CAHIERS DU SÉMINAIRE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

GERHARD HEINZMANN

# Poincaré et la philosophie des mathématiques

*Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1re série*, tome 9 (1988), p. 99-121
<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1988__9__99_0>

# *Poincaré et la philosophie des mathématiques*

*Gerhard Heinzmann*★

*0. Kant a observé que la méthode du mathématicien ne sert en philosophie qu'à construire des châteaux de cartes et celle du philosophe en mathématiques ne sert à soulever que des bavardages. Mais il indique aussitôt une fonction critique et réfléxive de la philosophie, concernant également le mathématicien: 'la connaissance de ses limites'.*[1]

*Il est vrai, les faits appartenant pour le mathématicien "aux vieilles lunes" - comme dirait Dieudonné - sont pour le philosophe souvent encore sujets de disputes concernant leur intégration dans un contexte philosophique d'explication et de justification. Ceci est vrai paur le concept de prédicativité, et - dans une moindre mesure - pour le principe de l'induction complète. Le concept de prédicativité initialement conçu pour éviter des antinomies - nous le verrons tout-à-l'heure - est pour le mathématicien (si on exclut les logiciens travaillant dans la théorie générale de la démonstration) une affaire classée. Des axiomatisations de la théorie des ensembles évitent facilement les antinomies tout en conservant l'édifice mathématique intact. Elles permettent également de démontrer le principe d'induction complète sans utiliser l'axiome de l'infini. Et pourtant, pour le philosophe, les résultats atteints ne sont pas le premier critère: il s'intéresse d'abord aux structures d'argumentations qui les justifient.*

*En ce sens je me propose de reconstruire la penseé philosophique de Poincaré en arithmétique et dans la recherche des fondements de telle sorte, que sa position à propos des deux problèmes de la prédicativité et de l'induction complète devient philosophiquement*

---

*1 Cf. Kant, Critique de la raison pure, B 755.*

★ Conférence donnée le 12 novembre 1986 au Séminaire d'Histoire des mathématiques.

*aussi cohérente que possible. Le 're' de la reconstruction trahit déjà que je poursuis des intérêts autant systématiques que historiques: je respecte le développement historique, mais j'utilise les idées philosophiques de Poincaré d'une manière synchronique et non diachronique et je procéderai même à des extrapolations. A ce propos, mon exposée est systématique: je ne parle pas <u>avec</u>, mais <u>sur</u> Poincaré.*

*Poincaré utilise à l'origine deux termes* pour décrire deux tendances psychologiques de la logique de l'invention: à savoir 'intuition' et *'analyse'. Riemann et Klein représentent l'esprit intuitif, Hermite et Weierstrass l'esprit analytique. Mais plus tard - sans que cela soit toujours explicite- les deux termes reflètent également deux théories sur la nature de l'activité mathématique: d'une part, on se limite à examiner les conditions de la construction (intuition) auxquelles les objets mathématiques sont assujettis et d'autre part on s'efforce de décrire (analyser) des domaines supposés préexistants.*

*En arithmétique et dans la recherche des fondements Poincaré est plutôt intuitionniste. (Ceci contraste avec sa position conventionaliste en géometrie qui est bien connue et largement discutée. J'exclue ici la géométrie.)*

*Mais tout en restant intuitionniste la philosophie de Poincaré intègre des éléments de l'analyste. Ainsi, le projet moderne, d'unifier les deux niveau de construction et de description en tant qu'aspects indispensables dans la base commune des actions, peut trouver une de ces racines dans le <u>pragmatisme</u> philosophique de Poincaré. Ce serait cependant une supposition outrée de vouloir réduire le pragmatisme poincaréien à son rôle de précurseur d'une philosophie pragmatique. Poincaré est d'abord anti-logiciste (-formaliste), ensuite il devient par réaction intuitionniste et ce n'est que rétrospectivement qu'il est entre les 'fronts méthodologiques'.*

C'est dans une suite de deux articles intitulés "Les mathématiques et la logique", publiés en 1905 et en 1906[1] que Poincaré se dresse contre la thèse logiciste de pouvoir "démontrer toutes les vérités mathématiques ... une fois admis les principes de la logique"[2]. Car il fallait abondonner soit le caractère analytique de la logique[3], soit le caractère synthétique des mathématiques, solution soutenue par une tradition s'appuyant sur Leibniz. Or, Poincaré suspecte que la célébration du centenaire de la mort de Kant présuppose en vérité une utilisation équivoque du terme 'logique', qu'il ne s'agit plus de l'ancienne, mais d'une 'nouvelle logique' contenant des principes de démonstration synthétiques ou des formations de concepts non-logiques.

Poincaré y voit fort clair. Non seulement la logique des prédicats est plus riche que la logique traditionnelle dont parlait Kant, mais pour faire face au réductionnisme, on est même amené a l'élargir encore à certains postulats ensemblistes d'existence, ce qui confirme l'impossibilité d'un caractère analytique de la nouvelle logique; car comment considérer comme analytique le passage au deuxième ordre qui transforme des prédicats en noms et affirme ensuite leur existence? Il est clair: la solution 'conditionnelle' de Russell[4] ne saura satisfaire le constructiviste et n'aurait pas satisfait Poincaré.

---

1 Cf. Poincaré 1905/1906 et Poincaré 1906a.
2 Poincaré 1905/1906, p. 817.
3 Poincaré désigne avec Kant comme analytiques, les propositions dont le concept du sujet est contenu dans le concept du prédicat.
4 Cf. e.g. Carnap 1931, p. 95 f.

*Mais la critique poincaréienne du logicisme va encore plus loin. D'abord, est-ce qu'il est possible de déduire toutes les mathématiques à partir des indéfinissables 'logiques' à l'aide des règles de déduction et des définitions directes indépendamment de l'idée du nombre,*[1] *et ne faudrait-il pas que l'on eût le moyen de démontrer que les définitions utilisées n'impliquent pas contradiction*[2]*? Or une telle démonstration ferait appel au principe d'induction dont on a pas encore la disposition. Et si on l'avait, il y aurait cercle vicieux.*

*Vous avez sûrement remarqué que je viens d'utiliser le nom 'logicisme' d'une manière équivoque. En effet, les démonstation de non-contradiction concernent seulement le fondement du formalisme (pour le logicisme au sens strict elles ne sont que confirmation*[3]*) qui refuse d'attribuer au signe mathématique un caractère de signe en le réduisant à une marque ou à un repère*[4]*. Parce que les signes mathématiques sont ainsi dépourvues de signification, le formalisme est obligé à introduire pour les questions du fondement la difference entre mathématique et metamathématique. Cependant, tout cela n'est évident que d'un point de vue retrospectif et beaucoup moins explicite dans les textes hilbertiens datant de la première décade du siècle. Si on trouve à cette époque déjà la proposition d'édifier l'arithmétique et la logique ensemble*[5]*, Hilbert envisage les signes encore en tant que noms pour des "objets de pensée"*[6]*. Ne sont pas mentionnées ni la séparation nette entre mathématiques formelles et métamathématique intuitive, ni, a fortiori, la limitation aux raisonnements 'finitistes' dans la métamathématique.*

---

*1 Cf. <u>Poincaré 1905/06</u>, p. 830.*
*2 Cf. <u>Ibid.</u>, p. 829.*
*3 Cf. <u>Cavaillès 1981</u>, p. 165.*
*4 Cf. <u>Hilbert 1922</u>, p. 18.*
*5 Cf. <u>Hilbert 1905</u>, p. 245.*
*6 <u>Ibid.</u>, p. 246.*

Quoi qu'il en soit, Poincaré dénomme à l'occasion le formalisme également logicisme. Et s'il a raison de souligner que le difficulté d'appliquer d'une manière justifiée l'induction complète relie le logicisme de Russell au formalisme de Hilbert, le problème se pose pourtant d'une manière différente dans les deux théories.

Toutes les deux, il est vrai, considèrent le principe d'induction comme définition déguisée. Mais le formalisme exprime ainsi que le principe fait partie (ou est impliqué) d'un système de schèmes d'axiomes mathématiques, le logicisme qu'il est démontrable à partir d'une définition du nombre ou de l'ensemble fini.[1] Une fois, Poincaré constate une circularité parce qu'on ferait usage au métaniveau de ce dont on veut démontrer la consistance au niveau-objet, l'autre fois, la circularité consiste dans le caractère non-prédicatif de la définition.

Enfin, il n'est pas nécessaire de pousser la critique si loin au niveau méthodique. Car les tendances formalistes et le programme réductionniste du logicisme semblent déjà être compromis par les antinomies qui ne tardent de surgir dans la nouvelle logique. Si, dit Poincaré, "la logistique n'est plus stérile, elle engendre l'antinomie"[2]. Celle-ci est devenue possible parce qu'on a fait un appel dissimulé à une intuition fautive. L'intuition 'véritable' se distingue d'une simple évidence en cela qu'elle ne s'applique pas à ce qu'il est, mais au moyen de le faire. Poincaré est à partir d'environ 1909 antiplatoniste. Pour lui, les antinomies sont en dernière instance une conséquence nécessaire de la méthode erronnée du réalisme conceptuel qui fait une usurpation de l'intuition à l'égard des entités abstraites. Pour expliciter cette thèse, je me propose d'examiner l'interprétation de Poincaré du concept de la définition 'directe' d'un ensemble. Les contours d'une philosophie pragmatique

---

1 Ce problème est également traité par Zermelo dans Zermelo 1909.
2 Poincaré 1906a, p. 316.

qui en découlent permettront de mieux saisir le double refus poincaréien de la justification logiciste et formaliste de l'induction complète ainsi que son caractère synthétique *a priori* que lui attribue Poincaré.

Les définitions 'directes' d'un ensemble se font d'après Poincaré selon deux processus: "soit par genus proximum et differentiam specificam soit par construction"[1]. Ces deux méthodes correspondent à la dispute entre réalistes et nominalistes, reprise par Poincaré en termes de 'cantoriens' et 'pragmatistes' qui défendent les uns un point de vue de la compréhension, les autres un point de vue de l'extension:

> "Si on se place au point de vue de l'extension une collection se constitue par l'adjonction successive de nouveaux membres; nous pouvons en combinant les objets anciens construire des objets nouveaux, puis avec ceux-ci des objets encore plus nouveaux ... Au point de vue de la compréhension au contraire, nous partons de la collection où se trouvent des objets préexistants, qui nous apparaissent d'abord comme indistincts, mais nous finissions par reconnaître quelques-uns d'entre eux parce que nous y collons des étiquettes et que nous les rangeons dans les tiroirs; mais les objets sont antérieurs aux étiquettes, et la collection existerait quand même il n'y aurait pas de conservateur pour les classer."[2]

Poincaré range les logicistes - ils appartiennent en ce contexte à l'école de Peano-Russell, - du côté des cantoriens, tandis qu'il prend lui-même position pour les pragmatistes.

---

1 Poincaré 1912, p. 5.
2 *Ibid.*, p. 4.

*Si accessoirement le nom 'pragmatiste' semble aussi choisi par Poincaré - il l'introduit en disant: "il faut bien ... donner un nom"[1] - il indique néanmoins fort heureusement l'interprétation poincaréienne du nominalisme: en refusant de commencer par une analyse des domaines supposés comme préexistants, il ne se limite pas non plus à une synthèse des éléments à construire. Par contre, pour être utile, les constructions doivent être suivies d'une analyse descriptive dont l'objet sont les constructions elles-mêmes. Dans ce sens, on peut parler d'une conciliation des deux méthodes: c'est leur alignement comme aspects d'une suite ordonnée qui distingue l'esprit pragmatique ébauché par Poincaré:*

> *"On a attaché, et à juste titre, une grande importance à ce procédé de la 'construction' et on a voulu y voir la condition nécessaire et suffisante des progrès des sciences exactes. Nécessaire, sans doute, mais suffisante, non. Pour qu'une construction puisse être utile, ... il faut d'abord qu'elle possède une sorte d'unité, qui permette d'y voir autre chose que la juxtaposition de ses éléments. Ou plus exactement, il faut qu'on trouve quelque avantage à considérer la construction plutôt que ses éléments eux-mêmes."[2]*

*Ce n'est qu'un énoncé exprimant une 'analogie' entre constructions, qui conduit au niveau d'abstraction suivante en permettant d'indentifier les objets analogues:*

> *"Une construction ne devient donc intéressante que quand on peut la ranger à côté d'autres constructions analogues formant les espèces d'un même genre."[3]*

---

1 Poincaré 1912, p. 2.
2 Poincaré 1902, p. 44.
3 Loc. cit., ibid.

*L'élément 'analytique' se rapporte ici aux moyens de construction. L'analyse n'est donc plus l'inversion traditionnelle de la synthèse ou "une marche du général au particulier", car les constructions ne sauraient évidemment être regardées comme plus particulières que leurs éléments. Dans ce sens "la mathématique est l'art de donner le même* ***nom*** *à des choses différentes"[1], non par leur forme, mais par leur matière. L'énoncé analytique est justement l'induction complète qui sert à "démontrer les propriétés du genre sans être forcé de les établir successivement pour chacune des espèces"[2].*

*Les pragmatistes, répétons-le, ne sont pas des réalistes. Ils prohibent, pour ainsi dire, de lire l'arbre porphyrien de haut en bas, c'est-à-dire de considérer le "genre ... antérieur à l'espèce"[3] et de s'arrêter à un niveau abstrait. Ainsi une définition qui ne définit "non pas un individu, mais un genre tout entier"[4] est incomplète; même si ce genre est une espèce d'un genre supérieur; car l'individuation ne découle pas logiquement de l'unité abstraite:*

> *"La connaissance du genre ne ... fait pas connaître tous ses individus, elle ... donne seulement la possibilité de les construire tous, ou plutôt d'en construire autant que vous voudrez. Ils n'existeront qu'après qu'ils auront été construits, c'est-à-dire après qu'ils auront été définis"[5].*

*Si le vocabulaire de Poincaré est traditionnel, le sens qu'il lui donne l'est moins: l'extension et l'intension n'apparaissent plus comme métaprédicats de prédicats. Car de définir un genre à l'aide d'un prédicat - comme procèdent les adhérents du point de vue de la compréhension - semble être* ***eo ipso*** *un mode intensionnel. Par contre, l'extension ne concerne pas un prédicat, mais un mode de construction.*

---

1 Poincaré 1908, p. 29
2 Poincaré 1902, p. 44/45
3 Poincaré 1906a, p. 317
4 Poincaré 1912, p. 5
5 Ibid., p. 7

*En se limitant à définir un ensemble en tant qu'entitité abstraite, on se prive de l'aspect constructif de la définition, lequel - pour les cantoriens - est une 'restriction artificielle'. Mais pour le pragmatiste, une définition directe formée selon la méthode inversée des cantoriens peut être 'corrigée' en la complétant par une autre partie qui remplace l'hypostase d'une entité abstraite servant en tant que référence du genre: il faut "sous-entendre l'ensemble des individues qui satisfont à la défintion"[1], tel que le genre en question ne préexiste plus à ses éléments[2]. En d'autres mots, il faut passer du particulier (vom Besonderen) au singulier (zum Einzelnen). Puisque la généralité est du point de vue de l'extension une universalité individuelle ou numérique, il est nécessaire qu'on énonce cette autre partie de la définition, sans quoi une proposition au sujet de tous les objets d'un ensemble "n'aurait aucun sens" et "l'objet serait impensable"[3]. L'expression 'aucun sens' prend dans l'article de 1912 même une valeur philosophique. Pour les pragmatistes, le sens d'une définition, c'est-à-dire l'existence des instances de vérifications, devient alors avec la non-contradiction le critère d'admissibilité d'une définition. Il introduit, pour ainsi dire, une restriction 'par le bas' à l'effet de limiter les moyens nécessaires à la transition du fini à l'infini au moyen légal: à l'induction complète (non transfinie).*

*Si le pragmatisme de Poincaré a toujours été associé à une philosophie utilitaire ou à une philosophie pragmatique en ce sens qu'un technicien utilise des résultats soit en attendant la démonstration de leur non-contradiction soit - dans une perspective post-gödelienne - parce qu'ils lui semblent simplement 'raisonnables*

---

1 *Poincaré 1912, p. 5.*
2 *La dernière partie de cette phrase (tel que ...) qui est un commentaire, est placée dans mon livre par erreur sans crochets à l'intérieur d'une citation de Poincaré (cf.* Heinzmann 1985, p. 24, note 52).
3 *Poincaré 1909b, p. 479.*

*(Bourbaki), il deviendre plus tard, avec les formulations de 1912, un intuitionnisme de principe, limité pourtant aux fondements et à l'arithmétique: les considérations de non-contradiction d'une définition ne sont plus suffisantes si l'on ne peut indiquer en même temps un processus de vérification, c'est-à-dire un modèle concret. En ce contexte, la vérification est une construction qui - et ceci a trait au kantisme - a comme fonction d'actualiser le général par le particulier dans l'intuition sensible[1].*

*Dans cette réinterprétation pragmatique du mode cantorien de la définition on associe les deux termes d''analyse' et de 'construction' non seulement au mode propre de définition cantorienne et à son complément pragmatique, mais encore à deux aspects à l'intérieur même du niveau de la détermination des individus: en effet, l'identification poincaréienne de 'construction' à définition'[2] peut signifier que la réduction du definiens à un definiendum appelle autre chose que les moyens du langage. Pour la construction des individus d'un genre le langage n'est au début qu'un aspect d'une action soumise aux normes pragmatiques: il en est l'aspect symbolique (analytique) qui seul permet de comprendre une construction intuitive actuelle d'individus en tant qu'actualisation d'un schème de construction, d'une règle.*

---

*1 En 1902, dans le premier chapitre de Science et hypothèse (écrit en 1894), Poincaré ne thématise que le procédé inverse: là, les sciences ont justement 'pour objet de nous dispenser' des vérifications particulières auxquelles on attribue un caractère analytique. Et, pour disposer de leur substitut: l'induction complète, qui est un 'procédé analytique 'par construction'', il faut l'appui d'une intuition pure et intellectuelle. On trouvera une interprétation plus détaillée de ce procédé dans mon article 'Philosophical Pragmatism in Poincaré', Reason and Argument. Initiatives in Logic, ed. J. Srzednicki.*

*2 Cf. plus haut la citation à la note 5, p.106.*

*Je donne l'exemple de la définition opérative des chiffres qui nous sera tout-à-l'heure utile pour la discussion de l'induction complète. Les chiffres sont construits par adjonctions successives de traits: /// (Poincaré parle d'additions successive ou de répétition). L'opération de la succession n'est donc pas nommée par le signe de la fonction à une valeur ' ' ', mais exécutée d'une manière directe. Ceci n'est pourtant pas suffisant . Il nous faut encore une notation du schème d'exécution qu'on note dans la forme 'n ⇒ n | '. Dans le terme 'n | ' de cette forme on n'utilise le langage pas seulement d'une manière descriptive (n | appartient au langage sur les chiffres), mais également d'une manière constitutive (n| est un chiffre si n est un chiffre; par contre 'n'' est le nom d'un chiffre).[1] En ce sens sémiotique, langage et construction sont pour le pragmatiste deux éléments non dissociables. Nous nous trouvons tout d'un coup dans l'heritage de la deuxième philosophie de Wittgenstein où le langage a perdu son rôle évident de méta-niveau vis-à-vis du niveau des objets.*

*Il est vrai, cette façon de voire, dépasse les textes explicites, mais confirme et explique d'autre part trois aspects dans l'oeuvre de Poincaré:*
*Premierèment sa critique de Hilbert. Selon Poincaré l'induction complète n'est pas une définition capable d'une démonstration de non-contradiction non-circulaire: une telle démonstration ferait essentiellement usage du principe d'induction qui figure lui-même sous les axiomes. On est incliné à dire que cette critique est historiquement dépassée: puisqu'elle "confond la notion d'entier dans les mathématiques formalisées et l'utilisation des entiers dans la théorie de la démonstration". Ainsi Bourbaki dans ses 'Eléments d'histoire des mathématiques'.[2] Une fois,*

---

*1 Cf. Lorenz 1986, p. 343.*
*2 Bourbaki 1960, p. 53.*

'démontrer' veut dire "déduire conformément aux règles du calcul" et l'autre fois 'montrer au moyen de raisonnements intuitifs'[1] et l'induction se rapporte une fois aux membres, c'est-à-dire aux objets satisfaisant le système d'axiomes et l'autre fois aux chiffres qui remplacent les signes pour les 'objets de pensée'.

Selon cette argumentation il n'y a pas de cercle, car il y a 1° une différence de niveau et 2° une différence entre le caractère 'finitiste' de l'induction en métamathématique et son caractère formel en mathématiques. Si les résultats négatifs de Gödel ont limité la plausibilité du programme hilbertien, l'élargissement de la méthode finitiste envisagé par Gentzen a encore tourné d'avantage le deuxième aspect de l'argumentation, à savoir la différence entre l'induction formalisée et intuitive, vers une question historique. Ce qui reste, la distinction entre deux niveaux transformant le cercle vicieux en cercle bénin, est d'une valeur épistémologique douteuse, surtout en face d'une théorie concurrente.

Et ceci nous amène à un autre argument de Poincaré contre le formalisme et sa formalisation de l'induction. Selon lui, le cercle inhérent à une conception formelle des mathématiques surgit déjà avec la tentative de <u>regagner</u> les énoncés des mathématiques intuitives, dont la formalisation était à l'origine du formalisme. Voici comment l'exprime Poincaré:

> " Vous donnez du nombre une définition subtile; puis, une fois cette définition donnée, vous n'y pensez plus; parce qu'en réalité, ce n'est pas elle qui vous a appris ce que c'était que le nombre, vous le saviez depuis longtemps, et quand le mot nombre se retrouve plus loin sous votre plume, vous y attachez le même sens que le premier venu; pour savoir quel est ce sens et s'il est bien le même dans telle phrase ou dans telle autre, il faut voir comment vous avez été amené à parler de nombre et à introduire ce mot dans ces deux phrases." [2] " Mais comment saurais-je que le nombre de mes raisonnements est un nombre entier? Si je donne à ce mot le sens vulgaire, cela ne sera pas difficile; mais si je le définis comme je viens de le faire, comment saurais-je que le nombre de mes raisonnements est un de ceux qui satisfont au principe? " [3]

---

1 Cf. <u>Heyting 1934</u>, p. 38
2 <u>Poincaré 1905/06</u>, p. 821
3 Ibid., p. 834

*Cette critique du formalisme conduit dans sa conséquence au refus brouwerien de distinguer, pour des raisons de <u>justification</u>, mathématiques et métamathématique. Le principe d'induction doit donc trouver sa justification au niveau même des mathématiques. A cet effet, la position de Poincaré est aussi célèbre comme - prise en soi - fausse: selon Poincaré le principe d'induction est un jugement synthétique <u>a priori</u> en ce sens que l'adjonction de sa négation aux autres axiomes de Peano est impossible.*[1] *Ce n'est qu'une interprétation pragmatique - et je reviens ainsi à mon point de départ - qui permet de maintenir le caractère synthétique apriori sans être délivrée à la conséquence fâcheuse de nier la possibilité de négation du principe de l'induction.*

*Rappelons-nous au procédé indiqué tout-à-l'heure pour construire les chiffres. L'induction complète se laisse considérer comme énoncé sur ce procédé de construction. Elle dit alors:*

> *'Si le chiffre | a une propriété E et si cette propriété est de telle sorte que chaque fois qu'elle appartient à un chiffre n, elle appartient également a n |, alors chaque chiffre a la propriété E'.*

*Ce principe se justifie de la manière suivante:*

> *Soit E donnée, m fixe, mais quelconque. Selon la première condition de l'hypothèse d'induction on a: E (|); si m= |, on a plus rien à montrer. Soit m ≠ |. Selon la deuxième condition de l'hypothèse d'induction et puisque les chiffres sont construits d'après le procédé décrit à la page 109 on a:E (||); si m= || , on a plus rien à montrer. Ainsi on peut rejoindre chaque m*[2].

*Vous remarquez que cette démonstration non déductive du principe d'induction est une <u>description</u> d'une <u>construction</u>. En un mot, elle est pragmatique.*

---

*1 Cf. <u>Poincaré 1902</u>, p. 74 et <u>Bourbaki 1960</u>, p. 52.*
*2 Cf. <u>Thiel 1973</u>, p. 109.*

Et c'est Poincaré qui a souligné le premier, et à plusieurs endroits, le caractère pragmatique de l'induction complète en exactement ce sens:

> "Un nombre peut être défini par récurrence; sur ce nombre on peut raisonner par recurrence; ce sont deux propositions distinctes. Le principe d'induction ne nous apprend pas que la première est vraie, il nous apprend que la première implique la seconde"[1].

Le principe d'induction est synthétique, parceque cette 'implication' n'est pas déductivement démontrable, mais seulement déterminée par des actualisations singulières, et il est a priori, puisqu'il est basé sur l'acte normatif de la répétition.
Ainsi, l'induction complète est un premier aspect confirmant la position pragmatique de Poincaré.
Ajoutons qu'on a seulement expliqué l'induction complète pour les chiffres. Le passage aux nombres se fait par abstraction à l'égard d'une invariance concernant le procédé de construction de chiffres.[2]

Un deuxième aspect confirmant le pragmatisme de Poincaré se rapporte à une remarque sur la théorie des types de Russell. Elle concerne l'admissibilité hypothétique des nombres ordinaux transfinis comme indices des différents types. Une telle théorie des types, dit Poincaré, resterait incompréhensible, si on ne supposait la théorie des ordinaux déjà constituée[3]. Poincaré exige donc une réflexion simultanée sur les objets construits et les moyens langagieres utilisés. Ce sont les logiciens Kreisel et Feferman[4] qui chercheront plus tard à remplir cette exigence en passant des ordres bien-fondés prédicatifs - qui possèdent un type d'ordre $\omega_1$ - aux ordres prédicativement bien-fondés dont le type d'ordre $<\Gamma_0$ est prédicativement reconnaissable en tant que bon-ordre[5].

---

1 Poincaré 1905/06, p. 835; cf. également Poincaré 1906b, p. 867.
2 Cf. Thiel 1979, p. 33.
3 Cf. Poincaré 1909b, p. 469.
4 Cf. Kreisel 1960 et Feferman 1964.
5 Pour plus de détails cf. Heinzmann 1985, Ch.V.: Construction d'un univers prédicatif.

*Une troisième concordance avec l'interprétation proposée consiste dans la tournure langagière que donne Poincaré à l'identification pragmatique de l'ontologie à l'épistémologie: pour le pragmatiste un individu "n'existe que quand il est pensée... d'un sujet pensant" et quand il est susceptible d'être défini "en un nombre fini de mots". Et un concept qui n'en est pas susceptible n'est pas admis parce qu'il ne peut être pensé[1]. Il semble alors cohérent de dire avec Heyting que la définissabilité en un nombre fini de mots signifie (dans un sens sémiotique: 'est un signe pour') la constructibilité finie[2]. Tous les éléments d'un genre doivent bénéficier d'une constructibilité finie. Cette interprétation trouve encore une autre confirmation lorsque Poincaré infirme une affirmation de Schoenflies qui dissocie justement la définissabilité finie de la construction. L'ensemble des fonctions constantes en est l'exemple:*

> *"Quand on dit 'une fonction constante'", remarque Poincaré, "on a une formule d'un nombre fini de mots et que s'applique à une infinité de fonctions; mais qui ne les définit pas ... Il n'est donc pas exact de dire que cette formule définit en un nombre fini de mots un ensemble de fonctions"[3].*

*Puisque la définition d'un ensemble nécessite la 'connaissance' de tous ses individus, la définition d'un ensemble infini au sens actuel dans une même formule comportant un nombre fini de mots est impossible:*

> *"Et en effet ce qui caractérise précisément une définition, c'est qu'elle permet de distinguer l'objet défini de tous les autres objets; si elle s'applique à une infinité d'objets, elle ne permet pas de les discerner les uns des autres; elle n'en définit aucun; elle n'est plus une définition."[4]*

*Du point de vue l'extension, l'infini est un devenir et jamais une totalité close. Borel donnera avec sa distinction entre l'ensemble dénombrable et son sous-ensemble effectivement énumérable*

---

*1 Cf. Poincaré 1909b, p. 482 et Poincaré 1912, p. 9/10.*
*2 Cf. Heyting 1934, p. 4.*
*3 Poincaré 1909a, p. 195, 196.*
*4 Ibid., p. 114.*

*une précision formelle de la conception intuitive du 'on pourra énumérer' de Poincaré: selon lui, un ensemble est seulement admissible, s'il est effectivement énumérable, c'est-à-dire, si on peut indiquer "au moyen d'un nombre fini de mots, un procédé sûr pour attribuer sans ambiguité un rang déterminé à chacun des ses éléments"[1]. Nous savons aujourd'hui que la restriction sur le seul concept de récursivité générale qui est sans doute visé par Borel, ne conduit malheureusement pas très loin: généralément, un prédicat défini sur les nombre naturels à l'aide des quantificateurs non-restreints n'appartient déjà plus à la classe des prédicats récursifs. Ceci et le fait d'une possible interprétation constructive de l'arithmétique élémentaires classique suggèrent à élargir le pragmatisme au sens de Poincare , si on insiste à une interprétation formelle du concept de constructivité, p. ex. pour les besoins d'une théorie générale (et non réductive) de démonstration. Dans ce cas il semble souhaitable d'admettre la totalité des nombres naturels et de différencier les prédicats récursivement non-décidables selon la complexité de leur non-décidabilité.*

*Quoi qu'on décide, l'idée pragmatique de Poincaré obéit de toute façon à l'exigence que Vuillemin appelle le principe de l'intuitionnisme: il refuse "à la disjonction de l'infini et du fini une validité universelle, c'est-à-dire indépendante des conditions de l'intuition et de la construction"[2]. Poincaré s'inscrit dans le courant intuitionniste venant d'Epicure et passant par Descartes et Kant.*

*Cependant, par rapport à Brouwer, on pourrait étendre la dénomination semi-intuitionnisme[3] à la philosophie poincaréienne: l'adjonction 'semi' marquerait alors la manière particulière dont elle conçoit la relation entre intuition et analyse, entre construction*

---

*1 Borel 1908, p. 446-447.*
*2 Vuillemin 1981, p. 27.*
*3 On trouve le terme 'halb-intuitionistisch' non seulement dans Heyting 1934, mais déjà dans von Neumann 1927, p. 46,ou sont dénommées ainsi les critiques de la théorie des ensembles avant Brouwer.*

*et description ou entre intuition et langage: un objet n'existe pas sans qu'il soit nommé, rôle de contrôle que Brouwer refuse au langage qui, selon lui, n'est qu'un moyen auxiliaire.*

*Je veux encore rapidement passer à la critique poincaréienne de la définition logiciste du nombre entier. Il l'a refuse puisqu'elle est non-prédicative. Qu'est-ce que cela veut dire?*

*C'était Russell qui a introduit en premier les termes 'prédicatif' et 'non-prédicatif'[1] pour fixer la différence de deux sortes de fonctions propositionnelles: celles qui déterminent et celles qui - comme $\varphi(X) \Leftrightarrow X \notin X$[2] - ne déterminent pas une classe. Il appelle les premières 'prédicatives' et les deuxièmes 'non-prédicatives'. Pour parer au phénomène des définitions non-prédicatives Russell propose deux manières de réagir: ou bien on adopte la théorie que les fonctions déterminent - au moins en règle générale - des classes et, par la suite, on indique un principe pour exclure les définitions non-prédicatives: - ce type de solution sera plus tard représenté par la théorie ramifiée des types -; ou bien on préfère une solution radicale et on renonce à toute classe en tant qu'entité. A cette exigence obéit la 'no-classes-theory' qui, d'abord, trouve les faveurs de Russell.*

*En ce moment, Poincaré semble donc pouvoir triompher de Russell qui doit soumettre son illusion 'platonicienne' au 'rasoir' d'Ockham: si les positions du pragmatiste et du cantorien sont alternatives, les antinomies obligent à restreindre l'universalité de la variable sur les individus qui seuls sont encore à considérer commes des entités. Par contre, les classes ne constituent que des 'façons de parler'.*

---

*1 <u>Russell 1906a</u>, p. 34.*
*2 En appliquant à cette fonction l'axiome de compréhension on obtient l'antinomie de Russell:*

$$
\begin{aligned}
& \exists x \, \forall y \, (y \in x \leftrightarrow y \notin y) \\
\leftrightarrow \quad & \forall y \, (y \in e \leftrightarrow y \notin y) \\
\leftrightarrow \quad & (e \in e \leftrightarrow e \notin e) .
\end{aligned}
$$

*Poincaré voit la faute immédiate des définitions non-prédicatives dans un cercle vicieux. Voici sa première définition de la prédicativité:*

*P1: La définition d'un ensemble E est prédicative, si elle peut être formée "sans introduire la notion de l'ensemble E lui-même. Sans qoui la définition de E contiendrait un cercle vicieux; on ne peut pas définir E par l'ensemble E lui-même"*[1]
*- une formulation qui mème directement au célèbre principe du cercle vicieux de Russell:*
*"Tout ce qui contient une variable apparente ne doit pas être une des valeurs possible de cette variable"*[2]*. "Le cas important de ce principe peut être énoncé moins exactement comme suit: 'Tout ce qui enveloppe tous ne peut pas être un de ces tous'"*[3]*.*
*Ce principe est célèbre, puisque Russell a réussi à développer une théorie qui le respecte: la théorie ramifiée des types. Chez Poincaré on ne trouve rien de comparable: il croit que sa théorie sous-jacente d'un pragmatisme constructif le met - disons naturellement - à l'abri des fautes de définitions. Pour lui, les antinomies ne sont que le signe de l'erreur des cantoriens, à savoir de considérer une totalité comme une donnée indépendante de ses individus .*

*C'est exactement cette attitude platoniste que conteste Poincaré et à laquelle il attribue la responsabilité des antinomies, comme le fera d'ailleurs plus tard Hermann Weyl:*

> *"Als Wurzel der Antinomien vermag man aber nur die schon von Anfang an in der Mathematik begangene Kühnheit aufzudecken: daß ein Feld konstruktiver Möglichkeiten als geschlossener Inbegriff an sich seiender Gegenstände behandelt werde."*[4]

---

1 *Poincaré 1906, p. 307.*
2 *Russell 1906b, p. 634.*
3 *Ibid., p. 640.*

4 *Weyl 1976, p. 71.*

Et c'est là toute la différence qui sépare le pragmatiste du cantorien; car le schème d'axiomes de séparation $\exists X \forall Y (Y \in X \longleftrightarrow Y \in a \wedge \varphi(Y))$[1] n'est pas toujours représentable et ne peut donc pas être admis par Poincaré, même s'il s'avérait consistent: en posant d'avance un ensemble a, dit Poincaré, Zermelo " a elevé un mûr de clôture qui arrête les gêneurs qui pourraient venir du dehors. Mais il ne se demande pas s'il ne peut y avoir des gêneurs du dedans qu'il a enfermés avec lui dans son mur"[2].

Ainsi, l'observation de la règle de définition P1, conforme au point de vue de l'extension, risque d'entraîner une modification plus profonde de la logique que la seule exclusion des antinomies. En effet, elle exclut par exemple la définition des nombres inductifs. Ils sont définis comme intersection des classes récurrentes: $Ind(x) :\longleftrightarrow \forall\varphi \{ (\varphi(0) \wedge \forall n (\varphi(n) \longrightarrow \varphi(n+1))) \longrightarrow \varphi(x) \}$.

La définition est non-prédicative, puisque la propriété 'Ind' est elle même valeur d'une variable liée par un quantificateur universal dont le domaine de variation comporte toutes les propriétés quelconques $\varphi$. « Si, dit Poincaré, nous voulons éviter un cercle vicieux nous devons entendre: les nombres inductifs sont définis comme intersection de toutes les classes récurrentes dans la définition desquelles n'intervient pas déjà la notien de nombre inductif ».[4]

Carnap a cependant montré[3] qu'une appartenance d'un nombre donné 'a' aux nombres inductifs ne demande pas la vérification de $\varphi(a)$ pour chaque $\varphi$ (et donc pour Ind), mais peut être examinée 'logiquement', sans recours aux instances de $\varphi$. En effet, posons par exemple a=2; comme conséquence immédiate de la 'définition' (*) $\forall x\, [Ind(x) \longleftrightarrow \forall\varphi \{ (\varphi(0) \wedge \forall n (\varphi(n) \longrightarrow \varphi(n+1))) \longrightarrow \varphi(x) \}]$

on a $\varphi(0)$, donc Ind(0); en substituant maintenant dans (*) 0 pour n, on obtient $\varphi(0) \longrightarrow \varphi(0+1)$ ce qui donne $\varphi(1)$; de $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ et de $\varphi(1) \longrightarrow \varphi(1+1)$ on conclut finalement $\varphi(2)$.

---

1 Il constitue la solution de Zermelo.
2 Poincaré 1909b, p. 25.
3 Cf. Carnap 1931, pp. 100; cf. également Carnap 1968, pp. 115sq. et l'examen de l'argument carnapien dans Fraenkel et al. 1973, p. 196.
4 Poincaré 1906 a, p. 309/310.

*Il semble donc évident que l'appartenance d'un élément concret à Ind peut être décidée sans prendre en considération le quantificateur universel portant sur le domaine à frontière indécise que constituent les propriétés $\varphi$. La définition de Ind est-elle alors prédicative? Ou par contre, peut-on dire que la procédure de démonstration est inadéquate pour juger la prédicativité des nombres inductifs? A mon avis, il faut plutôt approuver cette dernière question. Or, ce qui est prédicatif est tout au plus le domaine de base, mais non la structure intuitive des entiers munis des opérations habituelles: par exemple, la démonstration que la somme de deux nombres inductifs est de nouveau inductive, nécessite l'induction, tandis que la procédure logique de Carnap ne permet pas de passer de Ind (a) et Ind (b) à Ind (a+b).*

*Je veux terminer avec quelques brèves remarques sur la démonstrabilité de l'induction complète.*

*1° Il est facile à montrer que les axiomes de Peano et, particulièrement l'induction complète, se déduisent de la définition des nombres inductifs.*
*C'est cette sorte de démonstration de l'induction duquel Poincaré dit:*

> *"On pourra passer facilement d'un énoncé à l'autre et se donner ainsi l'illusion qu'on a démontré la légitimité du raisonnement par récurrence. Mais on sera toujours arrêté, on arrivera toujours à un axiome indémontrable qui ne sera au fond que la proposition à démontrer traduite dans un autre langage"[1].*

*2° Les logicistes ont beaucoup investi dans le problème de déduire l'induction complète à partir du concept de l'ensemble fini. Pour être cohérent une telle entreprise (Poincaré ne l'acceptera jamais, puisqu'on présuppose le concept d'ensemble) doit remplir*

---

1 Poincaré 1902, p. 41.

*quatre conditions:*

*a) la définition de l'ensemble fini ne doit pas présupposer le concept des nombres naturels*

*b) elle doit être équivalente à une définition naive de la finitude.*

*c) Cette équivalence doit être démontrable sans axiome du choix.*

*d) elle ne doit pas présupposer l'infini actuel.*

*Ce n'est qu'en 1958 qu'Azriel Levy a résolu la question.*[1] *Mais ceci dépasse de loin le sujet de ce soir.*

BIBLIOGRAPHIE

*BOREL, Émile*
*1908 Les Paradoxes de la théorie des ensembles. Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure 44 (3. série 25), pp. 443-448. Reimprimé dans Borel, Leçons sur la théorie des fonctions, Paris 1928, pp. 162-166.*

*BOURBAKI, Nicolas*
*1960 Éléments d'histoire des mathématiques, Paris.*

*CARNAP, Rudolf*
*1931 Die logistische Grundlegung der Mathematik. Erkenntnis 2, pp. 91-105.*

*CARNAP, Rudolf*
*²1968 Logische Syntaxe der Sprache, Wien (¹1934)/New York*

*CAVAILLÈS, Jean*
*1981 Méthode axiomatique et formalisme. Essai sur le problème du fondement des mathématiques, Paris (1937 )*

---

1 *Levy 1958*

*FEFERMAN, Solomon*
*1964 Systems of predicative Analysis. The Journal of Symbolic Logic 29, pp. 1-30.*

*FRAENKEL, Adolf Abraham/*
*BAR-HILLEL, Yehosua/*
*LEVY, A.* *1973 Foundations of Set Theory, Amsterdam/London (*[1]*1958).*

*HEINZMANN, Gerhard*
*1986 Poincaré, Russell, Zermelo et Peano. Textes de la discussion (1906-1912) sur les fondements des mathématiques: des antinomies à la prédicativité, Paris*

*HEINZMANN, Gerhard*
*1985 Entre intuition et analyse. Poincaré et le concept de prédicativité, Paris*

*HEYTING, Arend*
*1934 Mathematische Grundlagenforschung, Intuitionismus, Beweistheorie, Berlin.*

*HILBERT, David*
*1905 Über die Grundlagen der Logik und Arithmetik, 3e CIM Heidelberg 1904. Leipzig, p. 174-185; réimprimé dans les éditions de Hilbert 1899 à partir de 1909; cité d'après l'édition de 1923.*

*HILBERT, David*
*1922 Neubegründung der Mathematik, in: Hilbertiana, Darmstadt 1964, pp. 12-32.*

*KREISEL, Georg*
*1960 La prédicativité. Bull. Soc. math. France, 88, pp. 371-391.*

*LEVY, A.*
*1958 The independence of various definitions of finiteness. Fund. math. 46, 1-13.*

*LORENZ, Kuno*
*1986 Dialogischer Konstruktivismus. In: K. Salamun (Hrsg.), Was ist Philosophie? Tübingen, pp. 335-352.*

*NEUMANN, John von*
*1927 Zur Hilbertschen Beweistheorie, Math. Zeitschr. 26, 1-46 (eingegangen 1925).*

*POINCARÉ, Henri*

*1902 La Science et l'hypothèse. Paris, cité d'après la pagination de l'édition de 1968 contenant un Préface de Jules Vuillemin.*

*1905/06 Les mathématiques et la logique. Revue de Métaphysique et de Morale 13, pp. 815-835; 14 (1906) pp. 17-34; réimprimé dans Heinzmann 1986, pp. 11-53.*

*1906a Les mathématiques et la logique. RMM XIV, pp. 294-317; réimprimé dans Heinzmann 1985, pp. 79-104.*

*1906b A propos de la logistique. RMM 14, pp. 866-868; réimprimé dans Heinzmann 1986, pp. 145-147.*

*1908 Science et Methode, Paris.*

*1909a Réflexions sur les deux notes précédentes. Acta mathématica 32, pp. 195-200, cité d'après la réimpression dans Heinzmann 1986, pp. 224-229.*

*1909b Über transfinite Zahlen. In: H. Poincaré, Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der neuen Mathematik und mathematischen Physik, Leipzig/Berlin 1910, S. Vortrag, pp. 43-48. Cité d'après la réimpression dans Heinzmann 1986, pp. 231-234.*

*1912 La logique de l'infini. Scientia 12, pp. 1-11; cité d'après la réimpression dans Heinzmann 1986, pp. 305-315.*

*RUSSELL, Bertrand*

*1906b Les paradoxes de la logique. RMM 14, pp. 627-650; cité d'après la réimpression dans Heinzmann 1986, pp. 121-144.*

*THIEL, Christian*

*1979 Zur Bestimmung der Arithmetik, in: K. Lorenz, Konstruktionen vs Positionen, Berlin/New York, 29-34.*

*1973 Das Begründungsproblem der Mathematik und die Philosophie, in: F. Kambartel/J. Mittelstraß (Hrsg.), Zum normativen Fundament der Wissenschaft, Ffm, 91-114.*

Saarbrücken, le 12 novembre 1986

Gerhard Heinzmann
Fachbereich 5.1 -Philosophie
Universität des Saarlandes
D-6600 Saarbrücken