JEAN-PAUL PIER

L'apparition de la théorie des groupes topologiques

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1re série, tome 9 (1988), p. 1-21
<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1988__9__1_0>

L'APPARITION DE LA THÉORIE DES GROUPES TOPOLOGIQUES

par Jean-Paul PIER ★

Depuis l'Antiquité beaucoup de structures mixtes algébrico-topologiques ont été étudiées. Tel est le cas, par exemple, pour le corps des réels ou, du moins, pour sa partie strictement positive. Kronecker et Dedekind se sont rendu compte de l'intérêt qu'il y a à dégager la différence entre les structures algébriques et les structures algébrico-topologiques. Cette distinction se précise au fur et à mesure que les axiomes fondamentaux de la topologie prennent une forme définitive; elle est établie vers 1910, mais mettra encore une vingtaine d'années avant de s'affirmer nettement.

Le groupe additif des nombres réels constitue l'exemple le plus connu d'un groupe topologique, i. e. d'un groupe pour lequel la loi interne et le passage au symétrique sont des applications continues, concept qui allie une structure algébrique à une structure algébrico-topologique. Pour ce qui est de la structure algébrique, rappelons qu'après l'époque préhistorique se terminant avec Ruffini et Cauchy, la théorie des groupes a été introduite par Galois, explicitée par Serret, Jordan, mise en forme par Cayley et Weber. Quant à la structure algébrico-topologique, la notion de groupe topologique plonge ses racines historiques dans l'étude des groupes de Lie qui possèdent, en outre, une structure de variété différentiable.

Lie [L 3] est considéré, à juste titre, comme le créateur de la théorie des groupes qui portent son nom et qu'il appelle groupes de transformations "finies" (i. e. dépendant d'un nombre fini de paramètres) et "continues" (au sens allemand de "kontinuierlich" et non "stetig", signifiant plutôt analytique ou continûment dérivable). Il établit une théorie axiomatique capable de décrire la géométrie dans laquelle intervient le "groupe des transformations finies et continues"; ce dernier est déterminé par un système de transformations dérivables sur des valeurs complexes

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

★ Conférence donnée le 10 décembre 1986 au Séminaire d'Histoire des mathématiques.

Si on effectue successivement deux telles transformations, on obtient encore une transformation de ce système. Parmi ces groupes de transformations se rangent notamment les groupes de déplacements. Les motivations qui, entre 1869 et 1871,ont conduit Lie à examiner ces groupes sont d'ordre géométrique. Dans son célèbre programme d'Erlangen, Klein [K3] se propose d'établir une association entre des groupes et des géométries, à savoir des jeux de théorèmes qui demeurent valables si le groupe correspondant transforme les figures considérées. Il étudie notamment les groupes de déplacements, le groupe des rotations autour d'un point. La théorie est développée par Lie dans de nombreux mémoires à partir de 1874; elle fait l'objet d'un exposé systématique dans l'important traité "Theorie der Transformationsgruppen" écrit en collaboration avec Engel [L4]. Jetant un regard rétrospectif sur ses travaux, Lie note, avec raison,que le groupe des déplacements examiné par Jordan constitue le premier exemple relatif à ce problème, mais que lui-même a été le premier à réaliser une étude systématique des groupes de transformations continues. Poincaré parle de la "belle théorie des groupes continus dont la science est redevable au génie de notre regretté correspondant M. Lie" [P1]. Cependant, pendant une époque ultérieure assez longue, E. Cartan sera pratiquement le seul mathématicien à travailler dans la théorie des groupes de Lie.

Il est significatif que Poincaré rapproche le sujet des groupes de Lie de cette importante branche nouvelle des mathématiques qui a été introduite par Riemann et constitue l'ancêtre de la topologie, à savoir l'Analysis situs, dans laquelle "deux figures sont équivalentes toutes les fois qu'on peut passer de l'une à l'autre par une déformation continue, quelle que soit d'ailleurs la loi de cette déformation pourvu qu'elle respecte la continuité" [P2].

A la suite des travaux de Lie, l'intérêt s'éveille pour l'étude de groupes topologiques plus généraux. Au sujet de la théorie axiomatique de Lie, Hilbert [H4] affirme que l'imposition de conditions de différentiabilité ne se justifie que par des argumentations détournées et compliquées, contrairement à ce qui a lieu pour les conditions de continuité; il se demande donc si, moyennant l'introduction de nouvelles variables ou de nouveaux paramètres, il pourra être possible de remplacer le groupe des transformations de Lie par un groupe de fonctions qui sont toujours nécessairement différentiables. En 1900, Hilbert formule son "5^e problème" relativement à des groupes qui sont localement euclidiens; il se pose la question de savoir dans quelle mesure, en l'absence d'hypothèses de différentiabilité, le concept de groupe de transformations continues de Lie est approprié pour ses investigations.

En 1910, Brouwer [B4] prouve implicitement l'existence d'un groupe de transformations continues entre tous les ensembles parfaits bornés de la droite numérique et l'ensemble triadique de Cantor formé des nombres de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} c_n 3^{-n}$, où $c_n \in \{0,2\}$ pour $n = 1, 2, \ldots$. Il compare ce fait au caractère continu des groupes de Lie.

En 1925, Schreier introduit des "groupes continus abstraits", ce dernier adjectif signifiant dans son esprit que la "nature des éléments du groupe" n'est soumise à aucune hypothèse. Notant que la notion de limite doit y jouer un rôle essentiel, il adjoint aux axiomes des groupes abstraits uniquement une condition de convergence [S1]. Il choisit une terminologie qui n'est pas sans rappeler celle des (L)-espaces définis par Fréchet dans sa thèse en 1906 [F1]. Un groupe G est dit (L)-groupe au cas où on y a défini une notion de limite vérifiant les propriétés suivantes: a) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ et $\lim_{n\to\infty} a_n = b$, alors $a = b$. b) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ et $\lim_{i\to\infty} n_i = \infty$, alors $\lim_{i\to\infty} a_{n_i} = a$. c) Si $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a$, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. d) Si, pour tout n, $a_n = a_1$, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = a_1$. e) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ et $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, alors $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$. f) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, alors $\lim_{n\to\infty} a_n^{-1} = a^{-1}$. Schreier précise que, outre quelques conditions évidentes (et qui s'imposent, d'ailleurs, en l'absence d'un consensus sur les axiomes topologiques), il exige essentiellement la continuité de la multiplication et de l'inversion. Il appelle voisinage de l'élément a d'un (L)-groupe G toute partie U contenant a ,et telle que, si (a_n) est une suite convergeant vers a, alors presque tous les a_n appartiennent à U. Il observe que, quels que soient b, c $\in$ G, bUc est un voisinage de bac et U^{-1} est un voisinage de a^{-1}.

Certains énoncés formulés par Lie ne sont pas valables dans tout l'espace; les groupes de Lie constituent, en fait, une théorie locale. Aussi Schreier braque-t-il très vite son intérêt sur les (L)-groupes G qui sont d'ordre r ("r-gliedrig"), i. e. chaque élément admet au moins un voisinage qui est en correspondance bijective bicontinue avec une boule ouverte de l'espace euclidien $\mathbb{R}^r$.

En 1930, E. Cartan publie d'importants résultats dans un fascicule célèbre [C 1]. Il y étudie des problèmes fondamentaux de la théorie des groupes en se plaçant non à un point de vue local, mais à un point de vue "intégral"; il réalise ce but en deux étapes. D'abord il appelle "groupe fini et continu" tout groupe abstrait qui est en même temps une variété de dimension finie et satisfait à un minimum d'hypothèses de continuité, en l'occurence les propriétés e) et f) de Schreier. Il introduit ensuite une définition du groupe de Lie: C'est un groupe fini et continu où, dans un voisinage suffisamment petit de l'élément neutre, on peut déterminer un système de coordonnées réelles tel que, pour des éléments a, b, c vérifiant c = ab, chaque coordonnée de c s'exprime par une fonction des coordonnées de a, b qui admet des dérivées partielles continues du second ordre.

Il faut croire que passe inaperçue une note adressée par Leja à la Société polonaise de mathématiques en 1925 [L 1]. Dans cette courte communication, Leja considère effectivement un (L)-espace de Fréchet, i. e. un ensemble de points pour lequel on a introduit une définition de la convergence et de la limite satisfaisant aux conditions suivantes: a) Si les éléments de la suite (a_n) coïncident tous avec a, la suite converge vers a. b) Si la suite (a_n) converge vers a, toute sous-suite converge vers a. Leja appelle groupe (L) tout (L)-espace G dans lequel il fait correspondre un produit ab à chaque couple (a,b) d'éléments et les propriétés suivantes sont vérifiées: 1.) (ab)c = a(bc). 2.) Il existe e $\in$ G tel que ae = ea = a quel que soit a $\in$ G.

3.) L'élément a de G admet $a^{-1} \in G$ tel que $aa^{-1} = e$ (On sait que ces conditions suffisent pour caractériser un groupe). 4.) Si les suites (a_n) et (b_n) convergent respectivement vers a et b, alors la suite $(a_n b_n)$ converge vers ab. Dans un article publié en 1927, Leja [L2] choisit sur l'ensemble G la topologie séparée de Hausdorff [H2] qui est définie au moyen de voisinages satisfaisant à quatre axiomes: a) Tout point x admet au moins un voisinage U_x; tout voisinage U_x contient le point x. b) Si U_x, V_x sont des voisinages de x, il existe un voisinage W_x dans $U_x \cap V_x$. c) Si le point y appartient au voisinage U_x, il existe un voisinage U_y dans U_x. d) Pour deux points x, y, il existe des voisinages U_x et V_y disjoints. Pour Hausdorff, une application f d'un espace topologique E dans un espace topologique F est continue au point a de E si, pour tout voisinage V de b = f(a), il existe un voisinage U de a tel que $f(U) \subset V$. Leja introduit le terme de groupe topologique qu'il définit comme étant un espace topologique possédant les propriétés 1.), 2.), 3.) considérées dans sa note précédente, et vérifiant aussi les deux conditions suivantes: 4.) Si U_{ab} est un voisinage du produit ab des éléments a, b, il existe des voisinages U_a et U_b tels que $U_{ab} \supset U_a U_b$. 5.) Si U_e est un voisinage de l'élément neutre e, il existe un voisinage V_e de e tel que $U_e \supset V_e^{-1}$. Leja se rend compte de la puissance de ce formalisme et établit quelques propriétés fondamentales des groupes topologiques résultant directement du choix des axiomes. Ainsi, quels que soient les éléments a, b du groupe topologique G et le voisinage U_a de a, il existe des voisinages U_{ab} et U_{ba} tels que $U_a b \supset U_{ab}$ et $bU_a \supset U_{ba}$. Le dernier axiome relatif à l'élément neutre conduit à la continuité de l'inversion en tout point: Quels que soient l'élément a et le voisinage $U_{a^{-1}}$, il existe un voisinage U_a tel que $U_{a^{-1}} \supset U_a^{-1}$. Leja remarque que, grâce à la démonstration précédente, il existe un voisinage U_e pour lequel $U_{a^{-1}}a \supset U_e$; si $V_e^{-1} \subset U_e$, alors aussi $U_{a^{-1}} \supset V_e^{-1}a^{-1} = (aV_e)^{-1}$ et il suffit de déterminer un voisinage U_a tel que $aV_e \supset U_a$.

Krull est amené à introduire une structure topologique sur le corps de Galois [K 4] . Soit K_0 un corps de base et soit L une extension normale de K_0, i. e. tout polynôme irréductible de $K_0[X]$ admettant une racine dans L se décompose, dans $L[X]$, en un produit de facteurs linéaires. Notons G le groupe (de Galois) des automorphismes de L laissant fixes les éléments de K_0. Au cas où L est une extension finie de K_0, i. e. L est de dimension finie en tant qu'espace vectoriel sur le corps K_0, la théorie de Galois établit une correspondance parfaite entre les sous-corps de L qui sont des extensions de K_0, d'une part, et les sous-groupes de G, d'autre part. Si K est un tel sous-corps, notons $G(K)$ le sous-groupe des éléments de G qui laissent invariants les éléments de K; si H est un sous-groupe de G, notons $K(H)$ le sous-corps maximal de ce type dont les éléments sont invariants par les transformations définies par H. Alors $K(G(K)) = K$ et $G(K(H)) = H$. Par contre, Kronecker a démontré que, si l'extension L n'est pas finie, cette correspondance n'a pas nécessairement lieu. Ce sont les idées de Kronecker qui suggèrent à Krull de considérer, si $x \in G$, pour toute extension finie K de K_0 dans L l'ensemble $V(K)$ des $y \in G$ dont les restrictions à K coïncident avec celle de x; les "voisinages" $V(K)$ vérifient des conditions plus fortes que les axiomes de Hausdorff. En effet, l'intersection de deux voisinages d'un point non seulement contient un voisinage de ce point, mais constitue effectivement un voisinage du point. Krull démontre l'existence d'une bijection entre les sous-corps de L, extensions de K_0, et les sous-groupes de G, fermés pour la topologie considérée. Cependant, Krull ne définit pas de structure de groupe topologique sur G.

Observant que l'étude des groupes de transformations, par E. Cartan notamment, a pour but l'obtention de propriétés géométriques, Baer [B 1] annonce, par contre, vouloir examiner le groupe G, muni de la topologie de Hausdorff, pour lequel le groupe des "similitudes" $\chi_{a,b}: x \mapsto axb$ (a, b $\in$ G) respecte la topologie: Il dit que G est un (T)-groupe si toute similitude transforme un ouvert en un ouvert, l'ouvert ou le domaine - dans la terminologie de Hausdorff - étant une partie qui est un voisinage de chacun de ses points. Comme les similitudes sont des bijections, Baer note qu'on peut, sans rectriction, admettre que le choix des voisinages a été effectué de façon à ce qu'on ait à assurer la transformation de tout voisinage en un voisinage. Baer s'intéresse principalement à ces "transformations topologiques". Il envisage aussi le cas particulier où l'inversion du (T)-groupe transforme encore les ouverts en des ouverts, mais il se propose essentiellement l'étude d'une situation plus générale que celle considérée par Leja. D'autre part, il étudie systématiquement le groupe G, dit groupe (O), qui est muni d'une relation d'ordre respectée par les similitudes.

Comme dans ce travail de Baer, les premières investigations sur les groupes topologiques visent, dans une large mesure, à contrôler le caractère d'homéomorphisme des opérations fondamentales, et font donc appel surtout à des considérations topologiques générales. Au cours de ses recherches en topologie, Sierpinski [S.2] démontra que si E est un ensemble dénombrable, dense en soi, il existe une correspondance biunivoque, bicontinue de E sur tout ensemble E' du même type, transformant un point déterminé de E en un point déterminé de E'. Il exprima cette propriété en disant qu'un ensemble dénombrable, dense en soi, est topologiquement homogène. Kuratowski [K5] dit que l'ensemble E est homogène du point de vue de l'Analysis situs si, pour deux points quelconques a et b, il existe une transformation biunivoque, bicontinue de E sur E appliquant a en b. Kuratowski répondit par la négative à la question soulevée par Knaster, de l'existence, pour deux points quelconques a et b de l'ensemble homogène E, d'une transformation biunivoque, bicontinue de E sur E, appliquant à la fois a en b et b en a.

En 1930, van Dantzig [D1] étudie des bijections topologiques (i. e. bicontinues) en vue de comparer des propriétés d'homogénéité: L'espace E, topologique au sens de Hausdorff, est microhomogène [resp. homogène, bihomogène, involutivement homogène] si quels que soient $x, y \in E$, il existe des voisinages U_x, U_y qui se correspondent dans une bijection topologique appliquant x sur y [resp. il existe une bijection topologique appliquant x sur y, i. e. le groupe des bijections topologiques est transitif; il existe une bijection topologique échangeant x et y; il existe une bijection topologique qui échange x et y, et est involutive, i. e. coïncide avec son carré]. Van Dantzig définit le terme de groupe topologique dans le langage de Schreier. Le groupe G, muni de la topologie de Hausdorff, est dit groupe topologique si le produit et l'inversion sont des fonctions continues. Quelle que soit la suite convergente (x_n), on a $\lim x_n^{-1} = (\lim x_n)^{-1}$; quelles que soient les suites convergentes (x_n), (y_n), on a $\lim x_n y_n = \lim x_n \lim y_n$. Van Dantzig dit que tel est exactement le cas si, quels que soient a, b, c $\in$ G et le voisinage $U_{ab^{-1}c}$, il existe des voisinages U_a, U_b, U_c pour lesquels $U_{ab^{-1}c} \subset U_a U_b^{-1} U_c$; c'est évidemment à l'inclusion réciproque qu'il pense. Il montre que tout groupe topologique G est bihomogène en observant que si a, b $\in$ G, alors la bijection $x \mapsto ax^{-1}b$ est bicontinue dans G; au cas où G est abélien, cette transformation est aussi involutivement bihomogène.

Van Dantzig approfondit cette étude et expose ses idées d'une façon systématique dès 1932 [D2] considérant non seulement des groupes topologiques, mais d'après le même principe, aussi des anneaux topologiques, des corps topologiques et même des modules topologiques. Il dit se placer dans le cadre des "axiomes de Fréchet-Hausdorff" en adoptant aussi le second axiome de dénombrabilité. A tout élément x on associe des voisinages V(x) satisfaisant aux axiomes suivants: 1.) Tout x est contenu dans tous ses voisinages V(x). 2.) L'intersection de deux voisinages de x contient un voisinage de x. 3.) Tout voisinage contient un voisinage de chacun de ses points. 4.) Deux points distincts admettent des voisinages respectifs disjoints. 5.) Il existe un système dénombrable de voisinages tel que tout voisinage d'un point arbitraire contienne un voisinage de ce point, appartenant au sytème. Van Dantzig observe qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe G soit un groupe topologique est l'existence d'une suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de voisinages de l'élément neutre vérifiant les propriétés suivantes: a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n^{-1} = V_n$. b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$V_{n+1}^2 \subset V_n$, c) Si $x \in G$, il existe $n_x \in \mathbb{N}^*$ tel que $xV_{n'}x^{-1} \subset V_n$ pour tout $n' \geq n_x$. La suite étant donnée, il suffit de choisir pour voisinages de $x \in G$ les ensembles $V_n x$ et xV_n $(n \in \mathbb{N}^*)$. Van Dantzig note aussi que si V est un voisinage de l'élément neutre e, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un voisinage W de e tel que $W^n \subset V$, et alors aussi un voisinage W_0 de e tel que $\overline{W_0} \subset V$.

De leur côté, Baer et Levi [B2] étudient plusieurs types particuliers de groupes de bijections topologiques d'un espace topologique.

Dans son célèbre travail de 1933, Haar [H1] considère un groupe qui fait partie d'un espace métrique séparable et qui est localement compact, i. e. tout point possède un voisinage dont la fermeture est compacte. Se référant à Schreier et E. Cartan, Haar définit la continuité du groupe en exigeant que, pour la métrique d relative au groupe G, si (a_n), (b_n) sont des suites dans G, a, b $\in$ G et $\lim d(a_n,a) = 0$, $\lim d(b_n,b) = 0$, alors aussi $\lim d(a_n b_n, ab) = 0$, $\lim d(a_n^{-1}, a^{-1}) = 0$.

C'est à von Neumann qu'il faut attribuer le mérite d'avoir été le premier à bien mettre en évidence le fait que dans beaucoup de problèmes sur les groupes de transformations, c'est la structure du groupe qui joue le rôle principal, plutôt que l'action elle-même [N1]. C'est ainsi que, considérant le cinquième problème de Hilbert relatif à l'action d'un groupe de transformations G sur une variété M, il commence par examiner le cas particulier où G = M. Pour von Neumann, un groupe topologique est un groupe muni d'une topologie de Hausdorff par rapport à laquelle la multiplication et l'inversion sont continues. Cependant, il n'étudie guère ce groupe dans toute sa généralité. Il envisage soit les groupes topologiques qui sont localement euclidiens, i. e. tout point admet un voisinage isomorphe à un ouvert d'un espace euclidien $\mathbb{R}^n$, soit des groupes compacts, soit encore des groupes séparables, i. e. vérifiant le second axiome de dénombrabilité: Il existe une partie dénombrable dense. Les groupes topologiques séparables constituent aussi le cadre choisi par Freudenthal [F2].

En 1934, Pontrjagin publie ses premiers résultats sur la structure des groupes topologiques abéliens [P3] [P4]. En 1935, van Kampen en rédige une étude analogue qu'il fait précéder de considérations sur les groupes topologiques généraux [K2]. Il considère un groupe G, non-trivial (i. e. ne se réduisant pas à l'élément neutre), muni d'une topologie définie par les voisinages de Hausdorff. Il l'assujettit à trois axiomes topologiques (d'une manière quelque peu redondante) et trois axiomes spécifiques pour la structure de groupe. A_1: Tout point est contenu dans tous ses voisinages. A_2: Deux points distincts admettent des voisinages disjoints. A_3: Si deux voisinages ont un point commun, ils contiennent un voisinage de ce point.
B_1: Si U est un ouvert dans G et $a \in G$, alors aU est ouvert.
B_2: Si U est un ouvert dans G, U^{-1} l'est aussi. B_3: Si U est un voisinage de e, il existe un autre voisinage V de e tel que $V^2 \subset U$. Van Kampen observe évidemment qu'aussi Ua est ouvert si U l'est et $a \in G$. Il note que les conditions B_1, B_2 expriment que les translations et l'inversion sont continues; d'autre part, B_3 exprime la continuité de la multiplication et entraîne la régularité du groupe topologique, i. e., si U est un voisinage de l'élément x, il existe un voisinage V de x tel que $\bar{V} \subset U$.

Markoff [M1], se proposant de dégager la description intrinsèque de l'espace réel des vecteurs de dimension n, est conduit à mettre au point une théorie des groupes topologiques qui doit beaucoup à sa collaboration avec Pontrjagin; il examinera ensuite, parmi les groupes topologiques, ceux dont l'étude peut se ramener dans une large mesure à celle de $\mathbb{R}^n$. Les définitions de l'addition et de la multiplication externe de $\mathbb{R}^n$ se trouvant en dehors du domaine de la géométrie, Markoff ne leur accorde que le bénéfice d'un langage ramassé de l'analyste. Cette façon de voir, en effet, fait intervenir un repère et jouer un rôle important aux nombres réels eux-mêmes. Le premier inconvénient disparaît dans la conception algébrico-analytique de Weyl définissant les lois interne et externe sur les vecteurs eux-mêmes. Alors que Weyl voulait bannir la continuité de l'échafaudage de la géométrie, Markoff, au contraire, s'efforce de se passer des nombres réels. Son nouveau concept ne fait donc pas intervenir la multiplication externe. Markoff caractérise la topologie d'un ensemble au moyen des axiomes suivants: Toute réunion d'ouverts est ouverte. Toute intersection finie d'ouverts est ouverte. Pour deux points distincts il existe un ouvert contenant l'un, mais non l'autre. Le voisinage d'un point est un ouvert contenant ce point. Markoff définit alors le groupe topologique qui est un groupe abstrait G, muni d'une topologie telle que, si $x, y \in G$ et W est un voisinage de xy^{-1}, il existe des voisinages respectifs U, V de x, y pour lesquels $UV^{-1} \subset W$, i. e. l'application $(x,y) \mapsto xy^{-1}$ est continue (Dans le contexte de ses préoccupations, il est naturel que Markoff note la loi additivement). Il observe alors que l'inversion et la loi interne sont continues, i. e., si $y \in G$ et W est un voisinage de y^{-1}, il existe un voisinage V de y tel que $V^{-1} \subset W$, et si $x, y \in G$ et W est un voisinage de xy, il existe des voisinages respectifs U, V de x, y pour lesquels $UV \subset W$.

Markoff fait état de quelques conséquences pratiques immédiates de sa définition. Si U est un voisinage de l'élément neutre e, il existe un tel voisinage V pour lequel $VV^{-1} \subset U$; d'après la définition, il existe, en effet, des voisinages V_1, V_2 de e tels que $V_1V_2^{-1} \subset U$ et il suffit donc de poser $V = V_1 \cap V_2$. Markoff observe, de même, que si U est un voisinage de e, il existe un voisinage V de e tel que $V^2 \subset U$; plus généralement, $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$ étant donnés, par récurrence, on obtient un voisinage V de e tel que $V^p \subset U$ pour $p = m_1 + \ldots + m_n$. Markoff prouve aussi que le produit d'une partie ouverte A par une autre partie B est ouvert. En, effet, soit x un point arbitraire de AB, il existe $z \in A$, $y \in B$ tels que $x = zy$; donc A est un voisinage de $z = xy^{-1}$. On peut déterminer des voisinages respectifs U, V de x, y tels que $UV^{-1} \subset A$; alors, a fortiori, $Uy^{-1} \subset A$ et donc $U \subset Ay \subset AB$. Ainsi, AB est ouvert. En particulier, si U est un ouvert et $x \in G$, les parties xU et Ux sont ouvertes.

En 1938, Pontrjagin publie la première monographie sur les groupes topologiques [P 5]. Elle fait apparaître clairement que, pour l'investigation de nombreux problèmes, il n'est pas nécessaire de considérer des groupes de transformations, mais qu'on a intérêt à étudier intrinsèquement des groupes munis d'une topologie par rapport à laquelle la continuité des opérations fondamentales est assurée. D'une manière générale, Pontrjagin

définit la topologie d'un ensemble E au moyen des fermetures: Si $a \in E$, $\{a\}^{-} = \{a\}$; si $M, N \subset E$, $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$; si $M \subset E$, $\overline{\overline{M}} = M$. En conséquence, si $M \subset E$, alors $M \subset \overline{M}$, et si $M, N \subset E$, $M \subset N$, alors aussi $\overline{M} \subset \overline{N}$. D'autre part, toute intersection de parties fermées est fermée. Cette topologie vérifie l'axiome de séparation (T_1): Deux points étant donnés, chacun d'eux appartient à un ouvert ne contenant pas l'autre point.
Pontrjagin définit une base de voisinages comme étant une famille d'ouverts telle que tout ouvert soit une réunion de tels voisinages. Les groupes topologiques se décrivent alors au moyen des axiomes suivants:

a) Quels que soient les éléments a, b et le voisinage W de ab, il existe des voisinages respectifs U, V de a, b tels que $UV \subset W$.

b) Quels que soient l'élément a et le voisinage V de a^{-1}, il existe un voisinage U de a tel que $U^{-1} \subset V$.
Pontrjagin note que ces deux conditions sont équivalentes à l'unique axiome suivant: Quels que soient les éléments a, b du groupe et le voisinage W de ab^{-1}, il existe des voisinages respectifs U, V de a, b tels que $UV^{-1} \subset W$. Dans la première version de son ouvrage, Pontrjagin - comme la plupart des auteurs antérieurs - suppose encore la séparabilité. Cette restriction disparaîtra dans les éditions ultérieures.

Pontrjagin observe que, dans les groupes topologiques, les translations et l'inversion sont des "applications topologiques", i. e. des homéomorphismes. Si a est un élément du groupe, U en est un ouvert, et F en est un fermé, alors, aU, Ua, U^{-1} sont des parties ouvertes, et aF, Fa, F^{-1} sont des parties fermées. Tout groupe topologique est régulier. Il suffit de se placer en l'élément neutre e. Si U est un voisinage de e, il existe un voisinage V de e tel que $VV^{-1} \subset U$. Pour tout $x \in \overline{V}$, tout voisinage de x rencontre V; on peut donc déterminer $b \in V$ tel que $xb \in V$; alors, $x \in Vb^{-1} \subset VV^{-1} \subset U$. Par conséquent, $\overline{V} \subset U$.

Pontrjagin met en évidence une collection d'autres résultats fondamentaux dans la théorie des groupes topologiques. Il établit notamment que les axiomes ne sont pas liés au choix de la base de voisinages (appelée aussi système complet de voisinages). La démonstration se fait en plusieurs étapes via la considération de "systèmes complets de voisinages de l'élément neutre e" dont chaque ouvert de e contient au moins un membre.

Soient G un groupe topologique, $\mathcal{V}$ un système complet de voisinages de e, et M une partie dense dans G. Alors, $\mathcal{V}' = \{Ux: U \in \mathcal{V},\ x \in M\}$ est un système complet de voisinages, et les propriétés suivantes sont vérifiées:

a) $\bigcap_{V\in\mathcal{V}} V = \{e\}$;

b) Si V, V' $\in \mathcal{V}$, il existe $W \in \mathcal{V}$ tel que $W \subset V \cap V'$.

c) Si $V \in \mathcal{V}$, il existe $U \in \mathcal{V}$ tel que $UU^{-1} \subset V$.

d) Si $V \in \mathcal{V}$ et $a \in G$, il existe $U \in \mathcal{V}$ tel que $Ua \subset V$.

e) Si $V \in \mathcal{V}$ et $a \in G$, il existe $U \in \mathcal{V}$ tel que $aUa^{-1} \subset V$.

Les deux premières conditions découlent de la définition adoptée pour l'espace topologique; les trois dernières conditions sont des conséquences des axiomes de la structure de groupe topologique. Quant à la propriété de $\mathcal{V}'$, soit W un ouvert d'un point a de G. On peut déterminer $U \in \mathcal{V}$ tel que UU^{-1} soit contenu dans l'ouvert Wa^{-1} de e. Comme aM^{-1} est dense dans G, il existe $d \in aM^{-1} \cap U$, donc $d^{-1}a \in M$ et $Ud^{-1}a \in \mathcal{V}'$. Par ailleurs, comme $UU^{-1} \subset Wa^{-1}$ et $d \in U$, nous avons $Ud^{-1} \subset Wa^{-1}$ et $Ud^{-1}a \subset W$. Puisque $d \in U$, aussi $a \in Ud^{-1}a$.

Réciproquement, soit G un groupe muni d'une famille $\mathcal{V}$ satisfaisant aux cinq conditions précédentes. Alors, G peut être muni d'une manière unique d'une structure topologique qui en fait un groupe topologique et pour laquelle $\mathcal{V}' = \{Ux: U \in \mathcal{V},\ x \in G\}$ constitue un système complet de voisinages. En effet, soient a et b des éléments distincts dans G. D'après a), il existe $U \in \mathcal{V}$ tel que $ba^{-1} \notin U$, donc $b \notin Ua$. Soient maintenant $a, b \in G$ et $V \in \mathcal{V}$ tels que $b \in Va$. Comme $ba^{-1} \in V$, il existe $U \in \mathcal{V}$ tel que $Uba^{-1} \subset V$, donc $Ub \subset Va$. Soient, enfin, $a, b \in G$ et $U, V \in \mathcal{V}$ tels que $c \in Ua \cap Vb$. On peut déterminer $U', V' \in \mathcal{V}$ tels que $U'c \subset Ua$ et $V'c \subset Vb$; on choisit $W \in \mathcal{V}$ contenu dans $U' \cap V'$. Alors, $W \in \mathcal{V}'$ et $Wc \subset Ua \cap Vb$. Par des considérations topologiques générales, Pontrjagin vérifie ainsi que $\mathcal{V}'$ est un système complet de voisinages. Considérons alors $a, b \in G$ et posons $c = ab^{-1}$. Soit W' un voisinage quelconque de c. Il existe $W \in \mathcal{V}$ tel que $Wc \subset W'$. Il existe $U \in \mathcal{V}$ tel que $UU^{-1} \subset W$ et aussi $V \in \mathcal{V}$ tel que $ab^{-1}Vba^{-1} \subset U$. Alors, $Vba^{-1} \subset (ab^{-1})^{-1}U$ et $ab^{-1}V^{-1} \subset U^{-1}ab^{-1}$; donc

$$(Ua)(Vb)^{-1} = Uab^{-1}V^{-1} \subset UU^{-1}ab^{-1} \subset Wab^{-1} = Wc \subset W'.$$

Dans le but d'ôter les hypothèses de métrisabilité des théories concernant les structures topologiques générales, Weil extirpe la notion de séparabilité, ce "malfaisant parasite qui infeste tant de livres et de mémoires dont il affaiblit la portée tout en nuisant à une claire compréhension des phénomènes"[W1]. A cet effet, il devra abandonner l'outil constitué par les suites et aura à trouver un substitut à la notion de distance. Il définit dans l'ensemble E la structure topologique par la donnée de sous-ensembles, dits ouverts, satisfaisant aux trois axiomes suivants: Toute réunion d'ouverts est ouverte. Toute intersection finie d'ouverts est ouverte. Quel que soit $x \in E$, $E \setminus \{x\}$ est un ouvert. Suivant Fréchet plutôt que Hausdorff, Weil appelle voisinage du point x de E toute partie de E contenant un ouvert U pour lequel $x \in U$. En analogie avec le système complet de voisinages de Pontrjagin, Weil introduit un "système uniforme de voisinages" en exigeant l'existence d'un ensemble I d'indices tel qu'à tout $\alpha \in I$ et tout $x \in E$ on puisse faire correspondre un sous-ensemble $V_\alpha(x)$ vérifiant les conditions suivantes: Quels que soient $\alpha \in I$ et $x \in E$, $x \in V_\alpha(x)$; si $x, y \in E$ sont distincts, il existe $\alpha \in I$ tel que $y \notin V_\alpha(x)$. Quels que soient $\alpha, \beta \in I$, il existe $\gamma \in I$ tel que, pour tout $x \in E$, $V_\gamma(x) \subset V_\alpha(x) \cap V_\beta(x)$. Si $\alpha \in I$ est donné, on peut déterminer $\beta \in I$ tel que quels que soient $x, y \in V_\beta(z)$, on ait $y \in V_\alpha(x)$. Ces axiomes définissent une topologie sur E; pour $x \in E$, les sous-ensembles $V_\alpha(x)$ $(\alpha \in I)$ constituent un "système fondamental de voisinages de $\mathbf{x}$".

Afin de récupérer la puissance du concept de distance, Weil considère, dans le carré cartésien E^2 de l'ensemble E, la famille $\{V_\alpha : \alpha \in I\}$, où, pour $\alpha \in I$, $V_\alpha = \{(x,y) \in E^2 : y \in V_\alpha(x)\}$. Cette famille satisfait aux trois axiomes suivants: 1.) $\bigcap_{\alpha\in I} V_\alpha$ est la diagonale de E^2. 2.) Quels que soient $\alpha, \beta \in I$, il existe $\gamma \in I$ el que $V_\gamma \subset V_\alpha \cap V_\beta$. 3.) Quel que soit $\alpha \in I$, il existe $\beta \in I$ tel que $V_\beta \overset{-1}{V_\beta} \subset V_\alpha$, où, pour $A, B \subset E^2$, $AB = \{(x,y) \in E^2 : (\exists z\in E)\ (x,z) \in A,\ (z,y) \in B\}$ et $\overset{-1}{A} = \{(y,x) \in E^2 : (x,y) \in A\}$. Toute partie de E^2 contenant un élément de la famille est dit entourage de la diagonale.

Ainsi, dire qu'une propriété des couples $(x,y) \in E^2$ est vérifiée dès que x et y sont suffisamment voisins revient à exprimer que les couples vérifiant la propriété appartiennent à un entourage de la diagonale. La famille des entourages définit sur E une structure dite uniforme. Réciproquement, toute structure uniforme déterminée par des parties de E^2, vérifiant les trois propriétés considérées, définit sur E une structure topologique dont les voisinages sont constitués par les parties $V_\alpha(x)$, où $\alpha \in I$, $x \in E$. L'exemple le plus immédiat d'une structure uniforme est évidemment constitué par l'espace métrique E. Si d désigne la distance, pour $\alpha > 0$, V_α est l'ensemble des $(x,y) \in E^2$ tels que $d(x,y) < \alpha$; $V_\alpha(x)$ est la boule ouverte de centre x et de rayon α. Weil explicite l'autre exemple de ce type de structure que fournit le groupe topologique défini comme étant un groupe abstrait G, muni d'une topologie, pour laquelle l'application $\underset{G^2 \to G}{\Phi: (x,y) \mapsto yx^{-1}}$ est continue. En effet, si $\{V_\alpha : \alpha \in I\}$ est un système fondamental de voisinages de l'élément neutre e, les ensembles $V'_\alpha(x) = V_\alpha x$ $(\alpha \in I,\ x \in G)$ forment un système uniforme de voisinages; le troisième axiome caractérisant cette famille exprime la continuité de Φ au point (e,e).

Weil formule ensuite une définition de la structure de groupe topologique sur le groupe G, muni d'une topologie, par la donnée d'une famille $\{V_\alpha : \alpha \in I\}$ de parties de G vérifiant les axiomes suivants:

(G_I) $\bigcap\limits_{\alpha \in I} V_\alpha$ se réduit à l'élément neutre e.

(G_{II}) Quels que soient $\alpha, \beta \in I$, il existe $\gamma \in I$ tel que $V_\gamma \subset V_\alpha \cap V_\beta$.

(G_{III}) Quel que soit $\alpha \in I$, il existe $\beta \in I$ tel que $V_\beta V_\beta^{-1} \subset V_\alpha$.

(G_{IV}) Quels que soient $\alpha \in I$ et $x \in G$, il existe $\beta \in I$ tel que $V_\beta \subset x^{-1} V_\alpha x$ [Wl].

Les trois premiers axiomes expriment que les parties $V'_\alpha = \Phi^{-1}(V_\alpha)$ $(\alpha \in I)$ forment une famille d'entourages de la diagonale de G^2. La propriété (G_{III}) entraîne la continuité de Φ en (e,e). L'application Φ est continue au point (a,b) si et seulement si, $\alpha \in I$ étant donné, il existe $\beta, \gamma \in I$ tels que $yx^{-1} \in V_\alpha ba^{-1}$ dès que $x \in V_\beta a$ et $y \in V_\gamma b$ ou, c désignant ba^{-1}, $V_\gamma c V_\beta^{-1} \subset V_\alpha c$. Si tel est le cas, alors a fortiori $cV_\beta^{-1} \subset V_\alpha c$, donc $V_\beta^{-1} \subset c^{-1}V_\alpha c$; en choisissant $\delta \in I$ pour lequel $V_\delta^{-1} \subset V_\beta$ et donc $V_\delta \subset V_\beta^{-1}$, on a $V_\delta \subset c^{-1}V_\alpha c$ et ainsi on vérifie (G_{IV}). Réciproquement, si $\gamma \in I$ est tel que $V_\gamma V_\gamma^{-1} \subset V_\alpha$ et $\beta \in I$ est tel que $V_\beta \subset c^{-1}V_\gamma c$, on a $V_\beta^{-1} \subset c^{-1}V_\gamma^{-1}c$ et $V_\gamma c V_\beta^{-1} \subset V_\gamma V_\gamma^{-1} c \subset V_\alpha c$.

Le choix des axiomes topologiques fut pratiquement fixé à partir de Hausdorff, les seules divergences concernant le choix des axiomes de séparation dont plusieurs types sont commodes à des titres divers. Il existe aussi plusieurs variantes du fameux lemme d'Urysohn, dont la première version est due à ce mathématicien [U1], et qui est relatif à l'existence sur un espace topologique E, muni de deux parties fermées disjointes A, B d'une fonction continue $f: E \to [0,1]$ telle que $f(x) = 0$ pour tout $x \in A$ et $f(y) = 1$ pour tout $y \in B$. Répondant au souhait formulé par Fréchet de déterminer des espaces topologiques généraux admettant des fonctions continues réelles qui ne sont pas constantes, Urysohn démontre le lemme pour tout espace topologique qui est normal, i. e. dont deux espaces fermés disjoints sont toujours contenus dans des ouverts disjoints. Pontrjagin [P5] établit le lemme pour tout espace topologique régulier, compact, vérifiant le second axiome de dénombrabilité, via un procédé d'approximation, basé sur la régularité, à l'aide de fractions rationnelles dont les dénominateurs sont des puissances de 2. Pontrjagin remarque que la compacité n'est utilisée que pour assurer l'existence d'ouverts disjoints contenant respectivement deux fermés disjoints donnés. Weil [W1] fait état d'une lettre lui adressée en 1936 par Pontrjagin, dans laquelle ce dernier prouve que tout groupe topologique G est complètement régulier, i. e., si F est un fermé de G et $a \in G \setminus F$, il existe une fonction continue $f: G \to [0,1]$ telle que $f(x) = 0$ pour tout $x \in F$ et $f(a) = 1$. Les idées développées par Kakutani [K1], dans sa démarche tendant à établir l'existence d'une métrique invariante sur les groupes topologiques, munis d'une base dénombrable de voisinages de l'élément neutre, sont mises à profit par Weil pour montrer qu'en général, en l'absence de toute hypothèse de séparabilité, tout espace uniforme est complètement régulier. Déplorant la prolifération des définitions des espaces topologiques, Weil [W1] émet l'opinion que les espaces topologiques les plus importants en analyse sont les espaces uniformes et que la notion essentielle est celle d'espace complètement régulier.

Dans son importante monographie de 1938, Weil [W2] conseve les définitions introduites précédemment. La structure de groupe topologique est régie par l'existence d'un système de voisinages vérifiant les axiomes (G_I) - (G_{IV}). Deux systèmes de tels voisinages sont dits équivalents si chaque voisinage de l'un contient un voisinage de l'autre. Le système donné est équivalent au système des voisinages ouverts, au système des voisinages fermés, au système des voisinages symétriques.

A partir de ce moment, la seule modification intervenant dans la définition d'une structure de groupe topologique concerne l'hypothèse de séparation. Pour Bourbaki [B3] et la plupart des auteurs modernes, le groupe topologique G est a) un groupe abstrait, b) muni d'une topologie définie par la classe des ouverts qui est stable pour toute réunion et pour toute intersection finie, c) pour lequel les applications $\begin{array}{c}(x,y) \mapsto xy\\ G\times G \to G\end{array}$ et $\begin{array}{c}x \mapsto x^{-1}\\ G \to G\end{array}$ sont continues. Bourbaki étudie longuement la structure uniforme gauche [resp. droite] déterminée sur le groupe topologique G par l'ensemble des $(x,y) \in G \times G$ tels que $x^{-1}y \in U$ [resp. $yx^{-1} \in U$], U décrivant un système fondamental de voisinages de l'élément neutre.

Dans beaucoup de questions on est amené à faire l'hypothèse faible que le groupe topologique G vérifie l'axiome de séparation (T_0): Si a et b sont des points distincts de G, au moins l'un appartient à un ouvert ne contenant pas l'autre point [H3]. Comme le groupe topologique est régulier, l'axiome (T_2) de Hausdorff est alors vérifié.

L'introduction des groupes topologiques s'explique par l'intention de doter d'une formulation précise le caractère topologique des opérations naturelles dans les groupes constituées par la loi interne et l'inversion. La nette distinction entre les transformations continue, ouverte, homéomorphe, met quelque temps à se préciser. Tel est encore le cas pour l'étude du caractère topologique d'autres applications dont la considération s'impose rapidement, par exemple l'homomorphisme canonique d'un groupe sur un groupe quotient, ou les correspondances établies par van der Waerden dans les théorèmes d'isomorphisme algébrique. C'est van Dantzig qui entreprend, en 1932, la première classification systématique des groupes toplogiques (qui sont métriques dans son optique) et aussi, d'ailleurs, des anneaux topologiques et des corps topologiques, comme cela a été fait auparavant pour les objets correspondants en l'absence de structures topologiques.

L'étude des groupes topologiques généraux ayant été motivée aussi dans une large mesure par l'étude des groupes de Lie, donc par des propriétés locales, l'intérêt spécifique pour les groupes topologiques connexes s'explique naturellement. Les groupes topologiques sont d'abord envisagés dans le cadre d'un espace euclidien; pour cette raison, l'existence d'une métrique est considérée comme une propriété normale de ces groupes. Tel est, en particulier, le point de vue de Schreier. Dans sa prospection de concepts algébrico-topologiqes, van Dantzig [D2] étudie longuement les groupes métriques dont il attribue l'introduction à van der Waerden et lui-même. Le groupe G est dit métrique s'il est muni d'une distance d qui est invariante, i. e. $d(xz,yz) = d(x,y) = d(zx,zy)$ quels que soient $x, y, z \in G$.

Les problèmes de convergence dans les groupes topologiques conduisent à la considération des parties fermées et des parties compactes de ces groupes. Les raisonnements sont affinés au fur et à mesure de l'évolution de l'idée de compacité en topologie.

Par ailleurs, il est naturel d'espérer pouvoir décrire des groupes topologiques compliqués au moyen d'une combinaison d'exemples plus simples. Ainsi s'introduit le problème de la réduction, plus précisément, celui de la décomposition d'un groupe topologique en des constituants plus élémentaires. Dans un cadre général, il s'agit alors, réciproquement, d'examiner la structure du produit cartésien de groupes topologiques.

Parmi les groupes topologiques les plus simples, qui sont considérés intrinsèquement et non en tant que groupes de transformations, figurent les groupes $\mathbb{R}^n$ et, plus généralement, les groupes topologiques abéliens. La connaissance de la structure algébrique de ces groupes impose très tôt l'étude de leur structure topologique qui se développe notamment grâce aux travaux de Pontrjagin relatifs aux caractères de ces groupes [P5].

A partir de 1933 la théorie des groupes topologiques fera place à celle de l'analyse harmonique, i. e. l'analyse de Fourier abstraite. Cette évolution est rendue possible grâce à l'extension de l'intégrale de Lebesgue aux groupes topologiques localement compacts. La première construction est due à Haar [H1] sur les groupes métriques, séparables, localement compacts. Après d'autres travaux, notamment ceux de von Neumann [N2], elle est donnée pour le cas d'un groupe localement compact arbitraire dans la monographie de Weil "L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications" [W2]. Ainsi prend son envol le prodigieux développement de l'analyse harmonique abstraite pendant le demi-siècle qui s'est écoulé depuis cette époque. Poincaré écrit dans la Valeur de la Science: "La série de Fourier est un instrument précieux dont l'analyse fait un usage continuel; c'est par ce moyen qu'elle a pu représenter des fonctions discontinues". Aussi la théorie des groupes topologiques, conçue à l'origine en vue de l'étude de propriétés de continuité, a-t-elle eu comme mérite principal d'avoir permis l'éclosion de la théorie des groupes topologiques localement compacts sur lesquels peut se développer le concept général de série de Fourier.

Références

[B1] Baer, Reinhold. Zur Topologie der Gruppen. J. Reine Angew. Math. 160, 208-226 (1929).

[B2] Baer, Reinhold, et Friedrich Levi. Stetige Funktionen in topologischen Räumen. Math. Z. 34, 110-130 (1932).

[B3] Bourbaki, Nicolas. Eléments d'histoire des mathématiques. Hermann, Paris, 1960.

[B4] Brouwer, L. E. J. On the structure of perfect sets of points. Proc. Acad. Amsterdam, 12, 2, 785-794 (1910).

[C1] Cartan, Elie. La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis situs. Mémorial Sc. math. XLII, 1930. Reproduit dans: Elie Cartan. Oeuvres complètes. Ed. CNRS, Paris, tome I, 1984.

[D1] Dantzig, D. van. Ueber topologisch homogene Kontinua. Fund. Math. 15, 102-125 (1930).

[D2] Dantzig, D. van. Zur topologischen Algebra I. Math. Ann. 107, 587-626 (1932).

[F1] Fréchet, Maurice. Sur quelques points du Calcul fonctionnel. Thèse, Paris, 1906. Rend. Circ. Mat. Palermo XXII, 1-74 (1906).

[F2] Freudenthal, Hans. Einige Sätze über topologische Gruppen. Ann. of Math. 37, 46-56 (1936).

[H1] Haar, Alfred. Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen. Ann. of Math. 34, 147-169 (1933).

[H2] Hausdorff, Felix. Grundzüge der Mengenlehre. Veit, Leipzig, 1914. Réédition: Chelsea Publishing Company, New York, 1978.

[H3] Hewitt, Edwin, et Kenneth A. Ross. Abstract harmonic analysis; vol. I, 1963; vol. II, 1970. Springer, Berlin.

[H4] Hilbert, David. Mathematische Probleme. Akad. Wiss. Göttingen, 253-297 (1900).

[K1] Kakutani, Shizuo. Ueber die Metrisation der topologischen Gruppen. Proc. Imper. Acad. Tokyo 20, 444-450 (1944).

[K2] Kampen, Egbertus R. van. Locally bicompact abelian groups and their character groups. Ann. Math. 36, 448-463 (1935).

[K3] Klein, Felix. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Math. Ann. 43, 63-100 (1893).

[K4] Krull, Wolfgang. Galoissche Theorie der unendlichen algebraischen Erweiterungen. Math. Ann. 100, 687-698 (1928).

[K5] Kuratowski, Casimir. Un problème sur les ensembles homogènes. Fund. Math. 3, 14-19 (1922).

[L1] Leja, F. Sur les groupes abstraits continus. Annales de la société polonaise de mathématiques III, 153 (1925).

[L2] Leja, F. Sur la notion de groupe abstrait topologique. Fund. Math. 9, 37-44 (1927).

[L3] Lie, Sophus. Abhandlungen über die Theorie der Transformationsgruppen. Gesammelte Abhandlungen, tome 5. Teubner, Leipzig, 1924.

[L4] Lie, Sophus, et F. Engel. Theorie der Transformationsgruppen. 3 volumes. Teubner, Leipzig, 1888, 1890, 1893.

[M1] Markoff, Andreas. Ueber endlich-dimensionale Vektorräume. Ann. Math. 36, 464-506 (1935).

[N1] Neumann, John von. Die Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen. Ann. of Math. 34, 170-190 (1933).

[N2] Neumann, John von. Zum Haarschen Mass in topologischen Gruppen. Compositio Math. 1, 106-114 (1934).

[P1] Poincaré, Henri. Sur les groupes continus. C. R. Acad. Sci. Paris, 128, 1065-1069 (1899).

[P2] Poincaré, Henri. Dernières pensées. Flammarion, Paris, 1920.

[P3] Pontrjagin, L. Sur les groupes abéliens continus. C. R. Acad. Sci. Paris, 198, 328-330 (1934).

[P4] Pontrjagin, L. The theory of topological commutative groups. Ann. Math. 35, 361-388 (1934).

[P5] Pontrjagin, L. Groupes continus (en russe). GITTL, Moscou, 1938. Traduction anglaise: Topological groups. Princeton University Press, Princeton, 1939. Deuxième édition: Topological groups. Gordon and Breach, New York, 1966.

[S1] Schreier, Otto. Abstrakte kontinuierliche Gruppen. Abh. Math Sem. Univ. Hamburg 4, 15-32 (1925).

[S2] Sierpinski, Waclaw. Sur une propriété topologique des ensembles dénombrables en soi. Fund. Math. 1, 11-16 (1920).

[U1] Urysohn, Paul. Ueber die Mächtigkeit zusammenhängender Mengen. Math. Ann. 94, 262-295 (1925).

[W1] Weil, André. Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie.générale. Hermann, Paris, 1937.

[W2] Weil, André. L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications., 1940. Réédition: Hermann, Paris, 1953.