CAHIERS DU SÉMINAIRE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

GUSTAVE CHOQUET

La vie et l'œuvre de Marcel Brelot (1903-1987)

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1re série, tome 11 (1990), p. 1-31

<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1990__11__1_0>

LA VIE ET L'OEUVRE DE MARCEL BRELOT (1903-1987)

Conférence de Gustave CHOQUET au Séminaire de THEORIE DU POTENTIEL du jeudi 8 octobre 1987

(L'auteur a fait également une conférence au Séminaire d'Histoire des Mathématiques le 13 janvier 1988 intitulée *Marcel Brelot (1903-1987), sa vie, son oeuvre et le développement de la théorie du potentiel en France.*)

Marcel Brelot nous a quittés : Il est mort le 3 août 1987 à Paris. Il était l'un des membres fondateurs de notre Séminaire, le véritable créateur des Annales de l'Institut Fourier, et tous les membres du Séminaire ont subi, de près ou de loin son influence, soit comme élèves ou collaborateurs, soit par ses conversations, publications ou lettres. Mais il était surtout, dans le monde entier, la figure la plus représentative de la Théorie du Potentiel.

Je l'ai rencontré pour la première fois, fin 1947, à l'Université de Grenoble où je venais d'être nommé. Aussitôt il me prit en charge et s'efforça de m'apprendre de la théorie du potentiel, en m'exposant ses problèmes en cours avec certainement comme objectif de m'intriguer et m'inciter à les faire miens. Son accueil était chaleureux ; tout de suite il me mit sur un pied d'égalité avec lui et m'aida désormais dans diverses circonstances de ma vie, avec une affection discrète et un grand désintéressement.

Il travaillait souvent dans son spendide bureau de l'Institut Fourier, où, quand il voulait accoucher d'une idée presque mûre, il se préparait un thé bien fort car, disait-il, les découvertes se font lors de pointes de l'activité cérébrale , après un long travail de défrichement.

Nous écrivîmes ensemble trois mémoires, à Grenoble d'abord, puis à Paris ; et mon travail sur la Théorie des capacités lui doit beaucoup pour l'intérêt qu'il attachait à mes progrès.

Je pense qu'il n'est pas possible de séparer l'oeuvre scientifique d'un chercheur,de sa vie et de sa formation ; aussi parlerai-je d'abord avec quelque détail de sa biographie.

Il est né le 29 décembre 1903 à Chateauneuf-sur-Loire (Loiret) ; ses parents étaient tous deux instituteurs, sortis premiers de leur Ecole Normale ; sa mère, passionnée d'histoire, avait peu de goût pour la vie ménagère. Il resta enfant unique et fut confié très tôt à une nourrice chez laquelle à l'âge de 3 ans, il tomba un jour dans une bassine d'eau bouillante ; l'arrivée miraculeuse de sa mère qui venait le voir ce jour là, le sauva d'une mort cruelle. Sa vie, par la suite, devait être émaillée d'autres tels miracles et il survécut plusieurs fois à de graves accidents.

Une mutation de ses parents à Aulnay-la-Rivière le conduisit à Cépoy, près de Montargis, chez sa grand-mère où il vécut jusqu'à son entrée comme pensionnaire au lycée de Sens.

Il fait ensuite ses études secondaires, d'abord au collège de Montargis qu'il rejoint chaque jour en vélo, puis au Lycée de Sens, enfin au Lycée Saint-Louis. En Taupe (ou hypotaupe) il attrape en Novembre une grippe intestinale, puis une endocardite chez ses parents où il est rentré soigner sa grippe ; il reste 9 mois allongé sur le dos, ce qui ne l'empèche pas, l'année suivante, d'être reçu aux concours de Polytechnique et de l'E.N.S. ; il entre à l'E.N.S., en 1924.

Il a dans sa promotion, R. Aron, Dieudonné, Ehresmann, Néel, Sartre; mais il fréquente aussi Delsarte, A. Weil (promo 1922) ; Cartan, Coulomb, Dubreil, de Possel, Wyart (1923) ; Bourion, Herbrand, Nicolesco (1925) ; Chevalley, Leray (1926). Mais ses camarades le voient peu, car il passe beaucoup de temps à l'infirmerie.

Il est agrégé en 1927 et ne fait pas de Service Militaire, étant réformé ; puis boursier Arconati-Visconti (1927-1929) en un temps où le C.N.R.S. n'existe pas ; enfin boursier Rockefeller, d'abord à Rome chez Volterra (1929-1930), puis à Berlin chez Erhardt Schmidt (1930-1931).

Il soutient sa thèse en 1931 sur un sujet proposé par Emile Picard : Etude des solutions u de l'équation $\Delta u = C(x)\, u(x)$ où C est une fonction ≥ 0, au voisinage d'un point singulier de C ; il reconnait à cette occasion le rôle des fonctions sous-harmoniques récemment introduites par Frédèric Riesz.

En 1931-33, d'abord un an au C.N.R.S. nouvellement créé (sous le nom de Caisse des Sciences), puis un an à l'Institut Français de Berlin.

En 1933-38 il est chargé de cours, puis Maître de Conférences à Alger où il rencontre dans un bal en 1933 sa future épouse, Alice Bautrant, qu'il épouse en 1935. De 1938 à 1942 il est professeur de Maths Géné à Bordeaux.

Puis, pour des raisons familiales de santé, il se dirige vers Grenoble où pendant 2 ans il enseigne d'abord la Mécanique Rationnelle ; à cette occasion, il cherche à donner un exposé plus rigoureux des notions de travail, forces intérieures, travaux virtuels, à partir de la notion de mesure ; cette axiomatique, complétée plus tard par René de Possel, est exposée dans un fascicule d'une cinquantaine de pages.

Il est nommé à Paris en 1953, Maître de Conférences d'abord suivant la coutume d'alors, puis Professeur.

En 1974 il est élu Correspondant de l'Académie des Sciences, dont il a été - fait exceptionnel - quatre fois lauréat de 1939 à 1968 ; c'est hélas, aussi l'année où disparaît son fils Alain, physicien des solides, tué dans un accident d'avion.

SES TRAVAUX. La liste de ses publications comporte plus de 150 titres ; la première est une Note aux CRAS en 1929.

C'était un perfectionniste ; aussi n'écrivit-il aucun vrai livre qui soit une Somme ; mais il a écrit de nombreux fascicules qui eurent une grande influence par leur élégance et leur contenu scientifique :
- un cours de 2° cycle (1954) : "Notions sur les fonctions harmoniques"
- un cours de 3° cycle (1959 →) rédigé d'abord par Houzel : "Eléments de la Théorie du Potentiel".

Ce cours qui eut un très grand succès fut traduit en Russe.
- un cours du Tata Institute (1960) et un cours de Montréal (1965) où il développe son axiomatique.
- un cours de Stresa (1969) qui contient un bref historique de la Théorie du Potentiel.
- le fascicule 175, (1970) des Lecture Notes in Maths : "On topologies and boundaries in potential theory".

La plupart des travaux de Brelot concernent la Théorie du Potentiel ; mais ceux qui ne la concernent pas montrent qu'il savait très vite assimiler une nouvelle théorie et y apporter une contribution intéressante : J'ai déjà mentionné ses recherches sur la Mécanique. Mais précédemment, à Alger, il avait fait 8 publications sur la statistique, probabilités, erreurs, et antérieurement amélioré le schéma de la lutte pour la vie de Voltera. Signalons encore un travail qu'il fit sur l'intégrale de Daniell à une époque où Bourbaki hésitait entre cette intégrale et celle de Radon. Et enfin une étude théorique et numérique des intégrales de Fresnel.

Brelot fut toute sa vie un grand travailleur ; il se plaignait d'être lent, mais ... les résultats sont là ! Dès son entrée dans la vie de chercheur, dans les années 30, il se chargea de la rédaction de cours :
- cours de Picard : "Problèmes aux limites des équations différentielles".
- cours de Volterra : "Théorie mathématique de la lutte pour la vie".
- deux cours de Julia (en collaboration) : "Principes géométriques

de l'Analyse" et "Représentation conforme".

- traduction d'un livre de Levi-Civita.

Je veux enfin souligner l'importance et l'utilité de deux Notices historiques sur le développement de la Théorie du Potentiel que lui seul, avec sa connaissance globale de la théorie, pouvait écrire :

1) aux Annales de l'Institut Fourier 1952, T.4, en 28 pages : "La théorie moderne du potentiel (de Gauss 1840 à 1952)
2) à l'Ens. Math. de Genève 1972, en 36 pages : "Les étapes et les aspects multiples de la théorie du potentiel".

Ajoutons-y ses brefs exposés historiques du cours d'été de Montréal (1965) et du cours d'été de Stresa (1969).

Je veux citer ici une très belle Notice similaire de Heinz Bauer, en 34 pages : "Harmonic spaces, a survey" au Séminaire de Mathématiques, Université de Bari (Italie). On aurait besoin maintenant d'un exposé historique analogue concernant le développement récent des liens entre Théorie du potentiel, processus de Markov, semi-groupes, familles résolvantes ; en attendant, les brefs "Commentaires et Notes historiques" de l'ouvrage monumental de P.A. Meyer et Cl. Dellacherie rendent bien des services.

<u>SON ACTIVITE SOCIALE</u>. Certes Brelot consacrait le meilleur de son temps à la recherche mathématique, mais il ne se dérobait jamais aux tâches d'intérêt collectif et se les imposait même parfois quand il le croyait nécessaire : J'ai déjà parlé de ses rédactions de cours, et de Notices historiques.

Il fut Secrétaire adjoint, puis Secrétaire du Comité National Français des Mathématiciens pendant une vingtaine d'années. Il fut président de la S.M.F. en 1960.

Mais surtout il fut le véritable fondateur des "Annales de l'Institut Fourier" qui, de petite revue pluridisciplinaire (appelée Annales de Grenoble) devint sous son implusion en quelques années l'un de nos meilleurs Journaux mathématiques, de lecture particulièrement agréable.

Parti de rien, il sut avec opiniatreté trouver une multitude de petites aides financières, locales ou nationales, et susciter des articles mathématiques de grande qualité. En même temps il faisait de ces Annales, par un vaste système d'échanges, un outil imcomparable d'enrichissement de la bibliothèque du Département de Mathématiques de Grenoble. Une telle réussite n'aurait pas été possible s'il n'avait pas eu obstination, esprit d'initiative, et une facilité épistolaire exceptionnelle. Dois-je ajouter qu'il utilisait aussi cette facilité pour faire savoir à des collègues, ou à des responsables administratifs ce qu'il pensait de leur action, ou de la valeur scientifique ou morale de tel ou tel candidat.

Il était donc bien loin d'être un Professeur Nimbus ; il avait au contraire, quand il y appliquait son esprit, un sens aigu des réalités et de la vie quotidienne ; c'est ainsi que, sous l'occupation allemande, il était passé maître dans la fabrication de fausses cartes d'identité, dont les bénéficiaires lui gardent une grande reconnaissance.

<u>SON INFLUENCE SCIENTIFIQUE</u>. Elle s'exerçait, bien sûr par ses publications, mémoires ou monographies ; mais aussi dans une certaine mesure par ses cours. Il n'aimait pas l'enseignement aux grandes masses ; c'était un élitiste ; il préparait très soigneusement ses cours, quel qu'en fut le niveau, avec une grande exigence de rigueur, mais il estimait que seul un petit nombre d'étudiants pouvait apprécier l'intérêt de cette rigueur. On comprendra donc qu'on ne pouvait pas l'accuser de laxisme aux examens. Par contre l'auditoire restreint qui le suivait jusqu'au bout en tirait un grand profit. A l'examen, il s'intéressait spécialement aux étudiants qui, ne serait-ce que dans une seule question manifestaient, soit un souci de rigueur, soit un peu d'originalité.

Je pense intéressant de citer ici un extrait d'un témoignage de Jean-Claude Pecker, astronome, qui fut étudiant de Brelot, à Bordeaux (1940-42) puis à Grenoble (1942-44).

"Quels souvenirs garderai-je du Brelot de cette époque ? Brelot était plus bourbakiste que Bourbaki. Déjà, dans mon année de mathématiques générales, nous avions entendu beaucoup parler de l'axiomatisation bourbakiste, et l'enthousiasme de Brelot était pour moi très contagieux. Il n'était pas, je dois le dire, largement communicatif, dans la mesure où sur une centaine d'élèves inscrits au certificat de mathématiques générales, je crois que nous fûmes seulement une dizaine à franchir les barrières de l'examen. Ce sont des proportions analogues qui caractérisent les hécatombes pour lesquelles Brelot était célèbre à l'Université de Grenoble. En mécanique rationnelle, nous eûmes une vision très personnelle de la mécanique, où Brelot introduisait sa théorie des dynames ; cela me paraîssait personnellement une façon astucieuse et originale de concevoir un enseignement. Je vois encore Brelot se promener en long et en large devant le tableau noir, interrompre ses phrases, en recommencer d'autres, et désespérer la plupart des étudiants. Je dois dire que, moi, j'adorais ce type d'enseignement, qui me changeait heureusement du cours dicté de taupe, et qui me forçait à réfléchir un peu par moi-même sur des idées qui, il faut bien le dire, étaient fort riches.

Il était très amusant d'entendre cet homme, qui n'appartenait pas au groupe Bourbaki, être plus bourbakiste que Bourbaki, dans sa façon d'envisager l'axiomatique mathématique, son extension du bourbakisme à la mécanique physique, à la mécanique des fluides, à la mécanique rationnelle".

SES ELEVES DE RECHERCHE ET CEUX QU'IL A INFLUENCÉS DIRECTEMENT.

C'est surtout après sa nomination à Paris et le développement de son axiomatique qu'il eut de nombreux élèves ; ce furent successivement : Godefroid 1951, à Grenoble ; M. Arsove, 1951, à Grenoble ; Linda Lumer-Naïm, 1957, à Grenoble puis à Paris (sur la frontière de Martin) ; Anger, de l'Allemagne de l'Est, 1958 ; Rose-Marie Hervé 1958 (Axiomatique des fonctions surharmoniques) ; Ramaswamy, de Madras, 1959 ; Joane Elliot (nièce de Feller) 1961 (Espaces de Dirichlet) ; Gowrisankaran, de l'Inde, puis Canada, 1962 (étude à la frontière) ; Bernadette Brelot-Collin, épouse d'Alain Brelot (équation de type Tricomi) ; de la Pradelle 1967 (quasi-analyticité en théorie axiomatique) ; Guessous 1967 ; Anandam 1969 (axiomatique sans potentiel > O) ; Smyrnelis 1970 (axiomatique des fonctions biharmoniques) ; M. Cabellero, du Mexique 1973 (elle travailla aussi avec Malliavin) ; Guillerme 1973.

Déjà ses petits-fils spirituels ne se comptent plus, et ses arrière-petits fils sont nombreux ; ainsi s'accélère le développement des Mathématiques !

Il avait une façon personnelle de prospecter et former ses élèves de recherche : Bien souvent il les repérait chez ses étudiants par leurs mini-étincelles d'originalité, sans tenir compte de leur absence de culture générale. Puis il savait les retenir par une patience sans faille, par sa gentillesse et sa modestie : En s'effaçant devant eux, il leur faisait oublier leurs complexes et leur timidité ; il parvenait ainsi à tirer de chacun le meilleur, comme le tailleur de diamants qui s'adapte à la structure de la pierre brute qu'on lui a confiée.

Mais il ne supportait pas l'incompétence chez ceux qui se prétendent compétents, ni surtout l'arrivisme et le cheminement tortueux des arrivistes, ce qui lui attira quelques inimitiés, et une certaine réputation de misanthropie.

Il avait, de la recherche et de l'éthique du chercheur, une conception exigeante qu'il a transmise à ses élèves ; je n'ai jamais rencontré quelqu'un qui, plus que lui, cite scrupuleusement ses sources d'inspiration, ses prédécesseurs, et fournisse une riche bibliographie. L'un de ses élèves dit de lui : "Au moment où les crédits et les postes sont plus rares et la concurrence plus farouche, nous avons été parfois pris de doute sur la valeur de notre profession. Heureusement l'exemple de notre Maître était là pour nous prouver que nous ne nous étions pas trompés, et nous redonner le courage de persévérer. Nombreux sont ceux qui, dans le couloir de notre Equipe, le savent et ont pour lui de la vénération".

Son influence s'est aussi exercée - et peut-être surtout - sur des mathématiciens déjà formés, qu'il réussissait à attirer dans ses rets par un art de poser des questions adaptées à l'interlocuteur, en lui laissant entendre que lui seul pouvait résoudre le problème, dont la solution lui serait d'un grand secours, en même temps qu'un grand pas pour la théorie du potentiel. Que de fois j'ai reçu de lui un coup de téléphone pour me dire "voici un problème dont je suis sûr que tu vas me trouver la solution ; j'ai cherché partout des références et je n'ai rien trouvé". Comment alors ne pas étudier le problème posé ?

C'est ainsi que tombèrent dans ses rets :
H. Cartan, Doob, Choquet, Deny, H. Bauer (1966), Bony (1966 et 1968), l'Equipe roumaine (Constantinescu, Cornea, Boboc, Bucur), Stampacchia, Loeb, B. Walsh (1969), Bertin (1969) P.A. Meyer, Mokobodzki, Courrège, D. Sibony, Feyel (1971), Jackson, Michel Hervé 1972, John Taylor, Fuglede, l'Equipe tchèque (Kräl, Lukès, Netuka, Vesely) ; Ben Saad 1982.

Que de conversations et d'échanges de lettres supposent ces nombreux contacts !

LE SEMINAIRE DE THEORIE DU POTENTIEL. Dès son arrivée à Paris, en 1953, Brelot participa au Séminaire d'Analyse aux objectifs variés, analyse fonctionnelle et potentiel, que j'avais organisé vers 1951, mais dont les conférences n'étaient pas publiées ; bientôt Brelot suggéra pour la partie Potentiel une publication qui serait éditée par Belgodère-Lardeux ; il se chargea des questions matérielles, et la publication commença en 1957 sous le nom de Séminaire B.C. qui, l'année suivante, dès la nomination de Deny à Paris devint le Séminaire B.C.D. Jusqu'à la publication séparée du Séminaire d'Initiation à l'Analyse, en 1962, il accueillit aussi de nombreux articles sur la convexité.

Le volume 1 contient le premier exposé de Brelot sur son axiomatique du problème de Dirichlet, ainsi que la seconde publication de Deny sur la théorie Beurling-Deny des espaces de Dirichlet. C'est dans le volume 5, en 1960, que P.A. Meyer, tout frais émoulu du cours et du Séminaire de Loève, publia sa série d'exposés probabilistes qui eut un succès considérable et dont l'action séminale donna naissance à l'Ecole probabiliste de Strasbourg.

Ce Séminaire eut une grande influence sur le développement de la théorie du potentiel en France et fit de Paris le centre mondial de cette théorie ; les nombreux centres potentialistes ou proba-potentialistes existant actuellement dans le monde - Erlangen, Prague, Bucarest, Copenhague, etc ... ont, à un plus ou moins grand degré, une dette envers ce Séminaire.

Brelot avait clairement vu que des exposés oraux, aussi bons soient-ils, doivent être prolongés par une publication de haute qualité pour avoir un écho durable : "verba volant, scripta manent".

<u>L'HOMME BRELOT</u>. Avant de passer à une brève analyse de son oeuvre mathématique, je voudrais évoquer l'homme qu'il fut. Certes, la grande passion de sa vie fut la recherche mathématique, mais s'il n'était ni joueur d'échecs, ni mycologue amateur comme notre ami commun Deny, il avait aussi des intérêts variés : Il raffolait de grande musique, qu'il écoutait religieusement avec un ami, sur une très bonne chaîne Hi-Fi ; il aimait relire quelques bons auteurs, tels A. France, Gide, Proust, J. Romains,... ; et en digne fils de sa mère, il s'intéressait à la civilisation gréco-romaine. Il avait une grande facilité pour apprendre les langues (il l'a transmise à sa fille Claude) et lisait avec plaisir allemand, anglais, italien, espagnol.

La politique l'intéressait beaucoup, mais il n'était inscrit à aucun parti, et avait une piètre estime pour la plupart des hommes politiques. Comme père et mère il était agnostique, mais sans agressivité.

Il savait apprécier la vie ; il avait été bon danseur, aimait les voyages, les belles voitures (qu'il conduisait vite malgré une très mauvaise vue : "Je vois les grandes masses" disait-il) ; et c'était un convive apprécié que ses élèves aimaient emmener au restaurant après notre Séminaire du jeudi.

Il reprochait aux médecins de ne pas savoir empêcher la décrépitude, intellectuelle et physique. Quant à lui, malgré une mémoire diminuée et moins de résistance pour un travail prolongé, il garda jusqu'au dernier jour intelligence, sens critique et goût pour la recherche mathématique.

Il avait une grande confiance dans l'énergie de sa femme et son aptitude à le sortir de ses ennuis de santé ; il lui disait qu'elle était son pilier, et que grâce à elle il vivrait cent ans. De fait, en dépit de multiples accidents graves qu'il racontait avec un humour tranquille, et de maux chroniques qui l'accompagnèrent toute sa vie, une constitution somme toute robuste et la vigilance de son épouse le remettaient toujours en selle. Il mourut à 83 ans, après un séjour au

Centre mathématique d'Oberwolfach qu'il aimait beaucoup.

C'est un des hommes dont j'ai le plus admiré le caractère.

SON STYLE DE TRAVAIL. La source de sa patience et sans doute aussi de sa modestie me semble avoir été sa conviction, qu'il m'a souvent exprimée, qu'il avait besoin de beaucoup de temps pour comprendre un problème, un exposé ; je le rassurais alors en lui disant qu'il n'était pas seul dans ce cas, car il y a loin entre compréhension superficielle et compréhension profonde.

Sa grande honnêteté intellectuelle et son exigence lui imposaient un incessant travail d'information scientifique, tel celui qu'il fit, en 1945, puis en 1955 lorsqu'il s'aperçut que ses recherches ne pouvaient s'épanouir sans des connaissances plus approfondies en topologie ; il se plongea alors dans les Bourbaki de Topologie générale et Espaces fonctionnels.

Il avait progressivement acquis, par amour de l'essentiel, un style nerveux, et dépouillé à un point tel que souvent, relisant après plusieurs années un de ses propres travaux, il avait bien du mal à en comprendre les démonstrations !

SES TRAVAUX EN THEORIE DU POTENTIEL. Soixante années de recherches ne se résument pas aisément, d'autant plus qu'une partie de ses résultats sont rapidement devenus classiques, se sont incorporés au "corpus" potentialiste, et ont subi des remaniements successifs. Je n'analyserai donc que les plus originales de ses contributions à une théorie qu'il commença à étudier environ 150 ans après que Lagrange eut reconnu, en 1773, que l'attraction newtonienne $\vec{u}/r^2$ par une masse ponctuelle au point O, était le gradient de la fonction $1/r$, et que Laplace eut reconnu l'harmonicité des potentiels hors du support des masses.

Quand Brelot arrive sur la scène potentialiste, des idées-clefs ont déjà été introduites en potentiel newtonien : Gauss d'abord (1840) puis avec plus de rigueur Dirichlet, Riemann et enfin Hilbert (1900) ont résolu par une méthode variationnelle utilisant une forme quadratique, les problèmes de l'équilibre, de Dirichlet et du balayage, du moins pour des données assez régulières. Perron (1923) et Wiener (vers 1924) ont introduit de nouvelles méthodes, plus linéaires, pour résoudre le problème de Dirichlet à donnée continue ; et Wiener a défini la capacité des compacts. Mais surtout, F. Riesz (1925 et 1930) a introduit, à partir de l'étude des fonctions $f(z)$, les fonctions surharmoniques (initialement, plutôt les sous-harmoniques) et montré que localement elles sont identiques à des potentiels de mesures ≥ 0, à l'addition près d'une fonction harmonique.

C'est alors que Frostman et Brelot entrent en scène, toujours dans le cadre des potentiels newtoniens dans $\mathbb{R}^n$ (où $n > 2$). Les outils de Frostman sont les mesures de Radon ≥ 0 et leur topologie vague, le principe de l'énergie et le principe du maximum ; il remarque d'ailleurs que ses méthodes s'appliquent aussi aux potentiels de M. Riesz. Les outils de Brelot sont fort différents, linéaires et non quadratiques ; ils lui ont été inspirés par son utilisation, dans sa thèse, des fonctions surharmoniques pour l'étude des solutions u de $\Delta u(x) = c(x)\, u(x)$ pour $c \geq 0$ et $u \geq 0$: Il étudie le balayage, non plus à partir des masses, mais des potentiels ou des fonctions surharmoniques, ne revenant aux masses qu'à la fin des opérations sur ces fonctions.

Son <u>théorème de convergence</u> (1938). Il démontre que dans un domaine, la limite d'une suite décroissante (f_n) de fonctions surharmoniques coïncide, soit avec $-\infty$, soit avec une unique fonction surharmonique, hors d'un ensemble E de capacité <u>intérieure</u> nulle. Le mot "intérieure" devait être, en 1942, remplacé par "extérieure" par H. Cartan.

Le <u>Problème de Dirichlet</u> (1939). Brelot lui donne une forme définitive en le posant pour une donnée frontière g quelconque, et non plus continue comme chez Perron-Wiener. La donnée g est <u>résolutive</u> ssi g est μ-intégrable pour la mesure harmonique μ associée à un point du domaine.

<u>Capacité extérieure ; ensemble polaire ; effilement</u> (1939, 40, 41). Presque simultanément il introduit la notion de capacité extérieure (ce que feront aussi indépendamment Beurling et Monna) et de quasi-partout (d'où aussitôt le problème de la capacitabilité des ensembles boréliens). Puis la notion d'ensemble polaire, défini comme ensemble sur lequel au moins une fonction surharmonique vaut $+\infty$; ce n'est que plus tard que H. Cartan montrera que (X polaire) $\Longleftrightarrow$ ($C^*(X) = 0$).

La notion d'ensemble E effilé en un point $a \in \overline{E}$ était plus cachée ; il la définit ainsi :

(E effilé en a) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (il existe f surharmonique au voisinage de a telle que $\liminf_{x \neq a,\, x \to a,\, x \in E} f(x) > f(a)$.

Cette condition peut aussi s'exprimer en disant que a est un point isolé de l'adhérence de $E \cup \{a\}$ pour la topologie définie plus tard par Cartan, i.e. la moins fine des topologies qui rendent continus tous les potentiels.

Brelot montre que pour un point frontière a d'un domaine ω, <u>l'irrégularité</u> de a pour le problème de Dirichlet équivaut à l'effilement de $\complement\omega$ en a.

Extrémisation, réduite (1944). Dans plusieurs mémoires successifs, Brelot met en place sa méthode favorite, celle de l'extrémisation : Si $X \subset \overline{X} \subset \omega$ ouvert, et f surharmonique sur ω, l'extrémisée de f par rapport à X est la plus petite fonction surharmonique g telle que $g \geq f$ quasi-partout hors de X. Brelot montre l'existence de cette extrémisée ; il en résulte par exemple que l'ensemble des points d'un ensemble Y où Y est effilé est polaire.

De façon analogue et plus générale, il définit aussi la réduite associée à une fonction $f \geq 0$ quelconque.

Etudes à la frontière et frontière ramifiée. Une des préoccupations constantes de Brelot depuis les années 40 a été l'étude du comportement des fonctions surharmoniques dans un ouvert ω, de complémentaire non polaire, au voisinage de la frontière. Il était un maître dans ce domaine ; lui et Doob y ont obtenu, avec des méthodes différentes, des résultats très fins qui seront difficilement dépassés.

Cette étude était liée à la ramification de la frontière dans le sens des précurseurs Evans, Perkins, de la Vallée Poussin qui avaient, eux, surtout étudié le cas du plan avec l'outil des fonctions analytiques. Brelot y consacra de nombreux travaux, inspirés en partie par la célèbre frontière Martin (1941) dont les points sont définis au moyen des fonctions harmoniques ≥ 0, extrémales dans le convexe compact des fonctions harmoniques ≥ 0 prenant la valeur 1 en un point fixé. Cette préoccupation le conduisit à son étude (avec Choquet) des "Espaces et lignes de Green" qui englobent les surfaces de Riemann classiques, et à l'introduction de diverses distances sur ω, par exemple la distance géodésique.

Dans les problèmes de Dirichlet ramifiés s'introduisent un effilement "minimal" et des limites fines aux points frontière ramifiés (voir aussi Naïm).

Les espaces harmoniques de Brelot (1957-58). Dès les années de guerre (1939-45), inspiré par des exposés de Bourbaki, Brelot rêvait d'unifier par une axiomatique l'étude des équations aux dérivées partielles elliptiques ; mais les fervents de l'axiomatisation eux-mêmes l'en avaient détourné. Puis Tautz (1949) et Doob (1954) proposèrent deux axiomatiques, d'inspiration probabiliste chez ce dernier. Pour Brelot, elles manquaient d'élégance ou de généralité, mais elles lui apportèrent une nouvelle motivation ; il travailla, tailla, simplifia, avec le souci de construire une axiomatique adaptée aux opérateurs elliptiques, tout en étant assez riche pour qu'on puisse y définir en termes primitifs les notions de la théorie newtonienne et y démontrer les mêmes théorèmes clefs.

Le miracle est qu'il réussit à atteindre ces deux objectifs ; celà explique la masse des travaux suscités par son axiomatique, et ayant pour but soit l'étude de l'axiomatique elle-même et de ses applications, soit des extensions de cette axiomatique. Pour la définir, le mieux est encore de citer Brelot (1957-58) :

"Dans un espace topologique Ω localement compact mais non compact, connexe et localement connexe, on donne sur chaque ouvert un espace vectoriel de fonctions réelles finies continues dites harmoniques, satisfaisant aux axiomes suivants (de caractère local).

1) (Axiome de faisceau). Toute fonction harmonique dans un ouvert ω est harmonique dans tout ouvert partiel, et inversement toute fonction localement harmonique dans ω est harmonique dans ω.

Appelons maintenant <u>régulier</u> tout ouvert relativement compact ω tel que toute fonction réelle finie continue f sur $\partial\omega$ se prolonge continuement dans ω de façon unique selon une fonction harmonique qui est ≥ 0 si $f \geq 0$.

On peut maintenant énoncer le second axiome.

2) (Axiome de résolubilité locale du problème de Dirichlet).L'espace Ω possède une base d'ouverts réguliers.

3) (Axiome de convergence). Toute suite croissante (f_n) de fonctions harmoniques dans un domaine ω a partout pour limite $+\infty$, ou a une limite harmonique."

Ces axiomes permettent déjà de définir les fonctions surharmoniques, les potentiels, les ensembles polaires, et de retrouver une grande partie des théorèmes de la théorie newtonienne, y compris (Mme Hervé), avec la théorie des éléments extrémaux, une représentation intégrale des fonctions harmoniques ≥ 0, du type Riesz-Martin.

Si l'on ajoute un 4° axiome, à savoir qu'il existe dans Ω au moins un potentiel > 0, on retrouve le théorème de résolubilité de Brelot dans le problème de Dirichlet ; enfin un axiome dit de "domination" permet de retrouver le grand théorème de convergence de Brelot-Cartan.

Plus tard (1962) Heinz Bauer élargit la théorie de Brelot en affaiblissant l'axiome 3 de convergence, de façon à englober l'équation de la chaleur ; et en 1965-1972, Constantinescu et Cornea développent un schéma, en un certain sens final, de la théorie locale du potentiel, tout en n'ayant plus, évidemment, la simplicité de l'axiomatique Brelot.

Je vois deux raisons à l'attrait de cette dernière, en plus de sa simplicité : 1) D'abord la transparence qu'elle apporte aux notions de base et aux démonstrations, même dans le cas classique ; les ressorts qui sous tendent la théorie deviennent évidents ; dès qu'on a vérifié que les axiomes sont satisfaits, ce qui est souvent élémentaire, la structure euclidienne de l'espace et les propriétés différentielles des fonctions en jeu n'interviennent plus. 2) Ensuite la grande généralité des espaces de Brelot : Ils vont des réseaux électriques, de dimension 1 ou plus (Lumer) à des espaces contenant des tores de dimension infinie (Berg 1976), en passant par des ouverts euclidiens munis d'un opérateur elliptique, éventuellement dégénéré.

Comme toute bonne axiomatique, celle de Brelot permet une grande économie de pensée. Une brève revue des principaux exemples connus s'impose ici :

1. (R.M. Hervé 1962, puis en collaboration avec M. Hervé). J'énoncerai seulement un cas particulier de ses résultats :

Sur l'ouvert Ω euclidien, soit L un opérateur uniformément elliptique (i.e. minoré et majoré par un $k\Delta$) de la forme $\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\sum_j a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j})$, où les coefficients a_{ij} sont lebesgue-mesurables bornés. Alors les solutions u de $Lu = 0$ au sens des distributions sont continues et vérifient l'axiomatique Brelot. Ceci permet de compléter des résultats antérieurs difficiles de Stampacehia (1964).

2. (Bony 1967 et 1969). Soit L un opérateur différentiel linéaire sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, de la forme canonique $(\Sigma X_i^2 + Y + c)$ tel que l'algèbre de Lie engendrée par les coefficients de X_i (resp. des X_i et Y) soit du rang maximum n ; alors les fonctions L-harmoniques vérifient l'axiomatique Brelot (resp. Bauer).

Ces conditions sont presque nécessaires (Bony) si l'on se restreint à un sous-ouvert dense de Ω .

3. (Krylov et Safonov, exposé dans l'édition récente du livre de Gilbarg et Trudinger, "Elliptic partial differential equations of second order" chez Springer.

Soit L un opérateur uniformément elliptique sur Ω dont les coefficients dans la forme ordinaire de L sont seulement continus ; alors les fonctions L-harmoniques vérifient l'axiomatique Brelot (Les auteurs démontrent seulement que des inégalités de type Harnack existent ; mais à partir de là on vérifie les axiomes de Brelot).

Brelot et la théorie locale du potentiel. Les deux Notices historiques de Brelot, la seconde surtout, montrent bien l'intérêt qu'il portait à la théorie non-locale du potentiel. Il admirait tout spécialement le lien spectaculaire établi par G. Hunt (1957, puis 58, 66) entre cette théorie et celle des martingales et processus de Markov. Il en comprenait parfaitement l'agencement interne ; un moment même il envisagea de recommencer vers les probabilités le même effort qu'il avait fait en 1945 et 1955 vers la topologie. Mais, pris d'abord par le développement de son axiomatique dont la formulation est d'ailleurs presque contemporaine des travaux de Hunt, puis conscient ensuite qu'il serait trop tard pour devenir un Maître dans une discipline toute nouvelle pour lui, il préféra - sans doute avec sagesse - utiliser sa maîtrise exceptionnelle de la surharmonicité et de l'extrémisation pour achever son oeuvre dans la théorie locale que personne n'a dominée comme lui.

Cette théorie (faut-il le répéter à des potentialistes ?) était bien digne qu'on lui consacre toute une vie ; depuis deux siècles elle a été un ferment de l'Analyse où, à la fois elle a été la matrice d'où sont sorties des théories nouvelles, et le banc d'essai d'autres théories naissantes ; on peut affirmer que pendant deux siècles, la plupart des grands Analystes lui ont consacré une part importante de leur oeuvre.

Matrice, elle l'a été pour les méthodes variationnelles, (intégrale de Gauss $\int(U^{\mu} - 2f)d\mu$ ou de Dirichlet $\int(\mathrm{grad}.u)^2\, dx$),pour les distributions, pour la théorie des capacités.

Banc d'essai, pour la théorie de Fredholm, l'intégrale de Lebesgue, les mesures de Radon (Frostman), la représentation intégrale dans les cônes faiblement complets.

Le champ de ses applications n'a pas cessé de s'étendre : opérateurs elliptiques, fonctions de plusieurs variables complexes. Elle sait utiliser les jeunes théories qu'elle vient d'engendrer : à peine nées les distributions donnent une belle caractérisation des fonctions surharmoniques par la condition $\Delta T \leq 0$, et trouvent dans la thèse de Deny leur première utilisation substantielle ; et l'interprétation probabiliste de la théorie générale fournit, avec ses trajectoires continues de type brownien, un nouvel outil puissant d'étude de l'effilement, des points frontière, de la capacité, en même temps qu'une nouvelle vision intuitive des êtres potentialistes.

Cet aspect probabiliste, que Brelot regrettait tant d'être arrivé trop tard pour maitriser, est sans doute le plus bel exemple d'interaction féconde entre deux théories : La théorie du potentiel, née dans le ciel (Kepler 1618, Newton 1665) et la théorie des probabilités née d'un coup de dés (Pascal 1654), donc presque simultanément, devaient après trois siècles et des petits pas l'une vers l'autre (Wiener 1923, puis P. Levy, Doob), prendre avec G. Hunt (1957) pleinement conscience que leurs parties les plus vivaces ne sont que deux faces complémentaires d'un même bel objet, et qu'on ne peut bien comprendre l'une sans connaître l'autre (le traité Dellacherie-P.A. Meyer veut en donner la preuve).

"Ainsi ne se ralentit pas la fécondité d'une théorie qui, après avoir compté tant de noms illustres, reste un centre dans l'Analyse contemporaine" (Brelot, fin de sa 1ère Notice historique).

Le Curriculum vitae et la liste des travaux scientifiques de Brelot sont joints à ce dossier ; ces deux documents sont dûs à Brelot lui-même.

Ont été déposés aux Archives de l'Académie des Sciences :
"Analyse sommaire des travaux", par Brelot lui-même.
Un rapport sur les travaux de Marcel Brelot, par H. Cartan.
Voir aussi la Notice nécrologique, Annuaire E.N.S. 1988 ou 89 et une Notice dans la Vie des Sciences de l'Académie 1989.

NOM : BRELOT Marcel, Emile.

Lieu et date de naissance - Curriculum vitae résumé.
Titres et responsabilités successives.

- CHATEAUNEUF S/LOIRE (Loiret 45) le 29 Décembre 1903.

- Mathématiques spéciales à Saint-Louis.
- Ecole Normale Supérieure 1924-27 - Agrégation 1927.
- Boursier Arconati Visconti 1927-29.
- Boursier Rockefeller à Rome puis Berlin 1929-31.
- Chargé de Recherches C.N.R.S. 1931-33.
- Thèse 1931.
- Chargé de cours à la Faculté des Sciences d'Alger (1933), puis Maître de conférences.
- Titulaire à Bordeaux (1936), à Grenoble (1942), à Paris (1953).
- Secrétaire du Comité Français de l'Union Mathématique Internationale.
- Président de la S.M.F. (1960), Correspondant de l'Académie (1974).
- Séjours à l'Etranger.

Situation de famille :

- Marié en 1933 à Alice Bautrant, 2 enfants : fille Claude CROZIER
fils Alain, Docteur en physique, maître assistant, décédé en 1974.

Décorations, appartenance à des académies étrangères, distinctions et prix, etc.

- Chevalier de la Légion d'Honneur.
- 4 prix de l'Académie des Sciences : Francoeur (1939), Saintour (1945)
Carrière (1952) et Servant (1968).
- Correspondant de l'Académie des Sciences de Bavière.
- Expert de l'UNESCO et professeur à Buenos Aires (été 1968).
- Membre honoraire de l'Union Mathématique argentine (1968).
- Membre du Comité des Sociétés Savantes (C.T.H.S.).

Discipline scientifique. Thèmes scientifiques abordés et résumé de l'oeuvre scientifique (énumération des apports principaux en matière de recherche et applications). Principaux ouvrages.

- Analyse mathématique, surtout théorie du potentiel, environ 150 articles ou ouvrages.

Principaux ouvrages :

1959, cours du C.D.U. 4 éditions, traduit en russe.

1960, 1er cours du Tata Institute ; 2ème cours en 1966 dans Lecture Notes 175, traduit en russe.

1965, Cours d'été de l'Université de Montréal : Axiomatique des fonctions harmoniques.

- Approfondissement de la théorie du balayage (notions de réduite et balayée d'une fonction).
- Résultat définitif sur le problème de Dirichlet (théorème de résolutivité par la méthode dite P.W.B. méthode (Perron-Wiener-Brelot)).
- Notion d'effilement, traduite par Cartan en termes de "topologie fine" ; notions de base donnant lieu à des recherches multiples.
- Théorème de convergence des fonctions surharmoniques, où intervient un ensemble exceptionnel de capacité "intérieure" nulle, qui a été montré par Cartan de capacité "extérieure" nulle ; forme définitive fondamentale.
- Notion d'ensemble polaire introduite pour remplacer les ensembles de capacité intérieure nulle, et que Cartan à montrée identique à la notion d'ensemble de capacité extérieure nulle. Résolutivité avec la frontière de Martin.
- Axiomatique des fonctions harmoniques, complétée, généralisée par de nombreux auteurs. A la base, inspirée par un travail probabiliste de Doob. Devenue une source de travaux multiples.

Je me suis occupé un peu de mécanique (petit ouvrage axiomatique de mécanique classique), des fonctions de Gilbert et spirale de Cornu à propos de problèmes de diffraction large, de questions de théorie des erreurs à propos de statistiques de pêche.

Autres informations jugées désirables (activités divers, etc.).

- Organisation du cours d'été italien de Strésa (1969) (CIME).
- Fondateur avec Choquet-Deny du séminaire parisien de théorie du potentiel.
- Fondateur avec Néel des Annales de l'Institut Fourier à Grenoble.
- Devenu titulaire à Paris de la chaire d'Analyse Supérieure.

- Nombreux séjours à l'Etranger : Conférences et Enseignements comme visiting professeur, un ou plusieurs mois :
- U.S.A. et Canada (10 Universités).
- Inde, Tata Institute 1959 et 1966.
- Japon 1962.
- Argentine 1968.

Date et signature.
23 Janvier 1985.

LISTE DES TRAVAUX SCIENTIQUES

I. - Quelques rédactions ou traductions vers 1930.

de E. PICARD — Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles (Cahiers scientifiques V).

V. VOLTERRA — Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie (Cahiers sc. VII).

et, en collaboration avec d'autres auditeurs

G. JULIA — Leçons sur les principes géométriques d'Analyse (1ère partie) (Cahiers sc. VI).

Leçons sur le problème de la représentation conforme (Cahiers sc. VIII).

Traduction de l'ouvrage en italien de T. Levi Civita : Caractéristiques des systèmes différentiels et propagation des ondes (Alcan 1932).

II. - Publications personnelles par année du périodique ou de l'ouvrage.

(parution parfois plus tard).
Les publications les plus importantes sont marquées d'un ou deux astériques sauf pour les articles aux CR peu après repris et développés. Certaines notes aux C.R. se suffisent à elles-mêmes et n'ont pas été développées. Les ouvrages sont marqués du signe O.

1929 1) Sur le problème de Dirichlet extérieur dans le plan relativement à l'équation $\Delta u = c.u$ (C.R. t. 189 p. 1230).

1930 2) Sur le problème de Dirichlet extérieur pour l'équation $\Delta u = c.u.$ $(c > o)$) (C.R. t. 190 p. 201).

3) Sur l'équation $\Delta u = c.u$ où $c > o$ admet des points singuliers et sur une équation de Fredholm correspondante à noyau singulier. (C.R. t. 190 p. 286).

4) Sur l'équation $\Delta u = c(x,y)\ u(x,y)$ $(c > o)$ (C.R. t. 190 p. 411).

5) Sopra la nozione di sorgente puntuale del calore in un piano irradiante in equilibrio termico (Rend. dei Lincei XI. fasc. 3 Février 1930).

6) Sopra l'equazione $\Delta u = c\,u$ $(c \geq 0)$.
(Rend. dei Lincei. XI fasc. 4, février 1930).

7) Sopra le sorgenti puntuali del calore in un piano irradiente in equilibrio termico
(Rend. dei Lincei XI. fasc. 5, mars 1930).

8) Sopra gli integrali della $\Delta u = c(M)\,u(M)$ $(c \geq o)$ nelle vicinanze di un punto singolare O della $c(M)$.
(Rend. dei Lincei XI. fasc. 9, Mai 1930).

9) Sopra il problema di Dirichlet generalizzato relativo al dominio limitato piu generale e all' equazione $\Delta u = c(M)\,u + f(M)$ $(c \geq o)$.
(Rend. dei R. Ist Lombardo 63, fasc. XI-XV).

10) Sur un problème de Dirichlet généralisé.
(C.R. t. 191 p. 697).

1931 11) Sur l'équation $\Delta u = c\,(x,y)\,u(x,y)$ $(c > o)$ quand $c(x,y)$ admet des points singuliers et une équation de Fredholm correspondante à noyau singulier.
(Rend. del circ. mat. di Palermo p. 55).

12) Sur le problème biologique héréditaire.
(Annali di Matematica IX. p. 57-74).

13) Sur la structure des ensembles de capacité nulle.
(C.R. t. 192 p. 206).

14) Etude de l'équation de la chaleur $\Delta u = c(M)\,u(M)$ où $c(M) \geq o$, au voisinage d'un point singulier du coefficient.
(<u>Thèse</u> et Annales de l'E.N.S. t. 48, p. 153 ; 95 p.).

15) Etude des intégrales bornées de l'équation $\Delta u = c\,u$ $(c \geq o)$ au voisinage de singularités de c formant un ensemble de capacité nulle.
(Bull. Sc. Math. 55 sept 31 p. 281).

1932 16) Quelques propriétés générales des intégrales bornées de $\Delta u = c(M)\,u$, $c \geq o$, sur un domaine borné ouvert où c est continu $\geq o$.
(Bull. Sc. Math. 56, avril 32, p. 105).

17) Etude à la frontière de la solution du problème de Dirichlet généralisé relatif à l'équation $\Delta u = cu + f$, $c(M) \geq o$, et

$f(M)$ borné.
(Rend. dei R. Istituto Lombardo 65 fasc. 1-V).

18) Sur l'allure à la frontière des intégrales bornées de $\Delta u = c(M)\, u$, $(c \geq o)$.
(Rend. del R. Ist. Lombardo 65 fasc. VI-X).

19) Uberblick über die biologisch - mathematischen Untersuchungen von Volterra.
(Jahresbericht der deut. mat Ver. 42, Heft 1/4).

20) Einige neuere Untersuchungen über das Dirichletsche Problem.
(Jahresb. der. deut. mat. Ver. 42, Heft 5/8).

21) Sur les singularités ponctuelles des fonctions sous-harmoniques.
(C.R. t. 195, p. 693 Oct. 32).

22) Sur l'allure des singularités ponctuelles des fonctions sous-harmoniques.
(C.R. t. 195, p. 852, Nov. 32).

23) Sur l'allure des fonctions sous-harmoniques au voisinage d'un point singulier ou non.
(C.R. t. 195, p. 932, Nov. 32).

24) Sur un théorème de non-existence relatif à l'équation $\Delta u = c(M)\, u(M)$ $(c \geq o)$.
(Bull. Soc. Math. t. 56 Déc. 32,p. 389).

25) Über die singularitäten der Potentialfunktionen und der Integrale der differentialgleichungen vom elliptischer typus.
(Sitzungsber der Berl. Math. Gesell t. 31).

1933 26) Sur le problème de Dirichlet.
(C.R. t. 196, p. 737).

27) Le problème de Dirichlet sous sa forme moderne.
(Mathematica VII p. 147-166).

1934 28) Etude des fonctions sous-harmoniques au voisinage d'un point.
(Actualités scientifiques et ind. N° 134) 55 p.

29) Sur l'influence des erreurs de mesure en statistique.
(Soc. fr. de Physique, Section d'Alger 9 Mai 35).

30) Sur l'intégration de $\Delta u = \varphi$.
(C.R. t. 201, p. 1316 dec. 1935).

31) Sur l'influence des erreurs de mesure en statistique et biométrie.
(Bull. de la Station d'Aquiculture de Castiglione.
1er sem. 35 paru en 36).

32) Sur l'influence des erreurs de mesure en statistique et biométrie.
(Bull. de la Station d'Aquiculture de Castiglione
2ème sem. 35 paru en 36).

1936 33) Sur l'influence des erreurs de mesure en statistique.
(J. de Math. t. 15, p. 113).

34) Sur l'allure des intégrales bornées de $\Delta u = c(M)u$, $c(M) \geq o$ au voisinage d'un point singulier de $c(M)$.
(Bull. Sc. Math. t. 60 avril 36, p. 112).

35) Sur l'influence des erreurs de mesure en statistique.
(C.R. du Congrès d'Oslo 1936).

36) Quelques difficultés dans l'application pratique de la théorie des erreurs.
(Bull. Soc. Fr. de Physique, Déc. 36).

1937 37) Quelques propriétés des fonctions de Gilbert et de la spirale de Cornu.
(Bull. Sc. Math. t. 61, Mai 37, p. 133-160).

38) Sur la meilleure majorante harmonique.
(C.R. t. 205, p. 12).

39) Sur les meilleures et plus petites majorantes harmoniques.
(C.R. t. 206, p. 456).

40) Sur l'influence des erreurs de mesure en statistique (suite)
(J. de Math. t. 16, p. 285).

41) Quelques difficultés dans l'application pratique de la théorie des erreurs.
(Mathematica XIII, p. 243-257).

1938 42) Quelques propriétés des fonctions sous-harmoniques et du balayage.

43) Sur des extensions du balayage.
(C.R. t. 206, p. 636).

44) Sur le problème de Dirichlet et les fonctions sous-harmoniques.
(C.R. t. 206, p. 1161).

45) Fonctions sous-harmoniques et balayage (en 2 parties).
(Bull. Ac. Royale de Belgique, t. 24, p. 301-312 et 421-436 N° Mai-Juin 38).

46) Sur le potentiel et les suites de fonctions sous-harmoniques.
(C.R. t. 207, p. 836).

47) Sur un balayage d'ensembles fermés.
(C.R. t. 207 p. 1157).

1939 48) Problème de Dirichlet et majorantes harmoniques.
(Bull. Sc. Math. t. 63 Mars-Avril 39, p. 79-96 et 115-128).

49) Critères de régularité et de stabilité.
(Bull. Ac. Royale des Sc. de Belgique t. 25, p. 125-137).

50) Familles de Perron et problème de Dirichlet.
(C.R. t. 208, p. 1623) (Développé dans 53).

51) Quelques applications aux fonctions holomorphes de la théorie moderne du potentiel et du problème de Dirichlet.
(Bull. Soc. Royale de Liège n° 6-7, 1939 p. 385-391).

52) Sur l'allure à la frontière des fonctions harmoniques, sous-harmoniques ou holomorphes.
(Bull. Soc. royale des Sc. de Liège n° 8-9-10, 1939, p. 468-477).

53) Familles de Perron et problème de Dirichlet.
(Acta de Szeged IX, p. 133-153).

54) Sur la théorie moderne du potentiel.
(C.R. t. 209, p. 828).

1940 55) Quelques propriétés locales à la frontière des fonctions harmoniques ou sous-harmoniques.
(Bull. Sc. Math. t. 64 Juin-Juillet 40, p. 153).

56) Points irréguliers et transformations continues en théorie du potentiel.
(J. de Math. t. 19, p. 319-331).

1941 57) Sur la théorie autonome des fonctions sous-harmoniques
(Bull. Sc. Math. t. 65 Mars-Avril 41, p. 72-98).

1943 58) Sur les principes mathématiques de la mécanique classique.
(Ann. Univ. Grenoble t. 19, p. 43).

1944 59) Sur les ensembles effilés.
(Bull. Sc. Math. t. 68 Janvier-Février 44, p. 12-36).

60) Sur quelques points de mécanique rationnelle.
(Ann. Univ. Grenoble, t. 20 p. 1).

61) Sur le rôle du point à l'infini dans la théorie des fonctions harmoniques.
(Annales E.N.S. t. 61, p. 301-332).

1945 62) Minorantes sous-harmoniques, extrémales et capacités.
(J. de Math. t. 24, p. 1-32).

63) Sur l'allure des fonctions harmoniques à la frontière.
(C.R. t. 220, p. 676).

64) Les principes mathématiques de la mécanique classique.
(Arthaud, Grenoble et Paris 1945, 62 p.).

65) Sur l'approximation et la convergence dans la théorie des fonctions harmoniques ou holomorphes.
(Bull. Soc. Math. de France, t. 73, p. 55).

66) Sur la mesure harmonique et le problème de Dirichlet.
(Bull. Sc. Math. t. 69 Sept-Oct. 45, p. 153).

67) Sur le problème de Dirichlet.
(C.R. t. 221, p. 654).

68) Les fonctions sous-harmoniques, presque sous-harmoniques ou sous-médianes.
(Annales Univ. Grenoble t. 21, p. 75).

69) Sur la formule de Taylor.
(Ann. Univ. Grenoble, t. 21, p. 91).

70) Sur le problème de Dirichlet ramifié et la représentation conforme.
(C.R. t. 222, p. 851).

71) Le problème de Dirichlet ramifié.
(Ann. Univ. Grenoble t. 22, p. 167-200).

72) Etude générale des fonctions harmoniques ou sous-harmoniques positives au voisinage d'un point-frontière irrégulier.
(Ann. Univ. Grenoble t. 22, p. 205-219).

1948 73) Quelques applications de la topologie de R.S. Martin dans la théorie des fonctions harmoniques.
(C.R. t. 226, p. 49).

74) Sur le principe des singularités positives et la topologie de R.S. Martin.
(Ann. Univ. Grenoble, t. 23, p. 113-138).

75) Deux théorèmes généraux sur le potentiel et quelques applications.
(C.R. t. 226, p. 1499).

76) Quelques propriétés et applications du balayage.
(C.R. t. 221, p. 19).

77) Sur le principe des singularités positives et la notion de source pour l'équation $\Delta u = c(M)\ u(M)$ $(c \geq o)$.
(Ann. Univ. Lyon section A, XI, p. 9).

1949 78) Lignes de Green et mesure harmonique.
(En collaboration avec G. Choquet).
(C.R. t. 228, p. 15-56).

79) Le problème de Dirichlet géodésique.
(C.R. t. 228, p. 1790).

80) Etude des fonctions sous-harmoniques au voisinage d'un point singulier.
(Annales Institut Fourier, t. 1, p. 121-156).

81) Compléments à la théorie de J. Deny.
(Annales Institut Fourier t. 1, p. 113).

1950 82) Remarque sur le prolongement fonctionnel linéaire et le problème de Dirichlet.
(Acta de Szeged t. XII, p. 150).

83) Sur l'allure des fonctions harmoniques et sous-harmoniques à la frontière.
(Math. Nachrichten t. 4, p. 298).

84) Remarques sur la variation des fonctions sous-harmoniques et les masses associées. Applications.
(Ann. Inst. F. t. 2, p. 101).

85) Sur l'évolution du problème de Dirichlet.
(Proc. of the Int. Congress of Math. 1950).

1951 ** 86) Espaces de lignes de Green (en coll. avec Choquet).
(Annales I. F. 3 , 199-263).

87) Fonctions sous-harmoniques associées à une mesure.
(Ac. roumaine, section de Jasi, Vol. 3-4 Année II, 1951).

1952 88) Les fonctions holomorphes sur les surfaces de Riemann.
(C.R. du Congrès des Soc. savantes 1952).

89) Principe et problème de Dirichlet dans les espaces de Green.
(C.R. 235, p. 598).

90) Lignes de Green et problème de Dirichlet.
(C.R. 235, p. 1595).

* 91) La théorie moderne du potentiel.
(Annales I.F. 4, 1952, p. 113-140).

1954 92) Majorantes harmoniques et principe du maximum.
(Archiv. der Math. V, 1954, fasc. 4-6, p. 429).

** 93) Etude et extension du principe de Dirichlet.
(Annales I.F. 5, 1953-54, p. 371-419 paru en 1955).

94) Existence theorem for n capacities.
Annales I.F. 5, 1953-54 p. 297-304 paru en 55).

* 95) Polynomes harmoniques et polyharmoniques.
En coll. avec G. Choquet.
Second Colloque sur les équations aux dérivées partielles.
(Bruxelles 24-26 Mai 1954, p. 45-66).

1955 96) Le problème de Dirichlet avec la frontière de Martin.
(C.R. 240, p. 142).

97) Contributions to potential theory.
(Report-Univ. of Kansas 1955 (travaux faits en 1954).

98) Topologies on the boundaries and harmonic measure.
(Colloq. 1953 Un. of Michigan, p. 85-103).

99) Topology of R.S. Martin and Green lines.
(Coll. 1953, Un. of Michigan, p. 105-121).

100) A new proof of the fundamental theorem of Kellogg-Evans on the set of irregular points in the Dirichlet problem.
(Rend. de Palermo IV, 1955, p. 112-122).

1956 101) Etude axiomatique du problème de Dirichlet.
(C.R. Ac. Sc. 242, p. 327).

102) Comm. Congrès intern. Amsterdam 1950.

103) On the behaviour of harmonic functions in the neigborhood of an irregular boundary point.
(J. d'Analyse math. 4, 1954-56, p. 209-221).

** 104) Le problème de Dirichlet. Axiomatique et frontière de Martin.
(J. de Math. 35, fasc. 4, p. 297-335).

105) Nouvelle démonstration du théorème fondamental sur la convergence des potentiels.
(Ann. I.F. 6, 1955-56, p. 361-368).

106) Fonction potentielle, potentiel newtonien.
Avec la coll. de R. Duchon.
(Formulaire de Math. à l'usage des Physiciens et ingénieurs, fasc. VII).
(Eq. aux dérivées partielles C.N.R.S. 1956).

* 107) Le théorème de convergence en théorie du potentiel.
Avec la coll. de G. Choquet.
(J. de Madras University).

1957 108) Extension axiomatique des fonctions sous-harmoniques.
(C.R. 245, p. 1688, 1957).

1958 109) Extension axiomatique des fonctions sous-harmoniques.
(C.R. 246, p. 2334, Avril 1958).

110) La convergence des fonctions surharmoniques et des potentiels généralisés.
(C.R. Ac. Sc. t. 246, p. 2709 Mai 58).

111) Sur l'allure à la frontière des fonctions sous-harmoniques ou holomorphes.
(Annales Ac. Sc. Fenn. A. Math. 250/4 (présentée en Oct. 57)).

** 112) Une axiomatique générale du problème de Dirichlet dans les espaces localement compacts.
(Sem. th. potentiel 1, 1957, p. 6-01, 6-16).

113) Introduction de l'effilement dans une théorie axiomatique du potentiel.
(En coll. avec Mme Hervé).
(C.R. t. 247, Déc. 58).

1959 114) Quelques développements récents sur le problème de Dirichlet.
(Abhandl. math. Sem. Hamburg 23, 1959).

** 115) Eléments de la théorie classique du potentiel.
(C.D.U. Paris 1959).

** 116) Axiomatique des fonctions harmoniques et surharmoniques dans un espace localement compact.
(Sem. du pot. 2, 1958).

1960 O ** 117) Lectures on potential theory.
(Tata Institute, n° 19, 1960).

1961 118) Remarques sur le balayage.
(Bull. Soc. Royale des Sc. de Liège 30ème année fasc. 45-6, p. 210).

119) Sur un problème de prolongement fonctionnel de Keldych concernant le problème de Dirichlet.
(J. d'An. Math. 8, p. 273-288, 1960-61).

1962 * 120) Introduction axiomatique de l'effilement.
(Annali di Mat. 1962).

* 121) Intégrabilité uniforme. Quelques applications à la théorie du potentiel.
(Sém. th. du potentiel, 6, 1961-62).

* 122) Etude comparée de quelques axiomatiques des fonctions harmoniques et surharmoniques.
(Sém. pot. 6, 161-62).

* 123) Quelques propriétés et applications nouvelles de l'effilement.
(Sém. pot. 6, 1961-62).

1963 * 124) Uber einige Begriffe der modernen axiomatischen Potential-theorie.
(Dirichlet Tagung Berlin juin 1959, paru en 1963).

* 125) Limites angulaires et limites fines.
(<u>en collaboration avec Doob</u>).
(Annales I.F. 13, fasc. 2, 1963).

1964 126) Comm. au congrès de Gênes (Octobre 1964).

O 127) Traduction en russe des "Eléments ..." C.D.U. [115] mais 2ème édition (Collection Mathematika 1964).

1965 * 128) Etude comparée des deux types d'effilement.
(Colloque de th. du Potentiel, à Paris-Orsay, juin 1964, Annales I.F. 15, 1965).

129) Aspect statistique et comparé des deux types d'effilement.
(Anaîs de l'Ac. du Brésil 1965).

130) Sur la frontière de Martin.
(Traduction russe publiée dans Matematika d'un cours inédit donné à Hiroshima en 1962).

131) Capacité et balayage pour ensembles décroissants.
(C.R. 260, p. 2683, mars 1965).

* 132) Capacity and balayage for decreasing sets.
(5^{th} Berkeley symposium on prob., paru en 1967).

1966 133) Théorie du potentiel et fonctions analytiques.
(Conf. du Colloque de Erevan 1965).

O ** 134) Axiomatique des fonctions harmoniques.
(Cours d'été 1965, Montréal, 2ème édition presque identique en 1969).

135) La topologie fine en théorie du potentiel.
(Conf. du colloque de Loutraki paru dans les Lecture Notes 31, 1967).

136) Einige neue Fortschritte in der axomatischen Theorie der harmonischen Funktionen.
(Colloque de Karl Marx-Stadt 1966).

137) Norbert Wiener and potential theory.
(Bull. Am. Math. Soc. 72, 1966, p. 39).

1967 138) Recherches axiomatiques sur un théorème de Choquet concernant l'effilement.
(Nagoya Math. Journal 30).

* 139) Recherches sur la topologie fine et ses applications.
(Ann. I.F. 17/2).

1969 140) Eléments de la théorie classique du potentiel.
(4ème édition très améliorée, CDU, Paris).

141) Historical introduction.
(Cours CIME, Stresa, Juillet 1969).

1970 142) Quelques recherches sur l'allure à la frontière des fonctions harmoniques.
(Colloque on Math. Analysis, Jyvàskylà, à paraître dans les Lecture Notes en 1973).

1971 O ** 143) On topologies and boundaries in potential theory.
(Lecture Notes n° 175).

144) Allure des potentiels à la frontière et fonctions fortement sous-harmoniques.
(Sém. Pot. ; Conf. en Juin 71, à paraître en 1973).

1972 * 145) Les étapes et les aspects multiples de la théorie du potentiel.
(Enseignement math. 18/1, 1972).

146) Représentation intégrale des solutions > o de l'équation $\Sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{k}{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$ (K constante réelle) dans le demi-espace E $(x_n > o)$ de R^n.
(<u>En collaboration avec Bernadette Brelot-Collin</u>).
(Bull. Ac. Sc. Bruxelles, t. 58, 1972, p. 317).

1973 * 147) Allure à la frontière des solutions positives de l'équation de Weinstein $L_k(u) = \Delta u + \frac{k}{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$

dans le demi-espace $E(x_n > 0)$ de R^n $(n \geq 2)$
en collaboration avec Bernadette Brelot-Collin.
(Bulletin Acad. Sc. Bruxelles t. 59, 1973, p. 1100).

1974 148) Edition russe revue, corrigée et augmentée de l'ouvrage (Réf. 143) "On topologies and boundaries in potential theory".
(Lecture Notes 175) (Traduit par Landkoff). Editions Mir. Collection Matematika.

1975 149) Sur l'allure à la frontière des familles de fonctions harmoniques ou surharmoniques.
(Rendiconti di Matematica, Roma 1975, vol. 8 dédié au Prof. M. Picone pour son 90ème anniversaire).

150) Remarque sur les zéros à la frontière des fonctions harmoniques positives.
(Bollettino dell' Unione matematica italiana, 1975, fasc. 4 dédié au Prof. Bompiani pour son 85ème anniversaire).

151) Axiomatische Theorie der harmonischen Funktionen und der Potentiale ; Anwandungen dieser Theorie.
(Mitteilungen der Math. Case II der deutschen demokratischen Republik, intern. Kongress Halle, 19 veröff 1975, Heft 3/4).

1976 152) Etude à la frontière des solutions locales positives de l'équation $L_k(u) = \Delta u + \frac{k}{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$
dans le demi-espace $E(x_n > 0)$ de R^n $(n \geq 2)$.
(en collaboration avec Bernadette Brelot-Collin).
(Bulletin Académie des Sciences de Bruxelles, t. 62, 1976, 5-6).

1977 153) Equation de WEINSTEIN et potentiels de Marcel RIESZ.
(Séminaire de théorie du potentiel, Paris, année 76-77) Nouvelle série n° 3, Lecture Notes n° 681, 1978).

1978 154) Sur le théorème de partition de Mme R.M. HERVE.
(Rocky Mountain Journal of Mathematics, vol. 10, n° 1, 1980). (Volume dédié à ARONSZAIN).

1979 155) Uber die Beitrage CHRISTOFFELS zur Potentialtheorie
(International Christoffel Symposium, Aachen Nov. 1979, Birhauser Verlag, 1981).

1980 156) On a generalized logarithmic kernel and its potentials with the collaboration of V. Anandam (Madras).
(Annales Polonici Mathematici, Krakow, t. 31, 1982, volume dédié à la mémoire de S. Bergman).

157) Refinements on the superharmonic continuation.
(Dédié au Prof. Kuramochi pour son 60° anniversaire, Hokkaido mathematical Journal, 1982).

1981 158) Exemples de renouvellement par la topologie, de quelques questions d'Analyse.
(106° Congrès national des Sociétés Savantes, Perpignan 1981, Sciences fasc. V, p. 9623).

1983 159) La fonction de Green.
(108° Congrès des Sociétés Savantes, Grenoble, Sciences fasc. III).

1985 160) Le balayage de Poincaré et l'épine de Lebesgue.
(110° Congrès des Sociétés Savantes (Montpellier)).

1987 161) Quelques aspects mathématiques de la lutte pour la vie.
(112° Congrès national des Sociétés Savantes, Lyon 1987, Sciences, fasc. IV, p. 103-108).
Cette dernière conférence n'a pas été prononcée.