

JEAN-JACQUES RISLER

**Géométrie algébrique réelle et composantes connexes**

*Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 1 (1991), p. 31-40

[http://www.numdam.org/item?id=CSHM\\_1991\\_2\\_1\\_\\_31\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1991_2_1__31_0)

© Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## GEOMETRIE ALGEBRIQUE REELLE ET COMPOSANTES CONNEXES

Jean-Jacques Risler  
Ecole Normale Supérieure

### Introduction

Nous allons passer en revue quelques propriétés de connexité en géométrie algébrique réelle. Une des problématiques principales de la géométrie algébrique est de comprendre comment les propriétés algébriques des équations (ou éventuellement inéquations) déterminent les propriétés géométriques (et en particulier topologiques) des objets qu'elles définissent. On a été ainsi amené, à la suite de l'école italienne de géométrie algébrique au 19-ième siècle, à considérer les ensembles de  $\mathbb{C}^n$ , définis avec des polynômes à coefficients complexes; c'est dans ce cadre là en effet que l'on peut obtenir des théorèmes généraux et puissants décrivant la géométrie des objets à partir de leurs équations. Les résultats étaient tellement satisfaisants, et les méthodes employées tellement puissantes et prometteuses (citons par exemple les méthodes cohomologiques puis la théorie des schémas), que le développement de la géométrie algébrique réelle a été pratiquement totalement inhibé jusqu'à une époque très récente (avec cependant l'exception de l'école russe, mais celle-ci est longtemps restée isolée).

Considérons deux exemples très simples pour illustrer notre propos :

a) Soit  $f(X,Y)$  un polynôme de degré  $d$  à coefficients complexes : l'équation  $f(X,Y) = 0$  définit alors une courbe algébrique dans  $\mathbb{C}^2$ , et le théorème de d'Alembert-Gauss implique que toute droite coupe la courbe en  $d$  points (à condition de considérer les points à l'infini, et de compter convenablement les éventuels points multiples), alors qu'il n'en n'est évidemment pas de même sur  $\mathbb{R}$  (penser par exemple à un cercle).

b) Considérons toujours une courbe  $C$  dans  $\mathbb{C}^2$  définie par une équation  $f(X,Y) = 0$  de degré  $d$ . En considérant le polynôme homogène de degré  $d$   $\tilde{f}(X,Y,T)$  associé à  $f$ , (ce qui revient à considérer la fermeture de  $C$  dans le plan

projectif  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ ), on définit une courbe compacte  $\tilde{C} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$  ; si de plus on suppose  $C$  lisse (i.e., sans point singulier),  $\tilde{C}$  est alors une surface (i.e., une variété de dimension 2 sur  $\mathbb{R}$ ) compacte lisse orientable et connexe, caractérisée topologiquement par son genre  $g$ , et l'on a la relation  $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ , parfait exemple de caractérisation topologique d'un objet en fonction d'une quantité algébrique, le degré.

Si l'on considère le cas réel, on voit que la topologie de  $\tilde{C}$  (en gardant les mêmes notations que plus haut ;  $C$  est maintenant plongée dans  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ ) est très simple : chaque composante connexe de  $\tilde{C}$  est une variété compacte de dimension 1, donc homéomorphe au cercle  $S^1$ . L'espoir de relier dans ce cas l'algèbre à la géométrie repose alors sur la considération du nombre de composantes connexes (et éventuellement sur la notion plus subtile de type topologique du plongement de  $C$  dans  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$  ; cf. plus bas). On peut alors seulement espérer borner (et non pas fixer) le nombre de composantes connexes en fonction du degré : par exemple, la cubique lisse  $C_1$  d'équation  $\frac{X^3}{3} + Y^2 - X^2 - 1 = 0$  est connexe ; alors que la cubique  $C_2$  d'équation  $\frac{X^3}{3} + Y^2 + X^2 - 1 = 0$  a deux composantes connexes.

Il n'y a donc pas dans le cas réel de théorème aussi satisfaisant pour l'esprit que dans le cas complexe ; cependant, nous allons essayer de montrer que les bornes sur le nombre de composantes connexes, et les dispositions relatives de celles-ci, sont dans le cas réel des notions suffisamment riches et intéressantes à elles seules pour justifier l'étude spécifique de la géométrie algébrique réelle, du point de vue de l'influence de l'algèbre sur la topologie.

## 1. Généralités

Parmi les questions qui ont été abordées concernant la topologie des ensembles algébriques réels, nous allons en considérer quatre :

- a) Si  $A \subset \mathbb{R}^n$  est un espace topologique compact triangulé, à quelles conditions existe-t-il un ensemble algébrique réel  $X \subset \mathbb{R}^n$  homéomorphe à  $A$  ?
- b) Soit  $P$  un polynôme homogène de degré  $d$  définissant une hypersurface lisse  $H$  dans  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  ; quelles sont les types topologiques possibles pour  $H$ , et pour un type topologique fixé pour  $H$ , quels sont les types topologiques du plongement  $H \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$  ?

c) Etant donné un ensemble algébrique réel, ou plus généralement semi-algébrique  $X$ , quels sont les bornes sur le nombre de composantes connexes de  $X$  :

- en fonction des degrés et du nombre des équations,
- en fonction éventuellement d'autres quantités algébriques plus spécifiquement liées à la structure réelle.

d) Etant donnés un semi-algébrique  $A$  et deux points  $x$  et  $y$  de  $A$ , trouver un algorithme ( le plus "simple" possible) permettant de :

- décider si  $x$  et  $y$  sont dans la même composante connexe de  $A$ ;
- si oui, les joindre par une courbe connexe semi-algébrique.

Nous allons donner ici quelques indications sur les problèmes b) et c) ; le problème a) a été (presque) complètement résolu par Akbulut-King et Benedetti-Dedo ([A-K], [B-D]) : ces auteurs trouvent une caractérisation (complète en dimension plus petite que trois) des ensembles compacts homéomorphes à des ensembles algébriques ; cette condition est peu contraignante, ce qui montre que les ensembles algébriques réels sont très "plastiques", en opposition avec les ensembles algébriques complexes. Le problème d) est de nature algorithmique et provient de considérations de robotique théorique ("problème du déménageur de piano") ; on peut en effet modéliser le déplacement d'un objet (ou "piano") dans un environnement contraint en la recherche d'un chemin joignant deux points d'un ensemble semi-algébrique que l'on peut caractériser entièrement à partir d'équations (et d'inéquations) définissant le piano et les obstacles à éviter. Ce problème a été récemment très étudié, et a été résolu dans le cas général, avec des algorithmes très complexes (car la nature du problème général est elle-même très complexe), ce qui rend leur utilisation pratique problématique, et de manière plus simple dans certains cas particuliers (comme par exemple le déplacement d'un disque plan dans un environnement polygonal) : cet aspect algorithmique de la géométrie algébrique réelle, de développement tout récent, est en pleine expansion, et on peut envisager dans un futur proche des applications pratiques de la géométrie algébrique réelle, grâce à la croissance de la puissance des ordinateurs, et au développement de programmes de plus en plus élaborés.

## 2. L'inégalité de Harnack

Il s'agit d'une borne, en fonction du degré de l'équation, du nombre de composantes connexes d'une courbe du plan projectif réel.

**Théorème :** Soit  $f(X,Y,T) \in \mathbb{R}[X,Y,T]$  un polynôme homogène de degré  $d$  ; si  $C \subset \mathbb{R}P^2$  désigne l'ensemble des zéros de  $f$ , alors  $C$  a au plus  $\frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$  composantes connexes.

### Remarques

1) Si  $C$  est lisse (i.e., sans point singulier), chaque composante connexe de  $C$  est homéomorphe au cercle  $S^1$ .

2) Notons  $C_C$  la complexifiée de  $C$ , i.e., l'ensemble de zéros (dans  $\mathbb{C}P^2$ ) du polynôme  $f$ . Alors, si  $C_C$  est lisse, c'est une surface (réelle) compacte orientable de genre  $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ .

Nous allons esquisser trois preuves d'esprit très différent pour ce résultat fondamental.

#### a) Démonstration à l'aide du théorème de Bezout.

On peut, quitte à remplacer  $f$  par  $f + \varepsilon T^d$ , avec  $\varepsilon$  de signe bien choisi, supposer que  $C$  n'est pas composée uniquement de points isolés. On peut aussi, en raisonnant par récurrence sur le degré, supposer que  $f$  est un polynôme irréductible. Toutes les composantes connexes de  $C$ , sauf éventuellement une, ont alors la propriété suivante : si  $C_i$  est une de ces composantes, toute courbe algébrique coupe  $C_i$  en un nombre pair de points (comptés avec multiplicités éventuelles, cf. figure 1).

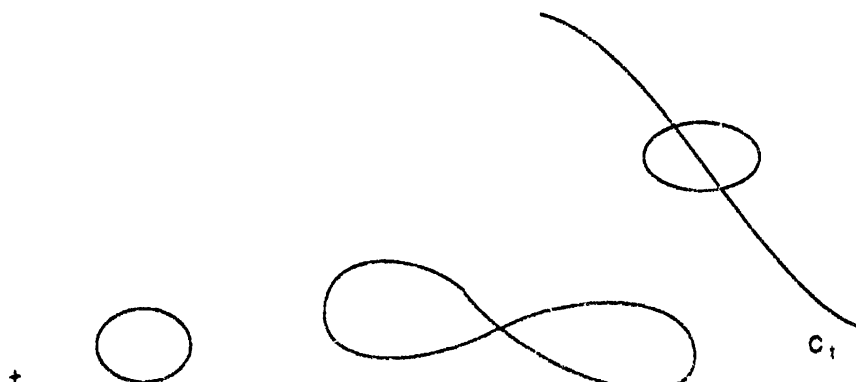


Figure 1

Dans la figure 1, toutes les composantes, sauf  $C_t$ , ont la propriété de parité ci-dessus. Soient alors  $C_1, \dots, C_t$  les composantes connexes de  $C$ ,  $C_t$  étant de dimension topologique 1, et les autres ayant la propriété de parité ci-dessus. Prenons des points  $P_i \in C_i$  ( $1 \leq i < t-1$ ), et  $P_j \in C_t$  ( $t \leq j \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2} - t + 1$ ). Par les  $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$  points  $P_i$ , il passe alors une courbe  $\Gamma$  de degré  $d-2$  (il y a le bon nombre de points pour cela), et si  $C \cdot \Gamma$  désigne le nombre de points d'intersection (comptés avec multiplicité) de  $C$  et  $\Gamma$  (ces points sont isolés, car  $C$  est supposée irréductible), on a :

$$C \cdot \Gamma \geq 2(t-1) + \frac{(d-1)(d-2)}{2} - t + 1 = \frac{(d-1)(d-2)}{2} + t - 1.$$

Mais le théorème de Bezout implique que  $C \cdot \Gamma \leq d(d-2)$  (le produit des degrés), d'où  $t \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$ .

### b) Démonstration de Klein

Pour cette démonstration, on suppose  $C$  et  $C_C$  lisses ;  $C_C$  est alors une surface de genre  $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ , et  $C$  une courbe composée de  $t$  lacets, incluse dans  $C_C$  (cf. la figure 2).

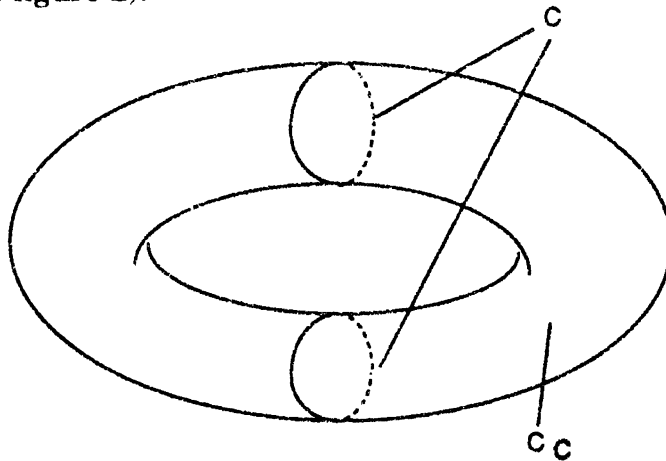


Figure 2 :  $t = 2$

Il y a une involution canonique sur  $C_C$  (induite par la conjugaison complexe) dont  $C$  est l'ensemble des points fixes. Supposons que  $C$  ait au moins  $\frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1 = g + 1$  composantes connexes, et écrivons  $C = C_1 \cup C_2$ , où  $C_1$  est la réunion de  $g+1$  composantes de  $C$ . Alors  $C_C \setminus C_1$  n'est pas connexe (cette propriété constitue une des définitions possibles du genre).

**Lemme :** Avec les notations précédentes, on a  $C_C \setminus C_1 = U_1 \cup U_2$ ,  $U_1$  et  $U_2$  étant deux ouverts connexes échangés par l'involution  $\sigma$ .

La démonstration se fait en considérant  $C_C$  au voisinage de  $x \in C_1$ : au voisinage de  $x$ , l'inclusion de  $C_1$  dans  $C_C$  ressemble à celle de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ , et la conjugaison complexe  $\sigma$  échange les deux composantes de  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .

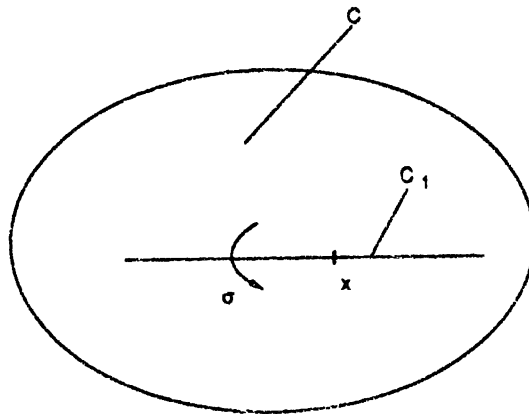


Figure 3

Or  $C_2$  est fixe par  $\sigma$ , et chacune de ses composantes est contenue dans  $U_1$  ou  $U_2$ ; mais le lemme 2.3 implique qu'aucun des points de  $U_1$  ou  $U_2$  n'est fixé par  $\sigma$ : on a donc  $C_2 = \emptyset$ .

**c) Démonstration par la théorie de Smith.**

La "théorie de Smith" implique l'inégalité  $\sum_{i \geq 0} b_i(C) \leq \sum_{i \geq 0} b_i(C_C)$ ,  $b_i(X)$  désignant le  $i$ -ième nombre de Betti d'un espace topologique. Mais si  $C$  est une courbe lisse de degré  $d$  ayant  $p$  composantes connexes, on a  $b_0(C) = b_1(C) = p$ , les autres  $b_i$  étant nuls. Si  $C_C$  est aussi lisse, on a  $b_0(C_C) = b_2(C_C) = 1$ , et  $b_1(C_C) = 2g$ , d'où l'inégalité  $p \leq g+1$ .

Cette dernière démonstration est la plus intéressante, car la théorie de Smith est valable en toutes dimensions, ce qui généralise l'inégalité de Harnack aux dimensions plus grandes que 1.

### 3. Le 16-ième problème de Hilbert

La borne de Harnack  $g+1$  est optimale en ce sens que pour tout entier  $d$ , on peut construire une courbe de degré  $d$  ayant  $\frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$  composantes connexes. Une telle courbe est appelée maximale, ou M-courbe. Deux courbes ayant le même nombre de composantes connexes peuvent différer par le type topologique du plongement dans  $\mathbb{R}P^2$ , i.e., par les relations d'inclusion des composantes connexes; par exemple, il y a deux manières de plonger deux cercles dans  $\mathbb{R}P^2$  (figure 4), suivant qu'ils sont ou non extérieurs l'un à l'autre, le 16-ième problème de Hilbert se formulant (en partie) ainsi : quels sont les types topologiques des plongements des M-courbes de degré 6 ?

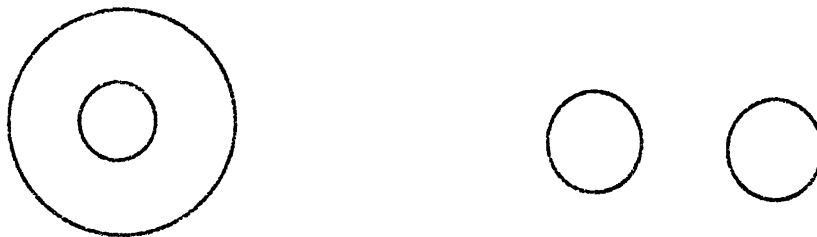


Figure 4

Une M-courbe de degré 6 possède 11 composantes connexes, et la réponse à la question de Hilbert (trouvée dans les années 70 par l'école russe, en particulier par Gudkov) est qu'il y a trois possibilités, illustrées par la figure ci-dessous.

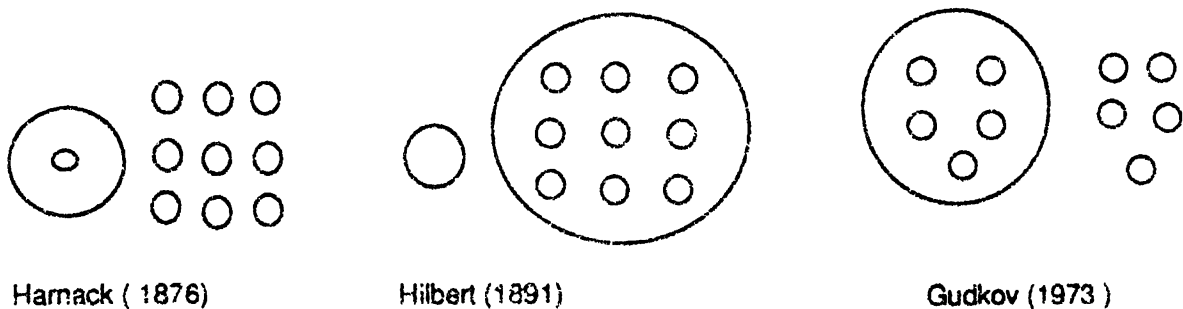


Figure 5



Signalons que le problème analogue en degré 8 est toujours ouvert. Ajoutons quelques mots sur la généralisation en dimension supérieure. La théorie de Smith (cf. plus haut) permet de borner la somme des nombres de Betti d'un ensemble algébrique projectif réel par la somme des nombres de Betti de son complexifié. Mais dans le cas où le complexifié est une hypersurface lisse (ou plus généralement une intersection complète lisse), ce nombre est connu, et ne dépend que de la dimension et du degré des équations. Par exemple, pour une surface de degré 4, ce nombre est 24 ; une surface lisse réelle de degré 4 (dans  $\mathbb{R}P^3$ ) a donc au plus 12 composantes connexes (qui ne pourraient alors être topologiquement que 12 sphères). Mais Kharlamov ([Kh]) a récemment déterminé tous les types topologiques des  $M$ -surfaces de degré 4, et montré qu'elles avaient au plus 10 composantes connexes (avec dans ce cas une composante parmi les 10 homéomorphe à un tore). Pour plus de renseignements sur ces questions, on pourra consulter [W] ou [B-R].

#### 4. Bornes sur le nombre de composantes connexes et complexité

Etant donné une classe d'ensembles algébriques (ou semi-algébriques) définie par une borne sur leur "complexité algébrique" (cette complexité pouvant par exemple faire intervenir le nombre d'équations ou d'inéquations, les degrés de ces polynômes, le nombre de termes intervenant dans ces équations, etc..., ou toute autre mesure satisfaisant à certains axiomes, cf. [B-R]), on cherche une borne sur le nombre de composantes connexes (pour les ensembles de cette classe), ce qui est une mesure de leur "complexité géométrique". Dans le cas algébrique, la théorie de Smith (cf. plus haut) fournit de telles bornes en fonction du degré des équations, dans le cas où l'on connaît la topologie du complexifié, par exemple dans le cas d'une hypersurface lisse.

Milnor ([M]), et Thom ([T]) ont, en 1964, donné des bornes pour les ensembles algébriques :

**Proposition** *Soit  $X \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble algébrique défini par  $k$  équations de degré au plus  $d$  ; alors on a  $b_0(X) \leq d(2d-1)^{n-1}$ ,  $b_0(X)$  désignant le nombre de composantes connexes de  $X$ .*

La démonstration commence par remarquer que  $X$ , défini par les équations  $P_1 = \dots = P_k = 0$ , peut aussi être défini par l'unique équation

$P = \sum_{i \geq 0}^k P_i^2 = 0$ , de degré  $\leq 2d$ . On applique ensuite la théorie de Morse à l'hypersurface lisse d'équation  $P = \varepsilon$  (pour  $\varepsilon$  bien choisi). Tout ensemble semi-algébrique étant projection d'un ensemble algébrique (par exemple, l'ensemble défini dans  $\mathbb{R}^n$  par  $P(X_1, \dots, X_n) \geq 0$  est projection de l'ensemble algébrique de  $\mathbb{R}^{n+1}$  défini par l'équation  $P(X_1, \dots, X_n) = T^2$ ), cette proposition permet de borner le nombre de composantes connexes des ensembles semi-algébriques.

Pour terminer, signalons que d'autres mesures de la complexité algébrique des équations permettent de borner le nombre de composantes connexes ; certaines relèvent des techniques décrites ci-dessus, c'est à dire que ces mesures bornent la topologie du complexifié, et la théorie de Smith, ou la méthode de Milnor-Thom permettent d'en déduire des bornes sur le nombre de composantes connexes. C'est par exemple le cas du volume des polyèdres de Newton des équations : cf. [B-L-R]. D'autres au contraire ont un caractère purement réel (en ce sens que l'on ne connaît pas les propriétés topologiques du complexifié qu'elles déterminent). C'est par exemple le cas du nombre de monômes intervenant dans les équations, ou plus généralement de la complexité additive de ces équations (i.e., du nombre minimum d'additions-soustractions nécessaires pour écrire ces équations). Pour des renseignements plus précis sur ces questions, cf. [R], ou [B-R].

### Bibliographie

- [A-K] Akbulut S., King H. : *Real algebraic structures on topological spaces*. Publ. Math. IHES **53**, 79-162 (1981).
- [B-D] Benedetti R., Dedo M. : *The topology of two dimensional real algebraic varieties*. Ann. Mat. Pura Appl. **127**, 141-171 (1981).
- [B-L-R] Benedetti R., Loeser F., Risler J.-J. : *Two bounds on the number of connected components of an algebraic set*. J. of Discr. and comp. Geometry (1990).
- [B-R] Benedetti R., Risler J.-J. : *Real algebraic and semi-algebraic sets*. Hermann (1990).

- [Kh] Kharlamov V.M. : *The topological type of non singular surfaces in  $\mathbb{R}P^3$  of degree four* ; *Funct. Anal. Appl.* **10**, 453-493 (1976).
- [M] Milnor J. : *On the Betti's numbers of real algebraic varieties*. *Proc. AMS* **15**, 275-280 (1964).
- [R] Risler J-J. : *Some aspects of complexity in real algebraic geometry*. *J. of Symb. Comp.* **5**, 109-119 (1988).
- [T] Thom R. : *Sur l'homologie des variétés algébriques réelles*. *Differential and comb. Topology*, Princeton University Press, 255-265 (1965).
- [W] Wilson G.: *Hilbert's sixteenth problem*. *Topology* **17**, 53-73 (1978).