CAHIERS DU SÉMINAIRE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

JEAN DHOMBRES

Un texte d'Euler sur les fonctions continues et les fonctions discontinues, véritable programme d'organisation de l'analyse au 18e siècle

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1re série, tome 9 (1988), p. 23-68

<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1988__9__23_0>

Un texte d'Euler sur les fonctions continues et les fonctions discontinues, véritable programme d'organisation de l'analyse au 18e siècle.

Jean Dhombres *

1 . La crise fonctionnelle au XVIIIème siècle

1.1 Cadre général

1.2 Exemple des cordes vibrantes

1.3 Exemple de la composition des forces

1.4 Exemple de la formule du binôme de Newton

2. Les fonctions continues selon Euler

2.1 Définition

2.2 Validité de la définition

2.3 L'hésitation entre deux approches des fonctions

2.4 L'Analyse considérée dans son extension légitime

3. L'architecture du texte d'Euler

3.1 Ordre des arguments

3.2 Une classification des fonctions: solution générale

3.3 Structure de l'analyse différentielle et intégrale

4. L'exemple géométrique choisi par Euler

4.1 Reconstitution possible de la démarche d'Euler

4.2 Solution géométrique

4.3 Solution analytique: les trois premières étapes

4.4 Construction géométrique déduite de la solution analytique

4.5 Podaire d'une courbe par rapport à un point

Conclusion: la postérité du texte d'Euler

Traduction française du texte d'Euler et notes sur la traduction

* Conférence donnée le 11 février 1987 au Séminaire d'histoire des mathématiques.

Un texte d'Euler sur les fonctions continues et les fonctions discontinues, véritable programme d'organisation de l'analyse au 18e siècle.

Jean Dhombres

Centre d'histoire des sciences et des techniques

Institut de mathématiques et d'informatique

(Université de Nantes)

"La vérité a une structure, si on peut dire, de fiction."
J. Lacan, *La relation d'objet* (Séminaire, 27 mars 1957)

En 1767, paraît dans les Nouveaux Commentaires de l'Académie de Saint-Pétersbourg un texte d'Euler , présenté deux années auparavant, et qui sera notre objet d'étude. Il s'agit du **De usu functionum discontinuarum in analysi** (De l'utilisation des fonctions discontinues en analyse). Lors de sa présentation à l'Académie, Euler vivait encore à Berlin, y étant arrivé vingt-cinq années plus tôt, à l'appel de Frédéric le Grand qui le pressait de quitter Saint-Pétersbourg, ville qu'il rejoindra à nouveau en 1766. A 58 ans , Euler est le mathématicien dominant de l'Europe, tant par l'abondance et la variété de sa production que par sa renommée établie grâce à quelques traités majeurs : sur la mécanique(1736), sur l'analyse des infinis (1748), sur le calcul différentiel (1755). Viendra bientôt le grand traité sur le calcul intégral(1768-1770).

1. La crise fonctionnelle.

1.1 Le cadre général de la crise fonctionnelle

Le texte que nous particularisons s'inscrit dans une des crises épistémologiques les plus notables et les plus durables du 18è siècle mathématique. Elle concerne le statut , l'utilité et l'extension possible des fonctions. Depuis l'**Introductio in analysin infinitorum**, celles-ci sont effectivement considérées comme l'objet d'étude par excellence de l'analyse(1). Mais la généralité de plus en plus grande des définitions qui en sont données contredit les restrictions auxquelles ces définitions sont soumises sur le plan pratique, dès lors qu'il s'agit de travailler sur des cas fonctionnels concrets. Cette contradiction est le vice fondamental de la méthode fonctionnelle dont on pensait pourtant qu'elle constituerait la méthode analytique par excellence.

Cette méthode fonctionnelle consiste à résumer analytiquement un problème donné en introduisant une ou des fonctions inconnues (1ère phase), puis à relier fonctions et données du problème par une ou des équations les concernant (2ème phase), à résoudre ces équations, d'ailleurs de manière indépendante du problème posé (3ème phase) pour aboutir en définitive à l'application au problème originel (4ème phase). Les équations liant la ou les fonctions introduites lors de la première phase sont des équations fonctionnelles, et ce vocable inclut les équations différentielles, les équations aux différences finies ou les équations aux dérivées partielles. Le vice dont nous parlions pour cette méthode est une contradiction entre la généralité nécessaire sur les fonctions inconnues pour la mise en équation de la première étape et la restriction tout autant nécessaire sur ces fonctions pour l'obtention effective de solutions lors de la troisième étape. Car généralement la méthode exige la prise en compte de toutes les solutions de l'équation fonctionnelle introduite, sans aucune restriction, quitte à éliminer à la dernière étape celles des solutions qui ne relèvent pas du problème posé.

Cette même contradiction était déjà en partie à l'oeuvre dans l'**Art analytique** de Viète qui lança la méthode analytique vers 1593. Nous pensons que la méthode fonctionnelle est un prolongement conscient de cette méthode analytique, et que la gêne de la première mouture fut amplifiée pour la seconde. Dans la méthode analytique de Viète , les quatre phases ou étapes précédentes sont effectivement présentes. A titre d'illustration historique, on pourra en vérifier la progression(2) sur l'exemple du problème de Pappus traité par Descartes dans sa **Géométrie** de 1637 au livre 2. Dans cet "art analytique" , l'inconnue ou les inconnues sont des nombres , non des objets plus riches comme des fonctions , et les équations qui gouvernent ces nombres ne sont que des équations

---

(1)Dans la préface de cet ouvrage, Euler indique: *"je me suis surtout étendu dans le premier Livre sur les fonctions de variables parce qu'elles sont l'objet de l'analyse des infinis."* La plupart des chapitres y sont consacrés. (Nous utiliserons la traduction de Labey pour les citations de ce texte :**Introduction à l'analyse infinitésimale**, Paris, 1797)

(2)Voir l'édition commentée avec facsimilé de l'édition originale , **The geometry of René Descartes** ,D.E.Smith,M.L.Latham,Dover,1954 (pp.57-81).

polynomiales , à une ou plusieurs variables . La détermination de <u>toutes</u> les racines de ces polynômes, positives ou non, réelles ou non , est nécessaire même si , dans la dernière phase , le problème initial posé permet quelquefois de trancher en éliminant comme impropre telle catégorie de racines . Il importe de noter que <u>la méthode dispose d'un garant</u> , à savoir le théorème énonçé par Girard, c'est-à-dire le résultat qualifié ultérieurement de théorème fondamental de l'algèbre. Son énoncé dans l'**Invention nouvelle en algèbre** , parue en 1629 , commence par " *Toutes les équations d'algèbre recoivent autant de solutions que la dénomination de la plus haute quantité le démontre* . "

Ainsi ce théorème de dénombrement permet de vérifier qu'aucune racine n'est oubliée , puisqu'il en donne le nombre en relation avec le degré du polynôme considéré. Certes , tous les auteurs utilisant la méthode analytique n'auront pas le scrupule de vérifier l'obtention de <u>toutes</u> les racines , même si Descartes énonce très explicitement, mais dans un contexte philosophique beaucoup général , dans son **Discours de la méthode** dont la **Géométrie** est l'illustration probante, qu'il convient de "*faire partout des dénombrements si entiers, et des revues si générales, que je fusse assuré de ne rien omettre.* "

Le même Descartes , tout le premier et qui pis est dans la **Géométrie**, oublie certaines racines à propos du problème de Pappus sur un lieu à quatre droites.

Cette nécesité de dénombrement exact dans la méthode analytique devient un <u>vice</u> quand on passe à la méthode fonctionnelle, car il n'existe pas de théorème de dénombrement analogue à celui de Girard disponible au 18è siècle pour les équations fonctionnelles des divers types utilisés. Comment peut-on être assuré d'avoir trouvé <u>toutes</u> les solutions d'une équation fonctionnelle, de quelque nature qu'elle soit? Les mathématiciens vont inventer un vocabulaire presque magique: ils parleront de "solution générale" d'une équation pour désigner <u>toutes</u> les solutions possibles. Mais comment prouver que l'on a bien la solution générale , une preuve pourtant indispensable quant à la bonne marche de la méthode fonctionnelle? On comprend mieux le pourquoi des controverses quelquefois aigres , mais justifiées, qui foisonnèrent au 18è siècle autour de la méthode fonctionnelle. Ces critiques purent même aller jusqu'à une remise en cause de la démarche analytique elle-même.

En tout cas, ces controverses ne se réduisirent pas à des questions de définitions relatives à la seule notion de fonction . Et l'on prétend encore que ce siècle fut peu regardant pour la rigueur mathématique ! Le texte d'Euler que nous étudions répond en partie aux questions que nous venons de poser. Il élargit le champ de l'analyse à des fonctions non continues, définies en un sens qui n'est pas le nôtre aujourd'hui, et il donne un critère pour disposer de la solution générale de certaines équations fonctionnelles. Ce texte est bien au cœur de la méthode fonctionnelle, et dépasse une querelle de vocabulaire à laquelle on a trop souvent tendance à réduire le problème des fonctions au 18ème siècle.

Mais avant de commenter dans le détail ce texte, donnons quelques exemples d'occurrence de la méthode fonctionnelle, dans le but de bien faire comprendre qu'il ne s'agit pas d'une mode passagère. Les illustrations pratiques sont nombreuses et nous en avons sélectionné seulement trois qui nous paraissent plus significatives.

1.2 L'exemple des cordes vibrantes

Le plus connu de ces exemples concerne l'équation des cordes vibrantes. C'est en 1747 que d'Alembert publie ses **Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration.**[3] Il étudie les petits mouvements d'une corde fixée à ses deux extrémités. A la manière très caractéristique de la méthode fonctionnelle , d'Alembert prend comme fonction inconnue la fonction $y(t,s)$, fonction du temps t ($t \geqslant 0$) et de l'abscisse s (comprise ente les deux extrémités de la corde de longueur 1 , $0 \leqslant s \leqslant 1$). Dès cette mise en équation , d'Alembert fait intervenir des hypothèses physiques. L'analyse mécanique (avec une certaine normalisation) conduit à une équation portant sur la fonction inconnue y, équation que nous écrivons sous la forme [4]

(1) $$\partial^2 y/\partial t^2 = \partial^2 y / \partial s^2$$

Voilà la deuxième phase. La troisième phase consiste à chercher toutes les solutions de l'équation aux dérivées partielles (1) . C'est ce que fait aussitôt

(3) *Hist.Acad.Berlin*, 1747, tome 1, pp.214-219, pp.220-249. Voir aussi, 1750,pp.355-360.

(4) D'Alembert n'écrit pas l'équation sous cette forme. Voir J.Dhombres, Quelques aspects de l'histoire des équations fonctionnelles liés à l'évolution du concept de fonction, *Arch.Hist.Ex.Sc.* Vol.36,N°2,1986,pp. 91-181 .

d'Alembert qui obtient les solutions sous la forme

(2) $$y(s,t) = \psi(t+s) + \Gamma(t-s),$$

ψ et Γ étant des fonctions non spécifiées. A ce stade, la méthode fonctionnelle a déjà atteint un succès : elle établit , contrairement au résultat antérieur de Taylor, qu'il existe une infinité de formes pour les mouvements possibles de la corde car " *il est aisé de voir que cette équation renferme une infinité de courbes* " . C'est déjà important. Mais a-t-on obtenu toutes les solutions de l'équation aux dérivées partielles (1)? La réponse de d'Alembert à cette question est incertaine même si elle peut paraître positive au premier abord . La quatrième phase de la méthode prend en compte les conditions initiales du problème. Si l'on part d'un corde rectiligne au départ, le long des abscisses, d'Alembert réduit l'écriture de y à l'intervention d' une seule fonction. Soit

(3) $$y(s,t) = \psi(s+t) - \psi(s-t)$$

où ψ est paire et de période égale à deux fois la longueur l de la corde. Enfin, la donnée de la vitesse initiale de chaque point de la corde au départ, c'est-à-dire la donnée de $(\partial y/\partial t)(s,0)$, détermine complètement la fonction ψ, à une constante additive près toutefois puisque la dérivée est fixée par la relation

(4) $$\psi'(s) = (1/2)(\partial y/\partial t)(s,0).$$

A-t-on bien obtenu le mouvement de la corde pour tout choix préalable possible de la condition initiale $(\partial y/\partial t)(s,0)$? D'Alembert répond expressément que non .

" *Si la fonction de s , qui exprime cette vitesse initiale, n'était pas une fonction impaire de s, le problème serait impossible* . "

Il nous est facile de paraître étonnés d'une telle naïveté sur la conception d'une fonction puisque,$(\partial y/\partial t)(s,0)$ n'étant donnée que sur le segment $[0, l]$,sa parité n'a pas de sens et ne crée aucune difficulté. A partir de ce travail pionnier de d'Alembert les critiques vont fuser: elles n'excipent pas d'abord du fait qu'une fonction y(s,t) mise sous la forme (2) n'est solution de l'équation aux dérivées partielles (1) que si les fonctions qui interviennent sont au moins deux fois différentiables. Les critiques portent plutôt sur la capacité de la représentation donnée (2) à fournir la solution générale ou sur celle de (3) à rendre compte de tout choix des données initiales, c'est-à-dire toute fonction possible de départ $(\partial y/\partial t)(s,0)$. Nous ne voulons pas reprendre cette histoire; qu'il nous suffise de dire que c'est bien la méthode fonctionnelle qui est à l'origine de la controverse[5].

1.3 La composition des forces

Un deuxième exemple de l'utilisation de la méthode fonctionnelle au 18ème siècle concerne le problème de la composition des forces. Il s'agissait de démontrer que les forces s'additionnent comme des vecteurs, c'est-à-dire selon la loi du parallélogramme. Newton , et d'autres , déduisaient ce résultat de la composition des vitesses qui a lieu elle-même selon cette loi du parallélogramme (règle bien mise en évidence par Galilée), en l'appliquant aux "accroissements instantanés" de vitesses, dont on sait la proportionnalité aux forces. Rien à redire à cela , sinon comme le fit Daniel Bernoulli en 1726 (**Examen principiorum mechanicae et demonstrationes geometricae de compositione et resolutione virium**, *Comment. Acad.Sc. Petrop.* tome 1, pp.126-142), à remarquer d'une part l' intervention de la dynamique en vue d'obtenir un résultat de simple statique, et d'autre part le recours à des "résultats d'expérience" comme la composition des mouvements ou la loi de proportionnalité des forces aux accélérations au lieu de s'en tenir à une déduction rigoureuse à partir de données qui relèvent uniquement des mathématiques. Bernoulli demandait donc une approche axiomatique s'inscrivant dans la lignée d'Archimède et la tenta aussitôt[6]. Il claironne à juste titre son résultat.
" *Or j'ai trouvé une démonstration entièrement géométrique par la force de laquelle j'ai finalement reconnu que les théorèmes de la statique ne sont pas moins nécessairement vrais que ceux de la géométrie* " .

---

(5) On pourra se reporter pour l'étude de cette controverse au remarquable texte de C.C Truesdell **The Rational mechanics of flexible bodies,1638-1788** , in L.Euler, **Opera omnia**, ser.2, vol II_2,1960.

(6)Pour l'original latin de cette citation et pour une étude du texte de Bernoulli, voir J.Dhombres, **Un style axiomatique dans l'écriture de la physique mathématique au 18ème siècle. Daniel Bernoulli et la composition des forces. Commentaire, traduction et notes.** *Sciences et techniques en perspective*, vol 11, à paraître(1987). Voir dans ce même volume l'article de P.Radelet sur la compositon des forces.

Les axiomes que prend Bernoulli, quant à la résultante, sont l'addition algébrique pour des forces colinéaires , la commutation de l'opération d'addition des forces avec une similitude géométrique et enfin la présence de la résultante selon la bissectrice de l'angle formé par les deux forces , représentées par des segments de droite , lorsqu'elles sont d'amplitudes égales. A démarche axiomatique, il convient d'assortir une conduite irréprochable dans la preuve. Sinon, mieux vaut s'abstenir. En particulier, il ne faut omettre aucune solution possible des équations introduites , quand bien même la physique semblerait répugner à certaines. Daniel Bernoulli établit d'abord par une série remarquablement agencée de preuves , que la loi du parallélogramme est conséquence de cette même loi réduite au seul cas de forces d'amplitudes égales. Pour traiter ce cas , il entreprend un calcul fort laborieux , plus ou moins bien guidé par la géométrie, et envisage des dichotomies successives, réalisant une partie du programme de l'antique méthode d'exhaustion des Anciens, quoique procédant à un passage à la limite in fine . A dire vrai , sans connaître d'avance le résultat à démontrer, il est quasiment impossible d'inventer la démonstration proposée par Bernoulli. Mais , en outre, la validité du passage final reste problématique dans ce cadre de particulière exigence de rigueur.

D'Alembert, lisant cette preuve et commençant par reprocher le passage à la limite, a dû comprendre progressivement que là ne résidait pas la critique majeure . Afin de faire comprendre la raison du succès de la démarche et ne pas se laisser impressionner par la seule virtuosité technique, il fallait changer totalement par rapport au style antique de l'exhaustion . Finalement , c'est à la méthode fonctionnelle qu'il fait appel(7) en 1769. Il établit, selon les propriétés a priori admises par Bernoulli pour la résultante des forces , que si l'on désigne par $ah(\theta)$ la valeur algébrique sur la bissectrice de la résultante de deux forces d'amplitudes égales , a , écartées d'un angle 2θ, la fonction inconnue h doit satisfaire, pour toutes les valeurs des variables qui interviennent, l'équation fonctionnelle

(5) $$h(\theta_1 + \theta_1) + h(\theta_1 - \theta_2) = h(\theta_1)\, h(\theta_2).$$

(7)D'Alembert a plusieurs fois traité de la composition des forces et notamment publié en 1761 (Opuscules **mathématiques**, Paris, tome 1, pp.169-179). Mais c'est en 1769 qu'il déploie entièrement la méthode fonctionnelle dans ses **Mémoires sur les principes de la mécanique** , *Mém.Acad. Roy.Sc.* pp.278-286. Cet article est tardif dans la production mathématique de d'Alembert; son écriture laisse à désirer et on peut penser que ses goûts sont ailleurs.

C'est la deuxième étape et nous en arrivons explicitement à la troisième étape de la méthode fonctionnelle car il s'agit de résoudre cette équation (5), autrement dit d'en trouver toutes les solutions. Nous ne pouvons en éliminer a priori aucune , puisque nous devons prouver en rigueur la composition des forces, c'est-à-dire prouver que nécessairement la seule solution de l'équation (5) qui réponde à notre problème , parmi toutes les solutions possibles , est la fonction 2 cosθ. En tout cas, la forme même de l'équation fonctionnelle (5) nous incite naturellement à envisager directement les techniques de dichotomie, peu naturelles et pénibles à suivre dans la construction de Bernoulli, et donc à regarder ce qui se passe pour $(\theta_1 + \theta_2)/2$. Pourtant , cette démarche n'est pas celle suivie par d'Alembert: elle ne le sera que par Cauchy en 1821 qui prouvera effectivement dans son **Cours d'analyse algébrique** (Chap.V, §I) que les seules fonctions continues de l'équation (5) (notre sens moderne du mot) et s'annulant pour l'angle $\theta = \pi/2$,mais pas avant , sont précisément les fonctions 2 cosθ. Du coup, pour que la loi du parallélogramme soit correctement prouvée, il faut ajouter la continuité dans les propriétés a priori de la résultante de deux forces. Cauchy est en fait le premier à indiquer qu'il faille se résigner à devoir chercher , non pas toutes les solutions de l'équation fonctionnelle , mais seulement celles qui ont une certaine régularité précisée a priori. Ce faisant, il éliminait le vice de la méthode fonctionnelle . Il est symptomatique que Cauchy prenne le soin de résoudre l'équation fonctionnelle (5) dans son cours d'Analyse: il mesure l'enjeu qui est de remettre la méthode fonctionnelle sur les rails de la rigueur.

D'Alembert , trente années plus tôt, préfèrait (si l'on peut dire) raisonner par dérivation de l'équation (5), alors que rien ne nous assure que la fonction posée h soit dérivable. Certes, au 18ème siècle, personne ne semble mettre en doute la dérivabilité d'une fonction , sauf en certains points, et les préoccupations de régularité n'interviennent pas . Toutefois, au nom de l'économie des démonstrations , et c'est bien là l'esprit de la méthode axiomatique qui est à l'origine du problème de la composition des forces, de nombreux mathématiciens vont s'acharner à donner d'autres preuves(8) qui réduisent les hypothèses portant sur la

(8)Pour un historique de la composition des forces et une analyse de diverses démonstrations jusqu'à nos jours , voir le livre à paraître, J.Dhombres, P.Radelet de Graves, **La composition des forces** *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences.*

fonction h. Ainsi d'Alembert en dérivant seulement deux fois l'équation fonctionnelle (5) améliorait une démonstration antérieure de Daviet de Foncenex qui , lui, développait h en série entière. Non que d'Alembert remît en cause le dogme du développement en série entière d'une fonction, mais parce qu'il était fidèle au souci d'économie propre à la méthode axiomatique.

En tout cas , l'exemple de la composition des forces montre toute l'importance attribuée à la méthode fonctionnelle au cours du 18è siècle, ainsi que toutes les difficultés qu'il s'agissait de vaincre avant d'arriver à une méthode performante ... et sans tâche ("ab omni naevo vindicatus").

1.4 Le théorème du binôme de Newton.

Une dernière illustration de cette crise fonctionnelle du 18è siècle concerne la démonstration de la formule dite du binôme de Newton. On sait que le développement en série entière de $(1 + x)^{\alpha}$, pour des valeurs non entières de α , fut trouvée par Newton vers 1666 . Il lui fit jouer un rôle très important dans sa construction du calcul différentiel et intégral, comme on le constate en lisant **La méthode des fluxions.** Or , pendant de longues années, on ne disposera pas de preuves pour cette formule. Lorsqu'il en viendra une , celle-ci sera basée sur le calcul différentiel. Et une pétition de principe apparut alors clairement: on ne peut à la fois faire dépendre le calcul différentiel de cette formule et la démontrer par ce que l'on veut en déduire. D'où des tentatives fort nombreuses au cours du siècle des Lumières pour obtenir une démonstration satisfaisante(9). D'autant que cette formule du binôme était un passage obligé dans tous les cours d'analyse(10). C'est Aepinus qui , le premier, a réellement mis en évidence la possibilité d'utiliser la méthode fonctionnelle pour obtenir une démonstration convaincante(11).Son idée est de déterminer les coefficients

(9) Pour un historique raisonné de ce tentatives, voir la thèse de M. Pensivy, **Jalons historiques pour une épistémologie de la série infinie du binôme de Newton** , Université de Nantes, Octobre 1986. Ce travail doit être publié dans *Sciences et Techniques en perspective*.

(10) Voir J.Dhombres , M.Pensivy, **Pourquoi la formule du binôme fut-elle considérée comme un théorème universel** , à paraître.

(11) L'article d'Aepinus est à l'année 1761 des *Commentaires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg*. Il est commenté dans un article de J.Dhombres et M.Pensivy à paraître dans *Historia Mathematica*.La traduction du texte d'Aepinus est publiée dans *Sc. et Tech. en persp.*, vol XI.

qui interviennent dans la formule de Newton au moyen d'équations fonctionnelles. De fait, il pose ce que nous noterions en termes modernes

(6) $$(1+x)^{\alpha} = \sum f_k(\alpha)\, x^k \quad ,$$

où la somme s'entend de $k=0$ à $k=+\infty$ et il vérifie que $f_0 = 1$, tandis que

(7) $$f_1(\alpha+\beta) = f_1(\alpha) + f_1(\beta) \quad ,$$

pour toutes les valeurs de α et de β. Aepinus prétend résoudre cette équation fonctionnelle sous la condition supplémentaire $f_1(1) = 1$ et obtenir $f(\alpha) = \alpha$. C'est là que le vice de la méthode fonctionnelle se voit le plus clairement puisque (7) a d'autres solutions. Par une relation de récurrence d'ailleurs assez délicate, Aepinus entreprend ensuite avec succès de déterminer les autres fonctions f_k à partir de cette fonction f_1. Il est ainsi conduit à la forme usuelle des coefficients du binôme pour f_k. Ce qui termine sa démonstration.

Certains successeurs furent assez méfiants face à la résolution de l'équation selon Aepinus . Ils n'en déduisirent la preuve que dans le cas où α est un nombre rationnel , car alors il suffit de résoudre l'équation fonctionnelle (7) sur les entiers de sorte qu'aucune condition de régularité n'intervient quant à f. C'est ainsi que procéda S.F.Lacroix dans son **Traité de calcul différentiel et intégral** , dont la première édition est de 1797. Il ne faut pas en déduire que Lacroix pouvait imaginer que des solutions de l'équation fonctionnelle n'étaient pas dérivables ou n'étaient pas développables en série entière. Mais à tout le moins il trouvait la preuve par dérivabilité non économique et non adaptée à l'ordre logique de présentation de l'analyse. L'analyse algébrique, sans intervention de la dérivation, venait en premier, selon la leçon reçue d'Euler dans l'**Introductio** et dans les **Institutiones calculi differentialis**. Entre temps, Euler était intervenu[12] vers 1774 pour la preuve de la formule du binôme, et averti de la difficulté fonctionnelle rencontrée par Aepinus , selon lui mal résolue, mais désireux de prouver rigoureusement selon la méthode fonctionnelle, il inventa une approche beaucoup plus prometteuse, celle-là même que Cauchy adoptera dans son

(12)Voir J.Dhombres, **les présupposés d'Euler dans l'emploi de la méthode fonctionnelle**, à paraître , *Revue d'histoire des sciences*.La traduction française des textes d'Euler analysés dans ce commentaire se trouve dans *Sciences et Techniques en perspective*, vol X, pp.191-249.

Cours d'analyse algébrique de 1821. Euler pose a priori le développement en série entière que l'on veut obtenir comme une fonction inconnue de α, à savoir $[\alpha]$ pour utiliser ses notations. Il établit , en commettant une erreur sur le comportement des fonctions qu'il assimile à celui de polynômes, que l'on a la relation fonctionnelle suivante valable pour toutes les valeurs réelles de α et β,

(8) $$[\alpha]\,[\beta] = [\alpha+\beta].$$

Cette équation lui permet effectivement de prouver la formule du binôme pour les exposants α qui sont des nombres rationnels. Il ne restera à Cauchy que le soin- ce n'est pas rien, et il commettra une erreur - de prouver que la fonction $[\alpha]$ est une fonction continue , puis de résoudre dans la classe de telles fonctions l'équation fonctionnelle (8) de l'exponentielle . On aura remarqué qu'autant la méthode d'Aepinus paraissait inventive, conformément à l'esprit analytique, autant la démonstration d'Euler, pour brillante qu'elle soit , nécessite de connaître a priori le résultat à démontrer. L'intervention à nouveau de Cauchy , pour pratiquement clôre un problème réglant l'emploi de la méthode fonctionnelle , n'est pas fortuite : elle permet d'envisager son **Analyse algébrique** comme une mise en ordre des acquis du 18è siècle.

Nous en avons assez dit sur l'intérêt porté à la méthode fonctionnelle au 18è siècle. Venons-en à l'article d'Euler qui , précisément pour faciliter cette méthode, entreprend une annexion des fonctions non continues au profit du royaume de l'analyse.

2 . Les fonctions continues selon Euler

2.1 Définition de la continuité

Les cinq premiers numéros de l'article d'Euler sont consacrés aux fonctions continues et aux fonctions discontinues. Est continue, pour Euler , toute fonction dont la loi de formation est uniforme, c'est-à-dire telle que la forme du passage de la variable à la valeur prise par la fonction ne dépend pas du point particulier considéré où l'on effectue le passage. Ce sont

"nisi quarum natura certa quadam relatione inter coordinatas per quampiam aequationem expressa definiatur, ita ut omnia eius puncta per eandem aequationem tanquam legem determinentur. "(§2).

"celles dont la nature est définie par une relation précise entre les

coordonnées exprimée par une équation; en sorte que tous ses points soient déterminés par une même équation, comme par une loi" .(13)

Cette définition n'a rien à voir avec notre définition moderne de la continuité telle qu'adoptée depuis Cauchy et son célèbre **Cours d'analyse algébrique** de 1821. Chez Euler, le "principe de continuité" est dans l'uniformité de la loi.

Pour bien comprendre la définition eulérienne , il convient de rappeler qu'une fonction chez cet auteur est définie partout sur le plan complexe et prend toutes les valeurs complexes . On n'associe donc aucun domaine particulier de définition à une fonction. De plus, la nature de la loi est très générale: les fonctions "continues" peuvent être multivoques, implicites et non algébriques.

"*nihilque interest, sive aequatio illarum naturam continens sit algebraica sive transcendens, sive cognita sive etiamnum incognita, dummodo intelligamus dari quandam aequationem, qua natura huiusmodi linearum curvarum exprimatur.* "(§2).

"Peu importe que l'équation qui contient leur nature soit algébrique ou bien transcendante, connue ou même inconnue, à condition que nous nous rendions compte qu'est donnée une équation par laquelle la nature des courbes de ce genre est traduite."

Euler commence par rappeler le lien qui existe entre une fonction donnée analytiquement par une " équation", et une courbe visualisée géométriquement. Il prend soin de préciser que les deux branches d'une hyperbole "exhibent" une fonction continue, au sens qu'il vient de donner, malgré l'apparente discontinuité du tracé (*"On n'envisage pas ici la continuité du tracé qui exprime les branches des courbes."*) car ces deux branches " *sont contenues dans une seule équation*". Ce n'est donc pas la géométrie qui règle la définition , mais bien l'analytique , par la permanence de l'équation qui régit la fonction continue. Il serait tout aussi dangereux de vouloir attribuer une qualité de régularité (en notre sens moderne) à ces courbes continues selon Euler. Non pas qu'Euler soupçonne l'existence de courbes pathologiques , auxquelles nous sommes désormais bien habitués depuis la première courbe fractale inventée par Weierstrass . Tout simplement , la définition d'une fonction continue chez Euler est "analytique" , à partir d' une " équation " uniforme sur le plan complexe.

Certes, cette large donne analytique des fonctions continues au sens d'Euler , en dehors de belles définitions, sera souvent réduite par le

(13)La traduction française complète du texte d'Euler est fournie en annexe. Elle est dûe à la collaboration de M. Violette, professeur de Latin à la Faculté des Lettres de Nantes.

vice même de la méthode fonctionnelle, qui consiste en gros à supposer un comportement de nature polynomiale pour toutes les équations rencontrées Autrement dit , ce n'est pas une propriété de régularité locale qui serait surimposée sur les fonctions dites continues, mais pire, un présupposé de nature algébrique globale. Cela se constate sur la pratique eulérienne(cf. par exemple la référence donnée à la note (12)).

Euler peut en tout cas définir les fonctions discontinues comme celles qui ne sont pas continues, et il en donne aussitôt un exemple de visualisation simple avec les courbes tracées à main levée (" *tractus libera manu* "). En effet la main étant libre à chaque instant de son trait ultérieur, il n'y a pas d'" *équation* " uniforme règlant tous les points de la courbe tracée; il n'y a pas continuité.

2.2 Validité de la définition

Aussi plaisante soit-elle à première vue , cette définition de la continuité pose quand même le problème de sa non contradiction. Euler ne le soulève apparemment pas, ni dans ce texte , ni dans d'autres textes. Pourtant la définition repose sur une idée peu mathématique, celle de la permanence et de l'uniformité de la loi ou " forme " de l'équation qui régit la fonction. La définition utilisée ici d'une fonction est analytique, à partir de la donnée d'une loi de formation. Certes on ne précise pas s'il s'agit d'une loi globale, locale, ou même ponctuelle. Dans ce dernier cas, l'idée de fonction serait alors celle de correspondance, idée que Cantor établira fermement plus d'un siècle plus tard et à laquelle Frege donnera un éclat particulier. Vraisemblablement, c'est la définition de l'**Introductio** de 1748 qui règle encore la démarche[14]: "*Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres ,ou de quantités constantes*".

Contrairement au philosophe, le mathématicien dans son travail peut se contenter en général de ce flou de la définition et Euler ne manque pas de composer un ouvrage utile . Mais les choses se gâtent dès qu'il entend spécifier des classes de fonctions, par exemple les fonctions continues, en utilisant l'idée de loi qui est contenue implicitement sous le

---

(14)Livre 1, chapitre 1, (De functionibus in genere) N° 4.Pour l'étude du concept de fonction, voir l'article de A.P.Youschkevitch, The concept of function up to the middle of the 19th century, *Arch.Hist. Ex.Sc.* 16,n°1,(1976/77),pp.7-68.Voir aussi la référence citée à la note (4) .

vocabulaire d'"*expression analytique*" . Comment reconnaître l'uniformité d'une telle "forme" si l'idée de "forme" n'est pas claire elle-même? Et elle ne peut l'être puisque si la "forme" est la fonction, quel intérêt y a-t-il à doubler le vocabulaire? Si la " forme" est distincte de la fonction, deux " formes" différentes ne pourraient-elles par régir la même fonction? Si l'on répond affirmativement, prendre pour certaines valeurs de la variable l'une des "formes" et pour toutes les autres valeurs prendre l'autre "forme" conduirait à qualifier de discontinue une fonction pourtant continue au sens d'Euler. On pourrait sans doute arguer d'une continuité cachée, mais on ne peut s'en tirer à si bon compte. En effet, il ne fait aucun doute pour Euler qu'une courbe composée de segments rectilignes distincts n'est pas continue , comme on peut le constater sur l'exemple des polygones qu'il donne . Son attitude est logique puisque l'"équation" n'est pas uniforme.

"quo circa omnes huiusmodi tractus pro lineis discontinuis sunt habendi perinde ac ii, qui libera manu ducuntur"

"C'est pourquoi il faut tenir tous les tracés de ce genre pour des lignes discontinues, exactement comme ceux que l'on trace à main levée"(§3).

Que dire alors de la fonction donnée par l'équation $\sqrt{x^2}$? Sa représentation est polygonale , composée d'une ligne brisée. Aussi la fonction est "discontinue" aux yeux d'Euler(c'est notre fonction valeur absolue de x). Pourtant sa " continuité" , toujours au sens d'Euler , ne fait aucun doute puisque la loi de formation est évidemment uniforme. La contradiction est gênante.

Il est vrai que l'on peut imaginer une réponse eulérienne à cette objection par contradiction. Avec la fonction considérée , nous n'envisageons qu'une branche de la fonction, et nous négligeons l'autre. $\sqrt{x^2}$ est multivoque pour Euler et désigne $\pm\sqrt{x^2}$. Il faudrait plutôt écrire l'équation sous la forme complète $y^2 - x^2 = 0$. On disposerait ainsi géométriquement de deux droites . En effet , comme nous l'avons noté , Euler accepte parmi les fonctions continues des fonctions multivoques. Toutefois , on peut noter que l'**Encyclopédie méthodique** de 1785 indique à partir de l'équation $(y-a)^2 - x^2 = 0$ qu'"*elle représenterait non une courbe mais un système de deux lignes droites*" (page 453) .

Faute de s'entendre sur ce qu'est une loi, ou ce qu'est la forme d'une équation, il faut conclure que la définition de la continuité selon Euler est susceptible d'interprétations contradictoires.

2.3 L'hésitation entre deux approches des fonctions

Le véritable problème- non explicitement soulevé par Euler-est celui du statut d'une fonction. La fonction se réduit-elle à la forme analytique du calcul faisant passer de la valeur x à la valeur f(x), selon la définition déjà donnée de l'**Introductio**, ou bien la fonction manifeste-t-elle le passage d'une variable à une autre variable, c'est-à-dire l'idée de dépendance selon la définition trouvée au tout début de l'article d'Euler qui parle des fonctions comme des " *quantités déterminées de quelque manière que ce soit par une variable*"(§1)?

On aura remarqué qu'Euler n'utilise pas ici le verbe "dépendre" mais l'expression "déterminée" qui se veut plus proche de la pratique du calcul. L'opposition avec la définition analytique apparaît plus nette encore dans le texte suivant des **Institutiones calculi differentialis** de 1755 (Part I, cap.7, que nous traduisons).

" *Si des quantités dépendent d'autres de telle sorte que si ces dernières sont changées, les premières sont également changées, alors les premières sont appelées fonctions des dernières* ".

Lacroix dans son **Traité du calcul différentiel et intégral**, quarante ans plus tard, utilisera sciemment le verbe "dépendre".

" *Toute quantité dont la valeur dépend d'une ou plusieurs autres quantités est dite fonction de ces dernières, soit qu'on sache ou qu'on ignore par quelles opérations il faut passer pour remonter de celle-ci à la première*".

Adopter dans la totalité de ses conséquences une telle attitude dut vraisemblablement se heurter au début chez Euler à un handicap de nature philosophique. Science des quantités , selon la définition qu'Euler allait reprendre quelques pages plus loin, la mathématique ne saurait traiter qu'en termes quantitatifs, donc de calculs, d'une qualité aussi générale que la causalité ou la dépendance. La procédure analytique de définition des fonctions , issue de la pratique des polynômes , apparaissant comme un garant de la légitimité mathématique, Euler ne pouvait l'abandonner sans de bonnes raisons d'ordre mathématique. Vraisemblablement des raisons d'ordre logique n'auraient pu y suffire . Le texte de 1767 apparaît comme l'occasion choisie par Euler pour aller plus loin, car des raisons mathématiques sont désormais disponibles.

Les hésitations d'Euler exacerbent les difficultés de la définition retenue des fonctions continues. Si l'équation (la loi ou la "forme") d'une fonction n'en est que sa représentation , d'après le point de vue causal qui va à l'encontre du point de vue analytique pour lequel cette équation est la définition, il faudrait éventuellement parler d'une équation , d'une loi, ou d'une forme pour telle fonction et renoncer à l'article défini. Avec l'absence possible d'unicité de la représentation d'une fonction s'écroulerait la définition de la continuité selon Euler , comme nous l'avons signalé.

Les liens qu'il établit entre courbe et fonction sembleraient parfois conforter la vision d'une fonction au delà d'un moyen explicite de calcul puisque Euler sait bien qu'une même courbe est susceptible de paramétrisations diverses. Toutefois il se restreint ici aux équations cartésiennes des courbes!

" *D'où réciproquement, si l'on pose une courbe quelconque, ses ordonnées exhibent certaines fonctions des abscisses. La nature de ces fonctions est constituée dans la nature même de la courbe*."(§1) .

Bref, nous ne sortons pas de la contradiction qui semble inhérente à ce début du texte et à l'attitude eulérienne. Un indice mineur nous paraît probant tant son résultat est paradoxal. Avec la définition analytique d'une fonction, toute constante a devrait apparaître comme une fonction régie par l'équation $f(x) - a = 0$. L'image d'une ligne droite parallèle à l'axe des abscisses conforterait ce point de vue . Pourtant les constantes ne sont pas reçues au rang des fonctions chez Euler... au nom de la définition causale , car il n'y a pas de dépendance véritable s' il n'y a pas de variation simultanée de la variable et de la valeur correspondante. Précisément , dans le texte de 1767, Euler oublie <u>toutes les solutions constantes de l'équation aux dérivées partielles</u> qu'il va traiter aussi bien par la géométrie que par l'analyse. Cet oubli est lourd de conséquences.

A cette ambiguïté du texte dans ses premiers paragraphes , qu'il importait de saisir d'un point de vue historique, il ne faudrait pas trop attacher d'importance. Car précisément le but d'Euler est de s'affranchir de la considération des seules fonctions continues afin d'ouvrir un panorama immense à l'analyse. Et c'est la définition causale des fonctions qui va devenir opératoire. Un tel tournant mérite bien l'étude.

2.4 L'Analyse considérée dans son extension légitime

Au numéro 3 , Euler nous rappelle le vocabulaire ancien des courbes mécaniques auxquelles il préfère désormais appliquer le mot de fonctions discontinues *"Les courbes de ce genre, en tant qu'elles s'opposent au genre précédent défini par la loi de continuité, sont appelées couramment "mécaniques", mais avec plus de précision "discontinues" ou dénuées de la loi de continuité"* (§3). Ce faisant, Euler sort de la classification stricto sensu de Descartes, mais il place astucieusement le débat dans le sens d'une polémique déjà gagnée par Newton contre Descartes. C'est qu'Euler entend changer de point de vue sur les fonctions.

On sait que Descartes dans sa **Géométrie** classa avec génie les courbes algébriques selon ce que nous appelons leur degré. Il indiquait en outre, et avec quelle force, que tout problème géométrique doit être rangé selon le degré de la courbe auxiliaire qu'il convient de faire intervenir pour le résoudre par la voie analytique, *"mais il faut avoir soin de choisir toujours la plus simple, par laquelle il soit possible de le résoudre"*. Cette classification exclut les courbes non algébriques, dites mécaniques , qui *"ne sont point du nombre de celles que je pense devoir ici être reçues"* (**Géométrie** , Livre II). Et Descartes donne ses raisons : les courbes algébriques (ou géométriques dit-il) sont réglées par une équation polynomiale qui reste la même pour toute la courbe. C'est précisément l'idée d'uniformité qu'Euler entendra généraliser par le passage nominal des polynômes aux fonctions "continues".

"Je ne sache rien de meilleur que de dire que tous les points, de celles qu'on peut nommer Géométriques, c'est à dire qui tombent sous quelque mesure précise et exacte, ont nécessairement quelque rapport à tous les points d'une ligne droite, qui peut être exprimée par quelque équation, en tous par une même,..." (La Géométrie, Livre II, p. 319).

Les courbes mécaniques, comme la spirale, sont plus composées aux yeux de Descartes *"à cause qu'on les imagine décrites par deux mouvements séparés, et qui n'ont entre eux aucun rapport qu'on puisse mesurer exactement"* (La Géométrie, Livre II, p. 317). La relative faiblesse de l'argument cartésien vient de cette évocation de la manière *"mécanique"* dont de telles courbes sont engendrées , sans référence à une équation comme pour les courbes algébriques : on change donc de critère. Adoptant ce deuxième critère de Descartes et en poussant à l'extrême une idée philosophique chère à cet auteur, celle de simplicité, Leibniz et Newton récupérèrent parmi les courbes mécaniques envisageables celles dont l'équation caractéristique est facilement manipulable. Comme le dira justement l'**Encyclopédie Méthodique** (édition de 1785), à l'entrée *"courbe"*, ces auteurs *"prétendent avec raison que dans la construction d'un problème, ce n'est point la simplicité de l'équation d'une courbe qui doit la faire préférer à une autre, mais la simplicité et la facilité de la construction de cette courbe"*.

L'article poursuit en indiquant que la spirale, bien que mécanique, *"est plus aisée à décrire"* qu'une courbe algébrique comme la parabole cubique (courbe dont l'équation cartésienne est $y^2 = ax^3$). On oblitérait ainsi le principe algébrique , et seulement algébrique de la classification de Descartes. Il est vrai qu'entre temps le calcul différentiel avait fait une irruption tonitruante et donnait les moyens *"faciles"* de traiter toutes les courbes régies par des équations, que celles-ci soient polynomiales ou non.

Ne portant pas sur les mêmes critères, les points de vue issus de Descartes, et ceux provenant de Leibniz et Newton, allaient rivaliser au 18è siècle sur le seul terrain commun, à savoir les courbes algébriques. En 1740, de Gua de Malves écrira ses **Usages de l'Analyse de Descartes** pour *"découvrir, sans le secours du calcul différentiel, les propriétés, ou affections principales des lignes géométriques de tous les ordres"* car, dit-il, *"c'est l'analyse de Descartes et non celle des infiniment petits qui devrait fournir les moyens principaux, et les plus naturels, de découvrir les propriétés de ces lignes"* (p. IX de la préface). Aussi entreprend-il de retrouver les résultats obtenus par Newton pour les courbes du 3ème degré (I. Newton, **Enumeratio curvarum trium dimensionum** , un texte écrit vers 1668).

Cette étude d'un de Gua de Malves creuse le sillon de ce qui deviendra, beaucoup plus tard, la Géométrie algébrique, et des auteurs comme Cramer (**Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques**,Genève,1750), Bézout (**Théorie générale des équations algébriques**, Paris, 1779) , ou Vandermonde dans ses quelques articles mathématiques de 1771 et 1772 iront dans le même sens. Dès la mise en place de l'analyse différentielle, on comprend que la distinction de traitement entre courbes algébriques et courbes "mécaniques" est une différence de méthode. Dans un compte rendu critique du livre de Guisnée, **Application de l'algèbre à la géométrie**, le commentateur de l'Académie des sciences (p.116, *Histoire de l'académie*, 1705) indique clairement: " Mais une courbe mécanique ne peut être représentée que par une équation qui donne, non pas le rapport des abscisses aux ordonnées, mais celui des infiniment petits de ces deux espèces de grandeur, ou même celui des infiniment petits de ces infiniment petits, ce qui peut aller à l'infini, or la valeur d'un infiniment petit est indéterminable; et par conséquent la méthode générale de la description des courbes géométriques ne peut absolument avoir lieu pour les méchaniques, et il en faut une autre toute différente" .Mais les choses seront brouillées par la suite(15).

La position d'Euler, globalement fidèle à Newton et Leibniz, témoigne cependant d'un meilleur souci de cohérence intellectuelle par un retour au premier critère de Descartes. Il faut pourtant étendre ce critère et accepter de passer du seul cas polynomial au cas d'une série entière considérée comme un polynôme de degré infini. Euler se donnait un cadre, dépassant *"l'algèbre commune"* et l'agrandissait à la dimension de l'analyse des infinis, c'est-à-dire à l'analyse algébrique, mais sans intervention du calcul différentiel ou intégral. Ainsi Euler, dans l'**Introductio**, au nom de la simplicité, minimise la différence entre fonctions *"algébriques"* et fonctions *"transcendantes"*. La distinction est naturellement faite sur la forme analytique de définition d'une fonction à partir des opérations qui interviennent.

"Functiones dividentur in Algebraicas et Transcendentes ; illae sunt, quae componentur per operationes algebraicas solas, hae vero in quibus

(15) L'Encyclopédie Méthodique, en 1785, tenta de faire le point sur la classification de courbes. Venaient les courbes algébriques d'une part (qualifiées avec Descartes de géométriques) et les courbes *"mécaniques"* par ailleurs ; c'est-à-dire dont *"l'équation entre les coordonnées n'est et ne peut être algébrique, c'est-à-dire finie"*. Le point de vue intermédiaire de l'analyse algébrique n'est pas évoqué puisque l'équation qui régit les courbes mécaniques *"ne peut être exprimée que par une équation différentielle"*. Cependant apparaît une catégorie intermédiaire, celle des fonctions exponentielles comme a^x, ou $x^{\sqrt{2}}$. *"Ces deux espèces de courbes ne sont proprement ni géométriques, ni mécaniques parce que leur équation est finie sans être algébrique"*. Quelle confusion !

operationes transcendentes insunt". (chap 1, Livre 1, n° 7).

Mais la distinction s'amenuise grâce au développement en série entière, outil valable pour les deux catégories de fonctions, aussi pratique pour les unes que pour les autres. Le chapitre IV du tome I de l'**Introductio** , qui constitue le tournant essentiel du livre d'Euler , est intitulé *"De explicatione Functionum per series infinitas".* Il concerne les fonctions, qu'elles soient rationnelles (quotients de deux polynômes, donc algébriques), irrationnelles mais algébriques ou même transcendantes. Euler indiquait clairement

"Cum Functiones fractae atque irrationales ipsius z non in forma integra $A + Bz + Cz^2 + Dz^3$ *+ etc continentur, ita ut terminorum numerus sit finitus...exprimantur"*

En réduisant l'exponentielle ou le logarithme à un développement en série, le chapitre VII intitulé, *" De quantitatum exponentialium ac logarithmorum per series explicatione"* , permet de ranger ces fonctions au même rang de simplicité que la fonction $\frac{a}{\alpha + \beta z}$ qui s'exprime avec avantage en série par *"division continue"* (*"Per divisionem autem continuam intelligintur fractionem* $\frac{a}{\alpha + \beta z}$ *resolvi in hanc seriem infinitam* $\frac{a}{\alpha} - \frac{a\beta}{\alpha^2} z + \frac{a\beta^2 z^2}{\alpha^3} + ...$").

Tel était le cadre de l'analyse algébrique. Si toute fonction continue au sens d'Euler était bien développable en une série entière partout convergente, l'analyse entière de ces fonctions se réduirait à la seule analyse algébrique ! L'unicité du développement en série entière d'une telle fonction continue validerait la considération de sa *" forme"* et donc l'uniformité de sa loi. Telle peut sembler être la situation envisagée par Euler avant l'article de 1767. Mais rien de tel n'apparaît dans cet article car Euler entend aller au-delà de telles considérations : <u>le but n'est plus de se limiter à l'analyse algébrique, mais bien de considérer les fonctions discontinues.</u>

Rappelant à tort que les fonctions *"discontinues"* sont les *"courbes mécaniques"* de Descartes, Euler jouait seulement d'un glissement sémantique, à valeur polémique, afin d'indiquer que leur rejet serait ridicule. Mais Euler n'est pas homme à se parer des seules vertus de la rhétorique. Il en appelle à deux arguments destinés à faciliter l'incorporation des fonctions discontinues dans le magasin mathématique.

Le premier de ces arguments consiste à noter l'intervention de facto de telles fonctions dans la résolution du problème des cordes vibrantes. Solennellement -et avec quelque hâte suspecte- Euler estimait avoir emporté l'assentiment général contre d'Alembert et en particulier celui de Lagrange, de sorte *"qu'il n'y a place désormais pour aucun doute quelconque"*. Au §19, il renchérissait et mentionnant la condition initiale $\frac{\partial y}{\partial t}$ (s,o), indiquait *"Et puisque cet état dépend de notre arbitraire au point qu'on puisse faire intervenir une figure irrégulière et discontinue de la corde, cette même fonction introduite par l'Analyse doit être assez ouverte pour qu'elle renferme aussi bien des discontinuités, c'est à dire des objets qui répugnent à la loi de continuité"* (§19).

Le deuxième argument est une véritable <u>profession de foi</u>. Tout ce qui concerne l'étude des quantités -en particulier le mouvement des cordes vibrantes- est du ressort de l'analyse. On sait que l'une des définitions classiques des mathématiques au XVIIIème est d'être *" la science des quantités ou des grandeurs"*. Que tout ne soit pas connu en mathématiques est bien évident, mais il n'existe aucune limite a priori à la potentialité de la connaissance mathématique. *"Et ici point n'est besoin de demander jusqu'où s'étend notre pénétration, puisqu'il n'est guère de géomètre qui n'ait bien souvent sué sang et eau sur des questions dépassant ses forces. Il n'est donc nullement interdit de s'occuper de questions de ce genre et il faut bien plutôt s'y appliquer avec plus de soin"* (§5).

Voilà qui est net, mais ne justifie que marginalement les fonctions discontinues. Il reste à établir que le nouveau territoire est à la portée du mathématicien. Euler joue alors grand jeu en montrant que l'incorporation même de ce territoire modifie en partie l'organisation antérieure du royaume mathématique. Ce territoire n'appartient pas à l'algèbre commune, celle des polynômes, ni à l'analyse des infinis qui la prolonge sous la forme de l'analyse algébrique des séries. Il faut encore une extension plus grande de cette analyse *"et l'on doit estimer qu'elle comprend des secteurs qui, non seulement ne répugnent pas aux fonctions discontinues, mais les impliquent naturellement à un point tel que l'on ne puisse considérer aucun problème qui en relève comme convenablement résolu, si des fonctions arbitraires*

-et de ce chef même discontinues- n'étaient pas introduites dans sa solution" (§6). Le nouveau territoire est défini par des problèmes à résoudre, non par un déroulement axiomatique de relations : c'est celui des équations aux dérivées partielles, disons des équations fonctionnelles en général.

Chaque domaine mathématique a ses méthodes et ses objets, ainsi la géométrie ou l'arithmétique. Pour le nouveau domaine dont l'objet vient d'être précisé, il faut repenser la structure même de toute l'analyse afin d'y incorporer logiquement et définitivement les fonctions discontinues dans le cadre du calcul différentiel et intégral qui régit les équations aux dérivées partielles.

"*Or ces secteurs de l'Analyse ont été peu travaillé jusqu'à présent, même si de remarquables exemples en sont trouvés ça et là et si leur véritable nature ne semble pas non plus suffisamment approfondie. C'est pourquoi afin de bien exposer cette nature, il faut que je décrive plus exactement ces secteurs variés et divers de l'Analyse et que je les distingue les uns des autres*"(§6).

Telle est la tâche à laquelle s'attelle Euler à partir du numéro 7 de son article : on a bien un programme d'organisation de l'analyse.

Il est temps de dresser un tableau complet du texte d'Euler avant d'en venir à la description de ce programme.

3. L'architecture du texte d'Euler

Le texte comporte vingt trois paragraphes numérotés et on peut les résumer de la façon suivante.

3.1 Ordre des arguments

Le premier § s'ouvre sur le lien entre courbe et fonction, ce qui permet au §2 d'expliquer le "*principe de continuité*" et donc au §3, par négation, de rendre compte de ce qu'est une "*fonction discontinue*". Le §4 situe historiquement le débat sur ces fonctions discontinues dans le cadre de la querelle des cordes vibrantes et enchaîne sur le §5, qui est l'acte de foi déjà signalé sur l'extension indéfinie potentielle de l'Analyse. Au §6 Euler prend soin d'expliquer que l'analyse des infinis doit encore s'étendre et il explique la nécessité de clarifier les buts et les méthodes de cette analyse.

Tel est l'objet de la classification des fonctions qui intervient au §7, classification établie selon le nombre des variables et qui relègue aux oubliettes les fonctions continues. Des exemples l'illustrent au §8. Les six chapitres suivants expliquent succinctement l'analyse à une variable : d'abord le calcul différentiel (§9 à 11), puis le calcul intégral par les équations différentielles (§12 à 14) et vient en dernier l'intervention d'une constante arbitraire comme critère d'obtention de la solution générale d'une équation différentielle du premier ordre.

Aux §15, 16 et 17 Euler passe au cas de plusieurs variables, et donc à celui des équations aux dérivées partielles. Le point essentiel est expliqué au §18 : dans la solution générale d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, pour une fonction inconnue de deux variables, une fonction arbitraire d'une variable doit intervenir. Ce point est généralisé pour une équation aux dérivées partielles d'ordre m portant sur des fonctions de n variables : dans la solution doivent intervenir m fonctions arbitraires de (n-1) variables. C'est cette hiérarchie qui justifie enfin la classification du §7. Les quatre derniers § sont consacrés à un exemple et nous le détaillerons plus loin (chap.4).

3.2 Une classification des fonctions : solution générale d'une équation.

L'articulation de cet article, avec en contrepoint final l'exemple géométrique explicatif, est très nette[16]. La hiérarchie de la classification des fonctions selon le nombre des variables indépendantes qu'elles renferment, apparemment banale, est légitimée par le calcul intégral, c'est-à-dire par la résolution des équations aux dérivées partielles. L'ordre m de différentiation maximum intervenant dans l'équation fournit le nombre des fonctions arbitraires présentes dans la solution générale et le nombre des variables dont ces fonctions dépendent est d'une unité inférieure à celui des variables de la solution cherchée.

Voilà un bel exemple où le problème mathématique à résoudre crée la classification et celle-ci par contre-coup fixe donc la critère d'obtention de la solution générale d'une équation aux dérivées partielles.

"Tout comme, en effet, la force du calcul intégral commun consiste en ce qu'en n'importe quelle intégration une nouvelle constante introduite dans le calcul est laissée à notre discrétion, ainsi en la partie qui s'occupe des fonctions de deux variables, dans chaque intégration c'est non seulement une nouvelle constante, mais encore une nouvelle fonction tout à fait indéterminée d'une certaine variable qui entre dans le calcul, et qui est tellement soumise à notre discrétion que l'on peut même prendre à sa place des fonctions discontinues. De plus, aucune intégration dans ce calcul ne peut être considérée comme complète et parfaite, si l'on n'a pas introduit dans une solution intégrale de ce genre une fonction complètement arbitraire" (§18).

Le critère énoncé, il faut convaincre de sa validité. En un premier temps, Euler raisonne par analogie entre le cas des équations différentielles, lesquelles font intervenir des constantes arbitraires,et le cas des équations aux dérivées partielles qui laissent place à des fonctions arbitraires. Puis comme pour emporter la conviction, Euler fournit un exemple entièrement calculé (§20 à 23). Mais c'est un autre argument qui semble être le point décisif pour Euler: un argument d'ordre empirique. Si l'on a une équation aux dérivées partielles du premier ordre, portant sur des fonctions de deux variables, l'existence d'une fonction laissée arbitraire dans la solution générale permet d'adapter celle-ci de façon à satisfaire les conditions naturelles, qu'elles soient initiales ou aux limites. Loin de s'offusquer de la liberté dans la fonction, simple relation de dépendance, il faut en souligner les avantages. Euler entonne un hymne qui semble, à s'y méprendre, repris directement d'un Leibniz glorifiant l'harmonie préétablie du Monde.

"Cela ne doit nullement être attribué à quelque subtilité du calcul, qui n'aurait absolument aucun usage et servirait seulement à une vaine spéculation. Plutôt, les natures des objets mathématiques sont tout à fait fondées et sont en harmonie merveilleuse avec la suite logique des vérités (§19).

---

(16) Et son importance fut reconnue depuis longtemps.

Pourtant nous devons être choqué par cette manière de procéder chez Euler. Cette affirmation, selon laquelle la présence de fonctions arbitraires en nombre suffisant signe la solution générale en ce sens qu'elle fournit toutes les solutions, est fausse : le critère eulérien est insuffisant car il ne donne pas toutes les solutions. Effectivement, dans l'exemple ultérieur (§20 à 23), partant d'une équation aux dérivées partielles non linéaire portant sur la fonction z de deux variables indépendantes x et y,

$$a = z\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},$$

Euler établit la *"solution générale"* sous une forme où intervient un paramètre ω et une fonction arbitraire $\Omega(\omega)$. Il obtient

$$\begin{cases} \pm\sqrt{a^2 - z^2} = \int \Omega(\omega)\, d\omega - x\cos\omega - y\sin\omega \\ y\cos\omega - x\sin\omega = \Omega(\omega). \end{cases}$$

Mais Euler ne fournit pas les solutions constantes pourtant évidentes sur l'équation elle-même.

$$z = \pm a.$$

Ces solutions ne peuvent pas s'écrire sous la forme paramétrisée par Euler, comme on peut le constater plus facilement à partir de l'interprétation géométrique de ces formules analytiques (voir plus loin).

Après Euler on distinguera mieux le vocabulaire en désignant par solution générale celle où interviennent explicitement des fonctions arbitraires et réservant le nom de solutions particulières aux autres. Et surtout, on particularisera les points où passent à la fois une solution de la forme générale et une solution particulière. Ces considérations d'unicité, liées en particulier aux conditions aux limites qu'il est convenable ou possible d'imposer, seront les idées porteuses dès la fin du XVIIIème siècle, chez un Laplace, un Monge, un Lagrange, un Charpit, voire un Parseval etc. Dans le présent article, Euler ne mène pas au bon chemin, mais ne peut-on pas penser que c'est la clarté même de son exposé -programme qui conduisit ses successeurs critiques à prendre garde aux cas exceptionnels fondamentaux ? Euler nous prévenait d'ailleurs.

"Mais comme il n'y a pas longtemps que cette partie de l'Analyse a commencée d'être travaillée, ses premiers éléments sont présentement à peine suffisamment mis au point. On trouve, il est vrai, de magnifiques exemples de ce calcul déjà un peu partout, dont la mise au net est très peu astreinte aux règles du calcul ordinaire. D'où un très vaste champ est ouvert, où les plus grands génies pourront exercer leurs forces pour le plus

grand accroissement de la science" (§17).

De toutes façons, l'intervention de fonctions arbitraires (*"fonctions arbitraires ou indéfinies d'une seule variable"* §15) est indispensable pour l'écriture de la solution générale , quand bien même celle-ci ne fournit pas toutes les solutions. Et ce n'est pas la première définition d'une fonction, sous sa forme analytique, qui est ici utile, mais bien la forme causale, celle qui prend en compte l'idée de dépendance. En effet, c'est le nombre de variables indépendantes, et non la forme de la relation, qui sert de support à la classification et au critère. Remarquons bien que la ou les variables indépendantes ne se distinguent pas a priori sur l'équation : le nombre seul des variables est fixé. Dans l'exemple choisi par Euler, la variable indépendante qui engendre la fonction arbitraire Ω est ω et elle n'est pas liée à x et y de façon bien simple : on a

$$y \cos \omega - x \sin \omega = \Omega(\omega).$$

Paradoxalement, la distinction faite par Euler entre fonctions continues et fonctions discontinues dans les premiers paragraphes, qui repose sur la définition analytique d'une fonction, perd donc tout intérêt au profit de la seconde définition causale. On parlera désormais de fonction dépendant d'une variable, de fonction de deux variables etc. Tel est le tournant épistémologique essentiel qu'apporte l'article d'Euler de 1767.

Au § 8, Euler signale le danger de se fier à la seule forme car on peut avoir l'apparence de plusieurs variables dans une fonction, alors que toutes ces variables ne dépendent que d'une seule comme dans le mouvement d'un corps tel que la lune où chaque paramètre de position dépend en fait du seul temps(*" chacun pourra être considéré en soi en tant que fonction du temps, c'est-à-dire fonction d'une seule variable"*).

3.3 Structure de l'analyse différentielle et intégrale

Euler tira les conséquences de ce tournant et de la nouvelle classification des fonctions en fournissant l'organisation rationnelle de l'analyse différentielle et intégrale. " *Cette discipline* [l'Analyse des infinis] *se répartit très commodément en autant de secteurs qu'il y a de classes de fonctions, parce que chacune doit être conduite sur des principes et des règles particulières*". Le texte est très clair et se déroule aux § 9 à 19. Dans le résumé du travail, le caractère fondationnel est volontairemnt mis en évidence. " *Donc le pouvoir et le caractère propre de cette nouvelle Analyse, l'Illustre Auteur les a exposés avec la dernière clarté et à partir des premiers principes*."

Euler n'indique pas ici que le véritable saut est entre une variable et deux variables. Il reprend donc le fondement du calcul différentiel à une variable et définit en gros le rapport différentiel dy/dx comme limite, sans d'abord individualiser dy ou dx. Astucieusement , Euler parlera de proportion, langage qui signe la rigueur euclidienne. Mais l'expression est douteuse puisqu'il s'agit d'une proportion de différentielles (non individualisées) " *dont la réalité ne souffre aucun doute* ". Euler acceptera alors de parler de dy = pdx " *quoique dans aucun des deux membres aucune quantité n'est connue*" , parce que les principes auxquels on peut toujours revenir sont fermes. L'essentiel n'est pas là. Le rapport différentiel est fonction de x , donc susceptible à son tour d'un nouveau rapport différentiel" *quantité déterminée et qui peut elle-même être considérée comme une nouvelle fonction de x*."(§9 in fine et début du § 11). La correspondance fonctionnelle élimine ainsi la considération plus que suspecte des différentielles d'ordre supérieur. De même s'introduisent les $d^n y/dx^n$." *Leur signification, comme je l'ai montré pour le premier ordre, se ramène toujours à un rapport entre les différentielles de deux quantités, dont l'une est fonction de l'autre* ".Lorsque plusieurs fonctions interviennent, la règle de dérivation est simple , de même que lorsque l'on change de variable, grâce à la dérivation des fonctions composées.

Le calcul intégral est " *une méthode d'invention de la nature des fonctions à partir d'une relation quelconque donnée des différentielles*." (§13). L'essentiel dans ce calcul intégral est de faire la distinction entre les ordres de dérivation qui interviennent dans l'équation différentielle. En effet, l'ordre maximal de dérivation qui figure donne précisément le nombre de constantes arbitraires qui doivent se présenter dans la solution générale.

Au § 15, Euler passe à deux variables. Il calcule ce que nous appelons aujourd'hui les dérivées partielles (avec une notation particulière, à savoir le rapport différentiel entre parenthèses, voir la note (18) , sur la traduction , pour une évocation des différentes notations utilisées pour les dérivées partielles au XVIIIème siècle) et introduit directement la différentielle d'une fonction de deux variables en ajoutant les différentielles à x constant et à y constant. Le guide est tout de même le cas d'une seule variable" *puisqu'en n'importe quelle différentiation , il y a une unique quantité prise pour variable*". Le calcul intégral , partant d'une relation entre les dérivées partielles , est à nouveau de " *déduire la nature de la fonction z et la manière de la construire à partir des variables x et y*". Ce calcul est nouveau malgré la masse des exemples déjà présentés par divers auteurs mais "*ses premiers éléments sont présentement à peine suffisamment mis au point* ." Euler en arrive ainsi à la solution générale d'une équation aux dérivées partielles qui justifie , comme nous l'avons dit, sa classification des fonctions selon le nombre des variables en jeu.

La clarté, disons même la banalité de ce texte pour un lecteur moderne, puisque grosso modo dans les cours universitaires de premier cycle on ne présente pas différemment le calcul à plusieurs variables, ne doit pas nous cacher précisément sa nouveauté pour le XVIIIème siècle.

Grâce à la conception d'une fonction conçue comme agissant sur une variable, ou des variables indépendantes, en dehors de toute préoccupation analytique de forme de la correspondance , Euler a mis sur rails l'Analyse moderne.

4. L'exemple géométrique choisi par Euler

Pour justifier, mais cette fois par un exemple, l'introduction nécessaire des "fonctions discontinues" en analyse, Euler évite soigneusement de reprendre l'explication controversée des cordes vibrantes. Il concocte plutôt un exemple purement géométrique, ce qui pare sa présentation d'un caractère rigoureux indiscutable. Il le traite selon deux approches; d'abord une approche géométrique, puis une approche analytique et c'est la convergence de ces deux approches qui doit emporter la conviction.

" *Afin qu'il n'y ait lieu à aucun doute, je vais exposer un problème de ce genre de sorte que la solution se déduise si facilement des éléments et qui se présente de telle manière qu'il faille nécessairement dans cette solution des fonctions discontinues, c'est-à-dire des courbes tracées arbitrairement. Ensuite je résoudrai ce même problème analytiquement pour que, par là, apparaisse plus clairement la nécessité des fonctions arbitraires, intervenant dans l'intégration en accord avec la solution précédente*".(§20)

4.1 Reconstitution possible de la démarche d'Euler

Nous pouvons lire à rebours l'exemple choisi par Euler et vraisemblablement retrouver ainsi la démarche que le grand Bâlois dut suivre lui-même afin de construire son exemple probant. Puisque le but est de disposer d'une fonction " discontinue " quelconque, le mieux est de se la donner a priori comme courbe plane. On imagine alors un " cylindre" généralisé par déplacement d' un cercle dont le centre suit cette courbe plane quelconque, dont le rayon reste constant et dont le plan est toujours orthogonal à la courbe donnée, c'est-à-dire à la tangente en chaque point de cette courbe . Notons bien ce dernier point qui fait intervenir l'existence d'un élément différentiel et donc limite a priori , du moins pour un lecteur moderne, la généralité de la courbe plane de départ. Au fond , nous avons l'image d'un "serpent" de section circulaire constante (cf. figure 1). Il ne reste plus qu'à envisager une propriété d'apparence caractéristique d'une telle surface. De fait, toute normale à cette surface coupe le plan de la courbe qui sert d'axe au serpent , de telle manière que , sur cette normale , le segment délimité entre le point de normalité à la surface et le point d'intersection avec le plan de base ait une longueur constante. Cette longueur est en effet le rayon de la section circulaire constante. Telle est la liberté fonctionnelle dans le choix de l'axe sinueux du "serpent" - c'est là l'intuition majeure d'Euler - que le problème réciproque ne saurait introduire d'autres solutions que ces "serpents", mais qu'il doit apparaître clairement que tous ces" serpents" sont solutions.

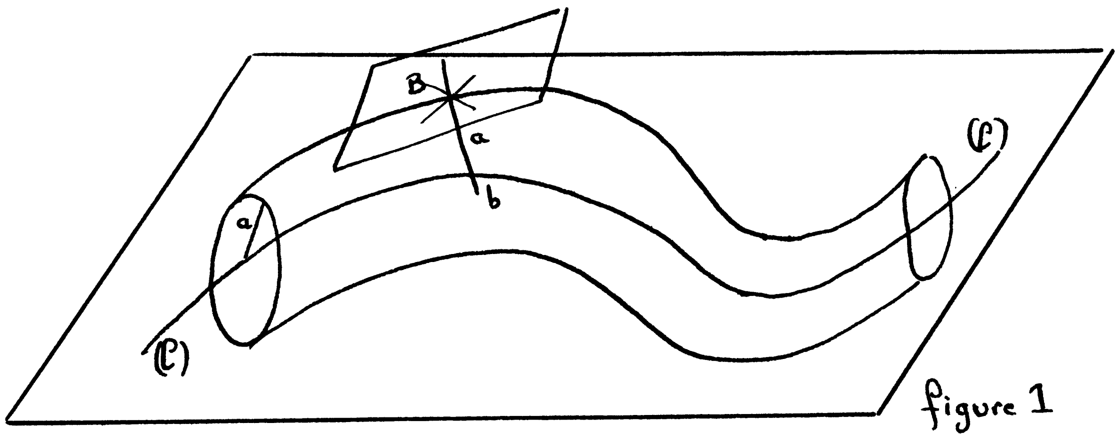

figure 1

Reprenons la lecture fidèle du texte d'Euler. Nous en sommes au numéro 20 de l'article d'Euler et l'on débute bien sûr ex abrupto par l'énoncé du problème réciproque, à savoir

" *Ut omnia solida, ad quorum superficiem in singulis punctis normales ductae eiusdem sint quantitatis,[inveniantur]*".

" *[Il s'agit de trouver] tous les solides à la surface desquels, pour tous les points, les normales tracées sont de même quantité*."

4.2 Solution géométrique

A la fin du numéro 20, Euler décrit une solution géométrique au problème qu'il vient de poser. La sphère répond évidemment au problème , mais tout autant un cylindre dont l'axe rectiligne est dans le plan de base. Et on pense aussitôt au serpent déjà décrit, ou plutôt au demi-serpent.

" *Il s'agit de n'importe quelle courbe décrite dans un plan fixe, qu'elle soit continue ou discontinue, à partir de laquelle on élève un solide constitué de telle façon que toutes les sections normales par rapport à cette ligne soient des demi-cercles dont le centre appartienne à cette ligne.* "

Grâce précisément à cette liberté de choix de l'axe sinueux du " serpent", et selon l'explication précédemment donnée pour l'obtention de toutes les solutions, Euler peut dire qu'il dispose de la solution générale. (" *quam solutionem generalem ita enunciare licet"*)

Euler oublie les solutions particulières, enveloppes de la famille des sphères centrées sur le plan de base et de rayon a, à savoir les plans parallèles au plan de base et situés des deux côtés de celui-ci à la distance a. Ces solutions ne s'écrivent certes pas sous la forme générale d'un "serpent", mais peuvent en fournir la limite.

4.3 Solution analytique: les trois premières étapes

Au numéro 21, Euler organise la mise en équation du problème posé, c'est-à-dire entreprend la version analytique. Pour Euler, naturellement, une surface équivaut à la donnée d'une fonction générale z de deux variables x et y et la fonction en question possède "ontologiquement" des dérivées partielles : on peut parler sans objection possible de normale à la surface.

La première phase de la démarche analytique est donc le choix de z , fonction inconnue des deux variables x et y qui parcourent le plan . Pour la deuxième phase, on part du plan tangent P en B, point courant de la surface (de coordonnées x , y et z) et on fait intervenir le point b, point situé à l'intersection de la normale en B avec le plan de base xOy . Les coordonnées de b sont alors

$$x + z(\partial z/\partial x) \;;\quad y + z(\partial z/\partial y) \;;\quad 0.$$

Autrement dit , la longueur Bb vaut $z = \sqrt{(1 + (\partial z/\partial x)^2 + (\partial z/\partial y)^2)}$. La deuxième phase est donc terminée puisque, en introduisant une constante a , on obtient l'équation aux dérivées partielles non linéaire qui " résume " le problème posé

(1) $$a = \pm z\sqrt{1 + (\partial z/\partial x)^2 + (\partial z/\partial y)^2}.$$

Comme le signe $\sqrt{\ }$ contient pour Euler les deux déterminations possibles (fonction multiforme), il omet les ± et ayant posé $p = \partial z/\partial x$ et $q = \partial z/\partial y$, écrit

$$a = z\sqrt{1 + pp + qq}.$$

La conclusion de la deuxième phase s'énonce:

" *Il faut étudier une fonction z de ce genre à deux variables x et y , de sorte que la condition, qui est une équation différentielle du premier ordre , soit remplie* ".

La troisième phase consiste en la résolution de l'équation obtenue. C'est un paramétrage convenable qui va nous y conduire. Cette démarche ne relève pas d'une astuce particulière, contrairement à ce que l'on pourrait croire, mais elle répond à la logique " algébrique", disons plutôt formelle, du calcul différentiel[17]. La loi la plus simple de ce calcul est la dérivation d'une fonction de fonction, car elle se ramène à un produit. En outre, le calcul par son symbolisme évite d'avoir à préciser la ou les variables indépendantes, et invite donc à faire tous les changements de variables utiles, donc à prendre des paramétrages ad hoc. Dès lors, la forme (1) de l'équation appelle une transformation chargée de faire disparaître le radical. Le passage aux fonctions trigonométriques s'impose, d'où l'introduction d'un paramètre ω qui fournisse $\partial z/\partial x$ comme multiple de $\cos\omega$ et $\partial z/\partial y$ comme multiple de $\sin\omega$. Il faut corriger et introduire un second paramètre afin de disposer de toutes les valeurs réelles possibles pources dérivées partielles. Cela induit le choix de $\operatorname{tg}\varphi$. Soit

(2) $$\partial z/\partial x = \operatorname{tg}\varphi\cos\omega \ ; \ \partial z/\partial y = \operatorname{tg}\varphi\sin\omega.$$

L'application $(\varphi, \omega) \mapsto (\operatorname{tg}\varphi\cos\omega, \operatorname{tg}\varphi\sin\omega)$ est une application surjective, localement inversible sauf en $\varphi = 0$. C'est sur les variables indépendantes φ et ω qu'Euler travaillera désormais. Il déduit aussitôt de (1) l'écriture

(3) $$z = a\cos\varphi.$$

Il nous faut noter que, par ce paramétrage, Euler a négligé le cas $\partial z/\partial x = \partial z/\partial y = 0$, soit $z = a$ ou $z = -a$, c'est-à-dire la solution géométrique constituée des deux plans parallèles. Sur la forme analytique, cet oubli est d'abord surprenant. Mais il faut se souvenir que, selon la définition déjà citée des fonctions dans les **Institutiones calculi differentialis**, une fonction doit d'abord être variable. Donc les constantes ne sont pas des fonctions !

La troisième étape n'est pas achevée avec la formule (3), car il convient d'identifier la différentielle de z déduite de sa définition selon

$$dz = (\partial z/\partial x)\, dx + (\partial z/\partial y)\, dy$$

avec la différentielle de z déduite de (3) selon

$$dz = -a\sin\varphi\, d\varphi.$$

Soit, en tenant compte de (2), et après une manipulation simple que ne

(17)Voir une même démarche réussie chez Euler dans : J.Dhombres, Sur un texte d'Euler relatif à une équation fonctionnelle: archaismes, pédagogie et style d'écriture, *Sciences et Techniques en perspective*, 1986, vol 8, pp.1-55(avec traduction en français du texte d'Euler).

précise pas Euler

(4) $$d(a \sin \varphi + x\cos \omega + y \sin \omega) = (y\cos\omega - x\sin\omega)\, d\omega .$$

Puisque le membre de gauche est une différentielle totale exacte, ainsi doit être celui de droite. Euler en déduit que l'expression $y \cos \omega - x \sin \omega$, où x et y sont des fonctions de ω et de φ, ne dépend que de la variable ω.

" Il est évident que l'intégrale ne peut être trouvée que si la formule $y \cos \omega - x\sin \omega$ est une fonction de la seule variable ω".

Ce résultat découle facilement du fait que les variables ω et φ sont les variables indépendantes du problème en appliquant une procédure expliquée ultérieurement dans un autre ouvrage (18) célèbre d'Euler. Il n'explique pas en détail et peut poser (nous gardons ses notations)

$$y\cos \omega - x\sin \omega = F' : \omega .$$

La notation utilisée(19) n'est pas anodine puisque par intégration

$$\int (y\cos \omega - x\sin \omega) d \omega = F : \omega .$$

De fait $F'(\omega)$ est bien une fonction quelconque de ω, qu'il va bientôt noter $\Omega(\omega)$. En outre, c'est une dérivée de fonction. Ces deux points paraissent indépendants dans la pensée eulérienne. Ce qui signifie que toute fonction peut être considérée comme la dérivée d'une autre fonction, ou encore, en langage moderne, que toute fonction est intégrable. Là encore joue, consciemment ou non, l'analogie polynomiale que nous avons relevée constamment au 18è siècle quant au maniement des fonctions.

Aussi bien, puisque $z = a \cos \varphi$, on déduit la solution analytique de l'équation (1) sous la forme

(5) $$\pm\sqrt{a^2-z^2} = \int \Omega(\omega)d\omega - x \cos \omega - y\sin \omega$$

---

(18)**Institutiones calculis integralis**, vol III, § 77 (voir dans **Opera omnia**, série 1, vol 22, pp.13). Ce volume III parut en 1770, les deux premiers en 1768.

(19)On entend souvent dire que Lagrange fut le premier à noter d'un prime la dérivation. On voit qu'Euler en 1765 (imprimé en 1767) utilise déjà une telle notation. Certes Lagrange indique dans la **Théorie des fonctions analytiques** de 1797, que

" *pour plus de simplicité et d'uniformité, on dénote par f'x la première fonction dérivée de fx, par f'' la première fonction dérivée de f'x, par f'''x la première fonction dérivée de f''x, et ainsi de suite* (page 14).

Il est vrai que Lagrange utilisait déjà cette notation dans sa **Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales** en 1770 et on la trouvait en 1759 dans un texte de Daviet de Foncenex paru aux **Miscellanea Taurinensis**. On sait que de Foncenex était proche de Lagrange à Turin.

à laquelle est jointe la relation supplémentaire où l'on a pris $\Omega(\omega) = F'(\omega)$,

(6) $$y\cos\omega - x\sin\omega = \Omega(\omega)$$

" *Vel denotet Ω functionum quamcunque ipsius ω utcunque indefinitam, ut etiam functiones discontinuae inde non excludantur...*".

" *Si Ω représente une fonction quelconque de ω, tout à fait indéfinie, de telle sorte que par là-même les fonctions discontinues ne soient pas exclues...*"

Pour un couple de valeurs (x, y) fixées, c'est-à-dire un point du plan, la relation (6) permet implicitement de déterminer le paramètre ω, qui, reporté dans (5), fournit bien la valeur de z. La solution analytique donnée par (5) et (6) est la solution " générale" du problème aux yeux d' Euler, par le seul fait qu'intervienne une fonction arbitraire Ω. Nous avons vu que telle était la conclusion à tirer de la partie théorique du présent article d'Euler.

4.4 Construction géométrique déduite de la solution analytique.

La partie finale de l'article a pour but de fournir une interprétation de cette solution générale analytique qui en permette l'identification avec la solution géométrique précédemment obtenue. L'établissement de cette identité répond à deux visées épistémologiques distinctes. Pour le premier point de vue, l'identification assurera que les fonctions " discontinues" ont droit de cité en " géométrie", et qu'elles ne sont pas seulement des fonctions monstrueuses issues du pur calcul et sans validité. Mais, pour le second point de vue, cette identification consolidera l'emploi de la méthode fonctionnelle, l'établissant en statut au même niveau qu'une méthode géométrique puisque de l'existence même d'une fonction arbitraire dépend la preuve de l'obtention de la solution générale. L'opération entreprise par Euler dans sa coda n'est donc pas négligeable !

Au terme de cet exemple où tous les "serpents" auront été obtenus, tant par l'analytique que par la géométrie, Euler pourra effectivement affirmer la nécessité des fonctions discontinues en analyse, du moins dès que des variables indépendantes interviennent en nombre supérieur à l'unité.

" *tales functiones ita necessario ad calculi essentiam pertinere sint*

censendae, ut nulla integratio pro absoluta et completa haberi queat, nisi simul functio maxime indefinita, atque adeo etiam discontinua, in calculum introducatur"
"de telles fonctions doivent être considérées comme tellement liées nécessairement à l'essence du calcul, qu'aucune intégration ne peut être considérée comme définitive et complète si en même temps n'est introduite dans le calcul une fonction tout à fait indéfinie et même de plus discontinue".(§23).

La démarche proposée par Euler afin de réaliser cette identification repose sur une interprétation du paramètre ω . Elle suit en fait un procédé constructif particulièrement ancien dans le but de satisfaire aux deux exigences épistémologiques mentionnées ci-dessus. Il s'agit littéralement de " lire" les formules analytiques de sorte qu'une construction géométrique s'en déduise. L'analogue d'une telle démarche, dans le cadre polynomial classique de l'art analytique , est un appendice de la 4ème phase . Il s'agit de la construction géométriquement explicite des racines du polynôme qui résume un problème donné selon la deuxième phase. De telles constructions ont constitué pendant longtemps une branche bien vivante des mathématiques, possédant ses méthodes propres et son langage, avant de tomber en désuétude [(20)]. Son maintien ici par Euler, dans le cadre cette fois de la méthode fonctionnelle , nous conforte dans l'explication fournie de l'extension du champ analytique des polynômes aux fonctions.

A partir de deux axes orthogonaux en A servant de repère au plan, Euler porte ω comme l'angle entre l'axe des ordonnées et une droite AP (figure 2). La longueur AP est une fonction "quelconque" de ω , fonction notée Ω , qui correspond à la fonction $F'(\omega)$ de la formule analytique . Orthogonalement en P (rotation de $-\pi/2$), Euler porte algébriquement une longueur PM = $\int \Omega \, d\omega = F(\omega)$. Le point M décrit une courbe plane ($\mathcal{C}$) lorsque le paramètre angulaire ω varie. Voilà la liberté du problème, à partir de la fonction arbitraire $\Omega(\omega)$. Pour suivre les calculs d'Euler, à vrai dire guère explicités , appelons N un point du plan , de coordonnées (n_1, n_2) , situé sur la droite PM et posons que la mesure

(20)Sur cette méthode de construction géométrique, voir l'article de reconstitution de H .J.M .Bos, Arguments on motivation in the rise and decline of a mathematical theory;the "construction of equations",1637-ca1750, *Arch.Hist.Ex.Sc.* 30,1984,pp.331-380.

algébrique de PN soit Δ, une autre fonction donnée de ω. On dispose de

$$(7) \qquad \begin{cases} n_1 = -\Omega \sin\omega + \Delta\cos\omega \\ n_2 = \Omega\cos\omega + \Delta\sin\omega. \end{cases}$$

Réciproquement, Δ et Ω s'expriment à partir des coordonnées n_1 et n_2 selon les formules

$$(8) \qquad \begin{cases} \Omega = n_2\cos\omega - n_1\sin\omega \\ \Delta = n_2\sin\omega + n_1\cos\omega \end{cases}$$

C'est sur ces formules analytiques (8) que tout se noue. Lorsque N coïncide précisément avec le point M construit précédemment, c'est-à-dire le point pour lequel les fonctions Ω et Δ sont liées par la relation $\Delta'(\omega) = \Omega(\omega)$, ses coordonnées (m_1, m_2) satisfont les relations (8) que nous écrivons sous la forme

$$(9) \qquad \begin{cases} \Delta'(\omega) = m_2\cos\omega - m_1\sin\omega \\ \Delta(\omega) = m_2\sin\omega + m_1\cos\omega \end{cases}$$

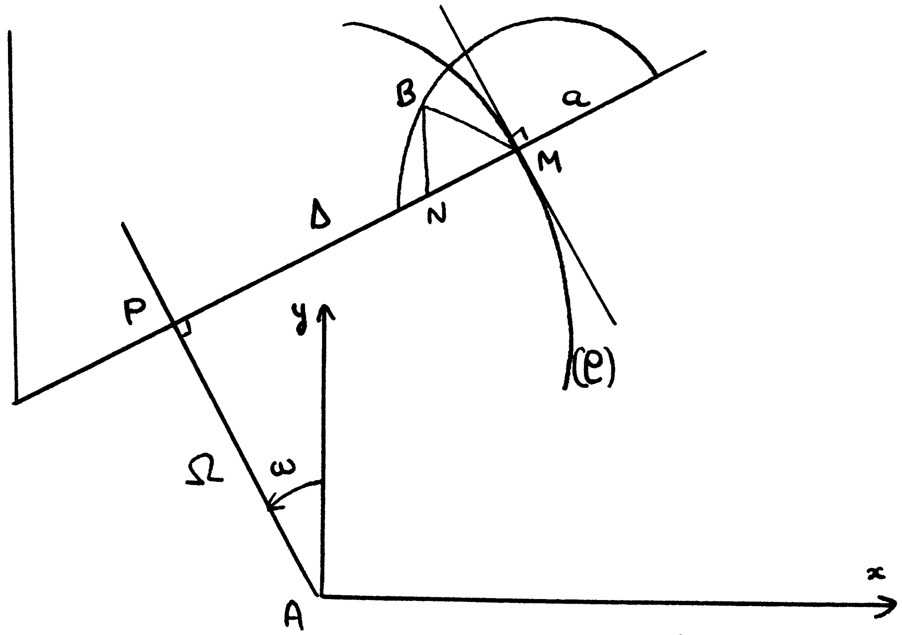

figure 2

Soient maintenant (x, y, z) les coordonnées génériques du point courant B de la surface qui est la solution du problème posé. Appelons aussi N le point de coordonnées (x, y, 0), projection de B sur le plan des x et y. Ses coordonnées satisfont les relations (5) et (6) que nous rappelons

$$(10) \qquad \begin{cases} y \cos \omega - x \sin \omega = \Omega(\omega) \\ x \cos \omega + y \sin \omega = \int \Omega(\omega)\, d\omega \pm \sqrt{a^2 - z^2}. \end{cases}$$

En interprétant (8), on constate géométriquement que le point N est localisé sur la droite PM et à une distance algébrique Δ de P telle que

$$\Delta = \int \Omega(\omega)\, d\omega \pm \sqrt{a^2 - z^2}.$$

En sorte qu'en valeur absolue, la distance MN vaut $\sqrt{a^2 - z^2}$. Puisque z doit être porté verticalement, on localise le point courant B(x, y, z) de la surface sur un cercle centré en M, de rayon a, et qui est décrit dans un plan perpendiculaire à celui des x et des y, plan dressé le long de la droite PM(cf figure2).

Afin de retrouver complètement la solution géométrique fournie par Euler à partir de l'interprétation issue de la solution analytique, il sufit désormais d'établir que la droite PM est orthogonale à la courbe ($\mathcal{C}$) décrite par M. Quittons Euler un instant. La simple dérivation de (8) en ω conduit à la relation

$$\Delta'(\omega) = \Omega(\omega) + n'_2 \cos \omega + n'_1 \sin \omega.$$

Mais, pour le point M, nous savons que $\Delta'(\omega) = \Omega(\omega)$. Aussi bien, l'on déduit pour ce point M de coordonnées (m_1, m_2) dépendant de ω, la relation

$$(11) \qquad m'_2 \cos \omega + m'_1 \sin \omega = 0.$$

L'interprétation, disons la lecture géométrique de cette relation (11), est simple: la tangente en M à la courbe ($\mathcal{C}$) décrite par M est parallèle à la droite AP. Ou encore la droite PM est la normale en M à la courbe ($\mathcal{C}$). Le résultat cherché est ainsi prouvé.

Mais Euler n'agit pas ainsi. A la démonstration analytique précédente selon les règles du calcul différentiel, il préfère[21] la démarche archaïque de cette "géométrie de l'ultime "sur laquelle sont basés les **Principia** de Newton. Si cette démonstration posséde l'avantage d'une visualisation des différentes étapes du calcul, elle ne saurait masquer le risque de négliger certains termes.

En déplaçant légérement la situation géométrique(figure 3), faisant varier l'angle ω d'une quantité $d\omega$, et sans doute parce que l'angle en P est un angle droit, l'arc de courbe Pp est assimilé par Euler à un arc de cercle, donc de longueur $\Omega d\omega$. Il néglige ainsi les quantités du second ordre par rapport à $d\omega$,comme $d\Omega d\omega$. Comme la différentielle de la longueur

(21) Ce n'est pas la première fois qu'Euler procèda ainsi, en revenant à Newton. Voir par exemple la référence citée à la note (17).

PM est par définition $\Omega d\omega$, car PM = $\int \Omega d\omega$. Euler déduit d (PM) = Pp' et donc p'm = PM. Mais au premier ordre près, p'm = Pm, donc Pm = PM et par suite mM est assimilable à un arc de cercle. Autrement dit , mM est orthogonal à PM , ce qui termine la démonstration par cette" géométrie de l'ultime".

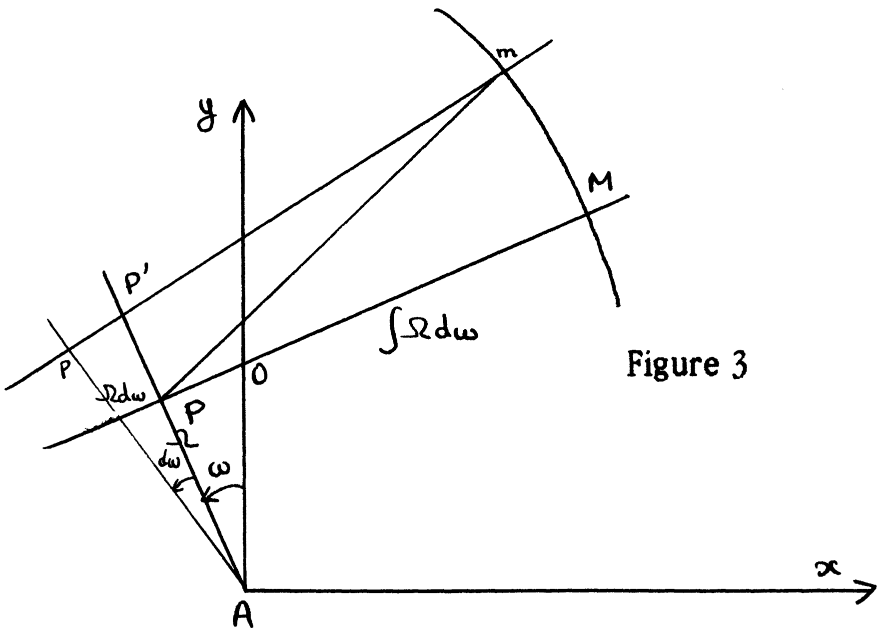

Figure 3

La boucle est bouclée: la méthode analytique, par méthode fonctionnelle interposée, est établie en toute légitimité "géométrique", à condition d'accorder leur place aux fonctions discontinues.

En appendice à cette étude, et de façon un peu indépendante du texte d'Euler, nous allons terminer par un historique de la construction géométrique dont Euler vient de faire usage.

4.5Podaire d'une courbe par rapport à un point

La construction géométrique d'Euler a l'avantage de visualiser géométriquement l'opération d'intégration d'une fonction puisque l'on passe du point P au point M en intégrant la fonction Ω (cf. figure 2). Cette visualisation se fait non pas en passant d'une longueur à une aire , selon l'approche usuelle de l'intégrale, mais en restant dans le domaine des seules longueurs, donc en procédant par grandeurs homogènes pour employer le langage euclidien si prégnant au 18è siècle. Euler ne fait aucune mention d'une construction similaire chez d'autres mathématiciens, et il est vraisemblablement le premier à signaler cette interprétation géométrique astucieuse de l'intégrale. Toutefois, la liaison géométrique entre les courbes décrites par les points P et M était connue des mathématiciens depuis assez longtemps.

Elle était généralement vue d'une façon légérement différente, en utilisant le point N , projection de A sur la tangente en M à la courbe décrite par M (cf figure 4). Si l'on appelle $(\mathcal{C})$ cette dernière courbe engendrée par M , la courbe décrite par N s'appelle la podaire $(\mathcal{P})$ de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport au point fixe A. Ce nom est tardif, et semble-t-il fut trouvé par O.S.Terquem[(22)] en 1848. Selon ce vocabulaire, le point P décrit la podaire $(\mathcal{P}')$ de la courbe développée $(\mathcal{C}')$ de $(\mathcal{C})$ puisque la tangente à cette développée est précisément la droite PM. On a pris l'habitude (en anglais) de dire que P décrit la contrepodaire $(\mathcal{P}')$ (counter-pedal curve ou antepedale, voire contrapedale en italien) de la courbe $(\mathcal{C})$: c'est donc aussi une podaire[(23)].

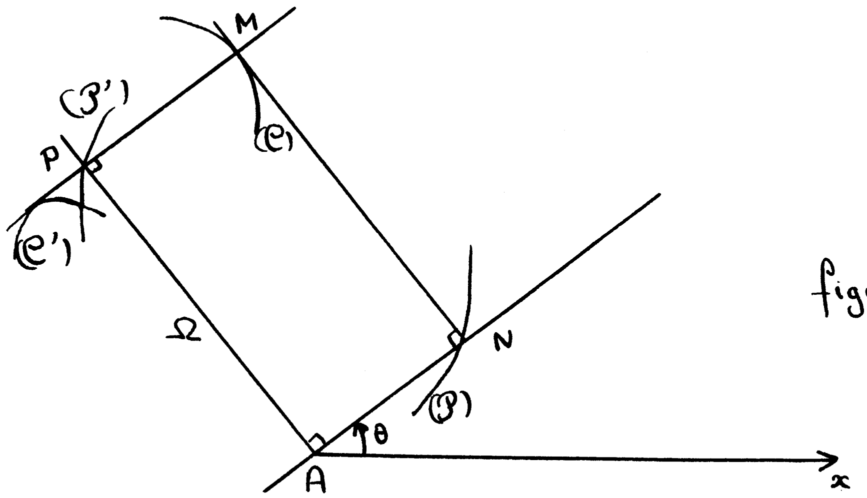

figure 4

Le passage d'une courbe $(\mathcal{C})$ à sa podaire $(\mathcal{P})$ peut se faire grâce à deux transformations géométriques simples: une

(22) O.S.Terquem, *Nouvelles Annales de Mathématiques* tome 5, 1848, pp. 239,

(23) En français, le mot antipodaire est réservé à une autre courbe. Si A désigne (cf. figure 5) un point fixe d'un plan et $(\mathcal{C})$ une courbe dans ce plan, l'antipodaire $(\mathcal{A})$ de $(\mathcal{C})$ est l'enveloppe de toutes les droites MT où MT est orthogonale à AM. En sorte que la podaire de la courbe $(\mathcal{A})$ est la courbe de départ $(\mathcal{C})$. En Italien, l'antipodaire est dite podaria negativa.

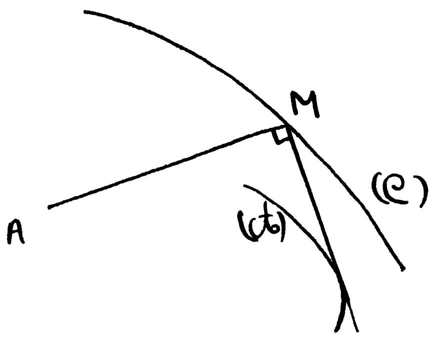

figure 5

transformation par polaires réciproques suivie d'une inversion(24). Ceci est facile à voir sans que l'on ait besoin de trop s'éloigner des calculs, sinon de l'esprit, des mathématiques d'Euler.

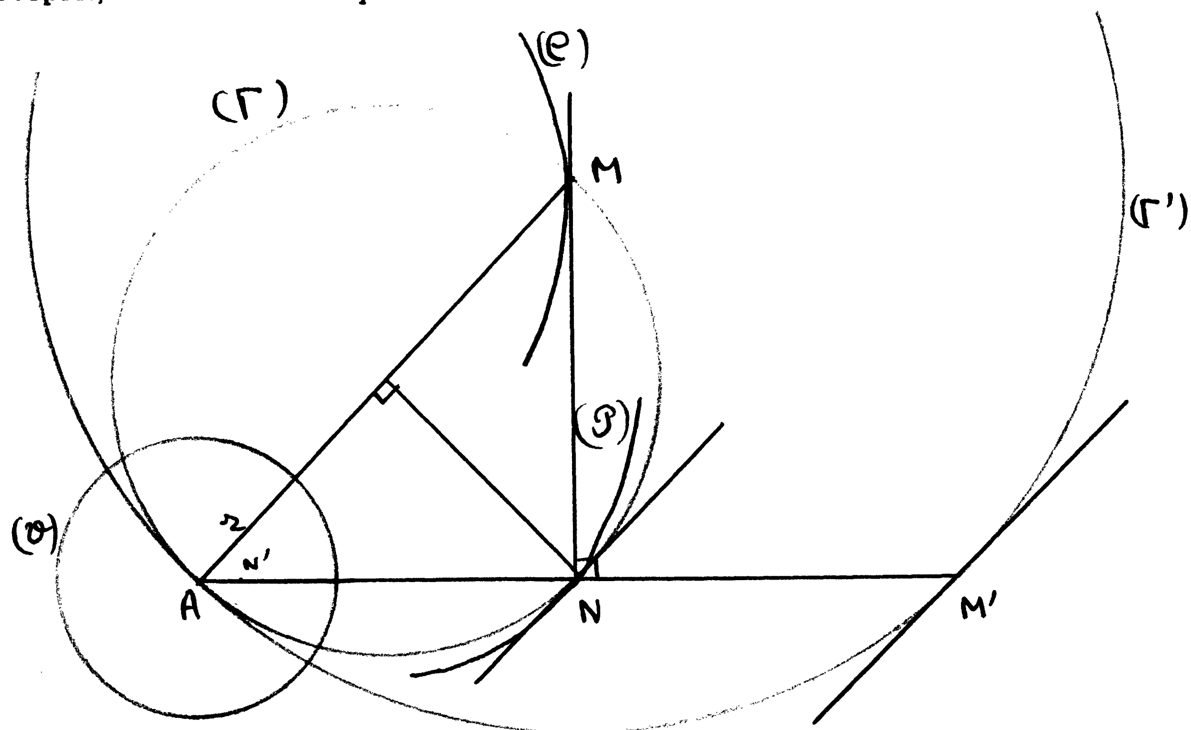

figure 6

Soit (figure 6) Γ' le cercle de centre M et de rayon MA et soit Γ le cercle passsant par les trois points A, M et N, c'est-à-dire , puisque l'angle MNA est droit , l'homothétique de Γ' dans l'homothétie de centre A et de rapport 1/2. Lorsque M parcourt (𝒞), le cercle Γ' passe toujours par A et admet une enveloppe. Le point caractéristique autre que A de cette enveloppe est à l'intersection de Γ' et de la droite passant par A qui est orthogonale à la tangente en M à la courbe (𝒞), puisque telle est la position limite de l'axe radical de deux cercles voisins. C'est donc le point M' de la figure 6. De sorte que le point N , sur la podaire (𝒫), se déduit de M' par l'homothétie de centre A et de rapport 1/2. La tangente en N se déduit par la même homothétie de la tangente au cercle Γ' en M'. Géométriquement, on constate(25) donc que la

(24)Voir S.Lie; G.Scheffers, **Geometrie des Berührungstransformationen** , tome I, Leipzig, 1896, pp.17

G. Loria ; Le transformazioni pedali ed antepedali nel piano e nello spazio, *Perio. di mat.* t.XXII, 1907.

(25) De la même façon, la tangente à la contrepodaire en P est la tangente au cercle passant par A par P et par le centre de courbure de la courbe (𝒞) qui est le point caractéristique sur la normale PM de la développée.

tangente à la podaire($\mathcal{P}$) en N est la tangente en N au cercle Γ.

Ce résultat permet la construction de la podaire par deux transformations géométriques. Soit en effet (ϑ) un cercle de centre A et de rayon fixé r(r>0). Posons N' l'inverse de N dans l'inversion relative à (ϑ), c'est-à-dire le point de AN tel que AN.AN' = r. Ce point N' est le pôle de la tangente MN à ($\mathcal{C}$) par rapport au cercle (ϑ). Autrement dit, la podaire ($\mathcal{P}$) est le lieu de l'inverse , dans l'inversion définie par le cercle(ϑ) , du pôle de toutes les tangentes à ($\mathcal{C}$) par rapport à (ϑ).

On déduit aussitôt de ce résultat que la podaire de toute courbe unicursale est également unicursale et on peut établir qu'en général l'ordre de la podaire ($\mathcal{P}$) est égal à deux fois la classe c de la courbe ($\mathcal{C}$) lorsque celle-ci est algébrique tandis que la contrepodaire a pour ordre 2n + c , où n est l'ordre de la courbe ($\mathcal{C}$). On se doute que les géomètres du 19è siècle s'en donnèrent à coeur joie , tant dans la description des podaires et des contrepodaires de courbes variées selon la position du point A (pour les coniques, les cissoïdes etc) que dans les calculs analytiques, par exemple ceux utilisant les coordonnées pluckériennes d'une droite. S'illustrèrent ainsi , parmi d'autres , des mathématiciens tels que Steiner, Liouville, Sturm, Lie ou Catalan , ce qui indique la fascination que la géométrie des courbes exerçait encore au 19è siècle. Nous ne poursuivrons pas cette description(26) des résultats sur les podaires, mais essaierons de faire brièvement l'historique de telles courbes avant Euler.

C'est vraisemblablement Roberval qui, le premier , travailla sur une telle courbe pour établir que la podaire d'un cercle par rapport à un point de son plan est un limaçon de Pascal, c'est-à-dire une conchoïde de cercle(27).On peut trouver analytiquement

---

(26)Pour plus de renseignements, voir par exemple le chapitre 8 de

G.Loria, **Curve piane speciali algebriche e transcendenti, teoria e storia**, vol II, Curve transcendente, curve dedotte da altre, U.Hoepli, Milano, 1930,

voir aussi :

Gomes Texeira , **Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches**, Coïmbra, 1908/1909; Chelsea Publ., NewYork, 1971.

Un résultat surprenant par sa simplicité et prouvé par Catalan en 1881 énonce que lorsque ($\mathcal{C}$) est une courbe de Jordan convexe et fermée, et A un point intérieur à cette courbe, la différence entre l'aire délimitée par la podaire ($\mathcal{P}$) de ($\mathcal{C}$) relativement à A et l'aire délimitée par la contrepodaire($\mathcal{P}$' de ($\mathcal{C}$) (toutes deux sont des courbes fermées) est égale à l'aire délimitée par la courbe ($\mathcal{C}$) elle-même.

ce résultat. Si C est le centre (figure 7) d'un cercle (BC = a) de rayon h (figure7), on a avec X = BR la relation de proportionnalité $p(\theta)/h = X/(X-a)$. On a aussi $p(\theta) = X \cos \theta$. Donc $X = a + h/\cos \theta$ ou encore $p(\theta) = h + a \cos \theta$. Ceci est l'équation polaire de la podaire d'un cercle et c'est évidemment la conchoïde du cercle d'équation polaire a cosθ, cercle de diqmètre BC. Le raisonnement géométrique, celui de Roberval , est plus direct, et se voit sur la figure 7 grâce à l'angle droit en N.

" *Mais voici une des belles spéculations qui se puisse sur la description de cette ligne, et par le moïen de laquelle elle a été trouvée par le sieur de Roberval: que la ligne qui passe par tous ces points FF est la même que le limaçon du cercle CEB, dont le pole est B, et l'intervalle CD* ".

La tradition attribue à Etienne Pascal (1588-1651), père de Blaise, la première considération de la conchoïde d'un cercle par rapport à un point de ce cercle. Roberval prend rang pour indiquer qu'il trouva cette même courbe comme podaire d'un cercle, et sut les reconnaître comme identiques.(28)

Lorsque h = a, autrement dit lorsque le point A , par rapport auquel on prend la podaire, est situé sur le cercle, cette conchoïde est ce qu'on appelle depuis Castillon (en 1741) une cardioïde (figure 8). Roberval disait déjà (op. cité pp.48)

" *Si l'on continuait cette ligne de l'autre côté du cercle, elle représenterait une sorte de figure en coeur divisée en deux superficies.*."

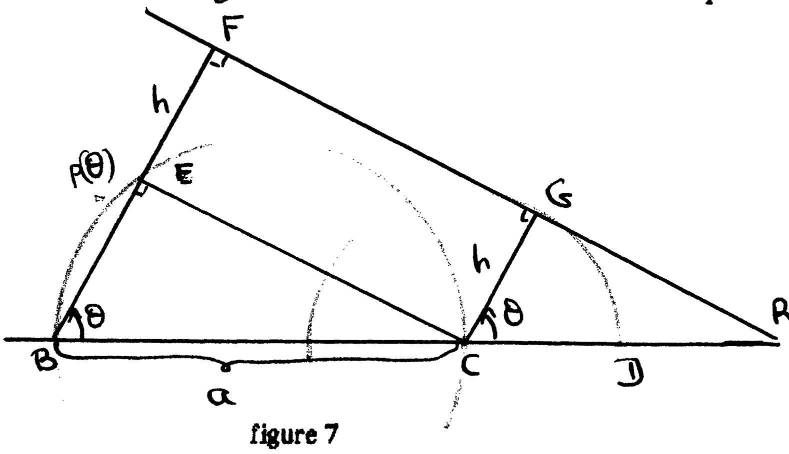

figure 7

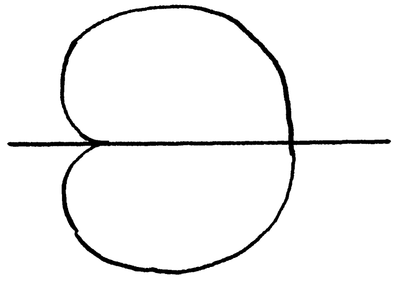
figure 8

(27) Gilles Personne de Roberval, Observations sur la composition des mouvements et sur les moyens de trouver les touchantes des lignes courbes. Divers textes de Roberval furent tardivement publiés en 1730 dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, tVI, pp.1-440. Le texte concerné est pp.1-89 et la démonstration en jeu apparaît pp.47-48. Une publication antérieure avait eu lieu en 1693.

La propriété du limaçon que le texte d'Euler nous fait sentir est la liaison entre le rayon vecteur $p(\theta) = h + a \cos \theta$, visualisé par BF sur la figure 7 et la dérivée $p'(\theta) = -a \sin \theta$, lue en GF. Apparemment les auteurs antérieurs à Euler ne signalent pas la généralité de cette correspondance dans le cas du limaçon et dans le cas d'une podaire(29).

---

(28)Le limaçon de Pascal est une quartique bicirculaire unicursale. Rappelant que le nom fut proposé par Roberval, M.de la Hire en 1708 (*Mémoires de l'Académie des Sciences,* pp.32-60) indique en outre " *les conchoïdes sont toujours géométriques, pourvu que leurs bases le soient aussi.*" Il se contente de faire la démonstration de l'algébricité de la cardioïde , dans l'équation de laquelle il oublie de faire une simplification: " *lieu à une courbe qui est la conchoïde, et dont les inconnues montent à 6 dimensions, et que nous avons trouvée être quarrable*" . La Hire fournit la rectification de la cardioïde: c'est le seul cas d'un limaçon où cette rectification n'introduit pas des intégrales elliptiques. La même courbe était connue préalablement comme courbe cycloïdale: un cercle roulant sans glissement sur un autre cercle de même rayon. Roberval avait signalé son utilisation pour la trisection de l'angle.

(29) Analytiquement, la podaire apparaît avec simplicité lorsque l'on considère l'équation dite normale d'une courbe (𝒞), c'est-à-dire l'équation

(1) $$x \cos \theta + y \sin \theta - p(\theta) = 0.$$

Il s'agit de l'équation cartésienne de la tangente à la courbe (𝒞) pour laquelle $p(\theta)$ désigne la longueur algébrique de la distance à l'origine à cette tangente(cf.figure 9) et θ l'angle de AN avec un axe fixe. Le point M, qui est le point caractéristique sur la tangente, est à l'intersection de la droite donnée par (1) et de la droite dont l'équation est obtenue en dérivant (1) en θ:

$$-x \sin \theta + y \cos \theta - p'(\theta) = 0.$$

Cette équation s'écrit encore sous la forme

(2) $$x \cos(\theta + \pi/2) + y \sin (\theta+\pi/2) - p'(\theta) = 0$$

Dès lors, (2) est l'équation de la normale à la courbe (𝒞). Ainsi $p'(\theta-\pi/2)$ représente l'équation polaire de la contrepodaire (𝒫) de la courbe (𝒞). on retrouve ainsi le résultat d'Euler, à savoir la relation de dérivation entre les fonctions donnant PM et AP à partir de θ.

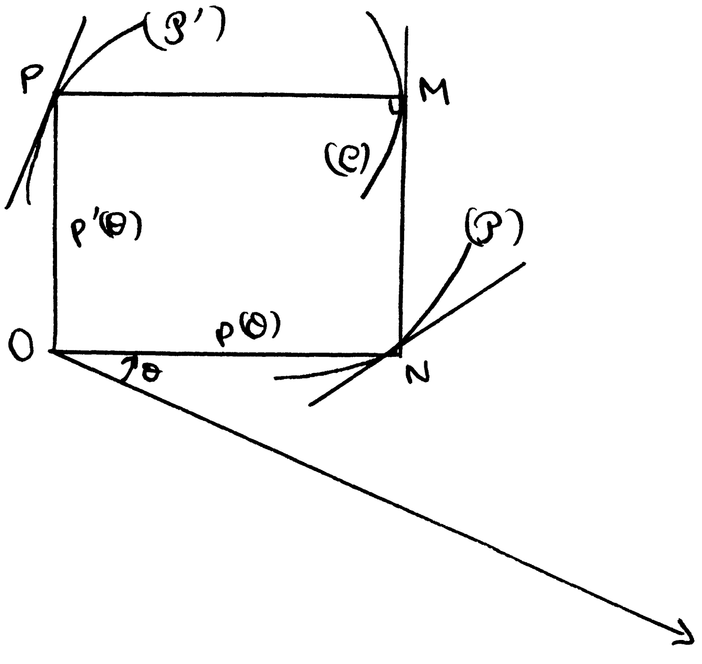

figure 9

Conclusion: la postérité du texte d'Euler

Malgré un embarras nominal de définition au sujet des fonctions continues et partant des fonctions discontinues envisagées par négation, l'article d'Euler paru en 1767 , et intitulé **De usu functionum discontinuarum in analysi** , ouvrait des perspectives tout à fait nouvelles pour l'Analyse. A cette discipline mathématique était dévolue sans ambages la tâche de résoudre les équations différentielles et les équations aux dérivées partielles, but ultime du calcul intégral. Ces équations fonctionnelles apparaissaient comme les équations naturellement obtenues au terme de toute démarche analytique et de leur résolution dépendait tout le futur.

But grandiose qui devait longuement occuper les mathématiciens du XIXème siècle, et plus encore ceux du XXème siècle: équation de la chaleur et introduction des séries et intégrales de Fourier, problème de Dirichlet relatif à l'équation de Laplace et introduction des méthodes variationnelles, équation de Navier-Stokes en hydrodynamique avec les méthodes de la turbulence selon Reynolds, équations de Maxwell en électromagnétisme etc.

Résoudre de telles équations signifiait , pour Euler, le fait d'en trouver toutes les solutions, autrement dit d'en fournir la solution générale. A une phase ultérieure , apparemment plus facile , était réservée la sélection , au sein de la soluton générale , c'est-à-dire dans la collection de toutes les fonctions solutions , des fonctions adaptées au problème particulier considéré. La prise en compte des conditions initiales et aux limites, pour employer notre vocabulaire actuel, était donc nettement séparée de la recherche des solutions. Du coup, bien loin de s'intéresser à la preuve d'un théorème d'existence et d'unicité pour telle ou telle équation, Euler recherchait un critère lui permettant de reconnaître à coup sûr la solution générale.

Pour les équations fonctionnelles , fruit de la méthode analytique, il s'agissait de trouver l'équivalent du théorème fondamental de l'algèbre qui donne le nombre exact des racines d'un polynôme selon son degré, et couronnait ainsi la voie analytique particulière des équations algébriques. Le critère, selon Euler, paraissait être le nombre exact de fonctions arbitraires intervenant dans la solution générale ainsi que le nombre de variables indépendantes régissant ces fonctions arbitraires. L'adjectif "indépendant" associé à une variable recevait désormais un rôle majeur.

En énonçant ce critère, Euler dut faire l'abandon d'une conception de la fonction comme procédé analytique, c'est-à-dire comme combinaison d'opérations admises, au profit d'une tout autre idée de la fonction. Cette nouvelle conception envisageait la fonction comme une dépendance, a priori quelconque entre une variable (ou des variables indépendantes) et une autre

Tel est le fruit le plus notable du travail d'Euler, puisque relativement aux équations aux dérivées partielles, en omettant les solutions particulières , il ratait les courbes caractéristiques et les problèmes d'unicité. Si ce fruit nous paraît bien maigre aujourd'hui, c'est que la nouvelle conception de la fonction fait partie intégrante de nos réflexes mathématiques. Son acquisition pourtant ne résulta pas d'un petit effort intellectuel , pouremployer la même litote qu'Euler privilégiait. Il est même indispendable de remarquer que le tournant épistémologique opéré par Euler ne provint pas d'une critique logique de la définition analytique précédente des fonctions mais s'inscrivit dans une démarche de mathématicien actif , confronté à des problèmes à résoudre.

Ce tournant épistémologique est instructif pour l'historien des mathématiques car il ne prit en rien l'allure d'une révolution. Au point qu'Euler utilisa sans barguiner dans son travail l'ancienne définition analytique pour faire surgir la "continuité"d'une fonction. Il réservait de telles fonctions continues à la seule "géométrie sublime", domaine bien établi et un peu suranné, laissant aux nouvelles fonctions , comme à des enfants prometteurs, le soin d'investir le domaine en gestation de la nouvelle analyse.