CAHIERS DU SÉMINAIRE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

L. EULER

De l'utilisation des fonctions discontinues en analyse (traduction en français)

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1re série, tome 9 (1988), p. 69-97

<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1988__9__69_0>

(traduction en français)

DE L'UTILISATION DES FONCTIONS DISCONTINUES EN ANALYSE

L.Euler

(Commentaire de l'index Eneströmien 322; **Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae** 11, (1765),1767,pp.67-102, Résumé , même référence p.5-7)[1]

1. Ce qu'on enseigne habituellement en Analyse sur les fonctions , ou quantités déterminées de quelque manière que ce soit par une variable , se réduit aux seules fonctions qu'on appelle continues et dont la formation dépend d'une certaine loi[2]. Cela se voit principalement par la doctrine des courbes, pour lesquelles les ordonnées , en tant qu'elles sont déterminées par les abscisses, tiennent lieu de fonctions. Si bien que la nature de toutes les fonctions peut être très avantageusement représentée par des courbes . Ainsi, de quelque manière que la quantité y est déterminée par x , c'est- à -dire quelque fonction y qu'on ait de x, on peut toujours tracer une courbe dont l'ordonnée y corresponde précisément à une abscisse quelconque , et estimer que cette courbe représente convenablement la nature de cette fonction. D'où , réciproquement, si l'on pose une courbe quelconque , ses ordonnées exhibent certaines fonctions des abscisses. La nature de ces fonctions est constituée dans la nature même de la courbe. Tant qu'à chaque abscisse , en effet, correspond une certaine ordonnée, on considère à bon droit sa valeur comme une certaine fonction de l'abscisse. Et lorsque l'ordonnée devient imaginaire , ou lorsqu'elle prend simultanément plusieurs valeurs, on distingue parfaitement bien cette particularité à partir de la nature de la fonction[3].

2. Mais il est bien avéré qu'en Géométrie sublime[4] on n'a point coutume de considérer d'autres courbes que celles dont la nature est définie par une relation précise entre les coordonnées , exprimée par une équation; en sorte que tout ses points soient déterminés par une même équation, comme par une loi . Et parce que l'on pense que cette loi renferme en elle-même le principe de continuité - car toutes les parties de la courbe se tiennent par un lien tellement étroit que l'on ne peut trouver de place entre elles pour un changement si l'on respecte le lien de continuité - pour cette raison, dis-je, on appelle ces courbes des courbes continues. Peu importe que l'équation qui contient leur nature soit algébrique ou bien transcendante(5), connue ou même inconnue(6), à condition que nous nous rendions compte qu'est donnée une équation par laquelle la nature des courbes de ce genre est traduite. On n'envisage pas ici la continuité du tracé qui exprime les branches des courbes : les deux branches conjuguées de l'hyperbole constituent aussi bien une courbe continue que la parabole ou l'ellipse, même si les deux tracés de cette courbe sont tout à fait séparés l'un de l'autre . On attribue en effet la continuité à ces hyperboles séparées pour cette raison que toutes deux sont contenues dans une seule équation à partir de laquelle elle peuvent être formées . C'est sur cette base qu'il conviendrait que ce que l'on a l'habitude de discuter ordinairement ici ou là quand à la loi de continuité fût interprété et ramené à une notion déterminée .

3. Une fois posé le critère de la continuité , ce qu'est une fonction discontinue, ou dénuée d'une loi de continuité , saute aux yeux . Car toutes les courbes qui ne sont déterminées par aucune équation précise, ainsi celles que l'on trace habituellement à main levée , fournissent de telles fonctions discontinues . En effet, il n'est pas possible pour de telles courbes de définir les valeurs des ordonnées selon une loi précise à partir des abscisses . Les courbes de ce genre, en tant qu'elles s'opposent au genre précèdent défini par la loi de continuité, sont appelées couramment "mécaniques"(7), mais avec plus de précision "discontinues" ou dénuées de la loi de continuité . En effet, ce n'est pas parce que leurs parties ne se tiendraient pas entre elles, mais parce qu'elles ne sont déterminées par aucune équation fixée . Ainsi des tracés quelconques qu'on dessine à main levée sur du papier , même s'ils ont progression continue, doivent être considérés , d'après cette définition , comme discontinus, sauf si, bien sûr, il arrive que des tracés de ce genre dépendent d'une équation précise . Dans ce genre également, on doit ranger les lignes communément appellées mixtes(8), celles où l'on joint ensemble des morceaux prélevés sur diverses courbes , voire même les morceaux d'une même ligne mais joints d'une autre manière. Dans ces conditions, le périmètre d'un polygone fait de pures lignes droites, et les lignes formées de droites et d'arcs de cercle, ou d'autres courbes quelconques, appartiennent également à ce genre. Même si dans ce cas, en fait, chaque morceau dépend d'une équation précise, on ne peut exhiber pour le tracé entier une unique équation , comme l'exige le caractère de continuité. C'est pourquoi il faut tenir tous les tracés de ce genre pour des lignes discontinues, exactement comme ceux que l'on trace à main levée.

4. Or,il est de soi évident qu'on n'accorde aucune place à toutes les lignes de ce genre et autres fonctions discontinues en Analyse géométrique, où l'étude est uniquement focalisée sur la recherche des propriétés des lignes considérées, travail qui ne peut en aucune façon être entrepris si la nature des lignes ne dépend pas d'une loi et équation précises . C'est pourquoi la plupart des géomètres, déterminés par cette raison, n'ont pas hésité à proscrire entièrement, tant de la géométrie que de l'Analyse universelle, toutes les lignes et fonctions discontinues et de les rejeter parmi les objets auxquels répugne cette science . Du moins le célèbre d'ALEMBERT a ouvertement soutenu cette opinion(9), alors que, quant à moi, j'avais déterminé le mouvement des cordes vibrantes en général de telle manière que ma solution s'étendît à tous les mouvements et figures qui ont été imprimés initialement à la corde . Peu après, un très éminent, Monsieur m'a objecté qu'on ne peut pas du tout définir un mouvement si la figure initialement imprimée à la corde manquait de continuité en ne provenant pas d'une équation précise. S'il arrivait que la figure initiale de la corde fût discontinue, la détermination du mouvement ultérieur n'appartiendrait en aucune façon à l'Analyse et il serait tout à fait interdit de vouloir en faire l'étude. A cette objection, à la vérité j'ai répondu de manière satisfaisante et, récemment, le célèbre LA GRANGE a si bien défendu ma solution dans les Actes de Turin qu'il n'y a place désormais pour aucun doute quelconque[10].

5. C'est pourquoi une question de très grande importance se pose ici : que doit-on penser des fonctions discontinues et des lignes décrites en l'absence d' aucune loi ? Peut-on, et dans quelle mesure, leur donner une place en Analyse? Dans le problème mentionné à l'instant, il n'y a aucun doute que la corde qui a subi une perturbation initiale et dont la figure ne saurait être déterminée par une équation, acquerra un mouvement et, tant qu'il durera, recevra à chaque instant une figure et un mouvement précis. Leur détermination est assurément soumise à l'Analyse et à la science du mouvement, que les bornes imposées à notre connaissance y suffisent ou non. Dans les deux cas, la question méritera toujours toute notre attention et puiqu'il s'agit de considérations sur des quantités [11]il ne fait pas de doute que cette question relève du domaine de l'Analyse. Et ici point n'est besoin de demander jusqu'où s'étend notre pénétration, puisqu'il n'est guère de géomètre qui n'ait bien souvent sué sang et eau sur des questions dépassant ses forces. Il n'est donc nullement interdit de songer à s'occuper de questions de ce genre et il faut bien plutôt s'y appliquer avec plus de soin. Après avoir estimé exactement les difficultés, j'ose en outre assurer que ma solution du problème des cordes vibrantes, prise au sens large, est bonne et que c'est cette solution qui, avec bonheur, justifie les fonctions discontinues. Mais je reconnais de surplus que ce problème doit être rapporté à un genre particulier d'Analyse, jusqu'ici peu travaillé, dont la force et la nature résident en cette intervention nécessaire des fonctions discontinues.

6. Pour apaiser cette polémique , j'observe que ni dans l'algèbre commune, ni dans le secteur de l'Analyse des infinis qui a été surtout travaillé jusqu'ici, on ne peut admettre les fonctions discontinues. Mais l'Analyse des infinis s'étend beaucoup plus loin et l'on doit estimer qu'elle comprend des secteurs qui, non seulement ne répugnent pas aux fonctions discontinues, mais les impliquent naturellement à un point tel que l'on ne puisse considérer aucun problème qui en relève comme convenablement résolu, si des fonctions arbitraires - et de ce chef même discontinues- n'étaient pas introduites dans sa solution. Or ces secteurs de l'Analyse ont été peu travaillé jusqu'à présent, même si de remarquables exemples en sont trouvés ça et là et si leur véritable nature ne semble pas non plus suffisamment approfondie . C'est pourquoi, afin de bien exposer cette nature, il faut que je décrive plus exactement ces secteurs variés et divers de l'Analyse et que je les distingue les uns des autres . Etant donnée en effet la manière dont on définit habituellement et communément l'Analyse des infinis, on ne peut guère en retirer quelque lumière pour éclairer ma démonstration, car la plupart des définitions sont extrêmement vagues et confuses et n'expliquent point clairement et distinctement la nature du sujet dont il est question . C'est pourquoi les plaintes si fréquentes sur l'absence d'une description soigneuse et stable de l'Analyse des infinis ne manquent pas de fondement. C'est ici qu'il convient de remédier au plus vite à ce grave défaut , car les divers secteurs de cette science ne sont pas distingués les uns des autres avec suffisamment d'exactitude .

7. Toute la force de l'Analyse des infinis s'explique très convenablement à partir de la notion et de la nature des fonctions , que l'on distingue très commodément en classes selon le nombre des quantités variables qui les déterminent d'une manière assurée . Ainsi la première classe contiendra les fonctions d'une seule variable. De telles fonctions sont les ordonnées de lignes quelconques rapportées aux abscisses . Par exemple, si l'on pose l'abscisse x et l'ordonnée y, y sera fonction de la variable x, dont la nature s'exprime au moyen de la courbe, ou équation, qui représente la liaison entre x et y . On en déduit qu'au moment même où on attribue une valeur déterminée à l'abscisse x, l'ordonnée reçoit une valeur déterminée, que celle-ci soit simple, ou bien encore multiple, ou encore imaginaire . D'où l'on doit comprendre que, réciproquement l'abscisse x peut également être considérée comme une fonction de l'ordonnée y(12). Pareillement , si un corps se meut selon une ligne quelconque, sa vitesse en chaque lieu doit-être rangée parmi les fonctions d'une seule variable . Elle est, en effet, une fonction de la quantité variable par laquelle les points de cettte ligne sont déterminés selon la loi de continuité . C'est dans cette classe qu'il faut ranger la plupart des questions traitées jusqu'ici , même si assez souvent plusieurs variables entrent en compte , mais à condition qu'elles soient déterminées par une seule . De même , si l'on étudie le mouvement de la lune, on se propose de chercher , pour un instant quelconque , sa longitude , sa latitude et sa distance à la terre . Or, chacun de ces paramètres en définitive doit être déterminé à partir du seul temps, aussi bien la longitude que la latitude ou que la distance à la terre . Chacun pourra être considéré en soi en tant que fonction du temps, c'est -à -dire fonction d'une seule variable.

8. Mais les fonctions de deux ou plusieurs variables sont déterminées par deux ou plusieurs variables, qui ne dépendent nullement les unes des autres, mais auxquelles on peut attribuer à chacune séparément n'importe quelle valeur . On a affaire à de telle fonctions quand on examine la nature des solides ou des surfaces . Habituellement , cela se fait à l'aide de trois coordonnées x, y,et z : d'une part, x et y sont prises dans un plan et la troisième variable, z, est prise sur la perpendiculaire à ce plan . En effet, pour chaque point de la base, qui est défini pour les deux variables x et y, une certaine perpendiculaire levée de cette façon , z , sera fonction de x et y qui, pour leur part, n'en dépendent nullement . Si donc nous voulons assigner tous les points de la surface, il faut attribuer n'importe quelle valeur tant à x qu'à y séparément. Ainsi on obtiendra toutes ces perpendiculaires pour tous les points de la base . Maintenant, si le corps est composé de parties hétérogènes, en sorte qu'à chaque point pris à l'intérieur du corps , corresponde une densité particulière, en premier la place de chaque point est définie par les trois coordonnées x, y, et z, tout à fait indépendantes les unes des autre, car pour obtenir tous les points à l'intérieur du corps, il faut assigner à ces trois coordonnées toutes les valeurs successives possibles C'est pourquoi, si la densité en un point quelconque est représentée par la quantité v, il faut la regarder comme une fonction de chacune des trois coordonnées variables x, y, z. Si de plus les particules de ce corps sont agitées par un mouvement quelconque, le mouvement de chaque point dépendra non seulement de la détermination de chacune des trois coordonnées, mais aussi du temps . Il s'ensuit que le mouvement doit être considéré comme une fonction de quatre variables.

9. Lorsqu'on a posé cette notion fonctionnelle et cette classification des fonctions, on pourra enseigner très clairement les fondements de l'Analyse des infinis. Cette discipline se répartit très commodément en autant de secteurs qu'il y a de classes de fonctions, parce que chacune doit être conduite sur des principes et des règles particulières . Donc , le premier secteur qui jusqu'ici a été pratiquement le seul à être étudié et pour lequel les principes du calcul différentiel et intégral sont adaptés, s'occupe des fonctions d'une seule variable . Donc, en premier , si y est une fonction quelconque d'une seule variable x, on a coutume d'étudier l'accroissement ou le décroissement de cette fonction y pendant que la quantité x s'accroît d'une quantité supplémentaire quelconque. Ensuite, on se représente cette quantité supplémentaire comme diminuant d'une manière continue[13] jusqu'à ce que finalement elle disparaisse complètement, cas dans lequel également l'accroissement de la fonction y aboutit au néant . Ces accroissements évanouissants, on les appelle aussi des différentielles et il s'ensuit évidemment que celles-ci n'ont plus de quantité et sont à ce point comparables au néant que l'on ne peut se poser de question au sujet de leur quantité . Et le calcul différentiel , ainsi , ne s'occupe nullement d'étudier une quantité qui n'existe pas, mais définit les rapports de tels termes , rapport qui, lui, de toute façon , conserve une quantité . Précisément, on ne cherche pas tant la différence elle-même dy de la fonction y , que son rapport à la différence dx, c'est-à-dire la valeur de la fraction dy/dx qui , dans n'importe quel cas , possède une quantité(14) déterminée et qui peut en elle-même être considérée comme une nouvelle fonction de x .

10. Alors que pour la plupart des hommes cette notion de différentielle , et de rapport liant ensemble des quantités évanouissantes,semble habituellement au plus haut point suspecte, tous les doutes sont réduits en fumée sur un seul exemple . Que l'on se donne donc une fonction de ce genre, $y = ax^2 + bx + c$. Voyons d'abord quelle augmentation cette fonction reçoit lorsqu'on donne à la quantité x un accroissement quelconque ω . Posons $x + \omega$ à la place de x. Notre fonction devient $axx + 2ax\omega + a\omega^2 + bx + b\omega + c$; elle reçoit donc un accroissement $= 2ax\omega + a\omega^2 + b\omega$ que nous désignons par le signe Δy et, semblablement , nous désignerons également la quantité ω, comme accroissement de x lui-même par le signe suivant Δx.

Donc comme on avait

$$\Delta x = \omega \text{ et } \Delta y = 2ax\omega + a\omega\omega + b\omega,$$

on aura

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2ax\omega + a\omega^2 + b\omega}{\omega} = 2ax + a\omega + b.$$

Ainsi nous obtenons le rapport entre les accroissements Δx et Δy, qui est vrai quel que soit l'accroissement ω que la quantité x prend. Donc le même rapport correspondra à la vérité si nous prenons l'accroissement comme tout à fait évanouissant, et en ce cas les accroissements Δx, Δy sont désignés habituellement par les symboles dx et dy et appelés différentielles. D'où, très évidemment, si l'on pose $\omega = 0$, il vient

$$(dy/dx) = 2ax + b.$$

Ce rapport est vrai, même si les termes entre lesquels il existe sont évanouissants. Ce seul exemple suffit, semble-t-il, à lever tous les doutes que l'on oppose couramment à la notion d'infiniment petit utilisée en Analyse et à mettre ce calcul hors de tout soupçon .

11. Parce que ce rapport de différentielles dy/dx est lui aussi une fonction de x, si on les représente par la lettre p, le rapport de sa différentielle dp à dx (c'est à dire la fraction dp/dx) peut être défini d'une manière semblable. Pour ne pas être obligé de faire intervenir une nouvelle lettre dans le calcul , à cause de l'équation $p=dy/dx$, on la représente habituellement par le signe suivant , ddy/dx^2, que l'on dit signifier une différentielle de *deuxième* ordre. Et *ainsi de* suite , *dans l'ordre* , *on* appelle les différentielles qui interviennent dans ces formules $d^3y/dx^3, d^4y/dx^4$, etc des différentielles du 3^e^, 4^e^, n^ème^ ordre . Leur signification, comme je l'ai montré pour le premier ordre, se ramène toujours à un rapport entre les différentielles de deux quantités, dont l'une est fonction de l'autre . De cette façon , toutes les controverses qui jadis ont gravité autour des différentielles de tous les ordres et leur nature, tombent d'elles-même, puisque tout ce qui est défini dans ce calcul se ramène à une proportion(15) de différentielles, dont la réalité ne souffre aucun doute et, semble-t-il, il n'est plus possible pour les géomètres de mépriser de quelque manière que se soit les vérités découvertes par ce calcul . Pour ma part , je ne nie pas accepter de pareilles manières de parler dans cette discipline, manières qui paraissent donner aux différentielles une quantité aussi petite qu'il soit. Après tout , puisque leur signification doit être interprétée à partir de principes fermes, de telles expressions, même si elles sont moins convenables, peuvent être tolérées. Bien plus, puisque l'expression $p = dy/dx$ est parfaitement réelle, du même coup l'égalité $dy=pdx$ est acceptée à juste titre, quoique dans aucun des deux membres aucune quantité n'est connue.

12. La définition du calcul différentiel, donc, n'est plus désormais enveloppée d'obscurité et, lorsqu'on pose une fonction quelconque d'une ou de plusieurs variables, c'est la méthode pour trouver les rapports qui existent entre les différentielles tant du premier ordre que des ordres plus élevés . Pour les fonctions d'une seule variable que j'ai uniquement étudiées jusqu'ici , cette définition est évidente . Si, en effet, y est fonction quelconque de x, le calcul différentiel apprend comment la valeur de la fraction dy/dx doit être trouvée et la même règle, par laquelle ceci se fait, vaut aussi pour les différentielles d'ordre supérieur. Car, si l'on se donne $dy/dx= p$, à partir de cette fonction de x et par la même méthode , la valeur dp/dx ou d^2y/dx^2 est obtenue ; et si ensuite on pose $dp/dx = d^2y/dx^2 = q$, puis $dq/dx = d^3y/dx^3= r$, puis encore $dr/dx = d^4y /dx^4 =s$ etc, la même méthode suffit pour trouver ces valeurs q, r, s, etc. Et il faut y ramener ce qu'on enseigne communément sur le calcul différentialo- différentiel et les différentielles d'ordre supérieur, leçons qui, si on les comprend comme il faut , ne contiennent rien du tout qu'on puisse opposer aux principes de notre connaissance(16) . Il arrive aussi , dans les éléments du calcul différentiel, que souvent plusieurs quantités variables interviennent et que les règles semblent devoir être rapportées aux parties qui les constituent successivement. Néanmoins en elles il y a toujours un certain lien, selon lequel en définitive toutes peuvent être considérées comme des fonctions d'une seule variable . Pourtant, dès lors, les règles de différentiation des parties suivantes ne sont pas différentes de celles de la première .

13. Quand au calcul intégral en général , je le définis de telle façon qu'il soit une méthode d'invention de la nature des fonctions à partir d'une relation quelconque donnée des différentielles. Je vais expliquer plus clairement cette définition dans le cas des fonctions d'une seule variable, avant d'en venir aux fonctions de plusieurs variables. Précisément, si je me donne pour fonction d'une seule variable dy/dx = p, dp/dx = q, dq/dx = r, etc, au cas où l'on propose une quelconque équation où, outre les quantités x et y, interviennent aussi ces p, q, r, etc qui dérivent des différentielles, on s'occupe de cette partie du calcul intégral qui consiste à obtenir à partir de cette équation ou relation des différentielles, compte tenu de la notion de la fonction y , la manière dont elle est déterminée par x; et cette opération est appelée habituellement intégration . Or, il s'en faut de beaucoup que cette méthode ait été jusqu'ici suffisament mise au point et, si nous pesons attentivement toutes les questions qui s'y rapportent, il y en a très peu qu'on peut résoudre grâce à elle. Elle est réglée par des préceptes différents, selon lesquels on l'utilise et qui dépendent de l'ordre des différentielles qui interviennent dans la relation donnée . Ainsi, si l'on pose une relation quelconque entre les quantités x, y, et p = dy/dx, équation que l'on appelle du premier ordre , l'intégration présente certainement plusieurs cas. Si, par contre, cette relation comprend en plus la quantité q, l'équation est appellée équation différentielle du deuxième ordre et il est besoin d'un double intégration avant d'arriver à la relation visée entre x et y, d'où l'on pourra connaître le calcul de cette fonction y. Ici , il y a beaucoup de cas qui permettent d'arriver au but, et ce qu'il faut penser des équations différentielles du troisième ordre et au-delà est évident du même coup.

14. Mais au sujet de ces intégrations , qui servent à trouver les fonctions d'une seule variable uniquement, un caractère particulier qui commande la nature principale de cette méthode doit être observé. Il consiste en ceci que l'équation intégrée contient chaque fois une certaine constante dont absolument aucune trace ne se manifeste dans l'équation différentielle et cette constante est laissée entièrement à notre discrétion . Par exemple si l'on pose cette équation différentielle

$$dy/dx = 2ax + b \qquad \text{ou bien} \quad dy = 2axdx + bdx,$$

où les lettres a et b représentent des constantes données, l'équation intégrale se présente ainsi dans tous les cas

$$y = ax^2 + bx + c$$

où c représente une constante qui n'a pas le moindre rapport avec les quantités précédentes et dont la valeur est laissée totalement à notre discrétion. Et l'intégration d'une quelconque équation différentielle ne peut être tenue pour complète et achevée si l'on n'y introduit pas une constante arbitraire de ce genre. De la même manière, si la relation proposée contient des différentielles du second ordre, parce qu'il y a besoin d'une double intégration, la solution complète doit contenir deux constantes arbitraires de ce genre. Ainsi trois constantes de ce genre sont nécessaires, si l'on résout parfaitement des équations différentielles du troisième ordre . A propos de ces constantes, il est à noter principalement leur lien intime avec la nature des problèmes .Tous ceux dont la résolution provient d'équations différentielles sont réglés de manière qu'après l'achèvement de l'intégration , ces constantes qui interviennent trouvent leur détermination à partir de la nature elle-même de la chose et des circonstances qui l'environnent.

15. S'ensuit la première partie de l'Analyse des infinis portant sur les fonctions d'une seule variable uniquement et à partir de cela on comprend beaucoup plus facilement ce qu'il faut affirmer des parties restantes, parmi lesquelles les fonctions de deux ou d'un plus grand nombre de variables . Quand aux différentielles, on leur trouve une structure différente, puisque celles-ci ne peuvent absolument pas se comparer entre elles . Car si z est une fonction quelconque de deux variables x et y, au sujet de la différentiation, la question doit être posée en deux temps. D'abord on cherche la différentielle de z alors que y garde la même valeur, l'autre variable x s'accroissant de sa différentielle dx, pour obtenir ainsi la valeur de la fraction dz/dx; puis on traite semblablement x en constante et on suppose que y prenne un accroissement dy, obtenant ainsi l'accroissement dz dont s'augmente la fonction z, et la fraction dz/dy représente le rapport différentiel né à partir de la variation de la seule quantité y . Ces deux fractions dz/dx et dz/dy, comme dans le cas précédent, n'admettent que de purs termes finis comme limites et toutes deux peuvent être considérées comme de nouvelles fonctions de deux variables x et y . Quand on a trouvé ces deux valeurs, on voit parfaitement le vrai rapport différentiel de la fonction posée z. En effet, il ressort évidemment de la réunion[17] de tout cela comment la différentielle de z se comporte par rapport à la variation des deux quantités x et y . La nature même de la chose appelle cette distinction, sans laquelle le rapport de différentiation des fonctions de ce genre ne peut même pas être compris, et qui maintenant s'impose d'elle-même .

16 . Pour ce qui donc regarde la différentiation des fonctions de deux variables, cela se ramène entièrement à ces deux formules jumelles dz/dx et dz/dy, dont les valeurs dans tous les cas se représentent par des termes finis à l'aide des deux variables x et y. Mais pour ne pas confondre les fractions de ce genre avec les précédentes, on a l'habitude de les mettre entre parenthèses

$$(dz/dx) \text{ et } (dz/dy) .$$

Si nous désignons ces fractions par les lettres p et q, on aura la différentielle complète de la fonction z ,

$$dz = pdx + qdy ,$$

et puisque p et q peuvent être à leur tour considérés comme des fonctions de x et y, on comprend aussi ce que veulent dire ces formules.

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)=\left(\frac{ddz}{dx^2}\right), \quad \left(\frac{dp}{dy}\right)=\left(\frac{ddz}{dxdy}\right), \quad \left(\frac{dq}{dx}\right)=\left(\frac{ddz}{dxdy}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{dq}{dy}\right)=\left(\frac{ddz}{dy^2}\right),$$

qui renferment en elles des différentielles du deuxième ordre et c'est semblablement que l'on parvient aux différentielles des ordres supérieurs . Par conséquent, si l'on pose une fonction quelconque z de deux variables x et y, le calcul différentiel détermine les règles par lesquelles les valeurs de ces formules différentielles peuvent être trouvées; à savoir, d'abord, celles du premier ordre qui sont

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) \text{ et } \left(\frac{dz}{dy}\right),$$

puis celles du deuxième ordre qui sont (18)

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right), \left(\frac{ddz}{dxdy}\right) \text{ et } \left(\frac{ddz}{dy^2}\right),$$

celles du troisième ordre qui sont

$$\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right), \left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right), \left(\frac{d^3z}{dxdy^2}\right), \left(\frac{d^3z}{dy^3}\right)$$

et ainsi de suite . Là, il faut noter que la méthode même pour définir ces formules ne jure pas avec la première partie, puique en n'importe quelle différentiation il y a une unique quantité prise pour variable . Il serait superflu d'exposer ces mêmes variations au sujet des fonctions de trois variables et plus, puisqu'elles proviennent à l' évidence de ce qu'on a déjà expliqué.

17. La tâche du calcul intégral consiste en ceci. Si l'on pose une relation quelconque entre les quantités x, y, z, et les formules différentielles évoquées à l'instant, on doit en déduire la nature de la fonction z et la manière de la construire à partir des variables x et y . Quant à la relation donnée , elle s'exprime par une équation différentielle qui, si elle renferme seulement des formules différentielles du premier ordre

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) \text{ et } \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

outre les quantités x, y, et z, sera dite du premier ordre. Si, au contraire il entre dans cette équation en plus des formules différentielles du second ordre

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right), \left(\frac{ddz}{dxdy}\right), \left(\frac{ddz}{dy^2}\right),$$

ou, ensuite, du troisième et plus, alors cette équation sera dite du même ordre différentiel . Voilà la forme générale du calcul intégral, en tant qu'il s'occupe de fonctions de deux variables; ce qui permet de comprendre comment les parties restantes de l'Analyse des infinis, dans lesquelles on traite des fonctions de trois variables et plus, doivent être définies. Mais le calcul intégral particulier aux fonctions de deux variables diffère beaucoup du calcul intégral ordinaire où n'interviennent que des fonctions d'une seule variable et il demande des préceptes tout à fait spéciaux, à ceci près que toutes les astuces du calcul ordinaire doivent être mises également en pratique. Mais comme il n'y a pas longtemps que cette partie de l'Analyse a commencé d'être travaillée, ses premiers éléments sont présentement à peine suffisamment mis au point(19). On trouve, il est vrai, de magnifiques exemples de ce calcul déjà un peu partout, dont la mise au net est très peu astreinte aux règles du calcul ordinaire. D'où un très vaste champ est ouvert, où les plus grands génies pourront exercer leurs forces pour le plus grand accroissement de la science.

18. La force de ce nouveau calcul, et son caractère pour ainsi dire propre, n'a nullement, semble-t-il, été exploré jusqu'ici d'une manière suffisante. Tout comme, en effet, la force du calcul intégral commun consiste en ce qu'en n'importe quelle intégration une nouvelle constante introduite dans le calcul est laissée à notre discrétion, ainsi en la partie qui s'occupe des fonctions de deux variables, dans chaque intégration c'est non seulement une nouvelle constante, mais encore une nouvelle fonction tout à fait indéterminée d'une certaine variable qui entre dans le calcul, et qui est tellement soumise à notre discrétion que l'on peut même prendre à sa place des fonctions discontinues. C'est pourquoi l'usage des fonctions discontinues, non seulement n'est pas exclu de ce genre presque nouveau de calcul, mais encore il faut juger qu'il appartient essentiellement à sa nature. De plus, aucune intégration dans ce calcul ne peut être considérée comme complète et parfaite, si l'on n'a pas introduit dans une solution intégrale de ce genre une fonction complètement arbitraire. Et si l'on pose une équation différentielle du deuxième ordre ou plus, de telle sorte qu'il y a besoin de deux ou plusieurs intégrations, il est nécessaire que l'on trouve exactement autant de fonctions arbitraires dans l'équation intégrale finale et si cela ne se fait pas, l'intégrale ne peut pas plus être considérée comme complète que, dans le calcul intégral ordinaire, quand on oublie d'introduire des constantes arbitraires . Quand il s'agit de fonctions de trois variables, à chaque intégration , une fonction arbitraire de deux variables est introduite dans le calcul, et ce calcul se distingue à ce point des précédents qu'il faut le tenir pour constituant un genre particulier, puisque la nature de chaque genre se distingue très proprement à partir de la nature de la quantité arbitraire introduite dans l'intégration . Si alors on en vient au cas des fonctions de quatre variables, cette quantité arbitraire qui doit être introduite dans n'importe quelle intégration devient fonction de trois variables, et ainsi de suite .

19. Cela ne doit nullement être attribué à quelque subtilité du calcul, qui n'aurait absolument aucun usage et servirait seulement à une vaine spéculation. Plutôt,les natures des objets mathématiques sont tout à fait fondées et sont en harmonie merveilleuse avec la suite logique des vérités. De la même façon, en effet, que tous les problèmes touchant les fonctions d'une seule variable, c'est-à-dire du genre dont provient presque tous ceux qui jusqu'ici ont été étudiés en Analyse, ne trouvent une solution parfaite que si dans n'importe quelle intégration une nouvelle constante est introduite, constante qu'il faut pour la suite déterminer à partir des données particulières du problème , de même, tous les problèmes aussi dont la solution conduit à des fonctions de deux variables, sont par nature ainsi établis que, si l'on ne fait pas entrer dans n'importe quelle intégrale une nouvelle fonction arbitraire ou indéfinie d'une seule variable, il est impossible de satisfaire à toutes les conditions déterminant le problème. On trouve un excellent exemple de ce fait dans le problème des cordes vibrantes. Si, en effet, l'on pose que l'élongation de chaque point de la corde, qui est à la distance égale à x de l'une des deux extrémités au temps t à son état d'équilibre , est égale à z, il est évident que z est fonction des deux variables t et x, parce que de toute façon cette élongation varie autant en fonction des divers points de la corde qu'en fonction du temps écoulé . Donc, puisque quand l'on se donne le temps t égal à zéro, doit apparaître l'état de la corde qui a été produit initialement et où l'élongation z était égale à une fonction donnée de l'intervalle x, il est impossible d'avoir une solution parfaite si elle ne contient pas une fonction indéfinie capable, par la suite , de pouvoir être définie à partir de l'état initial de la corde . Et puique cet état dépend de notre arbitraire au point qu'on puisse faire intervenir une figure irrégulière et discontinue de la corde, cette même fonction introduite par l'Analyse doit être assez ouverte pour qu'elle renferme aussi bien des discontinuités, c'est- à-dire des objets qui répugnent à la loi de continuité

20. Afin qu'il n'y ait lieu à aucun doute, je vais exposer un problème de ce genre de sorte que la solution se déduise si facilement des éléments et qui se présente de telle manière qu'il faille admettre nécessairement dans cette solution des fonctions discontinues , c'est-à-dire des courbes tracées arbitrairement. Ensuite je résoudrai ce même problème analytiquement pour que, par là , apparaisse plus clairement la nécessité des fonctions arbitraires, intervenant dans l'intégration en accord avec la solution précédente. Voici comment se présente le problème

"Il s'agit de trouver tous les solides à la surface desquels , pour tous les points, les normales tracées sont de même quantité "[20] .

Lorsqu'il s'agit de lignes, on sait que , hormis le cercle, il n'existe aucune courbe dont toutes les normales sont égales entre elles [21]. Or si nous étendons cette égalité des normales aux solides, comme toutes les droites, tracées à partir d'un plan de base normalement à la surface, doivent être égales entre elles, on pourra exhiber une infinité de solides pour lesquels cette propriété a lieu. D'abord , naturellement , cela se produit avec l'hémisphère , voire la sphère , dont le centre est situé dans le plan de base puisque toutes les normales prises en bloc sont des rayons de la sphère. Ensuite, si l'on dispose un cylindre de telle sorte que le plan de base contienne l'axe , toutes les normales aussi seront trouvées égales entre elles. De là, on obtient une solution beaucoup plus large, puisque tout en conservant cette propriété, on peut incurver à volonté l'axe du cylindre. On peut alors énoncer cette solution générale de la façon suivante. Il s'agit de n'importe quelle courbe décrite dans un plan fixe, qu'elle soit continue ou discontinue, à partir de laquelle on élève un solide constitué de telle façon que toutes les sections normales par rapport à cette ligne soient des demi-cercles[22] dont le centre appartienne à cette ligne. De sorte que si une solution analytique n'est pas suffisamment ouverte pour contenir en soi une ligne tracée arbitrairement, ou ce qui revient au même une fonction indéfinie, elle ne saurait nullement être considérée comme parfaite et définitive.

21. Posant donc deux coordonnées prises dans le plan fixe x et y, la perpendiculaire élevée de là à la superficie cherchée est égale à z. Parce que z est considérée comme une fonction des deux variables x et y, il vient les formules différentielles

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = p \quad \text{et} \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = q\,,$$

afin que l'on ait $dz = pdx + qdy$. De ceci, on déduit la normale érigée entre la superficie et le plan toujours fixe

$$= z\sqrt{(1 + pp + qq)}\,;$$

et puisque celle-ci doit avoir une grandeur constante, posons

$$z\sqrt{(1 + pp + qq)} = a.$$

Il faut étudier une fonction z de ce genre à deux variables x et y, de sorte que la condition, qui est une équation différentielle du premier ordre, soit remplie. Pour parvenir plus facilement à la résolution par intégration, nous utiliserons les substitutions suivantes[23]

$$p = \frac{\sin.\Phi \cos.\omega}{\cos.\Phi} \quad \text{et} \quad q = \frac{\sin.\Phi \sin.\omega}{\cos.\Phi}\,,$$

pour qu'il vienne

$$pp + qq = \frac{\sin.\Phi^2}{\cos.\Phi^2}\,,$$

et par conséquent

$$\frac{z}{\cos.\Phi} = a \qquad \text{ou} \qquad z = a\cos.\Phi.$$

De sorte que l'équation différentielle posée est transformée en la suivante[24]

$$-\,a d\Phi \sin.\Phi = \frac{\sin.\Phi}{\cos.\Phi}(dx\cos.\omega + dy\sin.\omega),$$

ou encore

$$-\,a d\Phi \cos.\Phi = dx\cos.\omega + dy\sin.\omega,$$

où, puisque le membre de gauche est intégrable, de même le membre de droite doit l'être . Cette condition établit une certaine relation[25] entre les variables x, y . Dès lors , en intégrant, nous obtenons

$$-a\sin.\Phi = x\cos.\omega + y\sin.\omega - \int d\omega\,(y\cos.\omega - x\sin.\omega).$$

Il est évident[26] que l' intégrale ne peut être trouvée que si la formule $y\cos.\omega - x\sin.\omega$ est une fonction de la seule variable ω . Si donc l'on pose

$$y\cos.\omega - x\sin.\omega = F' : \omega,$$

de sorte que

$$\int d\omega\,(y\cos.\omega - x\sin.\omega) = F : \omega,$$

on aura

$$-\,a\sin.\Phi = x\cos.\omega + y\sin.\omega - F : \omega.$$

Si Ω représente une fonction quelconque de , tout à fait indéfinie, de telle sorte que par là même les fonctions discontinues ne soient pas exclues et si l'on pose $F' : \omega = \Omega$, on aura $F : \omega = \int \Omega d\omega$. La solution du problème, grâce à $\Phi = \sqrt{(aa - zz)}$,est contenue dans les équations

$$y\cos.\omega - x\sin.\omega \text{ et } \sqrt{(aa - zz)} = \int \Omega\, d\omega - x\cos.\omega - y\sin.\omega,$$

où même le radical peut- être pris négativement ou positivement.

22. Voyons maintenant comment ces formules peuvent conduire à une construction . Que cette tablette représente le plan constituant la base fixe du corps cherché, où se trouveront (cf fig.) les deux coordonnées $AX = x$ et $XY = y$, de façon qu'au point Y tombe perpendiculairement la troisième coordonnée z. Dans ce même plan , la droite AO coupe perpendiculairement l'axe AX et on trace la droite AP , de façon que l'angle $OAP = \omega$, et que sur cette droite parte la normale YP . On aura

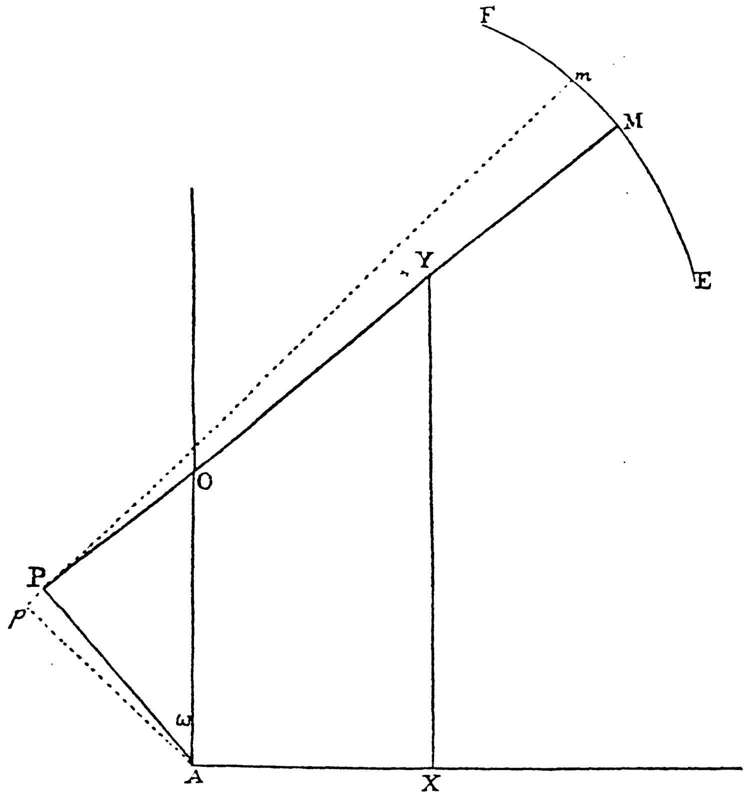
$$AP = y \cos . \omega - x \sin . \omega \quad \text{et} \quad PY = y \sin . \omega + x \cos . \omega.$$

Si l'on introduit ces lignes dans le calcul , nos deux équations se représentent ainsi :

$$AP = \Omega \quad \text{et } PY + \sqrt{(aa - zz)} = \int \Omega \, d\omega.$$

Que l'on prolonge donc la droite PY en M, pour avoir $YM = \sqrt{aa-zz}$ et que, pour cette raison, on ait $PM = \int \Omega \, d\omega$, relation précisément établie entre les lignes AP et PM . Puisque maintenant , dans une situation voisine, l'angle OAP est augmenté de sa différentielle $PAp = d\omega$, il y a un petit arc décrit par le rayon AP, de telle sorte que l'on ait $Pp = \Omega \, d\omega$. Ce petit arc donnera en même temps la différentielle de la ligne MP, de telle sorte que l'on ait $pm = PM + Pp$, à partir de quoi l'on comprend que la droite PM se termine à l'une des deux extrémités M en une courbe du genre EMF, vis à vis de laquelle celle-ci est toujours normale, propriété qui renferme toute notre solution analytique[27] . C'est pourquoi il faudra établir ainsi la construction : Si l'on décrit arbitrairement une courbe quelconque EMF, et peu importe si elle est continue ou non , et qu'on mène à tous les points de celle-ci les normales MP que l'on prolonge des deux côtés; qu'à partir de ces droites soient dressées verticalement en chaque point les perpendiculaires $YZ = z$, de telle manière qu'on ait $YZ^2 + MY^2 = a^2$, ce qui arrivera si à partir de chaque centre M l'on décrit avec un rayon égal à a, auquel les normales doivent être égales, des cercles dans les plans normaux à la base et à la courbe EMF . Car les périphéries de ces cercles seront posées sur la surface du corps cherché, et les droites normales à cette surface seront toutes égales à a et tomberont toutes sur la ligne EMP arbitrairement tracée.

23. Quand on fait un tout petit peu attention, on voit avec évidence que cette construction , fondée entièrement sur la solution analytique, correspond exactement à la construction précédente, que la seule considération des données avait fournie. Il est, en effet, manifeste qu'on construira un corps de telle façon que toutes ses intersections faites normalement à la ligne EMF sont des cercles égaux entre eux ayant leurs centres sur cette ligne même. Grâce à la concordance des deux solutions, il faut noter qu' une solution analytique ne sera pas complète si la fonction Ω comprise dans l'intégration n'est pas très largement ouverte et si elle ne contient pas en elle à ce point toutes les valeurs sans exception, tant continues que discontinues, puisqu'aussi bien la ligne EMF qui correspond à la fonction Ω est complètement laissée à notre discrétion et que l'on peut même se servir de lignes tracées à la main librement. Ce qui a été montré au sujet de ce problème vaut pour tous les autres du même genre, c'est à dire ceux dont le solution renferme des fonctions de deux variables . A partir de cela, la question que nous nous posions au début , au sujet de l'usage des fonctions discontinues en l'Analyse , a été résolue de telle façon que, sans doute, dans l'Analyse commune qui ne porte que sur des fonctions d' une seule variable, il ne peut être question de faire une place à des fonctions de ce genre. Mais dans les parties sublimes de l'Analyse, où l'on traite des fonctions à deux variables et plus, de telle fonctions doivent être considérées comme tellement liées nécessairement à l'essence du calcul, qu'aucune intégration ne peut être considérée comme définitive et complète si en même temps n'est introduite dans le calcul une fonction tout à fait indéfinie et même de plus discontinue.



Sommaire

Les géomètres qui ont donné des solutions concernant le mouvement vibratoire des cordes ne se sont préoccupés que du cas où la figure de la corde, donnée au début du mouvement, est supposée être régulière et comprise en une certaine équation précise. Quant à l'autre cas où cette figure serait discontinue ou irrégulière, ils ont nié qu'il soit du ressort de l'Analyse ou que les mouvements qui s'ensuivent puissent être définis par un quelconque calcul. Or, puisque cette recherche non seulement ne doit pas du tout être rejetée du domaine de l'Analyse, mais plutôt semble capable au plus haut point de l'enrichir de nouveaux moyens remarquables, déjà l'Auteur Illustre de cet article a défini le mouvement des cordes vibrantes de façon tellement universelle , que sa solution s'étend à tous les mouvements et figures d'une corde donnés à l'état initial. Mais cet Illustre Monsieur s'est clairement aperçu sur le champ que les difficultés du problème dépassaient les moyens déjà employés de l'Analyse et requéraient, pour le résoudre, une branche du calcul intégral. De ce calcul , non seulement il a donné dans ce recueil une infinité d'exemples, mais aussi en a inséré un traité exhaustif dans une oeuvre magistrale sur le calcul intégral, qui en ce moment est sous presse ici même.[28]

Donc qu'on se représente une corde tendue quelconque, qu'on lui donne une quelconque figure arbitraire et à un même instant une vitesse arbitraire en chacun de ses points. Si l'on mène les coordonnées x et y, il est évident que l'ordonnée varie en fonction de chacun des moments du temps (pris un à un) non seulement pour les différents points de la courbe, mais encore pour un même point de la courbe. Ainsi y sera fonction en même temps des deux variables x et t , dont aucune n'est déterminée par l'autre. D'autre part, afin que l'état initial soit exprimé quand on pose t=0 dans l'équation trouvée pour le mouvement de cette corde. La relation entre x et y qui s'ensuit devra représenter la figure initiale de la corde. Si on la suppose formée par une main qui écrit au hasard, une fonction discontinue entrera dans l'équation et en même temps, pour qu'elle satisfasse à la seconde condition du problème, il faut qu'intervienne une autre fonction arbitraire elle-aussi, qu'on doit définir à partir du mouvement initial donné en n'importe quel point. Voilà donc deux raisons pour lesquelles le problème posé ne saurait être résolu par les règles du calcul intégral normal. Car dans celui-ci on ne s'occupe que de fonctions d'une variable , puisque , même si l'on se rend compte qu'il y a plusieurs variables dans l'équation (introduites par des substitutions ou des transformations), ces variables y interviennent de telle façon que toutes peuvent être déterminées par l'intermédiaire d'une seule.[29] Par suite, les nouvelles quantités qui sont conduites à intervenir dans le calcul intégral usuel ne sont que des constantes, mais pas du tout des fonctions d'une ou de plusieurs variables et des fonctions qui plus est discontinues.

Donc le pouvoir et le caractère propre de cette nouvelle Analyse, l'Illustre Auteur les a exposés avec la dernière clarté et à partir des premiers principes.[30] Et puisque les diverses classes de fonctions fournissent une division très commode du calcul intégral tout entier, en partant de cette base , il a distingué les parties de cette science si ample, les a définies et a démontré par des exemples l'usage des fonctions discontinues en Analyse. Voici par conséquent un champ neuf, plus que largement ouvert, dans lequel les esprits les plus distingués peuvent se servir de leurs talents pour enrichir l'Analyse et, ensuite, obtenir des succès plus heureux dans l'étude de la Nature.[31]

Notes sur la traduction française

(1)Le **De usu functionum discontinuarum in analysi** se trouve aussi dans **Leonhardi Euleri Opera Omnia**, Commentationes analyticae, ad theoriam aequationum differentialium pertinentes, Bâle, 1938, H. Dulac(ed.), vol.23, première série. La présente traduction du texte d'Euler est dûe à la colaboration de M.R.Violette, professeur de Latin à la Faculté des Lettres de l'Université de Nantes et je tiens à le remercier. Nous avons placé le résumé , vraisemblablement composé par Euler lui-même , à la fin de la traduction.

(2) Ce vocabulaire de loi fut déjà utilisé par Euler à propos des fonctions. On le trouve par exemple dans **De insigne promotione methodi tangentium inversae**(*Nova Comm. Sc. Petrop.*10(1764),1766,pp.135-155; **Opera Omnia**, Pars 1,vol. 27,pp. 365-383). Une traduction en français et un commentaire font l'objet de l'article donné à la référence (17).

(3) Euler range sous le nom de fonctions celle qui sont multivoques, même d'ailleurs les fonctions infinitiformes (cf **Introductio**, chap 1 ,§10).
" *Deinde potissimum terrenda est Functionum divisio in Uniformes ac Multiformes*".
"*Functio autem Multiformis est, quae, pro unoquoque valore determinato in locum variabilis z substituto, plures valores determinatos exhibet*".
Une fonction est définie partout sur le plan complexe et y prend toutes les valeurs complexes. Ce qui permet de passer à la fonction réciproque sans aucune difficulté de principe.
"*Si fuerit y Functio quaecunque ipsius z; tum vicissim z erit Functio ipsius y .*"(**Introductio**, chap. 1, §16).
Dans le cadre de la représentation géométrique des courbes, si seules sont "visibles" certaines parties qui correspondent à des valeurs réelles, la formule analytique doit être considérée comme un tout qui a l'avantage de désigner les passages du réel à l'imaginaire. L'analytique prime donc la géométrie et si " l*a nature des fonctions peut très avantageusement être représentée par des courbes*" , c'est seulement grâce à un soutien visuel.

(4) La géométrie sublime("*Iam vero notissimum est, in Geometria subliomiori..*") est celle des courbes, avec comme méthodes le calcul différentiel et le calcul intégral. Dans l'**Encyclopédie méthodique** (A Paris, chez Panckoucke, 1785) , d'Alembert après avoir distingué entre la géométrie élémentaire qui s'occupe des lignes droites ou circulaires et la géométrie transcendante chargée des autre courbes , indique que le vocable moderne de géométrie sublime signe l'utilisation des " *nouveaux calculs*" sans se borner " *à la synthèse des Anciens ou à la simple application de l'analyse ordinaire* ". L'étape de l'analyse algébrique d'Euler est ainsi gommée (cf texte introductif).

(5) Dans l'**Introductio** (chap.I, § 7), Euler divise les fonctions en algébriques et transcendantes selon qu'interviennent dans la loi de formation des opérations algébriques seulement ou en outre des opérations transcendantes. Euler donne l'exemple de $Z^4 = a z^2 Z^3 - bz^4 Z^2 + c z^3 Z - 1$ comme fonction algébrique Z en z. **L'Encyclopédie Méthodique** de 1785 ignore cette distinction à l'article " fonction" , mais la retrouve à l'article " équation" sous la forme suivante, qui ne constitue pas un progrès dans la classification.

"*Equations transcendantes sont celles qui ne renferment point, comme les équations algébriques, des quantités finies, mais des différentielles ou fluxions de quantités finies.*"

Euler , au chapitre VI de l'**Introductio** , paraissait suivre cette distinction en expliquant que les fonctions transcendantes relèvent du calcul intégral.

"*Quanquam notio Functionum transcendentium in calculi integrali demum perpendetur...*".

Mais de fait, par l'uniformité du développement en série entière, il traitait ces fonctions dans le cadre de l'analyse algébrique(cf texte introductif). Que la fonction y = sin x ne soit pas une fonction algébrique était un fait bien connu depuis la XVIIème siècle puisqu'à une valeur y donnée correspond une infinité de valeurs de x.

(6) De même que les fonctions peuvent être multivoques selon Euler, la loi de formation de la fonction peut n'être qu'implicite, donc inconnue si l'on prend cette expression dans le sens de non exactement calculable. Ainsi en est-il d' une fonction qui est fournie comme racine d'un polynôme.

(7) Euler utilise, en le trahissant volontairement, le vocabulaire de Descartes. Voir texte introductif.

(8) Dans l'**Encyclopédie Méthodique** , à l'entrée "courbe ", on lit qu'un assemblage de lignes droites qui font angle " *n'est pas à proprement parler une courbe*". La rubrique des courbes "mixtes" , qu'ouvre pourrait-on dire le présent article d'Euler à première lecture, a une histoire plutôt confuse

(9) J.d'Alembert, **Opuscules Mathématiques**, tome 1, Paris, 1761 (pp.32-64); tome 4, Paris, 1768 (p175); *Mémoires Acad. Berlin*, 19, 1763, pp. 235-277. Il y a aussi des lettres échangées entre Euler et d'Alembert sur ce sujet. Voir **Opera Omnia**, Series quarta A, **Correspondance de L. Euler avec A.C.Clairaut, J.d'Alembert et J.L LAgrange**, A.P Juskevic et R.Taton (éditeurs) .Voir aussi le livre de A.C.Truesdell dans les oeuvres d'Euler , signalé à la note (5) du commentaire introductif.

(10)J.L. Lagrange, Nouvelles recherches sur la nature et la propagation du son, *Misc. Taurin*, tomme II, voir **Oeuvres** de Lagrange, tome I, Paris, 1867.

(11) Reyneau , par exemple , définit au début du XVIIIème siècle les mathématiques de la façon suivante: " *C'est la science qui a pour objet les propriétés de la grandeur en tant qu'elle est calculable ou mesurable*." Les grandeurs mesurables ou calculables sont des quantités.

(12)cf note (3): on peut prendre la réciproque de toute fonction.

(13) " *Deinde hoc augmentum continuo imminui concipitur , donec tandem prorsus evanescat, ...*"
Le mot continu est pris par Euler dans deux sens différents. Pour qualifier des fonctions d'une part, mais aussi pour indiquer un mouvement ou accroissement de la variable d'autre part. Le seul lien entre les deux sens est celui, plutôt vague , de l'uniformité.

(14) dy/dx a un sens comme rapport quantitatif, et dy ou dx ne sont que des notations. Toute une justification des fondements du calcul différentiel au XVIIIème siècle revient à expliquer que l'on met seulement en oeuvre la théorie des proportions, par des rapports ou raisons. Il s'agit d'égaler un rapport de quantités qui tendent vers 0 à un autre rapport qui lui est fini: l'image géométrique du triangle caractéristique est la plus parlante à cet égard. Ce faisant, on a l'impression de ne pas s'éloigner trop de la méthode d'exhaustion des Anciens qui fait usage des proportions: on se contente de remplacer par un raisonnement direct ce qui était obligatoirement un raisonnement par l'absurde.

(15) "*semper ad proportionem differentialum, cuius realitas nulli dubio est subiecta..*"
Euler utilise sciemment le mot de proportion , qui fleure bon la rigueur euclidienne , pour désigner en fait un rapport (une raison). Une proportion est une identité de raisons , selon une définition du livre V. Mais dès le XVIIème siècle , et même avant avec Clavius, le langage confondra une proportion et une raison.

(16) Euler fait certainement allusion aux nombreuses critiques contre le calcul différentiel, comme celles en 1734 de G.Berkeley dans **The Analyst, or a discourse adressed to an infidel mathematicain**.

(17) Dans le cadre des fonctions d'une variable, Euler a établi que le calcul différentiel "marche" sans qu'il soit besoin de préciser la variable indépendante : tel est l'avantage majeur du théorème de dérivation d'une fonction de fonction. Le résultat pratique est la possibilité d'effectuer tous les paramétrages qui paraisssent les plus aptes à faciliter le calcul: nous verrons plus loin un tel effet pour la solution d'une équation aux dérivées partielles. Dans les **Institutiones Calculi Differentialis**,

Euler présente alors la dérivation d'un produit de deux fonctions fg comme la réunion , par la somme , de deux différentielles, chacune calculée en envisageant chaque fonction séparément , l' autre étant considérée comme une constante. D'où les formes fdg et gdf. Soit au total d(fg) = fdg + gdf. Cette règle devient une règle générale pour le calcul différentiel. Elle passe au cas de plusieurs variables sous la forme

$$df = (\partial f/\partial x)\,dx + (\partial f/\partial y)\,dy,$$

puisque a fortiori les variables x et y sont indépendantes.

(18) On aura remarqué qu'Euler ne distingue plus entre ddz/dxdy et ddz/dydx. De fait , il avait "démontré" précédemment l'égalité des deux dérivées partielles dans un travail de 1734/35 publié seulement en 1740(*Comment.Acad.Sci.Petrop.*, pp.174_193; tome 22, première série de **Opera Omnia**, pp36-56). Voir aussi un article aux *Novi Comm. Acad. Sc. Petrop.*9, 1764, p.175 et suivantes (§10 intitulé Investigatio functionum ex data differentialium conditione). Euler reprendra systématiquement les choses dans son Traité de calcul intégral (tome III, § 77). Visiblement , dans l'article que nous décrivons, Euler ne s'adresse pas à des néophytes et il n'éprouve pas le besoin de rappeler des choses connues de tous ceux qui font de l'analyse: en fait il entreprend une construction nouvelle de cette branche . Cette construction ne peut se comprendre que si l'on suit les travaux en cours.

Le symbolisme (df/dx) , pour désigner (∂f/∂x) , sera conservé assez longtemps par les mathématiciens. Euler dans les **Institutiones calculi differentialis** le garde(cf page 195), en utilisant les parenthèses alors qu'avec une seule variable il n'y a pas nécessité des parenthèses. Le symbolisme moderne en ∂ sera systématique chez A.M.Legendre, dans un article paru en 1788, mais il ne s'y tint pas. De nombreuses notations furent alors utilisées par les uns et les autres. C'est vraisemblablement Jacobi qui , reprenant des écritures antérieures , convainquit les mathématiciens de s'en tenir au symbolisme en ∂ (**De determinantibus functionalibus**, ***Journal für die reine und angewandte Mathematik***, **vol XXII,1841, pp.319**).

(19) Une histoire de l'analyse à plusieurs variables reste à écrire, mettant à leur place des contributions comme celle de Fontaine ou celle de Stokes. Voir le fascicule de l'**Encyclopédie des sciences mathématiques** qui donne des références précises et particulièrement utiles

(20) Euler prend un plan de référence et en disant que les normales tracées sont de même quantité , il signifie la constance de la longueur découpée sur la normale entre le point d'intersection de cette normale avec le plan et le point sur la surface.

(21) Dans le cas d'une courbe plane, l'équation différentielle correspondante s'écrit

$$y^2 y'^2 + y^2 = a^2$$

puisqu'elle désigne la constance du segment de normale. Cette équation différentielle est à variables séparées et la solution générale est

$$y^2 + (x-b)^2 = a^2,$$

où intervient bien une constante arbitraire b. Euler a déjà traité cette équation différentielle, dont la solution générale donne des cercles de rayon a , tous centrés sur l'axe (c'est la liberté du centre qui est reflétée par la constante b). Toutefois il existe aussi les droites $y = \pm a$ comme solutions: elles sont négligées par Euler et correspondent à des droites parallèles à l'axe.

(22) Euler n'examine que la partie de la surface située au-dessus du plan de référence.

(23) La paramétrisation fait naturellement intervenir deux paramètres indépendants Φ et ω, qui remplacent les variables indépendantes x et y.

(24) Euler écrit la différentielle de z en effectuant deux calculs distincts. Il différentie d'une part selon $dz = a\, d(\cos\Phi)$, et d'autre part utilise $dz = p dx + q\, dy$ puisque p et q furent donnés en fonction des paramètres Φ et ω.

(25) On peut expliciter cette relation entre x, y, ω et Φ sious la forme d'un système

$$(\partial x/\partial\omega) \cos\omega + (\partial y/\partial\omega) \sin\omega = 0$$

$$(\partial x/\partial\Phi) \cos\omega + (\partial y/\partial\Phi) \sin\omega = -a \cos\Phi$$

ou encore $d(x \cos\omega + y\cos\omega + a \sin\Phi) = (y \cos\omega - x \sin\omega)\, d\omega$.

(26) Posons $x \cos\omega + y \sin\omega + a \sin\Phi = F(\omega, \Phi)$, une fonction de deux variables indépendantes ω et Φ. On constate, d'après le système obtenu à la note précédente , que $\partial F/\partial\Phi = 0$. La fonction F est donc fonction seulement de ω et $\partial F / \partial\omega = (dF/d\omega) = y \cos\omega - x \sin\omega$, ce qui est précisément le résultat d'Euler .

(27) cf texte introductif pour une démonstration analytique.

(28)Il s'agit des **Institutiones Calculi Integralis** dont les deux premiers tomes parurent en 1768 à Saint-Pétersbourg et le troisième en 1770. Voir **Opera Omnia**, series I;, Vol 13.

(29) Le résumé insiste bien sur l'indépendance des variables. Si deux

variables dépendent toutes deux d'une même variable, on a seulement une seule variable en jeu.

(30)Il faut souligner l'expression utilisée de "premiers principes" . Euler entend bien constituer une branche spécifique du calcul intégral , fondée en rigueur.

(31) Les mathématiques contribuent à l'explication de la Nature.