 Joseph Magrou (1883-1951), frère de Jean, poursuivit les travaux de Bernard sur la tubérisation. Il fit toute sa carrière au service de phytopathologie et mycologie de l'Institut Pasteur ; élu à l'Académie des Sciences le 7 mai 1945. Sur l'importance des travaux de Bernard et Magrou on peut consulter p.323-326 de [455]. Voir aussi [456] et les cours de Bernard publiés chez Alcan dans la collection Borel en 1916 et 1921.
- 1157 Boutroux se porte candidat à la succession (encore éventuelle) de Lebesgue à la chaire de calcul différentiel et intégral ; il y sera nommé. (Voir lettre suivante).
- 1158 D. Gernez avait succédé à l'Académie en 1906 à P. Curie. A la mort de Gernez le 31 octobre 1910 de nombreux scientifiques suscitèrent la candidature de Marie Curie au siège occupé par son mari. Il s'en suivit une violente polémique dans la presse (voir en particulier la lettre de G. Darboux défendant Marie Curie dans *Le Temps* du 31 décembre 1910). Ce fut E. Branly (1844-1940), professeur de physique à l'Institut catholique de Paris qui fut élu. (Sur l'affaire Marie Curie voir [67] et [457], affaire au cours de laquelle Borel et sa femme eurent une attitude remarquablement digne).
- 1159 C. Bioche, E. Blutel et A. Lévy ont rédigé le rapport sur l'enseignement secondaire pour la Commission internationale de l'enseignement mathématique, sous-commission française (voir les *Rapports*, vol.II, Paris(Hachette), 1911).
- 1160 Sur les relations de Baire avec Bernard on peut voir la lettre de Baire à Fréchet du 2 mars 1911 (Carton Fréchet n° 2, Archives de l'Académie des Sciences de Paris).
- 1161 E. Borel et sa femme avaient accompagné Marie Curie au Congrès scientifique de Gênes ([67],105-107).
- 1162 Il s'agit sans doute de l'inauguration de Rice Institute de Houston (Texas) qui devait avoir lieu fin 1912 et pour laquelle Poincaré, invité mais déjà malade, s'était désisté. Borel à qui on avait demandé de remplacer Poincaré mais qui ne savait que très peu d'anglais cherchait à son tour un remplaçant. C'est finalement lui qui se rendra aux Etats-Unis en 1912 et y restera six mois ([67], 123-150).
- 1163 Il s'agit de Pont-Arthon où Humbert avait une propriété ([458], 2438) et non pas d'Arthon-en-Retz près de Pornic.

- 1164 L'Oeuvre du Secours National a été fondée et présidée par Paul Appell dès le début de la guerre. Elle rendit des services considérables pendant les années de guerre procurant une aide immédiate aux familles privées de ressources par suite de la mobilisation ou du décès d'un des leurs (voir [459]). Appell semble avoir mis à contribution d'autorité les professeurs d'université non mobilisés.
- 1165 Lebesgue a repris ces questions en 1921 ([460]). Il y énonce (p.71), dans les mêmes termes, le problème du ferblantier et déclare n'être pas parvenu à en trouver la solution. Nous ne savons pas si ce problème a intéressé depuis d'autres savants et s'il a une solution explicite.
- 1166 Saint Jean le Thomas est une station balnéaire de la côte du Cotentin dans la baie du Mont Saint Michel.
- 1167 A. Debierne (1874-1949), chimiste, ami et collaborateur de P. et M. Curie. Il isola avec Marie Curie le radium métallique en 1910 et lui succéda en 1935 dans la chaire de physique générale et radioactivité ([67],107 ; [457]).
- H. Buisson (1873-1944), physicien et astronome, E.N.S. 1893, professeur de physique à la Faculté des Sciences de Marseille (1914-1943).
- E. Chavannes (1865-1918), sinologue, professeur au Collège de France, ami très proche de Perrin, Langevin, Borel et Marie Curie, dont il était voisin ([457],159).
- 1168 Dans la nuit du 28 au 29 décembre 1916, le sous-marin Monge avait été coulé par un croiseur autrichien devant Cattaro (Kotor, aujourd'hui port yougoslave du littoral adriatique). Le communiqué du Ministère de la marine précisait qu'"une bonne partie de l'équipage avait été sauvée" (*Le Matin* du 1er janvier et du 6 janvier 1917). Pierre Appell (1887-1957), fils de Paul Appell et frère de Marguerite Borel servait comme enseigne de vaisseau à bord du Monge ; sauvé, il restera interné en Autriche jusqu'à la fin de la guerre.
- 1169 Le général R. Lepelletier avait introduit un "procédé simple et ingénieux" dans la confection des abaques de corrections de tir ([461],24).
- 1170 J. Rouch (1884-1973), lieutenant de vaisseau, chef du Service météorologique aux armées en 1914-18. Il sera directeur du Musée

océanographique de Monaco et élu correspondant de l'Académie des Sciences le 27 novembre 1946. Il a écrit deux ouvrages de la *Nouvelle collection scientifique* dirigée par Borel chez Alcan. Le Service météorologique aux armées dépendait du Service géographique de l'armée, il fournissait les informations sur la vitesse et la direction du vent en fonction de l'altitude, nécessaires aux corrections de tir. Pour la méthode utilisée voir [462] et pour le rôle joué par Borel p.19 de [461].

1171 Dans la note I de [461] on écrit :

"Les nécessités de la guerre actuelle n'avaient été prévues que très imparfaitement ; en particulier, on avait pensé généralement que l'artillerie aurait à tirer sur des buts de grandes dimensions et que des observateurs régleraient à loisir les tirs. Dans ces conditions, il n'est pas étonnant que souvent, autrefois, les artilleurs aient considéré la table de tir comme un objet de curiosité qui disparaissait, oublié, au fond d'une cantine. Lorsqu'ils se virent aux prises avec les problèmes de la guerre moderne, les artilleurs demandèrent à leur table de tir les éléments de la solution de ces problèmes, et beaucoup de tables de tir apparurent insuffisantes."

Les meilleurs savants du moment, mobilisés à la Commission de Gâvre ou à la Direction des inventions, s'employèrent donc à fournir de nouvelles tables. Signalons que la brochure [461] est remarquablement claire et bien écrite.

1172 Dans son étude de 1928 sur la théorie d'homologie d'espaces métriques compacts, Aleksandrov écrit ([463],103-104) :

"Wenn wir uns fragen : worin liegt der Grund der Tatsache, dass die kompakten metrischen Räume eine so nahe Verwandtschaft mit den elementar geometrischen Gebilden haben, dass man (im Einklang mit den in den vorigen Paragraphen formulierten Sätzen) sagen kann, dass jeder dieser Räume im wesentlichen die Gestalt eines Komplexes derselben Dimension hat ? - so lautet die Antwort auf diese Frage in aller Eindeutigkeit : Im Borel-Lebesgueschen Überdeckungssatze."

1173 Après avoir été chef du cabinet technique de Painlevé du 15 novembre 1915 au 12 décembre 1916, Borel sera directeur des services techniques du ministère de la guerre du 20 mars 1917 au 12 septembre 1917, Painlevé étant ministre. Enfin, Borel sera secrétaire général de la Présidence du Conseil du 12 septembre 1917 au 16 novembre 1917, pendant le premier ministère Painlevé. A la fin de l'année 1917, Borel regagnera, à sa demande, le front, où il commandera une batterie ; il finira la guerre commandant et officier de la Légion d'honneur à titre militaire.

La création de la direction des inventions marque d'une certaine façon un tournant de la politique de guerre française, après que les politiques et le haut commandement aient pris conscience de l'avance industrielle et technologique des Allemands (artillerie puissante et performante, gaz de combat, équipements adaptés à la guerre de tranchées). Il faut souligner le rôle essentiel joué par Painlevé, Borel, Breton et les scientifiques dans la mise en oeuvre de cette nouvelle politique de "guerre moderne", dont Pétain, nommé par Painlevé, sera, au sein de l'armée, le principal artisan.

1174 Bien que nous n'ayons pu l'établir avec assez de certitude, il semble que Lebesgue ait été investi par Borel de la responsabilité nominale de la Section de mathématiques de la Direction des inventions. Lebesgue, à l'inverse de Borel, était aussi peu fait que possible pour diriger quelque service que ce soit. Son excès de naïveté et de susceptibilité mêlées, son manque de confiance en lui-même, son "scepticisme", ses maladresses dans les rapports humains et son absence de dissimulation le rendaient parfaitement inapte à tout poste de responsabilité. Nommé à la tête de la Direction des inventions en décembre 1916, Breton avait dû s'en convaincre très vite et restreindre peu à peu le domaine d'activité de Lebesgue qui dut en concevoir une certaine amertume, entretenue peut-être par Montel son confident de toujours. Que Borel vienne s'installer au "bureau des calculs" le dernier territoire encore contrôlé par Lebesgue pouvait alors apparaître à ce dernier comme une agression. En fait, les responsabilités de Borel allaient dépasser de beaucoup le seul "bureau" de Lebesgue et s'étendre, dès la fin du mois de mars 1917, à tous les services techniques de l'armée. Il avait dû être question, début 1917, que Borel s'installe, lors de ses passages à Paris, à la Direction des Inventions, rue de l'Université, au Bureau des calculs.

1175 La Section technique de l'artillerie, alors dirigée par le colonel Emery, était installée place Saint Thomas d'Aquin.

1176 B. Levi (1875-1961), professeur de mathématiques à l'Université de Bologne. Comme on le sait, le théorème de Lebesgue-B. Levi peut servir de point de départ à une théorie générale de l'intégration comme l'ont vu Young et Riesz notamment (voir note 710). Pour l'influence de B. Levi sur Lebesgue voir note 707.

ABRÉVIATIONS

CRAS = *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris.*

O.S. = *Oeuvres scientifiques d'Henri LEBESGUE, Genève (L'Enseignement Mathématique), 1972-1973.*

GM = *Giornale di Matematiche.*

AM = *Annali di Matematica pura ed applicata.*

AsENS = *Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure.*

FM = *Fundamenta Mathematicae.*

BSM = *Bulletin des Sciences Mathématiques.*

BSMF = *Bulletin de la Société Mathématique de France.*

RCMP = *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.*

MA = *Mathematische Annalen.*

BAiMS = *Bulletin of the American Mathematical Society*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] LEBESGUE H., *Sur une généralisation de l'intégrale définie* (CRAS, 132(1901), 1025-1028) = O.S., vol.I, p.197-199.
- [2] DINI U., *Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer Veränderlichen reellen Grösse*, deutsch bearbeitet von J. Lüroth und A. Schepp, Leipzig(Teubner), 1892.
- [3] VOLTERRA V., *Sui principii del calcolo integrale* (GM, 19(1881), 337-372) = *Opere matematiche*, vol.I, p.16-48, Roma (Accademia Nazionale dei Lincei), 1954.
- [4] LEBESGUE H., *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Paris(Gauthier-Villars), 1904 = O.S., vol.II, p.11-154. 2^e édition, 1928.
- [5] BOREL E., *Leçons sur la théorie des fonctions*, Paris(Gauthier-Villars), 1898, 2^e édition, 1914.
- [6] JORDAN C., *Remarques sur les intégrales définies*, p.427-457, vol.IV, *Oeuvres*, Paris(Gauthier-Villars), 1964.
- [7] JORDAN C., *Cours d'analyse*, vol.II, 2^e édition, Paris(Gauthier-Villars), 1894.
- [8] HAWKINS T., *Lebesgue's theory of integration*, Madison, Milwaukee (The University Wisconsin Press), 1970.
- [9] LEBESGUE H., *Sur une propriété des fonctions* (CRAS, 137(1903), 1228-1230) = O.S. vol.I, p.336-338.
- [10] LEBESGUE H., *Intégrale, longueur, aire* (AM, (3), 7(1902), 231-359) = O.S., vol.I, p.201-331.
- [11] LEBESGUE H., *Notice sur les travaux scientifiques*, Toulouse(Edouard Privat), 1922 = O.S., vol.I, p.97-175.
- [12] LEBESGUE H., *Sur les fonctions représentables analytiquement* (CRAS, 139(1904), 29-31) = O.S., vol.III, p.79-81.
- [13] DARBOUX G., *Sur les fonctions discontinues* (AsENS, (2), 4(1875), 57-112).
- [14] CLAIRIN J., *Sur les transformations de Baecklund* (AsENS, (3), 19(1902), S.1-S.63).
- [15] VITALI G., *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*, p.231-235, *Opere*, Roma(Edizioni Cremonese), 1984.

- [16] HAUSDORFF F., *Grundzüge der Mengenlehre*, New York (Chelsea), 1949.
- [17] BANACH S., *Sur le problème de la mesure* (FM, 4(1923), 7-33).
- [18] BANACH S. et KURATOWSKI C., *Sur une généralisation du problème de la mesure* (FM, 14(1929), 127-131).
- [19] LEBESGUE H., *Sur les transformations de contact des surfaces minima* (BSM, (2), 26(1902), 1^e partie, 106-112) = O.S., vol.IV, p.253-259.
- [20] LEBESGUE H., *Sur les problèmes des aires* (BSMF, 31(1903), 197-205 ; 33(1905), 273-274) = O.S., vol.IV, p.29-35.
- [21] LEBESGUE H., *Un théorème sur les fonctions trigonométriques* (CRAS, 134(1902), 585-587) = O.S., vol.III, p.24-26.
- [22] LEBESGUE H., *Sur les séries trigonométriques* (AsENS, (3), 20(1903), 453-485) = O.S., vol.III, 27-59).
- [23] MONTEL P., *Sur les suites infinies de fonctions* (AsENS, (3), 24 (1907), 233-334).
- [24] ARZELA C., *Sulle serie di funzioni* (Memorie della Reale Accademia di Bologna, (5), 8(1900), 131-186, 701-744).
- [25] LEBESGUE H., *Démonstration d'un théorème de M. Baire*, note II, p.149-155 des *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynômes* de E. BOREL, Paris (Gauthier-Villars), 1905 = O.S., vol.III, p.211-217.
- [26] LEBESGUE H., *Notices sur l'histoire des mathématiques*, Genève (Institut de Mathématiques), 1958.
- [27] LEBESGUE H., *Sur l'approximation des fonctions* (BSM, 22(1898), 1^e partie, 278-287) = O.S., vol.III, p.11-20.
- [28] BAIRE R., *Sur les fonctions de variables réelles* (AM, (3), 3(1899), 1-123).
- [29] LINDELÖF E., *Sur quelques points de la théorie des ensembles* (CRAS, 137(1903), 697-700).
- [30] DUGAC P., *Notes et documents sur la vie et l'oeuvre de René Baire* (Archive for History of Exact Sciences, 15(1976), 297-383).
- [31] BOREL E., *Sur quelques points de la théorie des fonctions* (AsENS, (3), 12(1895), 9-55) = *Oeuvres*, t.I, p.239-285, Paris (CNRS), 1972.
- [32] SCHOENFLIES A., *Über einen Youngschen Beweis des verallgemeinerten Borelschen Interval-Theorem* (RCMP, 35(1913), 74-78).

- [33] BOREL E., *Sur la représentation effective de certaines fonctions discontinues comme limites de fonctions continues* (CRAS, 137(1903), 903-905) = *Oeuvres*, vol.II, p.759-761, Paris(CNRS), 1972.
- [34] EGOROV D.T., *Sur les suites de fonctions mesurables* (CRAS, 152(1911), 244-246).
- [35] LEBESGUE H., *Sur les fonctions de plusieurs variables* (CRAS, 128 (1899), 811-813) = *O.S.*, vol.III, p.21-23.
- [36] LUZIN N., *Sur les propriétés des fonctions mesurables* (CRAS, 154 (1912), 1688-1690).
- [37] SEVERINI C., *Sulla rappresentazione delle funzioni reali di variabili reali mediante serie di polinomi razionali interi* (RCMP, 14(1900), 157-159).
- [38] PAINLEVE P., *Sur les développements des fonctions analytiques en série de polynômes* (CRAS, 135(1902), 11-15) = *Oeuvres*, vol.II, p.702-706, Paris(CNRS), 1976.
- [39] PAINLEVE P., *Observations sur la communication précédente* (CRAS, 135 (1902), 152-153) = *Oeuvres*, vol.II, p.709, Paris(CNRS), 1976.
- [40] BOREL E., *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynômes*, Paris(Gauthier-Villars), 1905 ; 2^e édition, 1928.
- [41] de la VALLEE-POUSSIN C., *Cours d'analyse infinitésimale*, vol.I, Paris(Gauthier-Villars), 1903.
- [42] TANNERY J., *Vallée-Poussin (Ch.J. de la), Cours d'analyse infinitésimale, tome I* (BSM, (2), 27(1903), 1^e partie, 121-126).
- [43] TANNERY J., *R. Baire, Sur les fonctions de variables réelles* (BSM, (2), 27(1903), 1^e partie, 293-298).
- [44] LEBESGUE H., *Sur la représentation analytique, à partir de $z=x+iy$, des fonctions continues de x et y* (BSM, (2), 27(1903), 1^e partie, 82-84) = *O.S.*, vol.III, p.61-64.
- [45] BOREL E., *Un théorème sur les ensembles mesurables* (CRAS, 137(1903), 966-967) = *Oeuvres*, vol.III, p.1247, Paris(CNRS), 1972.
- [46] BAIRE R., *Sur la théorie générale des fonctions de variables réelles* (CRAS, 125(1897), 691-694).
- [47] SCHOENFLIES A., *Die Entwicklung der Lehre den Punktmannigfaltigkeiten* (Jahresbericht des deutschen Mathematiker-Vereinigung, 8(1900), 2. Heft, 1-251).

- [48] CANTOR G., *Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinitis*, traduction de F. Marotte, Paris(Hermann), 1899.
- [49] BOREL E., *Leçons sur les fonctions entières*, Paris(Gauthier-Villars), 1900.
- [50] MONTEL P., *Selecta 1897-1947*, Paris(Gauthier-Villars), 1947.
- [51] DUGAC P., *Lettres de René Baire à Emile Borel* (Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques, 11(1990), 33-120).
- [52] KUZNETSOV P.I., *Dimitri Fedorovich Egorov* (Russian Mathematical Surveys, 26(1971), N°5, 125-164).
- [53] BOREL E., *L'interpolation des fonctions continues par des polynômes*, p.229-232 des *Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses*, Leipzig(Teubner), 1905.
- [54] LERCH M., *Extrait d'une lettre à M. Darboux* (Bulletin des Sciences Mathématiques, (2), 27(1903), 1^e partie, 161-164).
- [55] LEBESGUE H., *Leçons sur les séries trigonométriques*, Paris(Gauthier-Villars), 1906.
- [56] RIEMANN B., *Principes fondamentaux pour une théorie générale des fonctions d'une grandeur variable complexe*, p.1-53, *Oeuvres mathématiques*, traduites par L. Laugel, Paris(Gauthier-Villars), 1898.
- [57] WEIERSTRASS K., *Remarques sur quelques points de la théorie des fonctions* (Bulletin des Sciences Mathématiques, (2), 5(1831), 1^e partie, 157-183).
- [58] MONTEL P., *Sur les suites de fonctions analytiques* (CRAS, 138(1904), 469-471).
- [59] MONTEL P., *Sur les séries de fonctions analytiques* (BSM, (2), 30 (1906), 189-192).
- [60] STEKLOV W., *Sur la représentation approchée des fonctions* (CRAS, 135(1902), 848-851).
- [61] BOREL E., *Leçons sur les séries divergentes*, Paris(Gauthier-Villars), 1901.
- [62] LEBESGUE H., *Recherche sur la convergence des séries de Fourier* (MA, 61(1905), 251-280) = O.S., vol.III, p.181-210.
- [63] MONTEL P., *Intégration et dérivation*, p.171-209, tome II, vol.1, *Encyclopédie des Sciences mathématiques*, Paris(Gauthier-Villars), 1912.

- [64] ZORETTI L., *Les ensembles de points*, p.113-170, tome II, vol.1, *Encyclopédie des Sciences mathématiques*, Paris(Gauthier-Villars), 1912.
- [65] BENDIXSON I., *Quelques théorèmes de la théorie des ensembles de points* (*Acta Mathematica*, 2(1883), 415-429).
- [66] МЕДВЕДЕВ Ф.А., *Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX-XX вв.*, Москва(Наука), 1976.
- [67] MARBO C., *A travers deux siècles. Souvenirs et rencontres (1883-1967)*, Paris(Grasset), 1968.
- [68] BOURBAKI N., *Eléments d'histoire des mathématiques*, Paris(Masson), 1984.
- [69] VITALI G., *Una proprietà delle funzioni misurabili*, p.183-187, *Opere*, Roma(Edizioni Cremonese), 1984.
- [70] de RHAM G., *Oeuvres mathématiques*, Genève(L'Enseignement Mathématique), 1981.
- [71] OSGOOD W.F., *Non uniform convergence and integration of series term by term* (*American Journal of Mathematics*, 19(1897), 155-190).
- [72] ROBIN G., *Oeuvres scientifiques*, tome III : *Théorie nouvelle des fonctions exclusivement fondée sur l'idée de nombre*, Paris(Gauthier-Villars), 1903.
- [73] TANNERY J., Robin G., *Oeuvres scientifiques*, *Théorie nouvelle des fonctions exclusivement fondée sur l'idée de nombre* (*Bulletin des Sciences Mathématiques*, (2), 28(1904), 99-108).
- [74] DUGAC P., *Henri Poincaré, La correspondance avec des mathématiciens de J à Z* (*Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, 10(1989), 83-229).
- [75] GOURSAT E., *Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéométrique*, Paris(Gauthier-Villars), 1891.
- [76] ARZELA C., *Intorno alla continuità della somma di infinite funzioni continue* (*Rendiconto delle sessioni dell'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna*, 1883-1884, 79-84).
- [77] LEBESGUE H., *Sur les fonctions représentables analytiquement* (*Journal des Mathématiques pures et appliquées*, (6), 1(1905), 139-216) = O.S., vol.III, p.103-180.
- [78] BERTRAND J., *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral. Calcul différentiel*, Paris(Gauthier-Villars), 1864.

- [79] d'ADHEMAR R., *Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre, du type hyperbolique à 3 ou 4 variables indépendantes*, Paris(Gauthier-Villars), 1904.
- [80] VOLTERRA V., *Sur les vibrations des corps élastiques isotropes* (Acta Mathematica, 18(1894), 161-232).
- [81] LEBESGUE H., *Sur les fonctions représentables analytiquement* (CRAS, 139(1904), 29-31) = O.S., vol.III, p.79-81.
- [82] LUSIN N., *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*, Paris(Gauthier-Villars), 1930.
- [83] LE VAVASSEUR R., *Sur le système d'équations aux dérivées partielles simultanées auxquelles satisfait la série hypergéométrique à deux variables $F(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$* , Paris(Gauthier-Villars), 1893.
- [84] BOREL E., *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques* (RCMP, 27(1909), 247-270) = Oeuvres, vol.II, p.1055-1080, Paris(CNRS), 1972.
- [85] BOREL E., *Remarques sur certaines questions de probabilité* (BSMF, 33(1905), 123-128).
- [86] LEBESGUE H., *A propos de quelques travaux mathématiques récents* (L'Enseignement Mathématique, (2), 17(1971), 1-48).
- [87] SIERPINSKI W., *Oeuvres choisies*, vol.I, Warszawa(Ed.sci. Pologne), 1974.
- [88] BOREL E., *Quelques remarques sur les principes de la théorie des ensembles* (Math. Annalen, 60(1905), 194-195) = Oeuvres, vol.III, p.1251-1252, Paris(C.N.R.S.), 1972.
- [89] ZERMELO E., *Beweiss, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann* (Math. Annalen, 59(1904), 514-516).
- [90] KÖNIG J., *Zum Kontinuum-Problem*, p.144-147, *Verhandlungen des dritten Int. Math. Kongresses*, Leipzig(Teubner), 1905.
- [91] DAUBEN J.W., *Georg Cantor*, Cambridge, Massachusetts(Harvard University Press), 1979.
- [92] HADAMARD J., *La théorie des plaques élastiques planes* (Transaction of American Mathematical Society, 3(1902), 401-422) = Oeuvres, vol.IV, p.1841-1862, Paris(C.N.R.S.), 1968.
- [93] MERAY C., *Observations sur la légitimité de l'interpolation* (Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, (3), 1(1884), 165-176).

- [94] LEBESGUE H., *Une propriété caractéristique des fonctions de classe 1* (Bulletin de la Société Mathématique de France, 32(1904), 1-14) = O.S., vol.III, p.65-78.
- [95] HEINE E., *Die Elemente der Functionenlehre* (Journal für die reine und angewandte Mathematik, 74(1872), 172-188).
- [96] VEBLEN O., *The Heine-Borel theorem* (Bulletin of the American mathematical Society, 10(1904), 436-439).
- [97] GOURSAT E., *Cours d'analyse mathématique*, tome I, Paris(Gauthier-Villars), 1902.
- [98] PICARD E., *Traité d'analyse*, tome I, Paris(Gauthier-Villars), 1891.
- [99] LEBESGUE H., Young (W.H.) et Chisholm Young (Grace), *The theory of sets of points* (BSM, (2), 31(1907), 1^e partie, 129-135).
- [100] PAINLEVE P., *Sur le développement d'une branche uniforme de fonction analytique* (CRAS, 128(1899), 1277-1280) = *Oeuvres*, vol.II, p.612-614, Paris(C.N.R.S.), 1974.
- [101] PAINLEVE P., *Sur le développement d'une branche uniforme de fonction analytique en série de polynômes* (CRAS, 129(1899), 27-31) = *Oeuvres*, vol.II, p.622-625, Paris(C.N.R.S.), 1974.
- [102] PAINLEVE P., *Oeuvres*, vol.I, Paris(C.N.R.S.), 1972.
- [103] PAINLEVE P., *Sur le développement des fonctions réelles non analytiques* (CRAS, 126(1898), 459-461) = *Oeuvres*, vol.II, p.606-608, Paris(C.N.R.S.), 1974.
- [104] BOREL E., *Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe*, Paris(Gauthier-Villars), 1917.
- [105] BAIRE R., *Leçons sur les théories générales de l'analyse*, tome II, Paris(Gautier-Villars), 1908.
- [106] BAIRE R., *Leçons sur les fonctions discontinues*, rédigées par A. Denjoy, élève de l'Ecole Normale Supérieure, Paris(Gauthier-Villars), 1905.
- [107] PICARD E., *Lebesgue Henri, Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (BSM, (2), 28(1904), 1^e partie, 180-183).
- [108] PICARD E., *Lebesgue, Intégrale, longueur, aire* (BSM, (2), 27(1903), 1^e partie, 58-61).
- [109] DENJOY A., *Sur quelques propriétés des fonctions de variables réelles* (BSMF, 33(1905), 98-114) = *Articles et mémoires*, tome II, p.509-523, Paris(Gauthier-Villars), 1955.

- [110] TCHEBYCHEFF P.L., *Oeuvres*, tome I, Saint Petersburg (Académie impériale des Sciences), 1899.
- [111] YOUNG W.H., *On an extension of the Heine-Borel theorem* (The Messenger of Mathematics, 33(1904), 129-132).
- [112] YOUNG W.H., *Overlapping intervals* (Proceedings of the London Mathematical Society, 35(1902), 384-388).
- [113] DUGAC P., *Lettres de Charles Hermite à Gösta Mittag-Leffler (1874-1883)* (Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques, 5(1984), 49-285).
- [114] SERRET J.-A., *Cours de calcul différentiel et intégral*, tome I, Calcul différentiel, Paris (Gauthier-Villars), 1868.
- [115] YOUNG W.H., *On non-uniform convergence and term-by-term integration of series* (Proceedings of the London Mathematical Society, (2), 1(1903), 89-102).
- [116] YOUNG W.H., *Sur l'intégration des séries* (CRAS, 136(1903), 1632-1634).
- [117] BURKILL J.C., *Young, William Henry*, p.572-573, vol. XIV, *Dictionary of Scientific Biography*, New York (Charles Scribner's Sons), 1976.
- [118] FRECHET M., *Généralisation d'un théorème de Weierstrass* (CRAS, 139(1904), 848-850).
- [119] KOLMOGOROV A., *Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout* (Fundamenta Mathematicae, 6(1923), 324-329).
- [120] KOLMOGOROV A., *Une série de Fourier-Lebesgue divergente partout* (CRAS, 183(1926), 1327-1328).
- [121] FATOU P., *La série de Fourier et la série de Taylor sur son cercle de convergence* (CRAS, 139(1904), 850-852).
- [122] FATOU P., *Sur l'approximation des incommensurables et les séries trigonométriques* (CRAS, 130(1904), 1019-1091).
- [123] FATOU P., *Sur l'intégrale de Poisson et les lignes singulières des fonctions analytiques* (CRAS, 140(1905), 359-361).
- [124] FATOU P., *Séries trigonométriques et séries de Taylor* (Acta Mathematica, 30(1906), 335-400).
- [125] GUILLEMOT M., *Baire, Lebesgue et l'axiome du choix*, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1980.

- [126] WALDSCHMIDT M., *Les débuts de la théorie des nombres transcendants* (Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques, 4(1983), 93-115).
- [127] FRECHET M., *Les espaces abstraits*, Paris(Gauthier-Villars), 1928
- [128] FRECHET M., *Sur quelques points du calcul fonctionnel* (RCMP, 22 (1906), 1-74).
- [129] ARZELA C., *Sulle serie di funzioni analitiche*(Rendiconti Accad.Sci. Istituto Bologna, 1(1902-1903), 1-12).
- [130] STONE M.H., *The generalized Weierstrass approximation theorem* (Mathematical Magazine, 21(1948), 167-183, 237-254).
- [131] BAIRE R., BOREL E., HADAMARD J. et LEBESGUE H., *Cinq lettres sur la théorie des ensembles* (BSMF,33(1905), 261-273) = O.S., vol.III, p.82-94,
- [132] LINDELOF E., *Le calcul des résidus*, Paris(Gauthier-Villars), 1905.
- [133] *Annuaire du Collège de France 1987-1988*, Paris, 1988,
- [134] J.C. Poggendorfs *biographisch-literarisches Handwörterbuch*, Band V, Leipzig(Verlag Chemie), 1926.
- [135] LINDELOF E., *Remarques sur un théorème fondamental de la théorie des ensembles* (Acta Mathematica, 29(1905), 183-190).
- [136] LEBESGUE H., *Sur une condition de convergence des séries de Fourier* (CRAS, 140(1905), 1378-1381) = O.S., vol.III, p.95-98.
- [137] LEBESGUE H., *Remarques sur la définition de l'intégrale* (BSM, 29(1905), 1-4) = O.S., vol.II, p.155-158.
- [138] LEBESGUE H., *Sur l'intégration des fonctions discontinues* (AsENS, 27(1910), 361-460) = O.S., vol.II, p.135-274,
- [139] PURKERT W. und ILGAUDS H.J., *Georg Cantor, 1845-1918*, Basle (Birkhäuser Verlag), 1987.
- [140] *Jubilé scientifique de M. Emile Borel, Membre de l'Académie des Sciences, à la Sorbonne, le dimanche 14 janvier 1940*, Paris(Palais de l'Institut), 1940.
- [141] FREDHOLM I., *Oeuvres complètes*, Malmö(Litos Reprotryck), 1955.
- [142] MONTEL P., *Notice nécrologique sur M. Henri Lebesgue*, O.S., vol.I, p.31-34.
- [143] HURWITZ A., *Über die Fourierschen Konstanten integrierbare Funktionen* (Math. Annalen, 57(1903), 425-446).

- [144] HADAMARD J., *La théorie des ensembles* (Revue générale des Sciences, 16(1905), 241-242).
- [145] RICHARD J. et HADAMARD J., *Les principes des mathématiques et le problème des ensembles* (Revue Générale des Sciences, 16(1905), 541-543).
- [146] BOREL E., *Mémoire sur les déplacements à trajectoire sphérique* (Recueils des mémoires présentés par des savants étrangers, 33(1905), n°1, 1-128) = *Oeuvres*, vol.III, p.1548-1668, Paris(C.N.R.S.), 1972.
- [147] BORTOLOTTI E., *Sul limite del quoziente di due funzioni* (AM, (3), 8(1903), 245-286).
- [148] BOREL E., *Leçons sur les séries à termes positifs*, recueillies et rédigées par R. d'Adhémar, Paris(Gauthier-Villars), 1902.
- [149] PRINGSHEIM A. et MOLK J., *Principes fondamentaux de la théorie des fonctions*, p.1-112, tome II, vol.1, *Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, Paris(Gauthier-Villars), 1909.
- [150] BAIRE R., *Sur la représentation des fonctions discontinues* (Acta Mathematica, 30(1906), 1-48).
- [151] YOUNG W.H., *The general theory of integration* (Proceedings of the Royal Society of London, 73(1904), 445-449).
- [152] YOUNG W.H., *On the general theory of integration* (London Philosophical Transactions, A 204(1905), 221-252).
- [153] RIESZ F., *Sur les ensembles discontinus* (CRAS, 141(1905), 650-653) = *Oeuvres complètes*, vol.I, p.64-65, Paris(Gauthier-Villars), 1960.
- [154] YOUNG W.H., *Zur Theorie der nirgends dichten Punktmengen in der Ebene* (MA, 61(1905), 281-286).
- [155] SCHOENFLIES A., *Bemerkung zu dem vorstehende Aufsatz des Herrn Young* (MA, 61(1905), 287-288).
- [156] ZORETTI M.L., *Sur un théorème de la théorie des fonctions analytiques* (BSM, 1^e partie, (2), 29(1905), 276-277).
- [157] de la VALLEE POUSSIN C., *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire*, Paris(Gauthier-Villars), 1916.
- [158] DUGAC P., *Lettres à René Baire* (Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques, 1(1980), 37-50).
- [159] de la VALLEE POUSSIN C., *Sur les fonctions à variation bornée et les questions qui s'y rattachent* (BSM, (2), 44(1920), 1^e partie, 267-296).

- [160] PIER J.-P., *L'analyse harmonique. Son développement historique*, Paris(Masson), 1990.
- [161] PIER J.-P., *Mesures invariantes de Lebesgue à nos jours* (Historia Mathematica, 13(1985), 229-240).
- [162] COUMET E., *Paul Tannery : "L'organisation de l'enseignement de l'histoire des sciences"* (Revue de Synthèse, (3), 102(1981), N°101-102, 87-123).
- [163] LEBESGUE H., *Sur la non-applicabilité de deux espaces d'un nombre différent de dimensions* (Comptes rendus des séances de la Société Mathématique de France, 1911, 485) = *O.S.*, vol.IV, p.169.
- [164] LEBESGUE H., *Sur la divergence et la convergence non-uniforme des séries de Fourier* (CRAS.141(1905), 875-877).
- [165] HEINE E., *Einige Anwendungen der Residuenrechnung von Cauchy* (Journal für die reine und angewandte Mathematik, 89(1880), 19-39).
- [166] LEBESGUE H., *Sur la représentation approchée des fonctions* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 96(1908), 1-4) = *O.S.*, vol.III, p.255-258.
- [167] JOURDAIN P.E.B., *On the general theory of functions* (Journal für die reine und angewandte Mathematik, 123(1905), 169-210).
- [168] VOLTERRA V., *Les mathématiques dans les sciences biologiques et sociales* (La Revue du Mois, 1(1906), 1-20).
- [169] DARBOUX G., *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, tome II* (Bulletin des Sciences Mathématiques, (2), 29(1905), 1^e partie, 331-336).
- [170] DARBOUX G., *La vie et l'oeuvre de Charles Hermite* (La Revue du Mois, 1(1906), 37-58).
- [171] HERMITE C. et STIELTJES T.J., *Correspondance, tome II*, Paris (Gauthier-Villars), 1905.
- [172] POMPEIU D., *Sur les séries de fonctions holomorphes* (BSM, (2), 30(1906), 1^e partie, 57-59).
- [173] POMPEIU D., *Rectification à une note sur les séries de fonctions holomorphes* (BSM, (2), 30(1906), 1^e partie, 94-95).
- [174] HOUSSAY F., *Le régime frugivore et nos idées originelles* (La Revue du Mois, 1(1906), 257-257).

- [175] DUGAC P., *Sur la correspondance de Borel et le théorème de Dirichlet-Heine-Weierstrass-Borel-Schoenflies-Lebesgue* (Archives internationales d'Histoire des Sciences, 39(1989), 69-110).
- [176] GAUJA P., *Les fondations de l'Académie des Sciences (1881-1915)*, Hendaye (Imprimerie de l'Observatoire d'Abbadia), 1917.
- [177] POMPEIU D., *Sur la continuité des fonctions de variables complexes*, Paris(Gauthier-Villars), 1905.
- [178] BOREL E., *Sur les principes de la théorie cinétique des gaz* (Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, (3), 23(1906), 9-32) = *Oeuvres*, tome III, p.1669-1704.
- [179] BOLTZMANN L., *Leçons sur la théorie des gaz*, Paris(Gauthier-Villars), 1902.
- [180] HADAMARD J., *Gibbs J. Willard, Elementary principles in statistical mechanics* (BSM, (2), 30(1906), 1^e partie, 161-179).
- [181] HARNACK A., *Théorie de la série de Fourier* (BSM, (2), 6(1882), 1^e partie, 242-260, 265-280, 282-300).
- [182] LEVI B., *Ricerche sulle funzioni derivate* (Atti della Reale Accademia dei Lincei, Rendiconti, XV, 1, 1906, 423-438, 551-558, 674-684 ; XV, 2, 1906, 358-368).
- [183] LEBESGUE H., *Sur les fonctions dérivées* (Atti della Reale Accademia dei Lincei, Rendiconti, XV, 2, 1906, 3-8) = *O.S.*, vol.II, 159-164.
- [184] LEBESGUE H., *Encore une observation sur les fonctions dérivées* (Atti della Reale Accademia dei Lincei, Rendiconti, XVI, 1, 1907, 92-100) = *O.S.*, vol.II, p.165-173.
- [185] SCHOENFLIES A., *Sur un théorème de Heine et un théorème de Borel* (CRAS, 144(1907), 22-23).
- [186] GOURSAT E., *Sur la définition générale des fonctions analytiques d'après Cauchy* (Transactions of the American Mathematical Society, 1(1900), 14-16).
- [187] RIESZ F., *Sur un théorème de M. Borel* (CRAS,140(1905), 224-226).
- [188] BOREL E., *Sur l'approximation des nombres par des nombres rationnels* (CRAS, 136(1903), 1054-1055).
- [189] BOREL E., *Contribution à l'analyse mathématique du continu* (Journal de mathématiques pures et appliquées, (5), 9(1903), 329-375).
- [190] YOUNG L., *Mathematicians and their times, History of mathematics and*

mathematics of history, Amsterdam(North-Holland), 1981.

- [191] LYUSTERNIK L.A., *The early years of the Moscow mathematics school* (Russian Mathematical Surveys 22(1967), n° 1, 133-157).
- [192] ПАПЛАУСКАС А.В., *Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега*, Москва(Наука), 1966.
- [193] de GEÖCZE Zoard, *Quadrature des surfaces courbes* (CRAS, 144(1905), 253-256).
- [194] SAKS S., *Theory of the integral*, Warszawa(Monografie Matematyczne), 1937.
- [195] FRECHET M., *Développements en séries*, p.210-241, tome II, vol.1, *Encyclopédie des sciences mathématiques*, Paris(Gauthier-Villars), 1912.
- [196] BAIRE R., *Théorie des ensembles*, p.489-531, tome I, vol.I, *Encyclopédie des Sciences mathématiques*, Paris(Gauthier-Villars), 1909.
- [197] CARTAN E., *Sur la définition de l'aire d'une portion de surface courbe* (CRAS, 145(1907), 1403-1406 ; 146(1908), 168) = *Oeuvres*, p.9-12, vol. 1, partie III.
- [198] BAIRE R., *Leçons sur les théories générales de l'analyse*, tome I, Paris(Gauthier-Villars), 1907.
- [199] SCHWARZ H.A., *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, 2. Band, Berlin(Springer), 1890.
- [200] SERRET J.-A., *Cours de calcul différentiel et intégral*, 2^e édition, tome II, Paris(Gauthier-Villars), 1880.
- [201] LEBESGUE H., *Sur la définition de l'aire des surfaces* (L'Enseignement mathématique, 10(1908), 212-220) = *O.S.*, vol.IV, p.36-44.
- [202] LEBESGUE H., *Observations sur une communication de M. Z. de Geöcze* (Comptes Rendus des séances de la Société Mathématique de France, 1913, 31-33) = *O.S.*, vol.IV, p.45-46.
- [203] MERAY C., *Nouveaux exemples d'interpolations illusoires* (BSM, (2), 20(1896), 1^e partie, 266-270).
- [204] LANDAU E., *Über die Approximation einer stetigen Funktion durch eine ganze rationale Funktion* (RCMP, 25(1908), 337-346) = *Collected Works*, vol.III, Essen(Thales Verlag).
- [205] BUTZER P.L. and STARK E.L., *The singular integral of Landau alias the Landau polynomials. Placement and impact of Landau's article :*

"Über die Approximation einer stetigen Funktion durch eine ganze rationale Funktion", p.83-109, vol.3, *Collected Works de Landau*, Essen(Thales Verlag).

- [206] LEBESGUE H., *Sur les intégrales singulières* (Ann. Fac. Sci. Toulouse, (3), 1(1909), 25-117) = *O.S.*, vol.III, p.259-351.
- [207] BOREL E., *Les paradoxes de la théorie des ensembles* (ASENS, (3), 25(1908), 443-448) = *Oeuvres*, vol. III, p.1271-1276, Paris(CNRS), 1972.
- [208] DIEUDONNE J., *Cartan, Elie*, p.95-96, vol.III, *dictionary of scientific biography*, New York(Charles Scribner's Sons), 1971.
- [209] COUMET E., *Ecrits épistémologiques de Georges Sorel (1905) : H. Poincaré, P. Duhem, E. Le Roy* (Cahiers Georges Sorel, 6(1988), 5-51).
- [210] de GEÖCZE Z., *Quadrature des surfaces courbes*, Leipzig(Teubner), 1909.
- [211] FABER G., *Über stetige Funktionen II* (MA, 59(1910), 372-443).
- [212] STEINHAUS H., *Les probabilités dénombrables et leur apport à la théorie de la mesure* (FM, 4(1923), 286-310).
- [213] BOREL E., *Sur les principes de la théorie des ensembles*, p.15-17, tome II, *Comptes Rendus du Congrès international des mathématiciens*, Rome. 1908 = *Oeuvres*, vol.III, p.1267-1270.
- [214] SIERPINSKI W., *Détermination élémentaire du théorème de M. Borel sur les nombres absolument normaux et détermination effective d'un tel nombre* (BSMF, 45(1917), 125-132) = *Oeuvres complètes*, tome I, p.161-166.
- [215] LEBESGUE H., *Sur certaines démonstrations d'existence* (BSMF, 45 (1917), 132-144) = *O.S.*, vol.II, p.279-290.
- [216] BOREL E., *Leçons sur la théorie des fonctions*, Paris(Gauthier-Villars), 2^e éd. 1914 ; 3^e éd. 1928 ; 4^e éd. 1950.
- [217] BERNSTEIN F., *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf ein aus der Theorie der säkularen Störungen herrührendes Problem* (MA, 71(1912), 417-439).
- [218] BOREL E., *Sur un problème de probabilités relatif aux fractions continues* (MA, 72(1912), 578-584) = *Oeuvres*, vol. II, p.1085-1091.
- [219] BERNSTEIN F., *Über geometrische Wahrscheinlichkeit und über das Axiom des beschränkten Arithmetisierbarkeit der Beobachtungen* (MA, 72(1912), 585-587).

- [220] BERNARD N., *Le mendélisme* (La Revue du Mois, 5(1908), 33-53).
- [221] BOREL E., *Sur les ensembles effectivement énumérables et sur les définitions effectives* (R.C. Accad. Lincei, (5), 28(1919), 163-165) = *Oeuvres*, vol.III, p.1361-1363.
- [222] STIELTJES T.-J., *Recherches sur les fractions continues* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques, 8(1894), J.1-J.122).
- [223] LEBESGUE H., *Sur l'intégrale de Stieltjes et sur les opérations fonctionnelles linéaires* (CRAS, 150(1910), 86-88) = *O.S.*, vol.II, p.275-277.
- [224] LEBON E., *Henri Poincaré*, 2^e édition, Paris(Gauthier-Villars), 1912.
- [225] CHAMPERNOWNE D., *The construction of decimals normal in the scale of ten* (Journal of London Mathematical Society, 8(1933), 254-260).
- [226] COPELAND A. and ERDÖS P., *Note on normal numbers* (Bulletin of the American Mathematical Society, 52(1946), 857-860).
- [227] LEBESGUE H., *Sur une définition due à M. Borel* (AsENS, 37(1920), 255-257) = *O.S.*, vol.II, p.351-353.
- [228] BOREL E., *La théorie des ensembles et les progrès récents de la théorie des fonctions* (Revue Générale des Sciences, 20(1909), 315-324) = *Oeuvres*, vol.III, p.1277-1307.
- [229] HADAMARD J., *Sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées* (Mémoires des savants étrangers, 33(1907)) = *Oeuvres*, vol.II, p.515-641, Paris(C.N.R.S.), 1968.
- [230] LEBESGUE H., *Sur l'égalité des polyèdres convexes* (L'Intermédiaire des Mathématiciens, 16(1909), 113-120) = *O.S.*, vol.V, p.13-20.
- [231] BOREL E., *Le continu mathématique et le continu physique* (Scientia, 6(1909), 21-25) = *Oeuvres*, vol.IV, p.2151-2165.
- [232] HERMITE C., *Sur la fonction exponentielle* (CRAS, 77(1873), 18-24, 74-79, 226-233, 285-293) = *Oeuvres*, vol.III, p.150-181, Paris (Gauthier-Villars), 1912.
- [233] GAUSS C.F., *Recherches arithmétiques*, traduites par A.C.M. Pouillet-Delisle, Paris(Courcier), 1907.
- [234] VOLTERRA V., *Sopra alcune questioni di inversione di integrali definiti* (AM, (2), 25(1897), 139-178) = *Opere matematiche*, vol.II, p.279-313, Roma(Accademia Nazionale dei Lincei), 1956.

- [235] VERLEY J.-L., *Les fonctions analytiques*, p.121-150 de l'*Abbrégé d'Histoire des mathématiques*, publié sous la direction de J. DIEUDONNE, Paris(Hermann), 1986, nouvelle édition.
- [236] BOREL E., *La méthode de M. Poincaré* (La Revue du Mois, 7(1909), 360-362) = *Oeuvres*, vol.IV, p.2219-2221.
- [237] HERMITE C., *Sur la fonction $\Gamma(x)$* (Bulletin international de Prague, 1895, 214-219) = *Oeuvres*, vol.IV, p.554-555, Paris(Gauthier-Villars), 1917.
- [238] BOREL E., *Valeur pratique et philosophie des probabilités*, Paris (Gauthier-Villars), 1939.
- [239] KNOBLOCH E., *Emile Borel as a Probabilist*, p.215-233 de L. Krüger, L. Daston, M. Heidelberger, *The probabilistic revolution*, volume I, M.I.T., 1987.
- [240] BOREL E., *Sur certains problèmes d'hérédité connexes au problème de la ruine des joueurs* (CRAS, 212(1941), 821-825) = *Oeuvres*, vol. II, p.1211-1214.
- [241] MOORE G.H., *Zermelo's axiom of choice. Its origins, development, and influence*, New York(Springer Verlag), 1982.
- [242] Медведев Ф.А., *Ранняя история аксиомы выбора*, Москва(Наука), 1982.
- [243] DUGAC P., *Le théorème des valeurs intermédiaires et la préhistoire de la topologie générale* (Rivista di Storia della Scienza, 2(1985), 51-70).
- [244] DUGAC P., *Histoire du théorème des accroissements finis* (Archives internationales d'Histoire des Sciences, 30(1980), 86-101).
- [245] BOREL E., *Leçons sur la théorie de la croissance*, Paris(Gauthier-Villars), 1910.
- [246] NETTO E. et VOGT H., *Analyse combinatoire et théorie de déterminants*, p.63-132, tome I, vol.I, *Encyclopédie des Sciences mathématiques*, Paris(Gauthier-Villars), 1904.
- [247] STUDY E. et CARTAN E., *Nombres complexes*, p.329-468, tome I, vol. I, *Encyclopédie des Sciences mathématiques*, Paris(Gauthier-Villars), 1908.
- [248] VOGT H., *Eléments de mathématiques supérieures à l'usage des physiciens, chimistes, ingénieurs et des élèves des facultés des sciences*, Paris(Vuibert), 1901.

- [249] FABRY E., *Traité de mathématiques générales à l'usage des chimistes, physiciens, ingénieurs et des élèves des facultés des sciences*, avec un préface de G. Darboux, Paris(Hermann), 1909.
- [250] VITALI G., *Opere*, Bologna(Edizioni Cremonese), 1984.
- [251] BAIRE R., *Sur la non-applicabilité de deux continus à n et à $n+p$ dimensions* (CRAS, 144(1907), 318-321).
- [252] BAIRE R., *Sur la non-applicabilité de deux continus à n et à $n+p$ dimensions* (BSM, (2), 31(1907), 1^e partie. 94-99).
- [253] BROUWER L.E.J., *Collected Works*, vol.II, Amsterdam(North Holland), 1976.
- [254] LEBESGUE H., *Sur la non-applicabilité de deux domaines appartenant respectivement à des espaces à n et à $n+p$ dimensions* (MA, 70(1911), 166-168) = O.S., vol.IV, p.170-172.
- [255] LEBESGUE H., *Sur l'invariance du nombre de dimensions d'un espace et sur le théorème de M. Jordan relatif aux variétés fermées* (CRAS, 152(1911) = O.S., vol.IV, p.173-175.
- [256] LEBESGUE H., *Sur les correspondances entre les points de deux espaces* (FM, 2(1921), 3-32) = O.S., vol.IV, p.177-206.
- [257] LEBESGUE H., *Sur le théorème de Schoenflies* (FM, 6(1924), 96-99) = O.S., vol.IV, p.207-210.
- [258] MAYER J., *Le théorème des quatre couleurs : notice historique et aperçu technique* (Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques, 3(1982), 43-62).
- [259] LEBESGUE H., *Sur l'intégrale de Stieltjes et sur les opérations fonctionnelles linéaires* (CRAS, 150(1910), 86-88) = O.S., vol.II, p.275-277.
- [260] DENJOY A., *Sur les fonctions analytiques uniformes à singularités discontinues* (CRAS, 169(1909), 258) = *Un demi-siècle (1907-1956) de notes communiquées aux Académies*, vol.I, p.59-61, Paris(Gauthier-Villars), 1957.
- [261] DENJOY A., *Sur les singularités discontinues des fonctions analytiques uniformes* (CRAS, 169(1909), 386) = *Un demi-siècle (1907-1956) de notes communiquées aux Académies*, vol.I, p.62-63, Paris (Gauthier-Villars), 1957.
- [262] LEBESGUE H., *Sur le problème de Dirichlet* (CRAS, 144(1907), 316-318) = O.S., vol.IV, p.85-87.


- [263] LEBESGUE H., *Sur le problème de Dirichlet* (CRAS, 144(1907), 622-623) = O.S., vol.IV, p.89-90.
- [264] LEBESGUE H., *Sur le problème de Dirichlet* (RCMP, 24(1907), 1-32) = O.S., vol.IV, p.91-122.
- [265] DENJOY A., *Notice sur la vie et l'oeuvre de Henri Lebesgue*, p.35-65, vol.I, O.S.
- [266] LEBESGUE H., *Sur les singularités des fonctions harmoniques* (CRAS, 173(1923), 1097-1099) = O.S., vol.IV, p.135-137.
- [267] LEBESGUE H., *Remarques sur un énoncé dû à Stieltjes* (Annales Fac. Sci. Univ. Toulouse, 1(1909), 119-128) = O.S., vol.III, p.353-362.
- [268] PICARD E., *Traité d'analyse*, tome II, 2^e édition, Paris(Gauthier-Villars), 1905.
- [269] GISPERT H., *Correspondance de Fréchet (1907-1926) et son apport à la théorie de la dimension (avec 3 lettres de Brouwer à Baire)* (Cahiers du Séminaire d'Histoire des mathématiques, 1(1980), 69-120).
- [270] DIEUDONNE J., *A history of algebraic and differential topology 1900-1960*, Boston(Birkhäuser), 1989.
- [271] JOHNSON D.M., *The problem of the invariance of dimension in the growth of modern topology*, part II (Archive for History of Exact Sciences, 25(1981), 85-256).
- [272] BOREL E. und STÄCKEL P., *Die Elemente der Mathematik, I Arithmetik und Algebra, II Geometrie*, Leipzig(Teubner), 1909.
- [273] GRATTAN-GUINNESS I., *Stäckel, Paul Gustav*, p.599, vol.XII, *Dictionary of scientific biography*, New York(Charles Scribner's Sons), 1975.
- [274] BLUMENTHAL O., *Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini*, Paris(Gauthier-Villars), 1910.
- [275] POINCARÉ H., *La logique de l'infini* (Revue de métaphysique et de morale, 1909, 461-482) = *Dernières pensées*, p.99-139, Paris (Flammarion), 1913.
- [276] WIRTINGER W., *Sur le théorème de M. Hadamard relatif aux déterminants* (BSM,, (2), 31(1907), 1^e partie, 175-179).

- [277] FISCHER E., *Über den Hadamardschen Determinantsatz* (Archiv der Math. und Physik, (3), 13(1908), 32-40).
- [278] BOREL E., *Sur la définition de l'intégrale définie* (CRAS, 150(1910), 375-377) = *Oeuvres*, vol.3, p.821-822.
- [279] BOREL E., *Sur une condition générale d'intégrabilité* (CRAS, 150 (1910), 508-511) = *Oeuvres*, vol.III, p.823-825.
- [280] LEVI B., *Sul principio di Dirichlet* (RCMP, 22(1906), 293-359).
- [281] MAWHIN J., *Présences des sommes de Riemann dans l'évolution du calcul intégral* (Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques, 4(1983), 117-147).
- [282] TAYLOR A.E. et DUGAC P., *Quatre lettres de Lebesgue à Fréchet* (Revue d'Histoire des Sciences, 34(1981), 149-169).
- [283] HOBSON E.W., *On the second mean-value theorem of the integral calculus* (Proceedings of the London Math. Soc., (2), 7(1909), 14-23).
- [284] LEBESGUE H., *Remarques sur les théories de la mesure et de l'intégration* (AsENS, 35(1918), 191-250) = *O.S.*, vol.II, p.291-350.
- [285] RIESZ F., *Sur les opérations fonctionnelles linéaires* (CRAS, 149 (1909), 974-977).
- [286] de LA VALLEE POUSSIN C.J., *Recherches sur la convergence des intégrales définies* (Journal des Mathématiques pures et appliquées, (4), 8(1892), 421-467).
- [287] BOREL E., *Le calcul des intégrales définies* (Journal des Mathématiques pures et appliquées, (5), 8(1912), 159-210) = *Oeuvres*, vol.II, p.827-878.
- [288] MITTAG-LEFFLER G., *Une généralisation de l'intégrale de Laplace-Abel* (CRAS, 136(1903), 537-539).
- [289] MITTAG-LEFFLER G., *Sur la nouvelle fonction $E_{\alpha}(x)$* (CRAS, 137 (1903), 554-558).
- [290] MITTAG-LEFFLER G., *Sur la représentation arithmétique des fonctions analytiques générales d'une variable complexe*, p.67-85, vol.I, *Atti del IV Congresso internazionale dei Matematici*, Roma (Accademia dei Lincei), 1909.
- [291] MITTAG-LEFFLER G., *Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène* (cinquième note) (Acta Mathematica, 29(1905), 100-181).

- [292] LE ROY E., *Valeurs asymptotiques de certaines séries procédant suivant les puissances entières et positives d'une variable réelle* (BSM, (2), 24(1900), 1^e partie, 245-268).
- [293] LINDELÖF E., *Sur la détermination de la croissance des fonctions entières définies par un développement de Taylor* (BSM, (2), 27 (1903), 1^e partie, 213-232).
- [294] LEBESGUE H., *Sur les programmes d'arithmétique et algèbre* (Revue de l'Enseignement des Sciences, 4(1910), 97-100) = O.S., vol.V, p.177-180.
- [295] BOREL E., *Leçons sur les fonctions méromorphes*, rédigées par L. Zoretti, Paris(Gauthier-Villars). 1903.
- [296] PAINLEVE P., *Observations au sujet de la communication précédente* (CRAS, 148(1909), 1156-1157) = Oeuvres, vol.II, p.817-818, Paris (CNRS), 1974.
- [297] DUGAC P., *Eléments pour une étude sur Jules Drach* (Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques, 2(1981), 17-57).
- [298] LEBESGUE H., *Contribution à l'étude des correspondances de M. Zermelo* (BSMF, 35(1907), 202-212) = O.S., vol.III, p.227-237.
- [299] LEBESGUE H., *Sur la méthode de H. Coursat pour la résolution de l'équation de Fredholm*(BSMF, 36(1908), 3-19) = O.S., vol.III, p.239-254.
- [300] LEBESGUE H., *Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz* (BSMF, 38(1910), 184-210) = O.S., vol.III, p.363-389.
- [301] LEBESGUE H., *Sur quelques surfaces non réglées applicables sur le plan* (CRAS, 128(1899), 1502-1505) = O.S., vol.IV, p.13-15.
- [302] LEBESGUE H., *Sur la définition de l'aire d'une surface* (CRAS, 129 (1899), 870-873) = O.S., vol.IV, p.17-20.
- [303] LEBESGUE H., *Sur la définition de certaines intégrales de surface* (CRAS, 131(1900), 867-870) = O.S., vol.IV, p.21-24.
- [304] LEBESGUE H., *Sur le minimum de certaines intégrales* (CRAS, 131 (1900), 935-937) = O.S., vol.IV, p.25-27.
- [305] LEBESGUE H., *Sur l'existence des dérivées* (CRAS, 136(1903), 659-661) = O.S., vol.I, p.333-335.

- [306] LEBESGUE H., *Sur les suites de fonctions mesurables* (CRAS, 149 (1909), 102-103) = O.S., vol.II, p.183-184.
- [307] LEBESGUE H., *Sur la recherche des fonctions primitives par l'intégration* (Atti Accad. Lincei Rend., 16(1907), 282-290) = O.S., vol. II, p.175-182.
- [308] LEBESGUE H., *Sur les transformations ponctuelles transformant les plans en plans qu'on peut définir par des procédés analytiques* (Atti Accad. Sci. Torino, 1907, 3-10) = O.S., vol.III, p.219-226.
- [309] LEBESGUE H., *Sur l'équilibre du corps solide* (Revue de l'Enseignement des Sciences, 3(1909), 257-265) = O.S., vol.V, p.168-176.
- [310] LEBESGUE H., *Remarques sur l'équilibre du corps solide* (Nouv. Ann. Math., (4), 9(1909), 136-140) = O.S., vol.V, p.163-167.
- [311] LEBESGUE H., *Sur un théorème de M. R. Bricard* (Nouv. Ann. Math. (4), 10(1910), 1-4) = O.S., vol.IV, p.261-264.
- [312] GUICHARD C., *Traité de géométrie, première partie, Géométrie plane et géométrie dans l'espace*, Paris(Librairie Nony), 1899.
- [313] LATTES S., *Sur les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation*, Milan (Rebeschini), 1906.
- [314] BOREL E., *Le présent et l'avenir de l'aviation* (Revue de Paris, 4(1910), 282-294),
- [315] BOREL E. et PAINLEVE P., *L'aviation*, Paris(Alcan), 1910 ; nouvelle édition avec C. MAURAIN, 1923,
- [316] DRACH J., *Sur le problème logique de l'intégration des équations différentielles* (Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse pour les Sciences mathématiques et les Sciences physiques, (2), 10(1908), 393-472).
- [317] BAIRE R., *Oeuvres scientifiques*, Paris(Gauthier-Villars), 1990,
- [318] de TERAMOND G., *Maisons de sciences*, Paris(Pierre Lafitte), 1911.
- [319] TRAYNARD E., *Sur les fonctions thêta de deux variables et les surfaces hyperelliptiques*, Paris(Gauthier-Villars), 1907.
- [320] POMMARET J.F., *Differential Galois theory*, New York(Gordon and Breach), 1983.
- [321] RUSSELL B., *L'importance philosophique de la logistique* (Revue de Métaphysique et de Morale, 19(1911), 281-291).

- [322] Agathon, *L'esprit de la nouvelle Sorbonne : la crise de la culture classique, la crise du français*, Paris(Mercure de France), 1911.
- [323] ROBERT P.(sous la direction de), *Le petit Robert 2*, Paris(S.E.P. R.E.T.), 1974.
- [324] PEREZ C., *Noël Bernard* (Revue du Mois. 11(1911), 641-657).
- [325] BURALI-FORTI C. et MARCOLONGO R., *Eléments de calcul vectoriel avec de nombreuses applications à la géométrie, à la mécanique et à la physique mathématique*, traduit de l'italien et augmenté d'un supplément par S. Lattès, Paris(Hermann), 1910.
- [326] DELPECH J., *Statut du personnel enseignant et scientifique de l'enseignement supérieur*, 2ème éd., Paris(Sirey), 1931.
- [327] WEISZ G., *The emergence of modern universities in France, 1863-1914*, Princeton University Press. 1983.
- [328] CHARLE C. et FERRE R. (éditeurs), *Le personnel de l'enseignement supérieur en France aux 19^e et 20^e siècles*, Paris(C.N.R.S.), 1985.
- [329] *L'Ecole des Hautes Etudes Sociales 1900-1910*, Paris(F. Alcan), 1911.
- [330] JANISZEWSKI S., *Sur les continus irréductibles entre deux points*, Paris(Gauthier-Villars), 1911 = p.31-125, *Oeuvres choisies*, Warszawa(Panstwowe Wydawnictwo Naukowe), 1962 = (Journal de l'Ecole Polytechnique, (2), 16^e cahier, 1912, 79-170 ; Rectifications p.170 et p.207-208).
- [331] KNASTER B., *Zygmunt Janiszewski (1888-1920)*, p.5-12, *Oeuvres choisies*, Warszawa(Panstwowe Wydawnictwo Naukowe), 1962 = p.71-73, *Dictionary of Scientific Biography*, New York(Charles Scribner's Sons), 1973.
- [332] BLUTEL E., *Sur une méthode d'approximation* (BSMF, 39(1911), 155-159).
- [333] BERNARD N., *Un mariage en l'an 3000* (La Revue du mois, 11(1911), 658-675).
- [334] FRECHET M., *La vie et l'oeuvre d'Emile Borel*, p.5-98, tome I, *Oeuvres de E. Borel*, Paris(C.N.R.S.), 1972.
- [335] BURALI-FORTI et MARCOLONGO R., *Analyse vectorielle générale II, application à la mécanique et à la physique*, Pavie(Mattei), 1913.
- [336] ZORETTI L., *Education, un essai d'organisation démocratique*, Paris(Plon Nourrit), 1918.

- 
- [337] ZORETTI L., *L'éducation nationale et le mouvement ouvrier en France*, Paris(Librairie populaire), 1923.
- [338] ZORETTI L.(éditeur), *Pour l'éducation des masses*, Paris(Publications de l'Institut supérieur ouvrier), 1935.
- [339] ZORETTI L., *Elite, sélection, culture*, Paris(Editions Liberté). 1935.
- [340] ZORETTI L., *La réforme de l'enseignement*, Paris(Centre confédéral d'éducation ouvrière), 1937.
- [341] DUPIOL J., LEFRANC G. et ZORETTI L., *La nationalisation des industries-clés*, Paris(Centre confédéral d'éducation ouvrière), vers 1936.
- [342] ZORETTI L., *Le plan de la C.G.T.*, Paris(Centre confédéral d'éducation ouvrière), vers 1937.
- [343] ZORETTI L., *Le chômage*, Paris(Centre confédéral d'éducation ouvrière), 1939.
- [344] ZORETTI L., SOMERHAUSEN M., MOILIN L. de MAN A. et LEFRANC G., *Les problèmes d'ensemble du fascisme*, Paris(Centre confédéral d'éducation ouvrière), 1939.
- [345] ZORETTI L., *France, forge ton destin*, Paris(R. Debresse), 1941.
- [346] ABELLIO R., *Ma dernière mémoire, II. Les militants, 1927-1939*, Paris(Gallimard). 1975 ; *III. Sol invictus, 1939-1947*, Paris(Editions Ramsey), 1980.
- [347] SADOUN M., *Les socialistes sous l'occupation. Résistance et collaboration*, Paris(Presses de la Fondation Nationale des Sciences Politiques), 1982.
- [348] RUHLMANN G., *Cinq siècles au Collège Sainte-Barbe, 1460-1960*, Paris(Association amicale des anciens barbistes), 1960.
- [349] CAHEN E., *Sur la fonction $\tau(s)$ de Riemann et sur des fonctions analogues* (ASENS, (3), 11(1894), 75-154).
- [350] *Enquêtes et documents relatifs à l'Enseignement supérieur. Rapports des Conseils d'Université pour l'année scolaire 1910-1911*, Paris(Imprimerie Nationale).
- [351] BOREL E., *La théorie des ensembles et les nombres décimaux* (CRAS, 168(1919), 1148-1150) = *Oeuvres*, t.III, p.1329-1331.

- [352] KHINTCHINE A., *Ein Satz des Warscheinlichkeitsrechnung* (FM, 6(1924, 9-20).
- [353] RIESZ F., *Sur les suites de fonctions mesurables* (CRAS, 148(1909), 1303-1305).
- [354] PIERPONT J., *The theory of functions of real variables*, Boston (Ginn and Company), tome I : 1905, tome II : 1912.
- [355] LEVY P., *Axiome de Zermelo et nombres transfinis* (AsENS, (3), 67(1950), 15-49).
- [356] HUMBERT G., *Cours d'analyse*, Paris(Gauthier-Villars), tome I : 1903, tome II : 1904.
- [357] BOREL E., *Notice sur les travaux scientifiques*, Paris(Gauthier-Villars), 1912.
- [358] HALEVY E., *Histoire du socialisme europèen*, Paris(Gallimard), 1948.
- [359] DREYFUS F.-G., *Histoire de Vichy*, Paris(Perrin), 1990.
- [360] ZORETTI L., *L'universitè de Caen 1432-1932. Son passè. Son présent. L'Institut technique de Normandie*, Caen(Imprimerie Artistique Malherbe), 1932.
- [361] FRECHET M., *On Pierpont's definition of integrals* (BAMS, (2), 22 (1916), 295-298).
- [362] PIERPONT J., *Reply to Professor Frèchet's article*(BAMS, (2), 22 (1916), 298-302).
- [363] BOREL E., *Les fonctions monogènes non analytiques* (BSMF, 40(1912), 205-219) = *Oeuvres*, t.2, p.773-788.
- [364] BOREL E., *Définition et domaine d'existence des fonctions monogènes uniformes*, p.133-144, vol.1, *Proceedings of the fifth international Congress of Mathematicians*, Cambridge(University Press), 1913 = *Oeuvres*, t.2, p.791-802.
- [365] WORMS R., *La sexualitè dans les naissances françaises*, Paris(Giard et Brière), 1912.
- [366] HOUSSAY F., *Etude sur 6 gènerations de poules carnivores* (Archives de zoologie expérimentale, (4), 6(1907), 137-332).
- [367] HOUSSAY F., *Forme, puissance et stabilitè des poissons*, Paris (Hermann), 1912.
- [368] THOM R., *Stabilitè structurelle et morphogènese*, 2^e édition, Paris (InterEditions), 1977.

- [369] STEPAN N., *The idea of race in science : Great Britain 1800-1960*, Oxford(MacMillan), 1982.
- [370] MacKENZIE D.A., *Statistics in Britain 1865-1930. The social constitution of scientific knowledge*, Edinburgh(University Press), 1981.
- [371] BOREL E., *Les théories moléculaires et les mathématiques* (Revue générale des Sciences, 23(1912), 842-853) = *Oeuvres*, t.3, p.1773-1808.
- [372] HADAMARD J. et MANDELBJROJT S., *La série de Taylor et son prolongement analytique*, 2^e édition, p.1-104, S. MANDELBJROJT, *Selecta*, Paris(Gauthier-Villars), 1981.
- [373] HILBERT D., *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Leipzig(Teubner), 1912.
- [374] DIENES P., *Leçons sur les singularités des fonctions analytiques*, Paris(Gauthier-Villars), 1913.
- [375] MANDELBJROJT S., *Souvenirs à bâtons rompus, recueillis en 1970 par Benoît Mandelbrot* (Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques, 6(1985), 1-46).
- [376] SERGESCU P., *Les Sciences Mathématiques*, p.5-182, P. SERGESCU, J. ROSTAND et A. BOUTARIC, *Les Sciences*, Paris(Denoël et Steele), 1933.
- [377] d'OCAGNE M., *Histoire abrégée des sciences mathématiques*, Paris (Vuibert), 1955.
- [378] DIEUDONNE J., *Regards sur Bourbaki* (Analele Universitatii Bucuresti, Matematica-Mecanica, 18(1969), 13-25).
- [379] DELTHEIL R., *M. Marty* (Association Amicale des anciens élèves de l'Ecole Normale Supérieure, 1965, 60-62).
- [380] LEBESGUE H., *Analyse de la thèse de M. Antoine* (BSM, 46(1922), 5-12) = *O.S.*, t.V, p.352-359.
- [381] MARTIN Y., *L. Antoine* (Association Amicale des anciens élèves de l'Ecole Normale Supérieure, 1972, 44-46).
- [382] ANTOINE L., *Sur l'homéomorphisme de deux figures de leurs voisinages* (Journal de mathématiques pures et appliqués, (8), 4(1921), 221-325).
- [383] BLONDEL A., *Sur la théorie des marées dans un canal. Application à la mer rouge*, Toulouse(Privat), 1912.

- [384] MAURAIN C. et PACAUD A., *La Faculté des Sciences de l'Université de Paris de 1906 à 1940*, Paris(Presses Universitaires de France), 1940.
- [385] DUPUY P., *La vie d'Evariste Galois* (AsENS, (3), 13(1896), 197-266).
- [386] BERTRAND J., *La vie d'Evariste Galois par P. Dupuy*, p.329-345, J. Bertrand, *Eloges académiques*, nouvelle série, Paris(Hachette), 1902.
- [387] BOREL E., *Sur l'indétermination des fonctions analytiques au voisinage d'un point singulier essentiel* (CRAS, 155(1912), 201) = *Oeuvres*, t.II, p.789.
- [388] BOHR H., *Collected mathematical works*, tome I, København (Dansk Matematisk Forening), 1952.
- [389] BOHR H., *Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann* (Société Mathématique de France, *Comptes Rendus des Séances*, 1914, 52-66) = B 16 de [388].
- [390] ESCLANGON E., *L'acoustique des canons et des projectiles* (Mémorial de l'Artillerie, 4(1925), 639-1096).
- [391] POIVILLIERS M., *Le repérage pendant la guerre 1914-1918*, Le cinquantenaire du repérage, 1914-1918, Fédération française du repérage, Supplément au *Journal Sioux*, n° 46, 1965.
- [392] BOURGEOIS R., *Conférence sur le service des renseignements par observations terrestres*, Secret, septembre 1917 (cote Bibliothèque Nationale : Fol Pièce V 2220).
- [393] DELTHEIL R., *F. Lebeau* (Association Amicale des Anciens Elèves de l'Ecole Normale Supérieure, 1917, 130-133).
- [394] NORDMANN C., *Notice sur les travaux scientifiques*, Paris(Renouard), 1928.
- [395] BRICARD R., *Théorèmes sur les courbes et les surfaces fermées* (Nouvelles Annales de Mathématiques, 14(1914), 19-25).
- [396] LEBESGUE H., *Sur les courbes orbiformes, à propos d'une note récente de M. R. Bricard* (Comptes rendus des séances de la Société Mathématique de France, 42(1914), 287-288).
- [397] LEBESGUE H., *Sur le problème des isopérimètres et sur les domaines de largeur constante* (Comptes Rendus des séances de la Société Mathématique de France, 42(1914), 289-293).
- [398] JULIA G., *Paul Lambert* (Association Amicale des anciens élèves de l'Ecole Normale Supérieure, 1919, 109-113).

- [399] LAMBERT P., *Entiers imaginaires* (Nouvelles Annales de Mathématiques (4), 12(1912), 408-421).
- [400] PAINLEVE P., *De la science à la défense nationale*, Paris(Calmann-Lévy), 1931.
- [401] BENSAUDE-VINCENT B., *Science et vigilance*, Paul Langevin, Paris (Belin), 1987.
- [402] CLAUDE A. et DRIENCOURT L., *Description et usage de l'astrolabe à prisme*, Paris(Gauthier-Villars), 1910.
- [403] SONNET H., *Dictionnaire des mathématiques appliquées*, Paris(Hachette), 1867, 6^e édition 1900.
- [404] DIDION I., *Traité de balistique*, Paris(Mallet-Bachelier), 1848, 2^e édition 1860.
- [405] BUAT E., *L'artillerie de campagne, son histoire, son évolution, son état actuel*, Paris(Félix Alcan), 1911.
- [406] HADAMARD J., *Rapports sur les travaux examinés et retenus par la Commission de la balistique de l'Institut pendant la durée de la guerre* (CRAS, 170(1920), 436-445).
- [407] GARNIER M., *Sur les altérations de portées dues aux perturbations atmosphériques* (Mémorial de l'Artillerie, 1922, 299-336).
- [408] GOSSOT F. et LIOUVILLE R., *Balistique intérieure*, Paris(Gauthier-Villars), 1933.
- [409] d'OCAGNE M., *Principes usuels de nomographie avec application à divers problèmes concernant l'artillerie et l'aviation*, Paris (Gauthier-Villars), 1919.
- [410] FUBINI G., *Quelques recherches de balistique extérieure* (Mémorial de l'Artillerie, 4(1925), 381-393).
- [411] GARNIER M., *Calcul des trajectoires par arcs successifs*, Paris (Gauthier-Villars), 1921.
- [412] d'OCAGNE M., *Traité de nomographie, théorie des abaques, applications*, 2^e édition, Paris(Gauthier-Villars), 1921.
- [413] BOREL E., *Supplément (1921) à la Notice (1912) sur les travaux scientifiques*, Toulouse(Privat) = *Oeuvres*, t.I, p.195-201.
- [414] MAURAIN C., *Discours*, dans *Jubilé scientifique de M. Emile Borel à la Sorbonne le dimanche 14 janvier 1940*, Paris(Académie des Sciences), 1940.

- [415] BOREL E., *Sur l'intégration des fonctions non bornées et sur les définitions constructives* (AsENS, (3), 36(1919), 71-91) = *Oeuvres*, t.II, p.879-900.
- [416] BOREL E., *A propos de la définition de l'intégrale définie* (AsENS, (3), 37(1920), 461-462) = *Oeuvres*, t.II, p.815-816.
- [417] BOREL E., *Documents sur la psychologie de l'invention dans le domaine scientifique* (Organon, 1(1936), 33-42) = *Oeuvres*, t.IV, p.2093-2102.
- [418] DENJOY A., *Notice sur la vie et l'oeuvre de Henri Lebesgue*, Paris (Académie des Sciences), 1946 = *LEBESGUE H., O.S., tome I*, p.35-65.
- [419] COLLINGWOOD E.F., *Emile Borel* (The Journal of the London Mathematical Society, 35(1959), 488-512).
- [420] BRUTER C.P., *De l'intuition à la controverse. Essai sur quelques controverses entre mathématiciens*, Paris (Librairie scientifique et technique Albert Blanchard), 1987.
- [421] CASSINET J. et GUILLEMOT M., *L'axiome du choix dans les mathématiques de Cauchy (1821) à Gödel (1940)*, Toulouse (Université Paul Sabatier - Sciences), 1983.
- [422] CALLENS S., *Ensemble, mesure et probabilité selon Emile Borel* (Math. Inf. Sci. hum., n°110, 1990, 27-45).
- [423] BOREL M., *La mobilisation française féminine (1914-1918)*, Paris (Imprimerie Union), 1919.
- [424] LEBESGUE H., *A Messieurs les Professeurs de la Faculté des Sciences de l'Université de Paris*, O.S., tome I, p.85-88.
- [425] DESFORGES J. et HERVE M., *Gaston Julia* (Association Amicale des Anciens Elèves de l'E.N.S., 1979, 59-67).
- [426] HILBERT D., *Sur l'infini*, traduit par A. Weil (Acta Mathematica, 48(1926), 91-122).
- [427] FELIX L., *Message d'un mathématicien : Henri Lebesgue pour le centenaire de sa naissance*, Paris (Librairie scientifique et technique Albert Blanchard), 1974.
- [428] GERBOD P., *Les enseignants et la politique*, Paris (Presses universitaires de France), 1976.

- [429] GERBOD P., GOYARD C., GUIRAL P., SAUDEVOIR P., THUILLIER G., TULARD J., VIDALENC J. et WRIGHT V., *Les épurations administratives. XIX^e et XX^e siècles*, Genève(Librairie Droz), 1977.
- [430] HILDEBRANDT T.H., *The Borel theorem and its generalizations* (Bulletin of the American Mathematical Society, 32(1926), 423-474).
- [431] SIERPINSKI W., *Nuclear points in the theory of abstract sets* (Bulletin of the American Mathematical Society, 32(1926), 649-653).
- [432] HILDEBRANDT T.H., *The Borel theorem and its generalizations*, p.28-62, vol.I, J.C. Abbott (editor), *The Chauvenet papers*, The Mathematical Association of America, 1978.
- [433] McSHANE, E.J., *Appendix to "The Borel theorem and its generalizations*, p.62-64, vol.I, J.C. Abbott (editor), *The Chauvenet papers*, The Mathematical Association of America, 1978.
- [434] SIERPINSKI W., *Sur une fonction de classe 4*, p.197-201, vol.2, In *memoriam N.I. Lobatschevskii*, Kazan, 1927 = p.616-620, tome II, *Oeuvres choisies*, Warszawa(PWN - Editions scientifiques de Pologne), 1975.
- [435] PESTRE D., *Physique et physiciens en France 1918-1940*, Paris(Archives contemporaines), 1984.
- [436] HAVELANGE I., HUGUET F. et LÉBEDEFF B., *Les inspecteurs généraux de l'instruction publique (1802-1914)*, Paris (I.N.R.P., C.N.R.S.), 1986.
- [437] RUDIN W., *Real and complex analysis*, New York(Mc Graw-Hill), 1966.
- [438] RIESZ F. et Sz-NAGY B., *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Paris (Gauthier-Villars), 5^e édition, 1968.
- [439] FRECHET M., *Le théorème de Borel dans la théorie des ensembles abstraits* (BSMF, 45(1917), 1-8).
- [440] LUSIN N., *Analogies entre les ensembles mesurables B et les ensembles analytiques* (FM, 16(1930), 48-76).
- [441] HENRICI P., *Die Lagrange-Bürmannsche Formel bei formalen Potenzreihen* (Jber. d. Dt. Math.-Verein., 86(1984), 115-134).
- [442] *Elie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui* (Astérisque, numéro hors série, 1985).

- [443] LUXEMBOURG W.A.J., *Lectures on A. Robinson's theory of infinitesimals and infinitely large numbers*, Pasadena, 1962.
- [444] MAROTTE F., *L'enseignement des sciences mathématiques et physiques dans l'enseignement secondaire des garçons en Allemagne*, Paris (Imprimerie Nationale), 1905.
- [445] BOREL E., *Introduction géométrique à quelques théories physiques*, Paris(Gauthier-Villars), 1914.
- [446] BOREL E., *Mécanique statistique classique*, Paris(Gauthier-Villars), 1925.
- [447] LEVY P., *Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien*, Paris (Blanchard), 1970.
- [448] RICHARD J., *Sur la nature des axiomes de la géométrie* (L'Enseignement mathématique, 9(1907), 463-473 ; 10(1908), 60-65, 330-331).
- [449] RICHARD J., *Sur le mouvement relatif et le mouvement de la terre* (L'Enseignement mathématique, 7(1905), 450-457).
- [450] RICHARD J.A., *Lettre à Monsieur le rédacteur de la Revue Générale des Sciences* (Acta Mathematica, 30(1906), 295-296).
- [451] BOREL E., *La définition en mathématiques*, Congrès int. Phil. des Sci., 1949, vol.III, p.89-99, Paris(Hermann), 1951 = *Oeuvres*, t.IV, p.2069-2079.
- [452] VASILESCO F., *Le problème généralisé de Dirichlet*, Mémoires publiés par l'Académie royale de Belgique, Classe des Sciences, 16, 1937.
- [453] AZEMA J.P. et WINOCK M., *La III^e République*, Paris(Calmann-Lévy), 1970.
- [454] BOREL E., *Le parti radical* (La République Française, V, n° 4, 1949, 311-317).
- [455] DAVY de VIRVILLE A. (éditeur), *Histoire de la botanique en France*, Paris(Société d'édition d'enseignement supérieur), 1954.
- [456] BERNARD N., *La notion d'espèce* (La Revue du Mois, 19(1915), 137-150).
- [457] REID R., *Marie Curie derrière la légende*, Paris(Seuil), 1979.
- [458] BOREL E., *Notice sur la vie et les travaux de Georges Humbert* (Mémoires de l'Académie des Sciences, (2), 58(1922), I-XIX) = *Oeuvres*, t.IV, p.2433-2451).

- [459] CURIE M., *Paul Appell (1855-1930)*, Paris(Fondation Curie), 1930.
- [460] LEBESGUE H., *Sur quelques questions de minimum, relatives aux courbes orbiformes et sur leurs rapports avec le calcul des variations* (Journal de mathématiques pures et appliquées, (8), 4(1921), 67-96) (non reproduit dans les Oeuvres).
- [461] *Notes sur la préparation et le réglage des tirs*, 3^e édition, Paris (Sous-secrétariat d'Etat des Inventions), confidentiel, juillet 1917.
- [462] *Organisation et fonctionnement des sections de sondages par le son*, Service géographique de l'Armée, Service météorologique de l'Armée, Paris(A. Maréchal), Secret, août 1918.
- [463] ALEXANDROFF P., *Untersuchungen über die Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension* (Annals of Mathematics, (2), 30 (1928-1929), 101-187).