CAHIERS DU SÉMINAIRE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HOURYA SINACEUR

Préhistoire de la géométrie algébrique réelle : de Descartes à Tarski

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 2^e série, tome 1 (1991), p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1991_2_1__1_0>

PREHISTOIRE DE LA GEOMETRIE ALGEBRIQUE REELLE : DE DESCARTES A TARSKI

Hourya Sinaceur

Institut d'Histoire et philosophie
des Sciences et techniques
Université Paris I - CNRS Paris

1. En guise d'introduction : Descartes, Fourier et Sturm

On peut dire que la préhistoire de la géométrie algébrique réelle commence avec la règle des signes de Descartes. Celle-ci majore le nombre des racines réelles positives (Descartes dit «vraies») d'une équation algébrique par le nombre de variations de signe dans la suite de ses coefficients et le nombre des racines réelles négatives (Descartes dit «fausses») par le nombre de permanences de signe de cette même suite. La règle des signes est énoncée au livre 3 de la Géométrie ([D], 1637) sans démonstration, et vérifiée seulement sur des exemples. Démontrée ensuite par Segner, de Gua, Euler, Lagrange, elle fut l'objet de travaux de Budan et des tout premiers cours ou publications de Fourier, qui aboutirent à une généralisation bien connue sous le nom de théorème de Budan-Fourier[1]. Combinant la règle de Descartes avec la méthode des cascades de Rolle, celui-ci majore le nombre des racines réelles d'une équation algébrique $f(x)=0$ dans un intervalle $[a, b]$ par le nombre de pertes de variations de signe de la suite des dérivées successives de la fonction f, rangées selon les puissances croissantes, quand on substitue d'abord a puis b à x.

Ce qui nous intéresse ici c'est moins les résultats proprement dits que la réflexion qui y a conduit. Aussi bien la règle de Descartes que son propre théorème apparaissent à Fourier comme des applications d'une méthode **générale** recouvrant un phénomène non limité aux équations algébriques et appelant l'observation d'autres éléments que les seuls coefficients de celles-ci. Le cinquième livre de l'*Analyse des équations déterminées* ([F4], 1831), par exemple, a pour objet de montrer moyennant quelles précautions cette méthode

[1] Laissons ici de côté la querelle de priorité déclenchée par Budan, quand il prit connaissance, en 1829, par l'intermédiaire de Sturm, de l'existence de la note publiée par Fourier en 1820 sur la règle de Descartes. Les références précises des travaux évoqués se trouvent dans la bibliographie, en fin d'article.

peut également être appliquée à déterminer la réalité des racines des équations transcendantes. Les règles particulières, variables selon les caractéristiques de l'équation considérée sont, en fait, l'expression d'un principe général qui transcende la tripartition algèbre/analyse/géométrie et qui traduit l'unité profonde des mathématiques. Et, à l'intérieur de la sphère algébrique, ce principe surmonte la différence entre équations et inégalités. Cela constitue un fait tout à fait remarquable. Fourier, le premier sans doute, projette une théorie générale des inégalités et envisage la résolution de systèmes mixtes où les conditions sur les inconnues s'expriment par une conjonction d'équations et d'inégalités. On peut lire, en effet, au début du paragraphe 20 de l'Exposé synoptique de l'*Analyse des équations déterminées* (p. 75-76) les lignes suivantes :

> «Dans le septième et dernier livre, on expose les principes de l'analyse des inégalités. Cette partie de notre ouvrage concerne un **nouveau genre**[2] de questions qui offrent des applications variées à la géométrie, à l'analyse algébrique, à la mécanique et à la théorie des probabilités... Dans la théorie dont il s'agit les conditions ne sont pas exprimées par des équations; c'est-à-dire qu'au lieu d'égaler à une constante ou à zéro une certaine fonction des inconnues, on indique au moyen des signes > et < que cette fonction est plus grande ou moindre que la constante. On suppose, par exemple, que quatre indéterminées doivent être assujéties à un certain nombre d'inégalités du premier degré, et qu'il faut trouver toutes les valeurs possibles de ces inconnues... Il s'agit de trouver les valeurs des quatre inconnues, qui étant substituées simultanément, satisfont à toutes les conditions proposées, **soit que ces conditions consistent seulement dans certaines inégalités, soit qu'elles comprennent aussi des équations**[2]».

Fourier meurt avant d'avoir écrit ce septième livre et le fil de son idée semble se perdre pendant près d'un siècle avant d'être retrouvé, par un autre biais et dans un autre but, par un logicien qui n'a vraisemblablement pas lu l'*Analyse des équations déterminées,* Alfred Tarski.

Tarski ne cite jamais Fourier. Il rencontre ce que Fourier appelle «la méthode générale des variations et des permanences de signe» dans le théorème, obtenu par une modification simple et astucieuse du théorème de

[2] Souligné par nous. Un ensemble de textes illustrant notre parcours de Descartes à Tarski pourront être consultés dans [R-S].

Fourier, auquel Sturm laissa son nom. J'ai fait précédemment et ailleurs une analyse historique et structurale de la démonstration de Sturm[3]. Rappelons donc seulement l'énoncé : étant donnée une équation polynomiale $f(x)=0$ et une suite finie f_n de fonctions auxiliaires, le nombre de zéros réels de f dans un intervalle $[a,b]$ est mesuré **exactement** par la différence entre le nombre de variations de signe de la suite des fonctions auxiliaires quand on substitue a à x et le nombre de ces variations quand on substitue b à x. Les fonctions auxiliaires peuvent être **effectivement** construites par une suite de divisions euclidiennes dont la première s'applique à f et à sa dérivée, supposée n'avoir pas de zéro commun avec f (ou à un polynôme ayant le même signe que cette dérivée pour les valeurs de x qui annulent f). Mais, d'une façon **générale**, elles sont définies par la conjonction de quatre conditions nécessaires et suffisantes qui énoncent, toutes, des **conditions de signe** sur les éléments de la suite f_n[4]. C'est Sturm qui transforme la méthode cartésienne des variations et des permanences de signe en un outil tout à fait précis établissant une corrélation exacte entre la perte d'une variation de signe de la suite des fonctions auxiliaires et l'existence d'un zéro réel de la fonction f. Et c'est lui qui lui donne la portée d'un outil d'analyse **qualitative.**

S'agissant des solutions d'une équation différentielle correspondant à un phénomène thermique ou dynamique, distribution de la chaleur dans une barre non homogène d'épaisseur variable, vibrations d'une corde d'épaisseur et d'élasticité variables, etc., au lieu ou avant d'essayer de les calculer, Sturm commence par en étudier les «propriétés abstraites» (l'expression est de lui) en observant «la marche» et «les sinuosités» des courbes-solutions en fonction de la variation des paramètres de l'équation. Rompant ainsi avec l'exigence de numéricité de son maître Fourier et de la plupart de ses contemporains qui n'apercevaient de recours que dans un calcul sur des fonctions connues (polynômes, logarithmes, exponentielles, fonctions trigonométriques), Sturm invente une nouvelle méthode de recherche des solutions d'une équation différentielle dans laquelle toute la postérité reconnaîtra avec Poincaré ([P], 1921) l'origine d'une grande tradition. Il s'agit de déterminer, non pas la

---

[3] [B1] . Cette analyse est reprise avec une autre amplitude et sous une autre forme dans mon livre *Corps et modèles, essai sur l'histoire de l'algèbre réelle* [B3] .

[4] Ces quatre conditions sont les suivantes :

1°) Si f_i s'annule pour une valeur α de l'intervalle $[a,b]$, $f_{i-1}(\alpha) = -f_{i+1}(\alpha)$.

2°) Au voisinage d'une valeur α de $[a,b]$ telle que $f(\alpha) = 0$, $f_1(x)$ a le même signe que la dérivée de f.

3°) Deux fonctions consécutives ne s'annulent pas pour une même valeur de $[a,b]$.

4°) La dernière fonction de la suite ne s'annule pour aucune valeur de $[a,b]$ et conserve par conséquent un signe constant dans cet intervalle.

valeur d'une solution mais sa «forme», c'est-à-dire son comportement global, en fonction des paramètres de l'équation. Le point intéressant est que ce mot «forme», utilisé par Sturm lui-même[5], est pris par lui en un sens à la fois véritablement formel, puisque relatif à la facture de l'expression analytique de l'équation différentielle établie, et géométrique, Sturm considérant la ou les courbes correspondant à la solution, dont il n'a pas encore d'expression analytique, de cette équation. C'est peut-être bien la première fois dans l'histoire, après Leibniz, que l'intuition géométrique s'allie, non pas au calcul comme cela avait traditionnellement lieu depuis l'institution de la géométrie analytique de Descartes, y compris justement chez Fourier, mais à une analyse à la fois formelle et qualitative de situations dont on essaie de dégager les propriétés distinctives. Sturm conçoit et montre la possibilité de caractériser, sans les connaître explicitement, les fonctions intégrales cherchées. Ce faisant, il renoue à sa façon avec l'idée leibnizienne d'une mathématique qualitative. C'est ainsi qu'il établit, dans le cas de la barre chauffée par exemple, une suite de propriétés pour les fonctions représentant la température (variable) d'un point, qui sont les suivantes : 1) aucune de ces fonctions ne peut s'annuler sans changer de signe ; 2) la première d'entre elles conserve le même signe sur toute l'étendue de la barre ; 3) la seconde change de signe pour un point situé entre les extrémités de la barre, la troisième pour deux points, la quatrième pour trois points, etc.; deux fonctions correspondants à des racines consécutives de l'équation changent de signe de façon alternée[6]. On le voit, l'analyse des fonctions consiste à étudier leurs variations et leurs permanences de signe. Et l'on comprend comment il se fait que Sturm soit tombé sur son théorème d'algèbre tandis qu'il s'intéressait à des questions d'analyse différentielle. Il y a là une alliance de la géométrie et de l'algèbre qui va beaucoup plus loin que celle prônée par Fourier. Pour ce dernier, en effet, la «considération des lignes courbes», comme il disait, est par rapport au calcul à la fois un auxiliaire et un guide heuristique, le but ultime étant toujours l'interprétation numérique. Mais ici, l'analyse géométrico-algébrique des variations de signe est logiquement première par rapport au calcul effectif et, d'une certaine façon, indépendante de lui; elle doit «nécessairement précéder la recherche de l'intégrale générale»[7], car «lors même qu'on possède l'expression explicite de la solution qui vérifie telle équation, soit en série, soit en intégrales définies ou indéfinies, il est le plus souvent difficile de

[5] [St3], p. 107.
[6] [St4], p. 376-377.
[7] [St4], p. 375.

reconnaître dans cette expression la marche et les propriétés caractéristiques de cette fonction»[8]. Sturm est d'ailleurs tout à fait conscient de son originalité par rapport à ses prédécesseurs, Fourier et Poisson, dont les travaux sur la chaleur furent sa source d'inspiration la plus directe. Il souligne, en effet, que le principe de sa démarche n'a jamais été employé avant lui et que les questions, — les questions plus que les résultats — auxquelles il va apporter un début de réponse sont absolument nouvelles.

Dans l'œuvre de Sturm, Alfred Tarski ne s'est intéressé qu'au théorème d'algèbre sur le nombre de racines réelles d'un polynôme. Ce résultat lui fut d'abord connu par la *Traité d'algèbre supérieure* d'Heinrich Weber et l'article de Carl Runge sur «La séparation et l'approximation des racines» dans *l'Encyclopédie des sciences mathématiques et de leurs applications*. Ultérieurement, il a lu le mémoire de Sturm de 1835 [St2], comme en témoigne la note 12 de la seconde version de son mémoire sur l'algèbre et la géométrie élémentaires[9]. En généralisant convenablement le théorème de Sturm, Tarski définit sa méthode d'élimination des quantificateurs, l'un des outils fondamentaux de la théorie des modèles, récemment devenu un outil également pour l'algèbre et pour la géométrie algébrique réelle par le biais du principe qui en découle, le «principe de Tarski-Seidenberg».

Je vais rappeler en quoi consistent la méthode d'élimination des quantificateurs et le principe de Tarski-Seidenberg. Je passerai ensuite aux «ensembles définissables de nombres réels», qui constituent l'autre très grand résultat de Tarski intéressant la géométrie algébrique réelle. L'ordre d'exposition suit donc l'ordre logique des découvertes de Tarski, celui-ci ayant défini la notion d'ensemble définissable de nombres réels en appliquant sa méthode d'élimination des quantificateurs. L'ordre pédagogique serait inverse, du moins du point de vue de la géométrie algébrique réelle, pour laquelle le concept d'ensemble définissable de nombres réels, convenablement modifié, est fondamental.

2. La méthode d'élimination des quantificateurs

Soit, dans un certain langage logique L, une proposition F du type : $Qx_1\ Qx_2 \ldots Qx_n\ F$ où Q est mis pour l'un des deux quantificateurs : '$\forall$' ou '$\exists$' et où Φ est une expression sans quantificateur. Exemple : $\forall\ x \exists y\ \Phi(x,y)$, $\Phi(x,y)$

---

[8] [St3], p. 106.
[9] [T 4], p. 50-52 ; dans [T6], III, p. 354-356

pouvant être interprétée, par exemple, par '$y > x$'. On dit que F admet l'élimination des quantificateurs s'il existe une expression F' de L ne comportant aucun quantificateur et logiquement équivalente à F. L'intérêt de substituer F' à F, quand une telle F' existe, est évidemment qu'il est beaucoup plus facile d'en déterminer la valeur de vérité. Etant donnée l'interdéfinissabilité des quantificateurs $\forall$ et $\exists$, l'examen de l'éliminabilité des quantificateurs des formules d'un langage L se réduit à l'examen de l'éliminabilité du quantificateur $\exists$ dans les formules du type : $\exists\, x\, \Phi$ où Φ ne comporte aucun quantificateur.

En logique, l'idée d'éliminer les quantificateurs d'une formule remonte à Schröder ([S], 1890-95) et Löwenheim ([Lo], 1915). Elle est développée par Skolem ([Sk], 1919), Post ([Po], 1921) et Langford ([L], 1927). Mais cette idée n'est guère explicitement reliée à celle d'une méthode de décision, c'est-à-dire d'une méthode permettant de déterminer en un nombre fini d'étapes si une formule est démontrable ou réfutable, que dans les années 1930 par Tarski lui-même et son élève Presburger, par Herbrand dans ses *Recherches sur la théorie de la démonstration* et par Skolem dans l'article «Über einige Satzfunktionen in der Arithmetik»[10]. Parallèlement, bien que l'idée d'algorithme soit aussi ancienne que la mathématique d'Euclide et l'algèbre des Arabes, les mathématiciens n'ont perçu assez explicitement le caractère de méthode de décision d'un algorithme qu'à la fin du XIX^e et au début du XX^e siècles avec la promotion des méthodes effectives par Kronecker, Poincaré, etc. Dans les années 1920-30, cette orientation était représentée par un article remarqué de Grete Hermann, élève d'Emmy Nœther : «Die Frage der endlich vielen Schritten in der theorie der Polynomideale» [11]. Dans son mémoire sur l'algèbre et la géométrie élémentaires, Tarski relie les notions logiques d'élimination des quantificateurs et de décidabilité avec la notion mathématique d'algorithme, identifie celle-ci comme méthode de décision et résout la question (logique) de la complétude et de la décidabilité de certaines théories mathématiques par sa méthode d'élimination des quantificateurs qui est une généralisation d'un théorème mathématique, le théorème de Sturm. On remarquera une intrication du logique et du mathématique peu commune pour l'époque et qu'on ne trouve, par exemple, ni chez Herbrand ni chez Gödel.

L'idée d'utiliser le théorème de Sturm pour définir une méthode d'élimination des quantificateurs est évidemment liée à la nature de la théorie étudiée : la théorie élémentaire du corps ordonné des nombres réels dans le

---

10 [Sk2].
11 [He].

langage $L = \{0, 1, +, -, ., =, >\}$. Avec le recul donné par plus d'un demi-siècle de logique, dès qu'on observe les relations primitives de ce langage on devine que Tarski considère simultanément les équations et les inégalités algébriques et étend le résultat de Sturm à des systèmes mixtes d'un nombre quelconque d'inconnues. Dans la note 12 de la seconde version de son mémoire, Tarski commente cette extension. Il affirme que «sous sa forme la plus générale», celle que lui-même lui a donnée, le résultat établi une première fois par Sturm lui «paraît nouveau»; cependant par une prudence caractéristique de sa personne et de ses écrits, il ajoute qu'à cause de l'étendue de la littérature existante sur le sujet, il ne peut «certifier cette nouveauté d'une manière absolue»[12]. Tarski eut raison de se garder des affirmations trop catégoriques. Nous avons relevé, en effet, le projet de Fourier de traiter des systèmes mixtes d'équations et d'inégalités algébriques. Il est remarquable qu'à travers le théorème de Sturm, qui n'en a pas explicitement conservé la trace, Tarski ait littéralement redécouvert et réalisé le projet de Fourier.

Dans la préface à la seconde version de son mémoire, Tarski établit une typologie logique des différentes sortes d'algorithmes utilisés par les mathématiciens. Il distingue les algorithmes du type de ceux d'Euclide, qui portent sur des éléments déterminés et fixés d'avance, nombres entiers ou polynômes, et permettent donc de décider des énoncés sans variable et sans quantificateur, et les algorithmes du type de ceux de Sturm qui permettent de décider des énoncés quantifiés existentiellement. L'algorithme de Sturm permet, en effet, de trancher par l'affirmative ou par la négative un énoncé du type suivant : '**il existe** exactement m nombres réels distincts satisfaisant l'équation polynomiale $f(x)=0$ dans l'intervalle $[a,b]$'. Il y parvient en calculant le nombre des variations de signe d'une certaine suite S_a relative à $f(a)$, le nombre des variations de signe d'une suite S_b relative à $f(b)$, puis à faire la différence $S_a - S_b$. Cela revient à résoudre un certain système d'équations et d'inégalités algébriques où n'interviennent que les coefficients du polynôme f, les bornes de l'intervalle $[a,b]$ et des nombres entiers déterminés. Du point de vue logique, ce système représente une conjonction finie d'énoncés sans quantificateur. L'algorithme de Sturm enveloppe donc une procédure logique générale : l'élimination du quantificateur existentiel. Cette procédure se retrouve également dans toutes les méthodes algorithmiques de la théorie de l'élimination algébrique, c'est-à-dire dans toute méthode pour déterminer par un calcul si les équations d'un système donné d'équations algébriques ont une solution commune ; le calcul du résultant

---

12 [T4], p. 50-52.

d'un système de polynômes en est un exemple. Ainsi, du point de vue logique, résoudre dans $\mathbb{C}$ (ou un corps algébriquement clos de caractéristique nulle) un système d'équations ou résoudre dans $\mathbb{R}$ (ou un corps réel clos quelconque) un système mixte d'équations et d'inégalités, c'est la même chose; le parallélisme de construction des corps algébriquement clos et des corps réels clos se reflète dans l'identité logique formelle des procédures d'élimination relatives aux uns et aux autres. Cela n'était pas, au moment où Tarski rédige son mémoire sur l'algèbre et la géométrie élémentaires, aussi clair qu'aujourd'hui, et Tarski n'évoque la procédure du résultant que pour l'écarter[13]. Autrement dit, l'analyse logique qu'il fait du théorème de Sturm ne semble pas concerner, dans un premier temps, les procédures d'élimination algébrique habituelles, et les mathématiciens, peu enclins à adopter d'emblée le langage de la logique, attendront la démonstration plus géométrique de Seidenberg ([Se], 1954), pour s'intéresser au résultat de décidabilité de Tarski.

Seidenberg part, en effet, d'un polynôme à deux variables $f(x,y)$ à coefficients rationnels, considère la courbe plane d'équation $f(x,y)=0$ et montre l'existence sur cette courbe d'un point réel ou point à coordonnées dans un corps K réel clos (donc contenant $\mathbb{Q}$), c'est-à-dire l'existence d'un zéro réel du polynôme f dans K^2. Son raisonnement repose sur l'observation que si la courbe $f(x,y)=0$ a un point réel, elle en a un au plus près de l'origine. On peut montrer que ce point (a,b) est également solution de l'équation :

$$g(x,y)=x\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)-y\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=0\,,$$

en sorte que a est une racine du polynôme $h(x)$ qui est le résultant par rapport à y de $f(x,y)$ et de $g(x,y)$. Ainsi l'existence d'une solution de $f(x,y)$ implique l'existence d'une racine de $h(x)=0$, et cela on sait le décider par le théorème de Sturm. Comme l'argument peut être inversé (il suffit de faire une transformation affine convenable des coordonnées dans l'espace vectoriel K^2), on voit qu'on dispose d'un algorithme pour tester la résolubilité dans K^2 de l'équation à deux inconnues $f(x,y)=0$. Seidenberg généralise ensuite son raisonnement au cas de p équations à n inconnues et s'arrête là, moyennant la remarque suivante qui ramène le cas d'une inégalité à celui d'une équation :

$$f>0 \Leftrightarrow \exists z\,(z^2 f=1)\,.$$

C'est la première utilisation des méthodes, mi-géométriques mi-algébriques, propres à la géométrie algébrique réelle.

[13] [T6], IV, p. 340, n. 28 ou [T5], II, p. 226, n. 8.

3. Le principe de transfert

La première version du mémoire de Tarski ne considère que la décidabilité du corps ordonné des nombres réels. La seconde version tient compte de la théorie d'Artin et Schreier ([A-S], 1926) et remarque que tout corps réel clos est un modèle du système axiomatique qu'il avait établi pour $\mathbb{R}$. Il est même prêt à modifier ce système de façon à substituer la conjonction des deux axiomes d'Artin et Schreier caractérisant algébriquement la propriété 'réel clos' à l'axiome énonçant la propriété de la valeur intermédiaire pour des polynômes. Formulé dans la note 15 de son mémoire, le «principe de Tarski» nous dit qu'un énoncé vérifié dans un corps réel clos, par exemple $\mathbb{R}$, est vérifié dans tout corps réel clos, ou, pour le dire autrement, deux modèles quelconques de la théorie des corps réels clos sont élémentairement équivalents, c'est-à-dire vérifient les mêmes énoncés du premier ordre. Autrement dit, un théorème d'un corps réel clos particulier est théorème d'un corps réel clos quelconque. Cette façon de dire est la traduction mathématique de la propriété logique de complétude de la théorie des corps réels clos.

L'intérêt du principe de transfert est évident : il ouvre la possibilité de généraliser automatiquement à un corps réel clos quelconque tout énoncé du premier ordre démontré dans le cas d'un corps réel clos particulier comme $\mathbb{R}$. Or, certains théorèmes de $\mathbb{R}$ sont démontrés par des méthodes relevant de la topologie particulière de $\mathbb{R}$ et non généralisables à un corps réel clos quelconque. Il suffit, cependant que l'on puisse formuler ces théorèmes dans le langage élémentaire de la théorie des corps réels clos. D'où l'utilisation en algèbre et en géométrie algébrique réelle du principe de transfert. Par exemple, on peut démontrer grâce à lui le théorème d'Artin-Lang, qui établit qu'un système d'équations et d'inégalités polynomiales sur un corps réel clos K a une solution dans K si et seulement s'il en a une dans une extension réelle close de K [14]. Autre exemple, il sert lorsqu'on veut étendre les fonctions semi-algébriques[15].

Tarski a conscience de l'importance de son principe. Après l'avoir énoncé dans la note 15 de la première édition ([T4], 1948) de la seconde version de son mémoire, il en précise les conditions d'application dans la seconde édition ([T4], 1951). La note supplémentaire n° 7 insiste sur le fait que même si une propriété n'est pas élémentairement définissable, c'est-à-dire n'est pas définissable par une formule du premier ordre, dès qu'on a su en démontrer,

---

[14] Voir [B-C-R] , p. 75-76.
[15] Ibid., p. 88-90.

par des méthodes éventuellement non élémentaires, la validité dans un certain corps réel clos, alors on sait qu'il existe un énoncé élémentaire correspondant à cette propriété et valide dans n'importe quel corps réel clos. Par exemple, comme l'établit déjà la théorie d'Artin et Schreier, à chacun des théorèmes de la valeur intermédiaire, de Sturm, de Rolle, etc., habituellement démontrés dans $\mathbb{R}$ pour des fonctions continues, il correspond un énoncé élémentaire qui, lui, est vérifié dans n'importe quel corps réel clos. Tarski s'arrête au théorème de Hopf : toute algèbre commutative sans diviseur de zéro sur $\mathbb{R}$ est de dimension 1 ou 2, c'est-à-dire égale à $\mathbb{R}$ lui-même ou à $\mathbb{C}$. Que la démonstration de ce théorème fasse intervenir des arguments topologiques difficiles n'empêche pas sa généralisation à un corps réel clos quelconque où de tels arguments n'ont pas forcément cours. En 1954, Bott et Milnor ont amélioré le résultat de Hopf en démontrant que les seules algèbres sans diviseur de zéro sur $\mathbb{R}$ sont $\mathbb{R}$ lui-même, le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, le corps des quaternions et le corps des octonions ou nombres de Cayley. C'est une réponse à une question générale que l'on peut formuler comme suit :

> étant donné un corps réel clos quelconque K, pour quels entiers positifs n, existe-t-il sur K^n un produit bilinéaire[16] sans diviseur de zéro ?

Cette question ne peut être traduite dans notre langage élémentaire L. La phrase «il existe un produit bilinéaire sur K^n» n'est *a priori* pas formulable dans L, puisque la quantification existentielle porte sur des **sous-ensembles** de $K^n \times K^n \times K^n$. En revanche, pour chaque n particulier, on peut exprimer l'existence du produit cherché par une formule σ_n de L telle que σ_n est vraie dans K si et seulement s'il existe un produit bilinéaire sur K^n. L'essentiel n'est donc pas de pouvoir exprimer directement dans L telle propriété relative à K mais d'associer à cette propriété une formule de L telle que propriété et formule soient simultanément vraies ou simultanément fausses. Si on y parvient, la question ci-dessus revient à trouver les n pour lesquels σ_n est vraie dans K. Pour $K = \mathbb{R}$, Bott et Milnor ont démontré que $n = 1, 2, 4$ ou 8. Par transfert, on conclut que $n = 1, 2, 4$ ou 8 pour tout corps réel clos. Ainsi, non seulement il n'est pas nécessaire d'avoir une démonstration élémentaire d'un théorème de

---

[16] Un produit bilinéaire sur K^n est une application bilinéaire : $K^n \times K^n \longrightarrow K^n$, notée $(x,y) \longmapsto xy$, qui est bilinéaire, c'est-à-dire distributive à gauche et à droite par rapport à l'addition et telle que $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$ pour tout α de K. Se donner un produit bilinéaire sur K^n équivaut à se donner une algèbre de dimension n sur K.

la théorie, qui, elle, est élémentaire, des corps réels clos ; mais encore, il n'est pas nécessaire non plus d'en avoir une formulation élémentaire.

Ce point mérite quelque réflexion, car il met en évidence l'existence d'un «contenu» mathématique indépendant des moyens de sa preuve et même des moyens de son expression. C'est en quelque sorte un contenu informel quoique lié à une formalisation dans un certain langage, ou plutôt à des langages ayant divers niveaux de formalisation, celui de la pratique mathématique et celui du traitement logique de cette pratique dans un langage élémentaire. L'existence de tels contenus implique deux choses. D'abord, elle trahit la puissance ou la limite d'un formalisme restreint à la logique du premier ordre, non pas de façon brutale mais plutôt par un jeu subtil entre sémantique et syntaxe, puisqu'elle sanctionne la possibilité d'établir, *via* la propriété de complétude, l'appartenance à une théorie élémentaire d'un théorème qui ne peut être ni exprimé ni démontré dans le langage élémentaire de ladite théorie. Cette appartenance n'est pas formellement établie mais capturée dans un aller-retour entre langage formel et langage mathématique «naturel». En second lieu, nous le voyons bien sur l'exemple du théorème de Bott-Milnor, l'application du principe de transfert conduit à distinguer entre contenu, énoncé (d'un contenu) et démonstration (d'un énoncé d'un contenu). Cette distinction recouvre d'une certaine manière celle que les mathématiciens, ou du moins les historiens des mathématiques font d'ordinaire en étudiant les différentes métamorphoses au cours du temps et selon les points de vue d'un théorème donné. Mais il y a plus. L'application du principe du transfert permet de «lever» une vérité mathématique, de libérer un sens des contraintes de sa formulation et de sa démonstration. Ce sens n'est pas relatif à un langage, puisqu'il se profile dans la confrontation de plusieurs langages.

4. Les ensembles définissables de nombres réels

La notion de définissabilité est une notion métamathématique, ou logique si l'on préfère ce dernier terme. A cause de cela, les mathématiciens n'ont d'abord eu à son égard que «réserve et méfiance» et n'aimaient pas l'utiliser. Dans son célèbre mémoire publié en 1931, Tarski se propose de «reconstruire cette notion dans le cadre des mathématiques»[17]. Cela dans un triple but.

[17] [T 1]. Version revue par Tarski dans [T5], I, p. 117-146

1°) D'une part, il veut rendre précise une notion qui suscite des confusions et même des paradoxes, comme le célèbre paradoxe de Richard[18]. Pour ce faire, il commence par observer qu'il ne s'agit pas d'une notion absolue mais relative au langage formel dans lequel elle est étudiée. Cette observation supprime *ipso facto* le caractère antinomique révélé par le paradoxe de Richard, car il ne s'agit pas de définir en toute généralité la notion de 'nombre réel définissable en un nombre fini de lettres'. Il faut plutôt poser la question de la définissabilité des nombres réels dans un certain langage formel comprenant évidemment une théorie élémentaire des réels. En 1931, Tarski choisit encore le langage des *Principia mathematica* de Russell et Whitehead.

2°) Le second but de la reconstruction mathématique de la notion de définissabilité est de montrer aux mathématiciens que celle-ci ne tombe pas «en dehors des limites propres aux mathématiques», et que son étude reste, au contraire, «dans le cadre normal [sic!] du raisonnement mathématique». Autrement dit, Tarski veut détruire la prévention quasi automatique des mathématiciens envers la logique : ce qui leur dit, au fond, c'est qu'il s'agit de réduire non pas les mathématiques à la logique mais la logique aux mathématiques !

3°) Le troisième but découle de la réalisation du précédent : la reconstruction mathématique d'une notion logique débouche sur des résultats inaccessibles par des méthodes exclusivement logiques. Et là, c'est plutôt l'éducation mathématique des logiciens que vise Tarski.

Pour définir de façon précise les ensembles définissables de nombres réels, il faut d'abord définir ce que Tarski appelle les «ensembles élémentaires» ou «définissables d'ordre 1». Un ensemble S de nombres réels est élémentaire s'il existe un polynôme f à coefficients entiers tel que S soit l'ensemble des suites finies $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de nombres réels solutions de l'équation '$f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$' ou de l' inégalité '$f(x_1, x_2, ..., x_n) > 0$'. Soit :

$$S = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \vee f(x_1, x_2, ..., x_n) > 0\}^{19}.$$

---

[18] L'antinomie de Richard est la suivante. Considérons, rangées selon l'ordre lexicographique, **toutes** les suites finies des lettres de l'alphabet qui définissent un nombre réel. Elles forment un ensemble E dénombrable. Puis considérons la phrase «soit d le nombre réel dont la partie entière est 0 et dont la n-ième décimale est 1 si la n-ième décimale du n-ième nombre est 0, et 0 autrement». D'un côté, cette phrase, qui est une suite finie de lettres, définit un nombre réel; d'un autre côté d est différent de tout nombre défini par un élément de E. Comme on le voit, Richard applique ici le fameux procédé diagonal par lequel Cantor avait démontré que l'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable.

[19] Théorème 1 de [T1], dans [T5], I, p. 138 (modifié selon les indications de la p. 139).

Un ensemble élémentaire au sens de Tarski est donc pour le corps ordonné des nombres réels ce qu'est un ensemble algébrique pour le corps des nombres complexes[20]. L'analogie peut être poussée plus loin, puisque Tarski définit aussi l'analogue de ce qu'on appelle parfois un ensemble constructible, celui-ci étant défini comme combinaison booléenne finie d'ensembles algébriques. En effet, un ensemble de suites de nombres réels est élémentairement définissable si et seulement s'il est «somme finie de produits finis d'ensembles élémentaires», c'est-à-dire si et seulement s'il est combinaison booléenne finie d'ensembles élémentaires, c'est-à-dire encore si et seulement s'il est définissable par une formule (Tarski parle de «fonction propositionnelle» comme le faisaient Russell et Whitehead) **sans quantificateur**, donc du premier ordre. Dans le cas où $n=1$, on considérera les ensembles élémentaires particuliers :

$$\{x \mid x=a\},\ \{x \mid x>0\},\ \{x \mid x<0\},\ \{x \mid a<x<b\}$$

où a et b sont des nombres réels algébriques. On aura alors le corollaire suivant[21] :

un ensemble de nombres réels est élémentairement définissable si et seulement s'il est somme d'un nombre fini d'intervalles bornés algébriquement. En particulier, un nombre réel est élémentairement définissable si et seulement s'il est algébrique; et l'ensemble des propriétés élémentaires du corps ordonné des nombres réels est identique à l'ensemble des propriétés élémentaires de l'ensemble des nombres réels algébriques.

Tarski observe que «l'analogue métamathématique exact» de son théorème 1 est l'élimination des quantificateurs pour une théorie élémentaire de $\mathbb{R}$, et que, dans certaines conditions, la famille des ensembles de nombres réels élémentairement définissables contient les ensembles projectifs au sens de Lusin, c'est-à-dire les ensembles obtenus, à partir d'un ensemble fermé, par un nombre fini d'opérations de projection orthogonale ou de passage au complémentaire.

Aujourd'hui, K étant un corps réel clos quelconque, on définit les ensembles semi-algébriques comme la plus petite collection de parties de K^n contenant toutes parties du type :

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n \mid f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0\}$$

---

[20] On peut, bien sûr, définir également la notion d'ensemble algébrique dans $\mathbb{R}$; et alors un ensemble algébrique est bien entendu élémentaire au sens de Tarski.

[21] Théorème 2 de [T1], dans [T5], I, p. 139.

où f est un polynôme à coefficients dans K, et stable par intersection finie, réunion finie et passage au complémentaire. Autrement dit, un ensemble semi-algébrique est défini par une combinaison booléenne finie d'inégalités et d'équations polynomiales. Si on appelle «condition de signe» comme on le fait habituellement une des trois possibilités : $f>0$, $f=0$, $f<0$, un ensemble semi-algébrique est donné par une combinaison booléenne de conditions de signe portant sur un nombre fini de polynômes[22]. C'est la même chose de dire qu'un ensemble semi-algébrique est l'extension d'une formule sans quantificateur du langage des corps ordonnés. On retrouve donc, généralisée à un corps réel clos quelconque, la définition de Tarski des ensembles définissables de nombres réels. On peut donc dire que c'est Tarski qui, le premier, a défini le concept fondamental de la géométrie algébrique réelle. Il est d'ailleurs remarquable que Tarski ait eu parfaitement conscience d'être en train de jeter les bases d'une nouvelle discipline mathématique. Il observe, en effet, qu'il résout dans son article un problème analogue à celui des géomètres énonçant «pour la première fois le sens des termes 'mouvement', 'ligne', 'dimension', 'surface'». Son attaque de ce problème définitionnel est elle aussi tout à fait prémonitoire de ce qui a lieu aujourd'hui en géométrie algébrique réelle : définir un objet mathématique comme extension d'une certaine formule d'un langage élémentaire et démontrer telle de ses propriétés par l'analyse syntaxique de cette formule. C'est ainsi qu'on démontre, par exemple, la stabilité par projection des ensembles semi-algébriques en utilisant bien entendu l'éliminabilité des quantificateurs de la théorie élémentaire des corps ordonnés, ce qui se fait beaucoup plus aisément que de se servir des propriétés géométriques des projections[23].

L'optimisme logique de Tarski a donc porté ses fruits; aujourd'hui, on peut considérer atteints les trois buts qu'il se proposait en reconstruisant mathématiquement la notion logique de définissabilité.

---

22 [B-C-R], déf. 2.1.3, p. 21.
23 Ibid., théorème 2.2.1, p. 23.

Bibliographie

[A] Artin E. : *The Collected Papers*. Ed. S. Lang, J. Tate, Addison, Wesley Pub. C° (1965). Réed. Springer-Verlag (1982).

[A-S] Artin E., Schreier O. : *Algebraische Konstruktion reeller Körper*. Abh. math. Sem. Hamb. **5**, 85-99 (1926). Dans [A], 258-272 .

[B1] Benis-Sinaceur H. : *Deux moments dans l'histoire du théorème d'algèbre de Ch. F. Sturm*. Revue d'histoire des sciences XLI/2, 99-132, Paris, PUF (1988).

[B2] Benis-Sinaceur H. : *De Sturm à Tarski, ou de l'analyse des équations à la théorie des modèles*. Prépublications, Equipe de logique mathématique, Université Paris VII, Séminaire de structures algébriques ordonnées, F. Delon, M. Dickmann, D. Gondard, 1988-1989, exposé du 5. 12. 88 (1990).

[B3] Benis-Sinaceur H. : *Corps et modèles, essai sur l'histoire de l'algèbre réelle*. Paris, Vrin (1991).

[B-C-R] Bochnak J., Coste M., Roy M.-F. : *Géométrie algébrique réelle*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 12, Springer-Verlag (1987).

[D] Descartes R. : *La Géométrie* (1637). Dans Œuvres VI. Ed. Adam et Tannery, Paris, Gauthier-Villars.

[D-H] Doner J., Hodges W. : *Alfred Tarski and decidable theories*. The Journal of symbolic logic **53**, 20-35 (1988).

[F1] Fourier J. : *Question d'analyse algébrique*. Bull. sc. soc. philomatique de Paris, 61-67 (1818). Dans [F7] II, 243-256 .

[F2] Fourier J. : *Sur l'usage du théorème de Descartes dans la recherche des limites des racines*. Bull. sc. soc. philomatique de Paris, 156-165 et 181-187 (1820). Dans [F7] II, 290-309.

[F3] Fourier J. : *Sur la distinction des racines imaginaires et sur l'application des théorèmes d'analyse algébrique aux fonctions appelées transcendantes*. Mémoires de l'Académie royale des sciences **7**(1827). Paris, F. Didot. Dans [F7] II, 129-146. (Extrait dans le Bulletin de Férussac **8**, n° 8).

[F4] Fourier J. : *Analyse des équations déterminées, première partie*. Paris, F. Didot (1831) .

[F5] Fourier J. : *Remarques générales sur l'application des principes de l'analyse algébrique aux équations transcendantes*. Mémoires de l'Académie royale des sciences **9** (1831). Paris, F. Didot. Dans [F7] II, 185-219.

[F6] Fourier J. : *Analyse des travaux de l'académie pendant l'année 1828, partie mathématique.* Mémoires de l'Académie royale des sciences **11** (1832). Paris, F. Didot.

[F7] Fourier J. : *Œuvres* I, II. Ed. G. Darboux. Paris, Gauthier-Villars (1888-90).

[H] Herbrand J. : *Recherches sur la théorie de la démonstration.* Thèse présentée à la faculté des sciences de Paris (1930). Dans *Ecrits logiques*. Ed. van Heijenoort, Paris, PUF, 1968.

[He] Hermann G. : *Die Frage der vielen endlich Schritten in der Theorie der Polynomideale.* Math. Ann. **95**, 736-788 (1926).

[L] Langford C. H. : *Some theorems on deducibility*. Ann. of math. **28**, 16-40 et 459-471 (1927).

[Lo] Lowenheim L. : *Über Möglichkeiten im Relativkalkül.* Math. Ann. **76**, 447-470 (1915) . Trad. frç. dans Largeault, *Logique mathématique, Textes.* Paris, A. Colin, 111-138 (1972).

[P] Poincaré H. : *Analyse des travaux scientifiques de Henri Poincaré par lui-même, Résumé analytique.* Acta math. **38**, 36-64 (1921). Œuvres de Henri Poincaré **I**, I-XXXV, Paris, Gauthier-Villars (1928).

[Po] Post E. L. : *Introduction to a general theory of elementary propositions.* Amer J. math. **43**, 163-185 (1921). Trad. frç. dans Largeault, *Logique mathématique, Textes*. Paris, A. Colin, 29-56 (1972).

[R-S] Roy M.-F., Sinaceur H. : *Aux sources de la géométrie algébrique réelle.* Springer-France (à paraître).

[S] Schröder E. : *Vorlesungen über die Algebra der Logik* I, II, III. Leipzig (1890-95).

[Se] Seidenberg A. : *A new decision method for elementary algebra.* Ann. of. Math. **60**, n°2, 365-374 (1954).

[Sk1] Skolem T. : *Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls und über Produktions- und Summationsprobleme, welche gewisse Klassen von Aussagen betreffen* (1919). Dans [Sk3], 67-102.

[Sk2] Skolem T. : *Uber einige Satzfunktionen in der Arithmetik* (1930). Dans [Sk3], 281-306.

[Sk3] Skolem T. : *Selected works in logic.* Ed. J. E. Fenstad, Oslo, Universitetsforlaget (1970).

[St1] Sturm F. : *Analyse d'un mémoire sur la résolution des équations numériques.* Bull. Férussac **11**, n ° 271, 419-422 (1829).

[St2] Sturm F. : *Mémoire sur la résolution des équations numériques.* Mémoires présentés par divers savants étrangers à l'Acad. roy. sc., section Sc. math. phys. **VI**, 273-318 (1835).

[St3] Sturm F. : *Mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre.* J. de math. pures et appl. **1**, 106-186 (1836).

[St4] Sturm F. : *Mémoire sur une classe d'équations à différences partielles.* J. de math. pures et appl. **1**, 373-444 (1836).

[T1] Tarski A. : *Sur les ensembles définissables de nombres réels* I. Fundamenta mathematicae **17**, 210-239 (1931). Dans [T5] , I, 117-146 et [T6] , I, 517-548.

[T2] Tarski A. : *The completeness of elementary algebra and geometry* (1939). Paris, Institut Blaise Pascal (1967). Dans [T6] IV, 289-346.

[T3] Tarski A. : *Sur la complétude de l'algèbre et de la géométrie élémentaires* (1939). Dans [T5], II, 203-242.

[T4] Tarski A. : *A decision method for elementary algebra and geometry (prepared for publication by J.C. McKinsey)* (1948). Second revised ed. (1951). University of California Press, Berkeley and Los Angeles. Dans [T6], III, 297-368.

[T5] Tarski A. : *Logique, sémantique, métamathématique 1923-1944.* I, II. Paris, Armand Colin (1972-74).

[T6] Tarski A. : *Collected Papers*, I, II, III, IV. Ed. Givant S. R. et McKenzie R. N., Birkhäuser (1986).