CAHIERS DU SÉMINAIRE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERMANN HANKEL

Recherches sur les fonctions ayant une infinité d'oscillations et sur les fonctions discontinues

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1re série, tome 9 (1988), p. 139-209
<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1988__9__139_0>

Recherches sur les fonctions ayant une infinité d'oscillations et sur les fonctions discontinues [1]

par Hermann HANKEL*

Remarques préliminaires sur la notion de fonction. [2]

Une préférence nette pour la synthèse et un refus total de méthodes générales ne sont pas les seules caractéristiques qui distinguent la mathématique ancienne de notre science plus moderne ; il existe à côté de cette opposition plus externe, formelle, une autre opposition réelle, plus profonde, qui a son origine dans les positions différentes qu'adoptent les deux par rapport à l'usage scientifique qu'elles font de la notion de variabilité.

Alorsque les Anciens, fidèles à des considérations héritées de l'école philosophique des Eléates, n'utilisaient jamais la notion de mouvement, expression spatiale de la variabilité, dans leur système rigoureux et ne l'appliquaient que passagèrement dans l'étude de courbes engendrées cinématiquement, la mathématique moderne commença dès l'instant où D e s c a r t e s procéda de l'étude purement algébrique des équations à l'examen des variations [3] de grandeur que subit une expression algébrique, lorsqu'une grandeur, sous une désignation générale, parcourt une suite continue de valeurs.

Le rapport de dépendance, qui lie ainsi les suites de valeurs de deux grandeurs variables, trouve une expression claire dans le rapport des ordonnées d'une ligne courbe aux abscisses, et il n'était guère nécessaire de nommer ce rapport aussi longtemps que son étude se restreignait à des cas particuliers. Mais la découverte du calcul infinitésimal et de ses méthodes globales poussa à l'introduction d'une dénomination générale pour ce rapport de dépendance que, à l'instar

* Traduit de l'allemand par Jeanne Peiffer.

de L e i b n i z *), Jean B e r n o u l l i **) nomma en 1718 "fonction".

Depuis lors, la notion de fonction est devenue la base sur laquelle se fonde l'analyse, dont les progrès sensationnels sont inséparables du développement que cette notion a elle-même peu à peu subi.

E u l e r qui représente mieux que quiconque la conscience scientifique du milieu du siècle précédent posa, en accord sur l'essentiel avec ses prédécesseurs ***), la définition suivante :

"Functio quantitatis variabilis est expressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili et numeris seu quantitatibus constantibus".[4]

Nous n'avons qu'à concevoir une telle "expression analytique", dont E u l e r ne croit pas nécessaire de définir plus précisément le contenu, comme une relation de dépendance entre grandeurs, formée sur le modèle des fonctions algébriques. On pensait en effet que les fonctions transcendantes étaient définies par des développements composés d'opérations élémentaires (addition, soustraction, multiplication et division) itérées un nombre infini de fois, sur le modèle des fonctions algébriques dans lesquelles elles ne l'étaient qu'un nombre fini de fois, sans jamais se préoccuper de la validité d'une telle poursuite illimitée des opérations. Aux quatre types d'opérations citées ci-dessus se sont encore ajoutées la différentiation et l'intégration en tant qu'opérations propres à l'analyse.

En adhérant continuellement au modèle des fonctions algébriques, on étendit d'emblée à toutes les fonctions toutes les propriétés générales observées sur les fonctions algébriques : leur continuité particulière, leurs singularités et leur façon particulière de devenir continues ou discontinues.

Ainsi on peut immédiatement déduire des fonctions algébriques

---

*) Acta Erudit. 1692, Avril, p. 170, et juillet 1694, p. 316.

**) Opera omnia, t. II, p. 241. Cf. aussi Leibnitii et Joh. Bernoullii commerc. epist. T. I, p. 386 et Jac. Bernoullii Oper. omn. t. II, p. 788.

***) Introd. in an. inf. 1748, t.I, p. 4.

leur développement en série de puissances d'un accroissement, leur quotient différentiel et leur intégrale; non seulement on croyait légitime d'admettre de façon générale pour toutes les fonctions l'existence d'un tel développement, du quotient différentiel et de l'intégrale, mais on n'y voyait même pas une thèse, que ce soit un axiome ou un théorème, tellement l'extension des propriétés des fonctions algébriques aux fonctions transcendantes, soutenue par l'évidence géométrique des courbes représentatives des fonctions, semblait aller de soi ; et les exemples, dans lesquels les fonctions à proprement parler analytiques *), présentaient des singularités essentiellement différentes de celles des fonctions algébriques, furent complètement négligés.

On appelait "curvae discontinuae seu mixtae seu irregulares"**) des courbes tracées arbitrairement qui s'écartaient à quelque égard du comportement des courbes algébriques, par opposition aux "curvae continuae" décrites par une équation [5] ; on était convaincu de l'impossibilité de représenter les courbes discontinues par des équations analytiques. Pourtant, lorsqu'on introduisit , dans le problème des cordes vibrantes, des fonctions arbitraires pour décrire la dépendance entre l'abscisse et l'ordonnée de pareilles courbes, on dérogea déjà à la définition propre admise jusque là de la notion de fonction et d'Alembert avait raison de soutenir que c'était "contre les règles de l'analyse" ***).

Cela l'était bien davantage lorsqu'on était acculé à étendre à un domaine plus large une fonction bien définie dans un certain intervalle de la variable, et à déterminer les valeurs correspondant à toutes les valeurs réelles de l'argument d'une fonction définie

---

*) Comme $\sin \frac{1}{x}$, $e^{\frac{1}{x}}$, $\frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$, $\int^{x} \frac{dx}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ entre autres pour $x = o$. En guise de démonstration de ce qui a été avancé dans le texte, voir d' A l e m b e r t, Hist. de l'Acad. Berlin, 1747, p. 236.

**) E u l e r , Introd. in an. inf. t. II, p. 6

***) Opusc. math. t. I p. 32. Toute la polémique sur le problème de chordis vibrantibus qui s'est développée entre d' A l e m - b e r t , E u l e r, Dan. B e r n o u l l i et L a g r a n g e et qui nous donne un aperçu complet des conceptions liées à la notion de fonction, a été décrite de main de maître par R i e m a n n [6] (Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique, 1867, Abh. d. Gött. Ges. t. 13 Art. 1).

initialement entre certaines limites seulement. Le premier exemple d'une telle extension fut la définition des logarithmes des nombres négatifs . Avec celle-ci on quitta complètement le terrain sur lequel on s'était placé en définissant de la sorte la dépendance fonctionnelle et on créa un nouveau principe que je crois pouvoir formuler comme suit :

Deux développements différents étant donnés dans deux domaines différents de la variable, le premier perdant toute signification en dehors des limites données et ne pouvant être prolongée au-dehors, le second sans aucune possibilité de prolongement dans le premier, ces deux développements, en l'absence d'un développement valable dans les deux domaines, sont censés former une seule et même fonction lorsque celle-ci jouit des mêmes propriétés dans chacun des deux domaines.

Qu'on ait ainsi proposé une notion de fonction sensiblement nouvelle passait d'autant plus inaperçu que ce principe ne fut jamais reconnu en tant que tel et qu'il ne fut jamais explicitement formulé ; ainsi les géomètres ne cherchèrent nullement à préciser les propriétés et les relations entre les valeurs de la fonction nécessaires pour que deux développements analytiques différents, donnés dans deux domaines différents, appartiennent à une même fonction.

Toute une série de théorèmes insuffisamment ou mal démontrés, de propositions mal déterminées ou carrément fausses*) témoignent des fondements peu sûrs sur lesquels on avait bâti toute la théorie des fonctions.

---

*) A ce sujet, je ne fais que citer la démonstration de L a g r a n g e du théorème de Taylor, telle qu'il la présenta encore en 1813 (théor. d. fonct. 2e éd.), puis je rappelle que C a u c h y (Leç. sur le calc. diff. p. 105) "découvrit" en 1829[7] que ce théorème est parfois "en défaut" ; en outre que G a u s s (Theor. d. res funct. dem. tertia, art. 4) signala[8] avec beaucoup de détermination, en 1816 seulement, que

La conception des fonctions que je quali- 11
fierai brièvement d'e u l e r ienne, fut une première fois sérieusement ébranlée lorsqu'en 1807 F o u r i e r découvrit*) la possibilité de développer en fonctions périodiques, non seulement des fonctions analytiques, ou éventuellement des fonctions admettant déjà un développement suivant les puissances de la variable (funct. continuae), mais encore des fonctions complètement arbitraires, n'obéissant à aucune loi simple, ou assujetties à des lois différentes dans leurs différentes parties (funct. discontinuae), que j'appellerai <u>illégitimes</u>.

Avec cette découverte, toute la notion plus ancienne était devenue caduque, comme on le reconnaissait, en hésitant certes : puisque les functiones discontinues pouvaient elles aussi être représentées par des expressions analytiques, il n'était plus possible de considérer les propriétés des fonctions algébriques comme propriétés typiques applicables à toutes les transcendantes ; si une seule et même série pouvait représenter des lois analytiques différentes pour des valeurs de la variable prises dans des intervalles différents, mais contigus, alors le principe de prolongement, formulé ci-dessus, s'effondrerait.

Il n'y avait pas d'autre solution que de laisser tomber l'axiome stipulant que les propriétés des fonctions algébriques, relatives à la continuité, le développement en séries de puissances etc., appartiennent sans distinction à toutes les fonctions analytiques et, avec cet axiome, l'exigence, devenue insignifiante

---

l'intégration portant sur des valeurs infinies de la fonction 9
est inadmissible ; qu'en 1826 seulement, A b e l (C r e l l e, Journ. t. I, p. 311) fournit une définition correcte de la puissance ainsi que de la série du binôme, après que 10
P o i s s o n ait attiré l'attention sur différents paradoxes s'y rapportant et que des hommes comme P o i n s o t (Rech. sur l'analyse d. sections ang. 1825) et beaucoup d'autres aient essayé en vain de les résoudre ; en outre je rappelle les multiples tentatives, insuffisantes et fausses, de définir le concept général des facultés numériques pour des valeurs rationnelles et négatives de la variable, que W e i e r s t r a s s (C r e l l e , Journ. t. 51, p. 1) remplaça en 1856 seulement par leur définition correcte, etc., etc.

*) Bull. d. scienc. p. l. soc. philomatique, t. I, p. 112.

qu'une fonction admette une représentation analytique ; et , en tranchant ainsi le noeud, de remplacer l'ancienne définition par l'explication suivante :

> Une fonction s'appelle y de x, si à toute valeur de la variable x, prise dans un certain intervalle, correspond une valeur déterminée de y ; la loi de dépendance pouvant dans cet intervalle varier arbitrairement et n'être exprimable par aucune opération mathématique.

J'associerai dans ce qui suit le nom de D i r i c h l e t à cette pure définition nominale, elle est en effet à la base de ses travaux sur les séries de F o u r i e r *) qui ont indubitablement prouvé que la notion plus ancienne était intenable ; elle ne suffit cependant pas pour les besoins de l'analyse, les fonctions ainsi conçues ne possédant plus aucune propriété générale et toute relation entre les valeurs de la fonction pour différentes valeurs de l'argument étant abolie.

Une importante lacune s'est ainsi fait jour dans les notions analytiques fondamentales ; même si elle est partout passée sous silence, elle n'en existe pas moins , comme en témoigne un coup d'oeil sur les manuels d'analyse même les meilleurs. L'un définit les fonctions essentiellement dans le sens d'E u l e r , l'autre exige qu'y varie avec x "conformément à une loi", sans fournir aucune explication de cette notion obscure, un troisième la définit comme D i r i c h l e t, un quatrième ne la définit pas du tout ; tous cependant déduisent de leur notion des conséquences qu'elle ne contient pas.

Il fallait donc aller au-delà de la notion de D i r i c h l e t, et C a u c h y , dès 1815, avait commencé à travailler dans ce sens. Mais R i e m a n n , dans un esprit véritablement philosophique, est récemment parvenu à renouveler et à affermir[13] les fondements **).
Prenant comme point de départ la notion de Dirichlet, il établit celle de la fonction (monogène) d'une *variable complexe*, redonnant ainsi à

---

*) Repert. d. Physik, éd. p. Dove t. I , 1837, p. 152.[12] (S. Klass. 116, 3-34).
**) Grundlagen f.e. algem. Theor. d. Funkt. Göttingen.[14]

la définition vide un contenu proche de celui de la notion plus ancienne.

Malheureusement il ne fut pas donné au fondateur de la théorie des fonctions d'une variable complexe d'achever l'édification de son système sur le plan unifié dont seuls quelques[15] beaux fragments nous sont connus et nous en font apprécier toute la grandeur.

Les piliers du nouveau système ne sont pas toujours considérés assez sûrs et solides pour y ériger tout l'édifice de l' analyse ; notamment le principe, auquel R i e m a n n , dans sa modestie généreuse, a associé le nom de D i r i c h l e t , a récemment et à plusieurs reprises été remis en cause, puis soutenu.

Les réserves formulées s'appuient sur certaines exceptions envisageables a priori et dans lesquelles, les fonctions présentent des discontinuités que l'on ne peut exclure sans discussion et qui modifient cependant les conclusions que l'on croyait pouvoir appliquer à toutes les fonctions satisfaisant à la définition.

J'ai pensé que la seule voie capable de nous éclaircir sur ces discontinuités et de préparer ainsi le verdict sur la nature des fonctions était de s'affranchir de toutes les représentations que le mathématicien même le plus moderne rattache encore à la notion eulerienne de fonction, et de commencer par détailler la multitude des relations entre deux variables rendues[16] possibles par la pure notion de fonction selon D i r i c h l e t, tout en prêtant une attention particulière aux fonctions <u>illégitimes</u> peu ou pas étudiées jusqu'à maintenant.

Dans le mémoire qui suit, j'ai tenté d'étudier ces paradoxes inhérents aux fonctions, en me restreignant d'abord aux variables <u>réelles</u> et aux valeurs <u>réelles</u> et <u>finies</u> des fonctions d'une seule variable.

Après avoir fixé, au §1, le sens que j'attache dans ce mémoire au mot "fonction", abordé au §2 les différents types de continuité et de points de discontinuité possibles, je considère au §3 les fonctions continues en général et je démontre que, outre les fonctions analytiques ordinaires ayant dans un certain intervalle donné un nombre fini d'oscillations finies, on peut concevoir des fonctions ayant une infinité d'oscillations d'ampleur infiniment petite . Pour autant que je sache, on n'a dans cette dernière classe représenté analytiquement que des fonctions possédant une infinité d'oscillations dans le voisinage seulement de quelques points isolés. A l'aide d'un principe, que j'ai découvert grâce à un exemple de R i e m a n n *) et que j'appelle condensation de singularités (§4), j'ai réussi, au §5, de construire des séries analytiques absolument convergentes, oscillant parfaitement dans des intervalles entiers.

Alors que ces fonctions peuvent toujours être intégrées, la question de l'existence d'un quotient différentiel soulève des difficultés singulières. Jusqu'à maintenant cette question n'a été que rarement abordée **)[17], l'existence d'une tangente en tout point d'une courbe étant considérée comme d'une évidence géométrique immédiate et comme conséquence naturelle de la "lex continuitatis" respectée comme une nécessité naturelle dans le domaine des mathématiques. Mais lors même que cette obscure "loi de continuité" régirait effectivement tous les mouvements présents dans la nature, ce ne serait pas une raison pour restreindre en aucune façon, le domaine des mathématiques pures ; cette certitude intuitive immédiate s'est révélée trompeuse dans les recherches mêmes de géométrie pure et elle ne peut plus prétendre au rang de démonstration scientifique.

Ainsi après G a u s s ***), D i r i c h l e t , J a c o b i †)

---

*) Sur la possibilité de représenter une fonction..., art. 6.

**) La tentative d'A m p è r e, la seule à ma connaissance, de démontrer pour toutes les fonctions l'existence a priori d'un tel quotient (Journ. de l'éc. polyt. cah. XIII, 1806, p. 148) a complètement échoué.

***) Allg. Lehrs. in Bez. auf d. im verk. Verh. etc., art. 16.[18]

†) Selon la tradition orale, Jacobi, dans ses cours, aurait dit de temps en temps "qu'on peut imaginer des courbes continues ayant une infinité de pointes".

et d'autres, la conviction s'est imposée aux mathématiciens plus jeunes que l'existence de dérivée d'une fonction continue n'est pas une conséquence nécessaire de la continuité, mais exige une hypothèse particulière, bien que parmi eux plus d'un déclare encore "ne pas croire" aux fonctions continues sans dérivées. J'espère être parvenu à montrer que cette incrédulité n'est qu'un préjugé, en représentant analytiquement, au §5, par des séries absolument convergentes des fonctions continues sans dérivée.

Aux §6 et 7, j'ai examiné les fonctions linéairement discontinues c'est-à-dire des fonctions qui présentent, dans un intervalle fini, un nombre infini de solutions de continuité ; selon leur caractère profond, je les ai réparties en deux classes bien distinctes, les fonctions qui admettent une discontinuité ponctuée et les fonctions totalement discontinues. Ces deux classes ont un comportement (§8) totalement différent au point de vue de l'intégrabilité, les premières étant toujours intégrables, les secondes jamais. Au §9, les fonctions discontinues des deux classes sont représentées par des expressions analytiques.

Enfin, dans la conclusion, j'ai utilisé les résultats obtenus pour critiquer la notion de fonction et j'ai tenté de montrer que cette critique conduit nécessairement à l'adoption de la définition de Riemann ; j'ajoute quelques remarques, dans la note III, sur la discontinuité linéaire des fonctions d'une variable complexe.

J'en ai dit provisoirement assez, à titre indicatif, sur ma contribution à la métaphysique de notre science ; je la soumets dans ce qui suit au jugement des mathématiciens. Cette étude m'a surtout été inspiré par les écrits de Riemann, auquel je suis redevable, par son brillant mémoire sur les séries trigonométriques notamment ~~, dont~~ la parution nous autorise à nous pencher sur ce genre de question sans avoir d'excuses à chercher. Comme le remarque cet auteur, en accord avec Dirichlet, ces questions sont "intimement liées avec les principes du Calcul infinitésimal et peuvent servir à porter dans ces principes une plus grande clarté et une plus grande précision". Si jamais ma tentative de prendre pied sur un sol aussi glissant et rarement foulé est partiellement voué à l'échec et si les résultats n'ont pas toujours atteint l'achèvement souhaité, je crois pouvoir bénéficier de quelque indulgence bienveillante. Car mon seul but, en publiant à cette occasion mes idées, est de stimuler l'intérêt d'autres savants pour les problèmes fondamentaux de la science, que la nouvelle théorie des fonctions ne permet plus d'écarter.

§ 1

La notion de fonction.

Afin d'éviter toute confusion, je pose d'emblée qu'il ne sera question dans la suite que de valeurs réelles de la variable et de fonctions réelles, à l'exception de quelques endroits qui seront signalés ; les valeurs infinies de la fonction seront partout exclues . Conformément à cela, je pose la définition suivante :

Une fonction de x est appelée f(x) si à toute valeur de x située dans un certain intervalle correspond une valeur unique et bien déterminée de f(x).

Peu importe à partir de quoi et comment on détermine f(x), que ce soit par des opérations analytiques ou autrement.

Sauf que la valeur de f(x) doit partout être unique et bien déterminée. Ainsi $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ne serait pas, dans un intervalle renfermant x = o, une fonction partout définie, si elle n'était définie que par son expression analytique. Car celle-ci sera complètement indéterminée en x = o, alors qu'en tout point proche de x = o elle sera néanmoins définie. Si elle doit satisfaire la définition ci-dessus d'une fonction bien déterminée, la valeur f(o) devra être fixée à part, soit f(o) = o ou f(o) = 1. De même $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ n'est pas définie en x = o, car pour des valeurs positives de x tendant vers o, elle croît infiniment, pour des valeurs négatives de x, elle décroît infiniment. Mais

$$f(x) = \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots$$

est, malgré ses sauts, une fonction partout définie.

§ 2
La notion de continuité.[19]

Une fonction $f(x)$, ayant en $x = a$ une valeur $f(a)$ finie et bien déterminée, est appelée *continue en ce point*, si on peut toujours choisir ε assez petit pour que la différence :

$$f(a + \delta) - f(a)$$

soit inférieure en valeur absolue à une grandeur σ arbitrairement petite pour *tout* δ inférieur en valeur absolue à ε.

Elle est appelée *discontinue* au point $x = a$, si ε *ne* peut être choisi assez petit pour que

$$f(a + \delta) - f(a)$$

soit inférieur en valeur absolue à toute grandeur σ arbitrairement petite pour *tout* δ inférieur en valeur absolue à ε.

Si la fonction est continue en $x = a$, il sera évident que ε peut être choisi assez petit pour que, quelque soit $\delta < \varepsilon$, $f(a + \varepsilon) - f(a + \delta)$ reste inférieur en valeur absolue à toute grandeur σ donnée, mais pas inversément. Car supposons que la dernière condition est satisfaite, on ne pourra rien en déduire de plus que : $f(a + \varepsilon)$ tend vers une limite*) lorsque ε décroît infiniment ; celle-ci peut cependant être très différente de $f(a)$, comme le montre suffisamment l'exemple des séries de F o u r i e r dans leurs points de discontinuité.

Soit la propriété suivante d'une fonction : Si ε positif peut toujours être pensé assez petit pour que $f(a + \varepsilon) - f(a + \delta)$ soit inférieur en valeur absolue à une grandeur σ arbitrairement petite pour tout $\delta < \varepsilon$, δ *différent de zéro*, je la décrirai par la terminologie suivante :

La fonction est *continue* à droite *au voisinage immédiat du point $x = a$* .

Ceci peut donc avoir lieu sans que la fonction soit continue *au* point $x = a$, mais l'inverse n'est pas vrai. La continuité *en* un point implique toujours la continuité dans son voisinage

---

*) Pour la formulation précise de la notion de limite, voir en annexe la note 1.

immédiat, à droite comme à gauche. En outre, f(x) peut être continue en <u>tout point $x = a + \varepsilon$ arbitrairement proche de $x = a$</u>, sans être continue <u>au</u> point $x = a$ ou seulement dans sa <u>proximité immédiate</u>. La fonction

$$f(x) = \sin \frac{1}{x-a}$$

en fournit un exemple ; elle est continue en tout point aussi proche soit-il de $x = a$ sans l'être en $x = a$, quelque soit la valeur qu'on lui attribue en $x = a$, celle-ci n'étant pas comprise dans la définition analytique. Mais même au voisinage immédiat de $x = a$, elle n'est pas continue ; car on ne pourra jamais rendre ε assez petit pour que

$$f(a + \varepsilon) - f(a + \delta) = \sin \frac{1}{\varepsilon} - \sin \frac{1}{\delta}$$

soit inférieur à une grandeur arbitrairement petite pour <u>tout</u> δ différent de zéro, $\delta < \varepsilon$, cette différence oscillant continuellement entre les bornes ± 1. Par contre, comme je l'ai déjà noté , la fonction est continue pour tout $x = a + \varepsilon$, où ε est arbitrairement petit ; car la différence ci-dessus pourra être rendue arbitrairement petite si ε est constant et si δ tend vers ε.

Je pense qu'on peut décrire le cas où f(x) est continue en tout point arbitrairement proche de $x = a$, par l'expression suivante :

La fonction est continue <u>jusqu'au voisinage immédiat</u> de $x = a$.

Il n'en suit pas qu'elle est nécessairement continue <u>au</u> voisinage immédiat de $x = a$. Et inversément : Une fonction peut être continue <u>en</u> un point et <u>dans</u> son voisinage immédiat, sans l'être <u>jusqu'à</u> son voisinage immédiat, comme des exemples étudiés au §9 le prouveront suffisamment.

En outre, lorsque δ décroît infiniment, $f(a + \delta)$ et $f(a - \delta)$ peuvent tendre vers deux limites distinctes et différentes de f(a). On dit alors que la fonction y fait un "saut" et on appelle ces limites les valeurs du saut. f(a) peut cependant coïncider avec la limite de $f(a + \delta)$ et différer de celle de $f(a - \delta)$. Nous dirons alors que la fonction est continue à droite en $x = a$, mais pas à gauche.

Enfin les limites $f(a + \delta)$ et $f(a - \delta)$ peuvent être égales alors que la valeur $f(a)$ en diffère *).

---

*) R i e m a n n (Principes fondamentaux pour une théorie générale[20] des fonctions ...) a parlé de ces discontinuités comme de celles qui seraient détruites par une modification de la valeur de la fonction en un seul point (p.15).

§ 3

Fonctions continues

Nous appellerons tout simplement continues les fonctions qui sont continues dans tout intervalle fini, sauf en un nombre fini de ses points. Nous restreignons ici nos considérations aux intervalles situés entre de tels points de discontinuité, intervalles dans lesquels les fonctions sont alors tout simplement continues, finies et bien déterminées.

Pour la plupart des fonctions analytiques examinées jusqu'à ce jour, on peut déterminer pour tout point $x = a$ un intervalle ε positif de sorte que pour tout $\delta < \varepsilon$, la différence $f(a+\delta) - f(a)$ ne soit pas seulement inférieure en valeur absolue à une grandeur σ arbitrairement petite, mais soit partout de même signe et diminue toujours lorsque δ décroît ; un tel intervalle existe également de l'autre côté de $x = a$. Lorsque, dans ce cas, les signes des différences $f(a+\delta) - f(a)$ et $f(a-\delta) - f(a)$ sont identiques, $x = a$ est un maximum ou un minimum ; s'ils diffèrent, il n'y aura ni l'un ni l'autre. Dans le tracé d'une telle fonction, un minimum succède à un maximum et inversement. On nomme oscillation un morceau de la fonction situé entre un maximum et un minimum, son amplitude la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale*).

Les fonctions du genre indiqué présentent dans chaque intervalle fini un nombre fini d'oscillations.

C'est à l'image de ces fonctions, qui sont pratiquement les seules connues en analyse, qu'on peut concevoir les autres fonctions continues pour lesquelles, quelque soit la petitesse de ε, $f(a+\delta) - f(a)$ n'est pas de même signe pour tout $\delta < \varepsilon$ et ne décroît pas toujours avec δ. La fonction

*) J'utilise ici la dénomination de Lipschitz (C r e l l e,[21] Journ. t. 63, p. 296)

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x} \quad ,$$

qui s'annule en $x = o$ et est certainement continue, fournit un exemple d'un tel comportement ; car on peut en tous cas rendre la différence

$$f(\delta) - f(o) = \delta \sin \frac{1}{\delta}$$

arbitrairement petite, bien qu'elle oscille en permanence, pour des valeurs décroissantes de δ , entre des valeurs positives et négatives. Nous pouvons décrire ce comportement en disant que $f(x)$ présente au voisinage immédiat de $x = o$

une infinité d'oscillations d'amplitude infiniment petite.

Ce qui n'a lieu ici au voisinage que d'un seul point, peut arriver,pour certaines fonctions, en un nombre infini de points situés infiniment près les uns des autres ; les parties I et II du §5 comprennent des exemples de telles fonctions. Ce qui continue cependant à caractériser ces fonctions, c'est que, aussi petit qu'on choisisse σ différent de zéro, le nombre des oscillations dont l'amplitude est supérieure à σ est toujours fini, mais croît au-delà de toute limite lorsque σ décroît indéfiniment.

On a bien envisagé parfois des fonctions continues censées comprendre un nombre infini d'oscillations d'amplitude finie, c'est-à-dire des fonctions présentant, dans tout intervalle aussi petit soit-il, des oscillations dont les amplitudes dépassent une certaine grandeur constante σ et on a sans doute pensé à $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ en $x = o$. Mais il est facile de montrer que l'existence supposée de telles fonctions implique une contradiction interne. En effet si,pour $x = a$, il n'existe pas d'intervalle ε tel que, pour tout ε , $f(a+\varepsilon) - f(a)$ soit inférieur en valeur absolue à une grandeur arbitrairement petite, mais si au contraire les valeurs de cette différence oscillent, à l'intérieur de l'intervalle, autour de cette amplitude constante $> \sigma$, alors la fonction, conformément à la définition de la continuité, ne sera tout simplement pas continue ; de la même manière que $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ n'est même pas continue en $x = o$, mais y est complètement indéterminée.

Pour toutes les fonctions continues, le nombre d'oscillations supérieures à σ est par conséquent fini dans tout intervalle, aussi proche que σ soit de zéro. Et pourtant, elles se divisent en deux classes définies de la manière suivante :

I. Fonctions à oscillations finies, c'est-à-dire que le nombre d'oscillations supérieures à σ ne dépasse pas une certaine limite, aussi petit qu'on choisisse σ .

Cette classe comprend toutes les fonctions algébriques et la plupart des fonctions analytiques, qui possèdent habituellement des dérivées partout bien déterminées et finies sauf en quelques points critiques comme $x = o$ pour $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ou $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$.

On peut cependant imaginer des fonctions qui, tout en étant partout continues et en appartenant à la classe des fonctions à un nombre fini d'oscillations, possèdent néanmoins des dérivées infinies en une infinité de points d'un intervalle, présentant pour ainsi dire "un nombre infini de pointes" *). De telles fonctions sont présentées dans les parties

---

*) Il n'est pas absurde de se représenter intuitivement les fonctions à un nombre infini de pointes de la manière suivante : Qu'on subdivise un carré de côté 1 à l'aide de parallèles équidistantes, horizontales et verticales, en un réseau de μ carrés plus petits ; qu'on procède ensuite d'un des sommets du grand carré en une ligne brisée vers le sommet opposé, en suivant toujours les parallèles, en se déplaçant donc tantôt horizontalement, tantôt verticalement. La longueur du chemin qu'on parcourt ainsi est constante et égale à 2, quelque soient les mailles du réseau qu'on emprunte. Qu'on choisisse maintenant un chemin qui se rapproche le plus possible de la diagonale et qu'on monte d'un sommet vers l'autre en suivant un chemin en forme d'escalier, la diagonale coupant tous les coins saillants des marches. Qu'on fasse croître μ indéfiniment ; ce chemin en forme d'escalier, s'il est toujours construit de la même manière, s'approchera toujours plus de la diagonale et son écart de cette dernière deviendra arbitrairement petit ; alors

III et IV du §5 sous forme de séries analytiques, pour lesquelles la différence $f(a+\varepsilon) - f(a)$ se comporte, en une infinité de points $x = a$, comme $\varepsilon^{\frac{1}{3}}$ resp. $\frac{1}{\log \varepsilon}$.

Mais il existe aussi, fait souvent nié auparavant, des courbes transcendantes simples, qui sont continues tout en possédant des points isolés où les limites, vers lesquelles tendent les sécantes passant par ces points et par des points proches sur la courbe, sont différentes de part et d'autre de sorte qu'en ces points deux branches de la courbe se rencontrent sous un angle fini.

$$f(x) = \int_a^x \frac{dy}{1+e^{\frac{1}{y}}}$$

en est un exemple ; la fonction sous le signe intégral est partout finie lorsque y parcourt des valeurs réelles et n'est indéterminée que pour $y = o$. Et pourtant

$$f(o) = \int_a^o \frac{dy}{1+\varepsilon^{\frac{1}{y}}}$$

---

que la tangente à la diagonale possède la même valeur en tous ses points, celle de la ligne en forme d'escalier oscille en permanence entre o° et 9o° , et la longueur de cette dernière reste constante et égale à 2, alors que celle de la diagonale a une autre valeur, à savoir $\sqrt{2}$. Si maintenant on fait croître μ infiniment, on semble obtenir, à l'aide de ce passage à la limite, une ligne qui coïncide dans tout son tracé extérieur avec une ligne droite, mais qui de par sa nature intérieure est constituée de façon essentiellement différente, sa direction étant totalement indéterminée en tout point et sa longueur étant différente de celle de la droite. Ce paradoxe (proche de la fameuse rota Aristotelica) a cependant été obtenu subrepticement en admettant le théorème suivant : "Si une famille de courbes s'approche continûment d'une courbe limite, les propriétés de cette famille valent également pour la courbe limite". Ce théorème, que même de fameux mathématiciens ne se sont pas toujours gardé d'appliquer tacitement, n'est pas seulement indémontrable dans sa généralité, mais il est faux ; car on peut citer assez d'exemples où une famille de courbes possédant direction et courbure continûment variables s'approche continûment d'une courbe limite, qui présente des modifications soudaines de la direction et de la courbure. Dans notre cas ci-dessus le contraire a lieu : une suite de courbes dont les quotients différentiels font des sauts s'approche 22
continûment d'une courbe à direction constante.

est bien déterminé et

$$f(\varepsilon) - f(o) = \int_o^{\varepsilon} \frac{dy}{1+e^{\frac{1}{y}}} = \varepsilon \, \frac{1}{1+e^{\frac{1}{\delta}}} \; ,$$

où δ est situé entre o et ε . Comme la limite de

$$\frac{1}{1+e^{\frac{1}{\delta}}} = \begin{cases} o & \text{pour } \delta \text{ positif} \\ 1 & \phantom{\text{pour } \delta} \text{ négatif} \end{cases} \; ,$$

$$\lim \frac{f(\varepsilon) - f(o)}{\varepsilon} = \begin{cases} o \\ 1 \end{cases} ,$$

selon qu'on tend vers zéro en venant de droite ou de gauche.

L'intégrale de toute fonction admettant des valeurs différentes de part et d'autre d'un point se comporte de manière analogue.

A la fin du §8 seront indiquées sous forme analytique des fonctions continues qui possèdent cette même propriété en une infinité de points d'un intervalle fini.

II. <u>Les fonctions à un nombre infini d'oscillations d'amplitude infiniment petite</u> sont des fonctions telles que le nombre d'oscillations supérieures à σ croît au-delà de toute limite lorsque σ décroît.

Elles comprennent la fonction $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ qui possède la propriété indiquée dans un intervalle au moins, celui qui comprend $x = o$. Dans les parties I et II du §5 seront indiquées d'autres fonctions possédant cette particularité en une infinité de points de tout segment.

Quant aux dérivées , on peut certes indiquer des fonctions de la deuxième classe qui n'en ont pas en une infinité de points (comme I du §5) ; mais il en existe également dans lesquelles les oscillations s'aplatissent pour ainsi dire de sorte qu'en tout point il existe un <u>quotient différentiel</u> bien déterminé (cf. II du §5*)). Quant à leur

---

*) La question de savoir s'il est possible de représenter analytiquement (ou même de concevoir) des fonctions <u>continues</u> qui ne possèdent en <u>aucun</u> point d'un intervalle fini un quotient différentiel fini et bien déterminé, reste en suspens. Car il y 23
faut distinguer clairement deux cas selon que le quotient différentiel est indéterminé en soi ou qu'il apparaît sous une

intégrabilité, l'examen de la question est plus simple et on peut déjà faire ici la remarque qui sera démontrée au §8 : les fonctions continues des deux classes sont toujours intégrables.

En ce qui concerne le développement des fonctions continues en séries de F o u r i e r , les analyses de D i r i c h l e t *) qui se limitaient expressément à la première classe, ont été complétées par les travaux de L i p s c h i t z **) et de R i e m a n n †) qui ont établi que toutes les fonctions continues peuvent être développées en séries périodiques à coefficients décroissant infiniment.[24]

---

forme dont nous ne pouvons déterminer la valeur. Ainsi, par exemple, la fonction $f(x) = \sum (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$ a, sous la forme donnée, un quotient différentiel indéterminé, car la série converge trop mal pour qu'on puisse déterminer avec nos méthodes habituelles la différence $f(x+\varepsilon) - f(x)$ pour ε décroissant ; or en soi $f'(x) = 1$ et n'est guère indéterminée.

*) In C r e l l e , Journ. t. 4, p. 169 il est supposé qu'il n'existe qu'un nombre fini de maxima et de minima.

**) In C r e l l e , Journ. t. 63, p. 301, il est démontré que les fonctions, pour lesquelles $f(x+\varepsilon) - f(x)$ décroît plus rapidement avec ε que n'importe quelle puissance positive de ε sont développables.

†) Sur la possibilité de représenter..., voir art. 10.

§ 4

Condensation des singularités.[25]

Il faut ici interrompre la progression du développement théorique pour expliquer le principe qui permet de représenter analytiquement les fonctions illégitimes considérées dans le paragraphe précédent.

Soit $\varphi(y)$ une fonction qui, pour toutes les valeurs de y comprises entre -1 et +1, à l'exception de y = o, possède une valeur bien déterminée comprise entre +1 et -1 et présente un comportement normal pour les fonctions analytiques, c'est-à-dire que, pour δ suffisamment petit, $\varphi(y+\delta)$ peut être développé, selon le théorème de Taylor, en

$$\varphi(y+\delta) = \varphi(y) + \delta\varphi'(y) + \frac{1}{2}\delta^2\varphi''(y) + \dots .$$

On suppose que cette fonction possède en y = o une singularité, qui rend le développement de $\varphi(y)$ selon les puissances entières de y inadmissible , que sa valeur est néanmoins définie en ce point également et que $\varphi(o) = o$.

On peut imprégner une fonction f(x) de cette singularité,[26] qui n'affecte la fonction $\varphi(y)$ qu'en un point isolé y = o, de telle sorte qu'elle en possède en une infinité de points d'un intervalle fini, en posant[27]

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(\sin nx\pi)}{n^s} .$$

Si l'on suppose que $s > 3$, cette série convergera puisque ses termes ne sont pas supérieurs en valeur absolue à ceux de la série convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} .$$

Par conséquent, la fonction f(x) sera toujours finie et bien déterminée si la fonction $\varphi(y)$ possède les propriétés que nous avons supposées.

Afin d'examiner les singularités de la nouvelle fonction f(x), on notera d'abord que, d'après des règles bien connues,

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^s} < \frac{1}{(s-1)\, m^{s-1}}$$

et que par suite

$$f(x) = \sum_{n=1}^{m} \frac{\varphi(\sin nx\pi)}{n^s} + \frac{h}{m^{s-1}} ,$$

où h désigne une fraction irréductible. Il vient, si h' désigne[28] également une fraction irréductible

$$f(x + \varepsilon) - f(x) = \sum_{n=1}^{m} \frac{\varphi(\sin n[x+\varepsilon]\pi) - \varphi(\sin nx\pi)}{n^s} + \frac{h'}{m^{s-1}} .$$

m y désigne un nombre arbitrairement grand, ε un nombre arbitrairement petit, dont la croissance et la décroissance respectives peuvent être liées par une relation arbitraire. Admettons que, quelque soit la grandeur de m, $m\varepsilon$ est toujours inférieur à une grandeur arbitrairement petite. A fortiori $n\varepsilon$ sera une grandeur arbitrairement petite et le développement

$\varphi(\sin n[x+\varepsilon]\pi) = \varphi(\sin nx\pi) + n\varepsilon\pi \cos nx\pi . \varphi'(\sin n[x+\varkappa\varepsilon]\pi)$,

où $\varkappa$ est une fraction irréductible, est valable si on n'a pas $\sin nx\pi = o$.

Ceci n'arrivera dans aucun terme de la série, si x est une grandeur irrationnelle ; on aura alors

$$f(x + \varepsilon) - f(x) = \varepsilon\pi \sum_{n=1}^{m} \frac{\varphi'(\sin n[x+\varkappa\varepsilon]\pi)}{n^{s-1}} \cos nx\pi + \frac{h'}{m^{s-1}} .$$

La série dans le membre droit est convergente si s est supérieur à 3 comme nous l'avons supposé ; et en diminuant ε la différence $f(x+\varepsilon) - f(x)$ peut toujours être rendue arbitrairement petite.

Par conséquent, la fonction f(x) est continue en tout point irrationnel et plus encore : elle a en chacun de ces points un quotient différentiel fini et bien déterminé.

On a en effet

$$\frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} = \pi \sum_{n=1}^{m} \frac{\varphi'(\sin n[x+\varkappa\varepsilon]\pi)}{n^{s-1}} \cos nx\pi + \frac{h'}{\varepsilon m^{s-1}} .$$

Lorsque ε décroît continûment, la série, avec l'hypothèse $s > 3$, tend en tous cas vers la limite

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi'(\sin nx\pi)}{n^{s-1}} \cos nx\pi ;$$

si l'on précise la relation entre la croissance de m et la décroissance de ε de sorte que εm

décroisse certes infiniment, mais que $\varepsilon m^{s-1} = \varepsilon m.m^{s-2}$ croisse[29] infiniment, ce qu'on obtient, par exemple, à l'aide de la substitution

$$m = \frac{1}{\varepsilon q} \quad , \quad 1 > q > \frac{f}{s-1} \quad ,$$

alors on remarquera que le reste disparaît, que la dérivée

$$f'(x) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi'(\sin nx\pi)}{n^{s-1}} \cos nx\pi$$

est bien déterminée en tout point irrationnel et complètement indépendante de la diminution de ε.

La fonction se comporte par conséquent de manière tout à fait légitime en tout point irrationnel ;elle a par contre un caractère totalement différent dans les points où x a une valeur rationnelle, soit $x = \frac{\nu}{\mu}$ dans sa forme réduite.

Si, dans la série déterminant la différence $f(x + \varepsilon) - f(x)$

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{\varphi(\sin n[x+\varepsilon]\pi) - \varphi(\sin nx\pi)}{n^s} \quad ,$$

nous groupons d'abord les termes, pour lesquels n n'est pas multiple de μ, ceux-ci formeront une série qui possède les propriétés décrites ci-dessus et que nous désignerons par εQ ; les termes restants par contre, dans lesquels $n = \mu r$ où r est un entier, sont d'une nature tout autre ; $\varphi(\sin n\frac{\nu}{\mu}\pi) = \varphi(\sin r\nu\pi) = \varphi(o)$ s'annulant d'après notre hypothèse, ces termes forment la série

$$\frac{1}{\mu^s} \sum \frac{\varphi(\pm \sin r\mu\varepsilon\pi)}{r^s} \quad ,$$

où r parcourt toutes les valeurs numériques comprises entre 1 et le plus grand nombre entier inférieur à $\frac{m}{\mu}$ et le signe est $\pm$ suivant que $r\nu$ est pair ou impair. Si ε diminue et si, malgré l'acroissement de m, $m\varepsilon$ est toujours arbitrairement petit, on pourra écrire la série sous la forme

$$\frac{1}{\mu^s} \sum \frac{\varphi(\pm r\mu\varepsilon\pi)}{r^s}$$

et on perçoit ainsi comment la singularité que $\varphi(y)$ possède en $y = o$ se transmet à notre fonction. Car il paraît évident qu'on peut toujours choisir s assez grand pourque le premier terme de cette série, à savoir

$$\frac{1}{\mu^s} \varphi(\pm \mu \varepsilon \pi)$$

détermine essentiellement cette singularité.

Si le développement de $\varphi(\delta)$ suivant les puissances de δ n'est plus valable, et si la fonction $\varphi(\pm r\mu\varepsilon\pi)$ elle-même ne décroît pas à la même vitesse que ε pour les plus petites valeurs de ε, alors le résultat de la division par ε de l'équation

$$f(x+\varepsilon) - f(x) = \varepsilon Q + \frac{1}{\mu^s} \sum \frac{\varphi(\pm r\mu\varepsilon\pi)}{r^s} + \frac{h'}{m^{s-1}},$$

à savoir $\dfrac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$, ne tendra pas vers une valeur limite déterminée et par conséquent,

la fonction f(x) <u>ne</u> possédera <u>pas</u> de dérivée pour des valeurs rationnelles de x.

Si $\varphi(y)$ est continue au point y = o également, il découlera immédiatement de la valeur ci-dessus de la différence $f(x+\varepsilon) - f(x)$ que f(x) est continue dans <u>tous</u> les points x, y compris les valeurs rationnelles, sans cependant y posséder de dérivée.[30]

La singularité $\varphi(y)$ au point y = o se transmettra ainsi à tout point x <u>rationnel</u> de la fonction f(x), puisque, pour de tels x, il y aura toujours, dans la série

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(\sin nx\pi)}{n^s},$$

des termes possédant cette propriété ; alors que, pour des valeurs irrationnelles de x, tous les termes ont un comportement légitime.

L'infinité de singularités que, selon les propriétés admises pour la fonction φ, $\varphi(\sin y\pi)$ possède pour les valeurs discrètes y = o, 1, 2, 3, ..., s'entassent pour ainsi dire dans un segment fini de la fonction f(x) et voilà pourquoi je me suis crû autorisé à nommer le principe permettant de passer des fonctions φ aux fonctions f <u>condensation des</u>

<u>singularités</u>.[31]

Des explications supplémentaires seront fournies dans la suite pour certaines fonctions étudiées en guise d ' exemples. De manière générale, on peut encore noter que la singularité en un point rationnel apparaît d'autant plus marquée que la valeur $x = \frac{\nu}{\mu}$ est simple, c'est-à-dire que le dénominateur μ est petit. En effet, la singularité propre à la fonction φ ne se transmet à la fonction f que dans la proportion μ^s : 1. Par suite, plus on approche d'un point irrationnel, plus la fonction revêt le caractère de fonction continue qu'elle possède en ces points.

§ 5

Fonctions continues ayant une infinité de singularités.

I. Ces remarques générales seront appliquées à[32] la fonction particulière

$$\varphi(y) = y \sin \frac{1}{y}$$

qui est partout continue, mais présente en y = o une infinité d'oscillations infiniment petites et ne peut donc être développée en une série de puissances croissantes de y.

La fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sin nx\pi . \sin \left(\frac{1}{\sin nx\pi}\right)$$

est, comme il résulte des considérations ci-dessus, continue et dérivable dans tous les points irrationnels x.

Si x est rationnel par contre, à savoir $x = \frac{\nu}{\mu}$, $f(x + \varepsilon)$ comprend, outre une série εQ, les termes

$$\frac{1}{\mu^s} \sum \frac{1}{r^s} \sin r\mu\varepsilon\pi . \sin \left(\frac{1}{\sin r\mu\varepsilon\pi}\right),$$

auxquels, à l'exception des termes d'ordre supérieur, on peut substituer, si ε est suffisamment petit,

$$\frac{\pi}{\mu^{s-1}} \sum \frac{1}{r^{s-1}} \sin \frac{1}{r\mu\varepsilon\pi},$$

de sorte que

$$f(x + \varepsilon) - f(x) = \varepsilon \frac{1}{\mu^{s-1}} \sin \frac{1}{r\mu\varepsilon\pi} + \varepsilon Q + \frac{h'}{m^{s-1}} .$$

Comme pour des valeurs de s relativement grandes, la somme

$$\sum \frac{1}{r^{s-1}} \sin \frac{1}{r\mu\varepsilon\pi}$$

se réduit essentiellement à son premier terme, $f(x + \varepsilon) - f(x)$ se comportera comme $\frac{\varepsilon\pi}{\mu^{s-1}} \sin \frac{1}{\mu\varepsilon\pi}$.

La fonction f(x) est par conséquent bien continue aux points x rationnels, mais pas de manière à conférer à sa dérivée une valeur déterminée. Bien plus, autour de tels points, on ne peut indiquer aucun intervalle suffisamment petit pour que la différence $f(x + \varepsilon) - f(x)$ y décroisse toujours ou y conserve un même signe. Nous pouvons caractériser le comportement, qui ressemble à celui de notre actuelle fonction $\varphi(y)$ en $y = o$, par l'expression : <u>la fonction $f(x)$ admet en chaque point rationnel x</u>[33] <u>une infinité d'oscillations infiniment petites</u>, sans qu'elle ne devienne jamais discontinue.

II. En posant

$$\varphi(y) = y^2 \sin \frac{1}{y} \quad ,$$

on retrouve pour la fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} (\sin nx\pi)^2 \sin \left(\frac{1}{\sin nx\pi}\right)$$

un comportement analogue à celui décrit dans le paragraphe précédent, en ce qui concerne les oscillations dans les points rationnels. En conservant les désignations antérieures, on aura maintenant

$$\frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} = Q + \varepsilon \frac{\pi^2}{\mu^{s-2}} \sum \pm \frac{1}{r^{s-2}} \sin \frac{1}{r\mu\varepsilon\pi} \, ,$$

où les termes restants, s'évanouissant pour ε décroissant et m croissant, ont été omis d'emblée. Si nous maintenons l'hypothèse $s > 3$, le produit par ε de ces $\sum$ convergentes s'évanouira avec ε décroissant infiniment, et le quotient $\frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$ tendra vers la limite Q.

<u>Bien qu'</u> il existe, comme on peut le constater, une infinité d'oscillations infiniment petites en tout point rationnel x,[34] <u>la fonction possède néanmoins en chaque point un quotient différentiel bien déterminé</u>*); la raison en est à chercher dans la petitesse de ces oscillations, qui ont une amplitude infiniment petite du second ordre, ainsi d'ailleurs que celles de la

---

*) Il n'est peut-être pas superflu de remarquer que la dérivée $f'(x)$, considérée comme fonction, ne tend nullement vers cette limite Q lorsque x tend vers une valeur rationnelle, mais oscille en permanence, comme le fait voir immédiatement la valeur de

$$f'(x) = \sum \frac{1}{n^s} \frac{\partial}{\partial x} \left[(\sin nx\pi)^2 \sin \left(\frac{1}{\sin nx\pi}\right) \right].$$

De façon analogue pour la fonction $\varphi(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$, la limite de $\frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(o)}{\varepsilon} = \varepsilon \sin \frac{1}{\varepsilon}$ est définie et $\varphi'(o) = o$. Mais en général

$$\varphi'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

et, par conséquent, $\varphi'(x)$ est une grandeur qui oscille sans cesse lorsque x décroît et <u>ne</u> tend guère vers la limite $\varphi'(o) = o$.

fonction

$$\varphi(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \quad \text{en } x = o,$$

alors que les amplitudes étudiées dans la partie n° I sont infiniment petites du premier ordre.

III. Si on pose[35]

$$\varphi(y) = y^{\frac{2}{3}},$$

et conformément à cela

$$f(x) = \sum \frac{(\sin nx\pi)^{\frac{2}{3}}}{n^s},$$

on obtient une fonction réelle, <u>tout à fait continue</u>, à condition de toujours prendre la valeur réelle de la racine cubique.

Pour $x = \frac{\nu}{\mu}$ rationnel,

$$f(x + \varepsilon) - f(x) = \varepsilon Q + \frac{(\varepsilon\pi)^{\frac{2}{3}}}{\mu^{s-\frac{2}{3}}} \sum \frac{1}{r^{s-\frac{2}{3}}} + \frac{h'}{m^{s-1}},$$

et on voit que la fonction appartient à la première classe considérée au §3 ; car la différence $f(x + \varepsilon) - f(x)$ décroît continuellement avec ε, sans changer de signe ; <u>la fonction f'(x) ne possède par conséquent pas d'oscillations</u> ; et pourtant la fonction considérée <u>n' a pas de dérivée finie</u> ;

$$\frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} = Q + \frac{\pi^{2/3}}{\varepsilon^{\frac{1}{3}}\mu^{s-\frac{2}{3}}} \sum \frac{1}{r^{s-\frac{2}{3}}}$$

croît plutôt au-delà de toute limite lorsque ε décroît.

Si l'on veut, on pourra nommer le corrélat spatial de la fonction f(x) <u>courbe</u> continue <u>ayant une infinité de pointes</u>.

IV. Plutôt que de citer nombre d'exemples analogues , je me contenterai d'en indiquer encore un seul en posant

$$\varphi(y) = \frac{1}{\log \varkappa y^2}$$

et $o < \varkappa < \frac{1}{10}$. Alors

$$f(x) = \sum \frac{1}{n^s} \frac{1}{\log \varkappa (\sin nx\pi)^2}$$

donnera lieu, pour $x = \frac{\nu}{\mu}$ rationnel, à la différence

$$f(x + \varepsilon) - f(x) = \varepsilon Q + \frac{1}{\mu^s} \sum \frac{1}{r^s} \frac{1}{\log \varkappa (r\mu\varepsilon\pi)^2}$$

et par conséquent

$$\frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} = Q + \frac{1}{\mu^s} \sum \frac{1}{r^s} \frac{1}{\varepsilon \log \varkappa (r\mu\varepsilon\pi)^2}$$

tendra vers l'infini dans le domaine négatif lorsque ε décroît.

§ 6

Définition et exemples de fonctions linéairement discontinues[1)]

> Une fonction $f(x)$ est appelée discontinue en un point $x = a$, lorsque, parmi les valeurs que la différence $f(a + \delta) - f(a)$ admet pour tous les δ positifs ou négatifs inférieurs en valeur absolue à ε, il y en a toujours qui dépassent en valeur absolue une certaine grandeur finie σ, aussi petit soit ε.

Je dirai d'une telle fonction : elle fait des <u>sauts</u> supérieurs [36]
à σ au point $x = a$.

Afin de disposer d'un moyen d'expression commode, j'introduis une nouvelle notion dans mon étude de la discontinuité et j'appelle [37]

> <u>oscillation</u>*) d'une fonction dans un intervalle donné la différence entre sa plus grande et sa plus petite valeur dans cet intervalle.

L'oscillation d'une fonction dans un intervalle comprenant le point $x = a$, où $f(x)$ fait des sauts supérieurs à σ, est en tous cas plus grande que σ. Si les sauts en ce point sont inférieurs à σ, on pourra toujours indiquer un petit intervalle autour du point $x = a$, dans lequel l'oscillation vaut moins de 2σ.

Les fonctions tout simplement continues font de tels sauts en quelques points, qui ne peuvent être qu'en nombre fini sur un segment et qui sont toujours séparés les uns des autres par des intervalles finis dans lesquels la fonction est bien continue. De telles discontinuités <u>ponctuelles</u> peuvent également s'accumuler en nombre infini sur un segment ; elles engendrent ainsi des discontinuités <u>linéaires</u> que nous allons considérer maintenant en posant la définition :

> Les <u>fonctions linéairement discontinues</u>[38] sont des fonctions discontinues en une infinité de points d'un segment fini.[39]

---

1) Bien que l'expression "fonctions discontinues par morceaux" reflète mieux la propriété de ces fonctions de présenter, dans un intervalle fini, un nombre infini de solutions de continuité, j'ai finalement gardé, suite à J. Houël, <u>Bull.</u>[63] <u>des sc. math. et astr.</u> 1(1870), 117-124, la traduction littérale "fonctions linéairement discontinues". (Note de la traductrice)

*) D'après R i e m a n n , Sur la poss. de représenter..., art.5.

Les sauts que la fonction effectue en cette infinité de points peuvent cependant se comporter de manières très variées selon que le le nombre de points où les sauts sont supérieurs à une grandeur finie déterminée σ est infini ou ne fait que tendre vers l'infini, lorsque σ décroît infiniment. Bien que, dans ce dernier cas, les points où les sauts sont supérieurs à une grandeur finie détermi- née σ, ne soient qu'en nombre fini, ces fonctions diffèrent essen- tiellement des fonctions purement et simplement continues, qui elles ne présentent en tout qu'un nombre fini de points de discontinuité.

Les multiples particularités des fonctions linéairement discon- tinues seront d'abord étudiées dans une série d'exemples, dans lesquels la variable x parcourt l'intervalle de $x = 0$ à $x = 1$.

I. Soit $f(x) = 0$ pour tout x rationnel, $f(x) = 1$ pour tout x irrationnel*). Dans tout intervalle, aussi petit soit-il, il existe alors une infinité de points, où s'effectuent de part et d'autre des sauts de grandeur 1, et il n'y aura pas de point $x = a$ tel que $f(a + \delta) - f(a)$ est inférieur à 1 en valeur absolue, [40] pour tout $\delta < \varepsilon$, ε étant choisi aussi petit qu'on le voudra.

II.[41] La fonction admettra la valeur $f(x) = 1$ dans le segment joignant $x = 0$ à $x = 1$, excepté dans une infinité d'intervalles de longueur ξ^n, dont les milieux sont les points $x = (\frac{1}{2})^n$ (n variant de 1 à ∞)[42]; dans chacun de ces intervalles, la fonction sera affectée des mêmes discontinuités que dans I, c'est-à-dire qu'elle aura la valeur 0 pour toutes les valeurs rationnelles de l'argu- ment, la valeur 1 pour toutes les valeurs irrationnelles. La longueur totale s des intervalles, dans lesquels se produisent partout des oscillations égales à 1, s'élève à[43]

$$s = \xi + \xi^2 + \xi^3 + \ldots = \frac{\xi}{1 - \xi} .$$

Dans les segments situés entre deux tels intervalles, la fonction est continue ; car les points $(\frac{1}{2})^n$, $(\frac{1}{2})^{n+1}$ sont compris

*) D i r i c h l e t (Crelle, Journ. t.IV, p. 169) a attiré notre attention sur de telles fonctions.

dans des intervalles ζ^n, ζ^{n+1} dans lesquels les oscillations sont finies ; entre ceux-ci reste un espace

$$((\tfrac{1}{2})^n - \tfrac{1}{2}\zeta^n) - ((\tfrac{1}{2})^{n+1} + \tfrac{1}{2}\zeta^{n+1}) = (\tfrac{1}{2})^{n+1}\left\{1 - (2\zeta)^n(1+\zeta)\right\},$$

qui, si $\zeta < \frac{1}{4}$ par exemple, sera positif pour tout n et diminuera indéfiniment lorsque n croît.

III. La fonction aura la valeur $f(x) = 1$ pour toutes les valeurs de l'argument excepté pour $x = (\frac{1}{2})^n$ (n variant de $n = 1$ à $n = \infty$), où $f(x)$ s'annulera. La discontinuité est ici restreinte à des points isolés, même s'ils sont en nombre infini, où s'effectuent des sauts de grandeur 1. Il n'y aura pas d'intervalle complètement rempli de discontinuités. Si un intervalle comprenant le point $x = (\frac{1}{2})^n$ ne doit renfermer que ce point de discontinuité, il pourra être pris arbitrairement petit. Même plus : la longueur totale s de tous ces intervalles peut être rendue arbitrairement petite. Car en posant la longueur d'un intervalle, comprenant le point $x = (\frac{1}{2})^n$, égale à ε^n, la somme

$$s = \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \ldots = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

peut être rendue arbitrairement petite avec ε.

IV. La fonction aura la valeur $f(x) = 1$ entre $x = 1$ et $x = \frac{1}{2}$, la valeur $\frac{1}{2}$ entre $x = \frac{1}{2}$ et $x = (\frac{1}{2})^2$ ainsi que généralement la valeur $f(x) = (\frac{1}{2})^n$ entre $x = (\frac{1}{2})^n$ et $x = (\frac{1}{2})^{n+1}$. Cette fonction, qui n'est discontinue que dans les points $x = (\frac{1}{2})^n$ où elle saute de $(\frac{1}{2})^n$, ne possède pas, contrairement aux exemples examinés jusqu'ici, une infinité de points où ses sauts dépasseraient une certaine grandeur finie ; au contraire, le nombre de sauts supérieurs à σ, est fini, pour tout σ fini, mais croît continuellement et indéfiniment lorsque σ décroît. La longueur totale des intervalles où les sauts sont supérieurs à σ, peut manifestement être rendue arbitrairement petite pour tout σ, puisque[44] le nombre d'intervalles est fini et que ceux-ci ne doivent nécessairement renfermer que les points de discontinuité.

§ 7 [45]

Théorie et classification des fonctions linéairement discontinues.

Les exemples qui précèdent permettent de clairement distinguer deux classes de fonctions linéairement discontinues : celles qui sont totalement discontinues dans des intervalles entiers, et celles qui ne sont discontinues que dans des points isolés, même en nombre infini. Mais ces notions nécessitent une formulation plus précise.

Si une collection de points possédant une certaine propriété est située sur un segment, je dis que ces points <u>remplissent le segment</u>, si, sur ce segment, on ne peut indiquer un intervalle, aussi petit soit-il, dans lequel ne se trouvera pas au moins un point de cette collection; qu'au contraire cette collection de points <u>ne</u> remplit <u>pas</u> le segment, mais que les points y sont <u>dispersés</u>, lorsque entre deux points du segment, arbitrairement proches, on peut toujours indiquer un intervalle ne contenant aucun point de cette collection.

Nous allons étudier séparément ces deux cas :

I. Si un segment <u>n'</u> est <u>pas</u> rempli de points où les sauts sont supérieurs à σ , mais que ces points y sont dispersés, tout en étant en nombre infini ou croissant infiniment lorsque σ décroît indéfiniment, alors, conformément à la définition, il existe toujours, entre deux tels points, un intervalle ne contenant aucun point où les sauts sont supérieurs à σ et dans lequel par conséquent les oscillations de la fonction sont inférieures à 2σ ; on a alors le théorème :

Si un segment <u>n'est pas rempli de points</u> où les sauts sont plus grands que σ , alors on admettra que <u>la longueur</u> [46] <u>totale s de l'intervalle</u>, dans lequel les oscillations de la fonction sont inférieures à 2σ est arbitrairement petite.

Démonstration. Les intervalles dont se compose s sont situés autour des discontinuités, points dispersés, où la fonction présente des sauts de hauteur σ . Si le nombre de ces points est fini, la longueur totale de l'intervalle pourra être diminuée arbitrairement dans la mesure où chacun de ces intervalles peut l'être. Dans le cas d'une infinité de points, des intervalles, dans lesquels les oscillations sont plus petites que 2σ , peuvent, grâce à la remarque ci-dessus, être intercalés et on[47] pourra procéder comme suit : on subdivisera le segment total en intervalles dont chacun comprend un des points de discontinuité où la fonction effectue des sauts supérieurs à σ ; on choisira ces intervalles assez longs de façon à ce que, pris ensemble, ils recouvrent tout le segment. Lorsque mentalement on contracte chacun de ces intervalles jusqu'à sa n^e partie, faisant en sorte qu'il comprenne toujours le point de discontinuité correspondant, alors la partie restante du segment sera dépourvue de sauts supérieurs à σ ; la somme des intervalles, dans lesquels des sauts supérieurs à σ ont lieu, est égale à la n^e partie de la totalité du segment et peut être rendue arbitrairement petite en augmentant n. q. e. d.

La réciproque est également vraie, à savoir le théorème :

Si la longueur totale des intervalles, dans lesquels les oscillations sont plus grandes que σ , peut être rendue arbitrairement petite, alors les points où la fonction saute de plus de σ sont dispersés.

Démonstration. En effet, si ces points à sauts plus grands que σ ne remplissaient eux aussi qu'un petit intervalle h, l'oscillation y serait toujours plus grande que σ , et par suite la somme totale des intervalles dans lesquels les oscillations sont supérieures à σ ne pourrait en aucun cas être inférieur à h, ce qui est contraire à l'hypothèse. q. e. d.

II. De façon analogue nous examinons le cas des discontinuités remplissant un segment et nous démontrons le théorème suivant :

Si les points, où les sauts sont supérieurs à σ , remplissent un segment, on ne pourra extraire de ce dernier aucun intervalle dans lequel l'oscillation serait inférieure à σ .

Démonstration. Supposons qu'il existe un intervalle dans lequel l'oscillation soit plus grande que σ et qu'il s'étend de $x = a$ à $x = a + \varepsilon$. Alors $f(a + \delta) - f(a + \delta')$ sera toujours, en valeur absolue, inférieur à σ, si δ, δ' sont situés dans l'intervalle ε . Or, comme tout le segment est rempli de points dans lesquels les sauts sont plus grands que σ , il existe, selon la définition de cette notion, dans tout intervalle, donc aussi dans celui de longueur ε , au moins un point $x = a + \gamma$, dans lequel les sauts sont plus grands que σ ; c'est-à-dire qu'il existe en tous cas un ζ tel que $f(a + \gamma + \zeta) - f(a + \gamma)$, en valeur absolue, soit supérieur à σ , où γ et $\gamma + \zeta$ sont situés dans cet intervalle ε. Si l'on posait donc $\gamma + \zeta = \delta$, $\gamma = \delta'$, $f(a + \delta) - f(a + \delta')$ serait en valeur absolue plus grand que σ , ce qui est contraire à ce qui précède. q. e. d.

La réciproque est également vraie, à savoir le théorème :

Si dans tout intervalle d'un segment l'oscillation est plus grande que σ, alors les points dans lesquels les sauts sont supérieurs à $\frac{1}{2}\sigma$ rempliront le segment.

Démonstration. Supposons que le segment ne soit pas rempli de tels points. Il y existe alors un intervalle s'étendant de $x = a$ à $x = a + \varepsilon$ tel que les différences $f(a + \delta) - f(a)$ et $f(a + \delta') - f(a)$ soient en valeur absolue inférieures à $\frac{1}{2}\sigma$, si δ et $\delta' < \varepsilon$. Mais $f(a + \delta) - f(a + \delta')$ sera alors en valeur absolue plus petit que σ, c'est-à-dire que l'oscillation dans cet intervalle est plus petite que σ , ce qui est contraire à l'hypothèse. q. e. d.

Les explications précédentes auront suffisamment montré que les fonctions linéairement discontinues se divisent en deux classes en principe distinctes :

I^{e} classe. Les fonctions à discontinuités ponctuées ou fonctions n'étant linéairement discontinues qu'en des points dispersés ; formulée de manière plus précise, leur définition s'énoncera :

> On appelle discontinues de façon ponctuée les fonctions linéairement discontinues, pour lesquelles les points où les sauts sont plus grands que σ sont dispersés sans remplir de segment, aussi petite que soit la grandeur σ différente de zéro.

Les deux théorèmes développés sous I permettent d'énoncer immédiatement :

> La condition nécessaire et suffisante pourqu'une fonction linéairement discontinue présente des discontinuités ponctuées est que la longueur totale de tous les intervalles dans lesquels les oscillations sont supérieures à σ peut être rendue arbitrairement petite pour tout σ petit mais différent de zéro.

Dans la mesure où les fonctions discontinues de façon ponctuée doivent se distinguer des fonctions continues présentant un nombre fini de solutions de continuité, elles doivent en comprendre une infinité. Celle-ci peut être atteinte de deux manières, soit le nombre de points dans lesquels les sauts sont plus grands que σ est déjà infini pour un σ fini, soit il croît seulement indéfiniment avec $\frac{1}{\sigma}$.

Le premier type de fonction comprend celle décrite au § précédent dans III, ainsi que de manière générale toutes les fonctions obtenues à partir de fonctions continues en retirant un nombre infini de points isolés de leur contexte pour les déplacer de grandeurs finies.

Le deuxième type comprend la fonction IV du § précédent, ainsi que de manière générale <u>toutes</u> les fonctions linéairement discontinues qui, <u>dans un intervalle fini ne possèdent qu'un nombre fini de maxima et de minima</u>. Car considérons, par exemple, un intervalle situé entre un minimum et le maximum suivant ; soit il ne s'y produit qu'un nombre fini de sauts - et alors on n'est pas en présence d'une fonction linéairement discontinue ; soit une infinité de sauts s'y produisent : mais comme de tous ceux-ci il ne résulte qu'un accroissement fini, il ne peut y avoir, parmi les sauts qui s'ajoutent successivement à la valeur de la fonction, qu'un nombre fini dépassant une grandeur infiniment petite.

Ce type de fonction comprend en outre les fonctions représentées analytiquement dans I, II et III du §9.

Commune à toutes les fonctions de cette classe est la propriété très caractéristique qui suit :

Les fonctions discontinues de façon ponctuée sont 1) <u>continues</u> en un <u>nombre infini</u> de points et 2) <u>continues</u> dans <u>le voisinage immédiat</u> de tout point de discontinuité.

<u>Démonstration</u>. 1) Entre deux sauts successifs plus grands que σ, il existe, selon la définition des discontinuités ponctuées, au moins un intervalle dans lequel les sauts sont inférieurs à σ. De cet intervalle, on retire les points où les sauts sont plus grands que $\frac{1}{2}\sigma$ et on considère un intervalle situé entre deux de ces points, dans lequel par conséquent les sauts sont inférieurs à $\frac{1}{2}\sigma$. On continue à procéder de la sorte en diminuant toujours de moitié la hauteur des sauts ; on considère dans l'intervalle situé entre des points à sauts supérieurs à $(\frac{1}{2})^n\sigma$, un intervalle dans lequel les sauts sont inférieurs à $(\frac{1}{2})^n\sigma$. Si l'on réitère cette opération un nombre fini de fois, soit l'intervalle

restant sera de longueur finie et le théorème est démontré, soit cet intervalle décroîtra indéfiniment. Mais, dans ce dernier cas, il va progressivement se contracter en un point a, intersection de tous ces intervalles ; autour de ce point se situent, en s'élargissant progressivement, les intervalles dépourvus de sauts supérieurs à $(\frac{1}{2})^n\sigma$, $(\frac{1}{2})^{n-1}\sigma$, ... et on pourra toujours indiquer un intervalle ε tel que, pour tout $\delta < \varepsilon$, $f(a + \delta) - f(a)$ est inférieur , en valeur absolue, à σ', aussi petit que soit σ' ; ce qui signifie que la fonction est continue en a. De plus la construction du point a indique qu'il existe sur tout segment fini un nombre infini de tels points.

2) Qu'on fixe un point x = a où les sauts sont plus 48
grands que σ ; qu'on cherche le point suivant x = a + h ayant la même propriété ; dans l'intervalle situé entre ces deux points, les oscillations seront inférieures à 2σ et par conséquent la différence $f(a + \varepsilon) - f(a + \delta)$ sera, en valeur absolue, inférieure à 2σ, si $\delta, \varepsilon < h$. Si σ décroît arbitrairement, l'intervalle h mesurant la distance de a jusqu'au prochain point où les sauts sont plus grands que σ, pourra bien être diminué, alors que $f(a + \varepsilon) - f(a + \delta)$ y sera toujours, en valeur absolue, inférieur à 2σ, aussi petits que soient ε et δ différents de zéro. Par suite, $f(a + \varepsilon)$ tend vers une limite déterminée, bien que différente par hypothèse de f(a), et le théorème ci-dessus est établi suivant la terminologie introduite au §2. q. e. d.

Les fonctions discontinues de façon ponctuée peuvent admettre des dérivées dans les points où elles sont continues, comme l'indique la I^e^ partie du §9. Dans le paragraphe suivant, nous allons montrer qu'on peut toujours leur associer une intégrale et qu'elles peuvent toujours être développées en séries de F o u r i e r .

Les fonctions de cette classe ont, comme on le voit, un comportement proche de celui des fonctions continues et il peut paraître inconvenant d'appeler de telles fonctions, comme celles étudiées dans I, II, III du §9, discontinues en une infinité de points sur un segment fini, puisque chaque segment ne comprend qu'un nombre fini de sauts dépassant une grandeur finie arbitraire σ.

Les fonctions discontinues de façon ponc<u>tuée</u> forment la transition des fonctions ponc<u>tuellement</u> discontinues (discontinues en un nombre fini de points isolés), mais continues en général, vers la classe suivante qui comprend toutes les autres fonctions linéairement discontinues :

<u>II^e classe</u>. Les fonctions <u>totalement discontinues</u> sont celles qui sont discontinues dans des intervalles entiers, ou plus rigoureusement :

> On appelle fonctions <u>totalement discontinues</u> les fonctions <u>linéairement</u> discontinues dont les sauts dépassant une certaine grandeur finie <u>forment des intervalles entiers</u>.

Il va de soi que de telles fonctions peuvent aussi, dans certains intervalles, ne présenter que des discontinuités ponctuées, ou même être continues ; les théorèmes démontrés ci-dessus dans II montrent cependant que :

> La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction linéairement discontinue le soit totalement est que la longueur totale de tous les intervalles, où les oscillations sont supérieures à une grandeur arbitrairement petite, ne peut être rendue arbitrairement petite, mais possède une limite inférieure déterminée.

La fonction décrite dans I dans le § préc. est totalement discontinue dans toutes les parties du segment considéré ; la fonction II du § préc. par contre, totalement discontinue en une infinité d'intervalles, est aussi continue sur un nombre infini de segments.

Il est immédiat qu'une fonction n'admet pas de dérivée là où elle est totalement discontinue ; de même elle n'y sera pas susceptible d'intégration, comme on le démontrera dans le paragraphe suivant. Les fonctions totalement discontinues en des lignes ne peuvent donc pas être soumises aux opérations analytiques proprement dites : non obstant il en existe qui peuvent être représentées par des expressions analytiques, comme on le montrera dans IV au § 9.

§ 8
Les intégrales des fonctions linéairement discontinues.

Avant R i e m a n n , les démonstrations générales d'existence d'une intégrale étaient restreintes aux fonctions

simplement continues ayant un nombre fini d'oscillations.

R i e m a n n lui a étendu la notion d'intégrale aux fonctions linéairement discontinues et a démontré le théorème très fin que voici*) :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale

$$\int_a^b f(x)dx$$

existe est que la longueur totale des intervalles, dans lesquels les oscillations de la fonction f(x) sont supérieures à une grandeur arbitraire σ , puisse toujours 49
être rendue arbitrairement petite.

Inutile donc de mentionner que les fonctions continues à un nombre infini d'oscillations infiniment petites possèdent toujours une intégrale.

Il importe cependant d'énoncer, conformément aux propriétés caractéristiques des deux classes de fonctions linéairement discontinues que nous avons distinguées plus haut, que :

Les fonctions totalement discontinues ne sont jamais intégrables, celles à discontinuités ponctuées le sont toujours.

Ainsi on peut déterminer facilement l'intégrale de la fonction f(x) décrite dans la partie IV du §6 à partir des équations :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx = \tfrac{1}{2} \; , \; \ldots . , \quad \int_{(\frac{1}{2})^{n+1}}^{(\frac{1}{2})^{n}} f(x)dx = (\tfrac{1}{2})^{2n+1} \quad .$$

En effet, on a par exemple

$$\int_{(\frac{1}{2})^{n+1}}^{1} f(x)dx = \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^{3} + \ldots + (\tfrac{1}{2})^{2n+1} = \frac{2}{3}\left[1 - (\frac{1}{4})^{n+1}\right].$$

Pour les fonctions à discontinuités ponctuées, la somme des

---

*) Sur la possibilité de représenter ...., art. 5.

intervalles, dans lesquels les oscillations sont supérieures à une grandeur arbitrairement petite σ , peut toujours être diminuée arbitrairement, et par suite aussi leur contribution à[50] l'intégrale. Si en $x = a$ la fonction fait un saut plus grand que σ , ce point sera situé dans un de ces intervalles dont la contribution à l'intégrale est évanouissante, et par conséquent la valeur $f(a)$ de la fonction sera elle-même sans influence sur l'intégrale, comme c'est le cas, par exemple, dans l'intégrale de la fonction $f(x)$ décrite dans la partie III du §6

$$\int_0^x f(x)dx = x \; ,$$

quel que soit x, malgré l'infinité de points retirés du contexte fonctionnel. L'intégrale est indépendante des discontinuités pouvant être éliminées par simple modification de la valeur de la fonction en quelques points isolés. Par contre, l'intégrale est essentiellement déterminée par les limites dont s'approchent, suivant le § 2 , $f(a \pm \delta)$ lorsque δ décroît ; ainsi :

L'intégrale d'une fonction discontinue de manière ponctuée est indépendante des valeurs aux points de discontinuité mêmes, par contre elle ne l'est pas de celles au voisinage <u>immédiat</u> des discontinuités.

L'intégrale $f_1(x)$ d'une fonction discontinue de façon ponctuée

$$f_1(x) = \int_0^x f(x)dx$$

définit parfaitement une fonction univoque. Afin d'en examiner la continuité, considérons

$$f_1(a + \varepsilon) - f_1(a) = \int_a^{a+\varepsilon} f(x)dx = \varepsilon M \; ,$$

où M désigne une valeur moyenne entre la valeur maximale et la valeur minimale de $f(x)$ dans l'intervalle de $x = a$ à $x = a + \varepsilon$, abstraction faite des valeurs singulières de $f(x)$ aux points de discontinuité. Si χ et h sont des fractions irréductibles et si σ désigne l'oscillation de la fonction dans cet intervalle, on pourra poser $M = f(a + \chi\varepsilon) + h\sigma$, et il vient

$$\frac{f_1(a+\varepsilon)-f_1(a)}{\varepsilon} = f(a+\varkappa\varepsilon)+h\sigma \ .$$

Si ε décroît infiniment, les sauts σ dans cet intervalle diminuent infiniment ; ceci est évident lorsque a est un des points où f(x) est continue ; or si x = a est un point de discontinuité, la fonction est (suiv. le § 2) continue dans son voisinage immédiat, et l'oscillation σ dans l'intervalle ε sans le point x = a, tend vers zéro avec ε .

Ainsi la fonction f(x)[1)] est continue dans les deux cas et

$$\lim \frac{f_1(a+\varepsilon)-f_1(a)}{\varepsilon} = \lim f(a+\varepsilon) \ ;$$

c'est-à-dire que la dérivée de cette fonction $f_1(x)$, continue au 51
point x = a, est égale à la limite vers laquelle tend f(a + ε) ou f(a - ε) suivant qu'il s'agit de la limite à droite ou à gauche.

Lorsque la discontinuité au point x = a ne peut être éliminée par simple modification de la valeur f(a) de la fonction et que f(a + ε) et f(a - ε) tendent vers des limites différentes, $f_1(x)$ est une suite continue de points ayant la particularité suivante : en un nombre infini de points, les <u>branches</u> venant de droite et de gauche se coupent en formant entre elles un <u>angle</u> (cf. I du § 3). Mais le nombre de points où les branches forment entre elles un angle plus grand que σ reste fini, aussi petit que soit σ , pour les intégrales de toutes les fonctions à discontinuités ponctuées traitées dans les § 6 et 9.

De l'intégrabilité des fonctions à discontinuités ponctuées on déduit, d'après les critères de R i e m a n n [*)], le théorème :

Toute fonction discontinue de façon ponctuée, ayant comme valeur, dans ses points de discontinuité, la moyenne arithmétique des deux limites prises dans leur voisinage immédiat, peut être

---

1) Il s'agit bien évidemment de $f_1(x)$ (note de la trad.).

*) <u>Op</u>. <u>cit</u>., art. lo.

développée en série de F o u r i e r dont les coefficients 52
décroissent infiniment.

Ce théorème est particulièrement important pour le but que nous nous sommes fixé, puisqu'il prouve l'existence d'une représentation analytique pour toutes les fonctions possibles admettant des discontinuités ponctuées et possédant dans les points de discontinuité le caractère indiqué.

La fonction IV du §6 peut servir d'exemple, fonction qui, développée en série

$$f(x) = \sum A_p \sin p\pi x ,$$

possède les coefficients

$$A_p = -\frac{2}{p\pi}\left\{(-1)^p - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos \frac{p\pi}{2^n}\right\} ,$$

si pour $x = (\frac{1}{2})^n$ on pose $f(x) = \frac{3}{2}(\frac{1}{2})^n$.

§ 9

Représentation analytique de fonctions linéairement discontinues.

Le principe de condensation des singularités nous fournit les fonctions linéairement discontinues les plus diverses ; d'abord les fonctions affectées de discontinuités ponctuées :

I. Soit $\varphi(y)$ une fonction continue pour tous les arguments de $y = -1$ à $y = +1$, à l'exception de $y = o$, admettant un développement en série de T a y l o r et tendant vers la limite $+1$ lorsque y tend vers $y = o$ par valeurs positives, vers -1 lorsque y tend vers zéro par valeurs négatives.

On sait qu'une telle fonction peut être représentée analytiquement par une série de sinus de période 2π ou par une intégrale de F o u r i e r .

La série

$$f(x) = \sum \frac{\varphi(\sin nx\pi)}{n^s}$$

qui s'en déduit est alors continue pour tout x irrationnel et admet même en ces points un quotient différentiel.

Pour x rationnel, considéré sous sa forme réduite $x = \frac{\nu}{\mu}$, on a, abstraction faite des membres qui s'évanouissent avec ε :

$$f\left(\frac{\nu}{\mu} + \varepsilon\right) - f\left(\frac{\nu}{\mu}\right) = \frac{1}{\mu^s} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r\nu}}{r^s},$$

si à $\varphi(\pm r\mu\varepsilon\pi)$ on substitue immédiatement la valeur ± 1 suivant que $r\nu$ est pair ou impair. En outre :

$$f\left(\frac{\nu}{\mu} - \varepsilon\right) - f\left(\frac{\nu}{\mu}\right) = -\frac{1}{\mu^s} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r\nu}}{r^s}.$$

La fonction, en ces points, est discontinue de manière à y croître ou décroître d'une même quantité suivant qu'on s'éloigne de $x = \frac{\nu}{\mu}$ vers les valeurs positives ou vers les négatives ; sa valeur en chacun de ces points de discontinuité est par conséquent la moyenne arithmétique des deux valeurs vers lesquelles elle tend de part et d'autre. Les sauts dans les points $x = \frac{\nu}{\mu}$ à numérateur pair diffèrent de ceux dans les points à numérateur impair. Car dans ceux-là ils valent $\frac{1}{\mu^s}L$, dans ceux-ci $\frac{1}{\mu^s}L'$, où

$$L = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^s}, \qquad L' = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+1}}{r^s} = \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right)L.$$

Le comportement de la fonction f(x), lorsqu'on choisit s sensiblement grand, peut être décrit comme suit : les valeurs de la fonction f(x) ne diffèrent pas sensiblement de celles de la fonction continue $\varphi(\sin x\pi)$ et par conséquent $\varphi(\sin x\pi)$ détermine le comportement approximatif de la suite de points qui représente f(x). En tous les points x irrationnels, f(x) ressemble à une courbe continue et admet une dérivée. Mais lorsqu'on approche de la gauche une valeur rationnelle $x = \frac{\nu}{\mu}$, où le numérateur est pair, la fonction, au moment où cette valeur est atteinte, fera subitement un saut de $\frac{1}{\mu^s}$ L de haut ; lorsque x continue à avancer vers les valeurs positives, un deuxième saut de la même hauteur se produira. Par contre, lorsqu'on tend vers $x = \frac{\nu}{\mu}$, où le numérateur est impair, f(x) chute subitement de $\frac{1}{\mu^s}$ L', et fait le même saut encore une fois lorsqu'on continue à procéder ainsi.

Les plus grands sauts ont lieu pour $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$, etc. ; les sauts seront d'autant plus petits que μ croît, c'est-à-dire que les chiffres par lesquels s'exprime la valeur rationnelle x sont moins simples. Lorsqu'on veut se représenter le comportement de f(x) sur un graphique, on se heurtera rapidement à une limite à partir de laquelle les sauts ne sont plus visibles. Car il n'existe qu'un nombre fini bien déterminé de points, où les sauts sont plus grands que σ, quelque petit que soit σ ; on peut les déterminer à l'aide de l'inéquation $\frac{1}{\mu^s} L > \sigma$; elle correspond à la condition $\mu < (\frac{L}{\sigma})^{\frac{1}{s}}$ qui, pour σ différent de zéro, n'est remplie que par un nombre fini de nombres entiers μ.

Plus $x = \frac{\nu}{\mu}$ rationnel s'approche d'un nombre irrationnel, plus grands seront ν, μ et plus petits seront les sauts ; c'est ainsi que l'on arrive à comprendre comment f(x) peut avoir dans les points irrationnels le caractère d'une fonction continue : les valeurs de f(x) ne forment pas à proprement parler une ligne courbe, mais une suite interrompue de points, qui se pressent cependant tellement autour des x irrationnels qu'on peut les considérer, dans un intervalle infiniment petit situé dans leur voisinage, comme une suite continue de points.

II. Soit $\varphi(y)$ une fonction qui se comporte comme celle décrite dans I, sauf en $y = +1$ et $y = -1$, où elle s'annule également, tout en admettant au voisinage immédiat de ces points les limites +1 et -1. Les séries périodiques fournissent des exemples de telles fonctions, comme

$$\varphi(y) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=o}^{\infty} \frac{\sin\,(2n+1)y\pi}{2n+1} .$$

Dans ce cas, la fonction déduite

$$f(x) = \sum \frac{\varphi(\sin nx\pi)}{n^s}$$

a des discontinuités un peu plus compliquées. Pour des x irrationnels et des x rationnels de la forme $x = \frac{\nu}{\mu}$ avec μ impair, elle se comporte comme celle ci-dessus ; dans les points $x = \frac{\nu}{2\mu}$ par contre, on a

$$f\left(\frac{\nu}{2\mu} \pm \varepsilon\right) - f\left(\frac{\nu}{2\mu}\right) = \pm \frac{1}{\mu^s} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(2r)^s} + \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(\nu-1)}}{\mu^s} \sum_{r=o}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(2r+1)^s} ,$$

dont on se convaincra rapidement après un examen détaillé.
$f\left(\frac{\nu}{2\mu}\right)$ ne sera pas, comme c'était le cas jusqu'ici, la moyenne 53
arithmétique des valeurs des deux sauts voisins.

III. Le carré d'une des fonctions considérées dans I, soit celui de

$$\varphi(y) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=o}^{\infty} \frac{\sin\,(2n+1)y}{2n+1} ,$$

est une fonction ayant entre $-\pi$ et $+\pi$ la valeur +1 et présentant <u>seulement</u> en $y = o$ une <u>discontinuité</u> subite, qui pourrait être éliminée grâce à la modification d'une seule valeur de la fonction*).

---

*) Qu'il soit explicitement noté que $[\varphi(y)]^2$ est un exemple d'une fonction qu'on peut représenter <u>analytiquement</u>, alors qu'elle possède une telle singularité.

Si l'on forme

$$f(x) = \sum \frac{[\varphi(\sin nx\pi)]^2}{n^s} ,$$

f(x), dans tous les points irrationnels x, ne se distinguera pas de la constante

$$L = \sum \frac{1}{n^s} ;$$

dans les points rationnels $x = \frac{\nu}{\mu}$ seulement, elle diminuera brusquement de $\frac{1}{\mu^s}$ L. La suite continue de points n'est donc interrompue qu'en cette infinité de points et elle pourrait être rendue continue par la simple modification des valeurs de la fonction en ces points.

IV. Quant aux fonctions <u>totalement</u> discontinues, le fait qu'on ne puisse y effectuer les opérations analytiques de la dérivation et de l'intégration laisse présumer qu'elles se soustraient à la représentation analytique, formant la frontière qui sépare les fonctions intéressantes pour l'analyste des fonctions transcendentales, c'est-à-dire possibles en pensée seulement. Ce point de vue ne peut cependant être confirmé car j'espère avoir trouvé, grâce à une modification du principe de condensation, un exemple irréprochable d'une fonction totalement discontinue*) :

En effet, si φ désigne la même fonction que ci-devant (dans III), alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \left[\frac{1}{\varphi(\sin nx\pi)} \right]^2$$

est une fonction qui, pour tous les x irrationnels, a la valeur

---

*) R i e m a n n (Sur la poss. de représenter une fonction...., art. 13) a certes déjà donné des exemples de fonctions, qui sautent une infinité de fois du fini à l'infini entre deux valeurs arbitrairement proches de l'argument, à savoir les formules :

$$\sum \frac{(nx)}{n} , \sum \frac{1}{n} \cos (n^2x), \quad \sum \frac{1}{n} \sin (n^2x),$$

Comme il n'y est question que de valeurs rationnelles de x, on peut se demander si, pour des valeurs irrationnelles, les séries sont assez divergentes pour ne plus représenter une valeur déterminée. Mais comme je croyais devoir provisoirement exclure de mes considérations les indéterminations des fonctions, je souligne que, dans la série indiquée dans le texte, toute indétermination a été écartée en formant une série de termes tous positifs, dont la somme est soit finie et déterminée soit infiniment grande.

$L = \sum \frac{1}{n^s}$; mais elle comprend, pour toutes les valeurs rationnelles de x, des éléments infinis, qui, puisqu'ils sont tous positifs, ne peuvent s'annuler mutuellement ; la fonction est par conséquent infiniment grande pour tous les x rationnels. Si cependant nous voulons ici écarter également des valeurs infinies de la fonction, le quotient

$$f(x) = \frac{\sum \frac{1}{n^s}}{\sum \frac{1}{n^s}\left[\frac{1}{\varphi(\sin nx\pi)}\right]^2}$$

définira une fonction bien <u>déterminée</u> et <u>totalement discontinue</u>[54] pour toutes les valeurs de l'argument x, possédant la valeur 1 pour tous les x <u>irrationnels</u>.

Un autre exemple moins simple d'une telle fonction totalement discontinue sera traité dans la seconde note en annexe.

§ 10

Remarques finales sur l'établissement du concept de fonction.

Jetons maintenant un coup d'oeil récapitulatif sur le chemin parcouru et interrogeons nous sur l'utilité de nos analyses pour l'éclaircissement du concept de fonction.

Il était certain a priori que, en partant de la notion de fonction de D i r i c h l e t , il ne pouvait y avoir de propriétés générales valables pour toutes les fonctions que celle-ci englobe.

Mais on eût été tenté de croire qu'en partant du concept plus ancien d' E u l e r - en concevant donc une fonction comme relation entre grandeurs, définie, conformément à une loi, par des opérations de calcul - les fonctions ainsi définies forment un cercle plus étroit, organiquement clos sur lui-même , pouvant être caractérisé par un certain nombre de propriétés communes à toutes ces fonctions, dont notamment la continuité, la dérivabilité, l'intégrabilité, la propriété d'être bien définie et d'admettre un développement en série de T a y l o r - même si elles admettent, pour chacune de ces propriétés quelques points singuliers. Cette hypothèse n'a pas été confirmée. Nous avons démontré qu'il est possible de représenter par des séries convergentes d'opérations de calcul des fonctions qui, en un nombre infini de points d'un segment fini, deviennent soit discontinues ou infinies des manières les plus diverses, soit indéterminées*), des fonctions qui ne sont

---

*) Nous avons exclu de nos considérations ci-dessus les fonctions qui sont indéterminées en des points isolés ou même en des lignes ; voilà pourquoi il sera peut-être utile de remarquer qu'il est facile d'en indiquer une représentation analytique au moyen du principe de condensation

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(\sin nx\pi)}{n^s},$$

si $\varphi(y)$ est pour $y = 0$ une grandeur non pas apparemment, mais réellement et nécessairement indéterminée. Si l'on pose par exemple

$$\varphi(y) = \sin \frac{1}{y}, \quad \text{ou} \quad \varphi(y) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{y}}},$$

alors $f(x)$ sera bien déterminée pour tout x irrationnel, mais complètement indéterminée pour x rationnel.

nulle part intégrables et développables en séries de puissances et finalement des fonctions qui ne possèdent pas de dérivée déterminée même là où elles sont continues. En résumé : Ces deux notions de fonction, aussi différentes puissent elles sembler au premier abord, ne se sont pas révélées essentiellement différentes dans la mesure où nous avons été capables de représenter par des formules analytiques des fonctions de tous genres*).

Par conséquent les deux notions sont insuffisantes pour former le fondement d'une théorie générale des fonctions. Car la tâche de toute mathématique est de déduire de nouvelles relations de celles qui sont données et définies sur un certain domaine d'objets, grâce à l'application des propriétés générales du concept qui englobe tous ces objets. En l'absence de telles propriétés générales, toute transformation des relations données reste toutefois une tautologie vide.

Ainsi, par exemple, lorsqu'il s'agit de déduire une fonction $f(x)$ de l'équation fonctionnelle

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

on en déduit immédiatement la relation

$$f(\mu) = \mu f(1) \text{ pour tout } \mu \text{ rationnel ;}$$

de même toutes les valeurs de la fonction pour des arguments $\mu\xi$ dépendant rationnellement d'une même grandeur ξ irrationnelle peuvent être déterminées grâce à la valeur $f(\mu\xi)$ en posant $f(\mu\xi) = \mu f(\xi)$. Les valeurs rationnelles et irrationnelles de l'argument ainsi que les valeurs de la fonction pour de tels arguments sont reliées entre elles par des équations, comme p. ex.

$$f(2 + \sqrt{3}) + f(2 - \sqrt{3}) = f(4)$$

etc. Et pourtant, pour autant que je sache, il n'est pas possible d'indiquer directement comment $f(\xi)$ dépend de son argument ; car entre les différentes suites de valeurs pour des grandeurs irrationnelles essentiellement différentes, comme p. ex. $f(\mu\sqrt{2})$, $f(\mu\sqrt{5})$,

---

*) Ceci est à prendre cum grano salis ; car nous ne savons pas encore s'il n'existe tout de même pas quelques cas concevables qui se soustraient à l'Analyse. 55

$f(\mu\sqrt[3]{2})$ etc., il n'y a pas de correspondance ; quoi qu'il en soit, il n'est pas dans l'intention d'un analyste qui, lors de ses recherches, tombe sur cette équation fonctionnelle, d'investir ces liaisons embarrassantes entre nombres irrationnels. Bien plutôt prétendra-t-il immédiatement étendre la détermination $f(\mu) = \mu f(1)$ à des μ irrationnels, c'est-à-dire :

Si l'on admet que la fonction est partout continue (ou que f(y) s'approche continûment de zéro dans un voisinage infiniment petit de y = o, propriété plus restreinte dont découle alors la continuité générale) le problème sera résolu d'un coup, les valeurs de la fonction pour des x irrationnels s'inscrivant continûment entre les $f(x) = xf(1)$ pour x rationnel.

Soit un autre exemple : une fonction est définie, pour toutes les valeurs de x situées entre o et 1, par la série infinie

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ ;$$

quelles valeurs prend f(x) pour d'autres x ? Cette question n'a tout bonnement pas de réponse, aussi longtemps que nous nous fondons sur le concept de fonction de Dirichlet , puisqu'il n'existe aucun lien entre des valeurs voisines de la fonction, autrement dit : une fonction jusqu'à maintenant ne représente pas une loi, mais ses valeurs se succèdent arbitrairement.

Il y a <u>loi</u> partout où l'on déduit d'une suite de caractères la présence d'autres caractères qui ne sont pas donnés ou n'ont pas été observés. Les fonctions comprises dans notre ancien concept purement nominal et vide de contenu réel doivent par[56] conséquent être appelées sans loi, <u>illégitimes</u> ; elles peuvent cependant devenir <u>légitimes</u> en se soumettant à une loi.

Quelle sera alors la loi à laquelle subordonner ces fonctions ? Si la notion de fonction doit être autrement adéquate et doit correspondre aux besoins de l'analyste, il sera facile de nous convaincre de l'opportunité d'utiliser comme guide le principe général dont j'ai démontré dans ma théorie des nombres complexes qu'il préside à tout progrès systématique dans ce domaine et que j'y ai appelé <u>principe de permanence des lois formelles</u>*).

J'y suis parti des nombres entiers et des opérations élémentaires qui y sont définies et j'ai montré comment, à partir de ceux-ci, on élargit progressivement le domaine numérique en introduisant des symboles, des nombres nouveaux, qui obéissent aux mêmes lois formelles que celles définies par les quatre opérations élémentaires afin de résoudre des problèmes insolubles dans le domaine connu. Le domaine ayant été élargi jusqu'aux nombres complexes ordinaires, il a été démontré que tout problème qui peut être formulé à l'aide d'un nombre fini de telles opérations admet une solution dans le domaine des nombres complexes ordinaires et qu'ainsi il y a clôture organique dans ce domaine numérique. Et pourtant d'autres systèmes de nombres complexes obéissant en partie à d'autres lois formelles étaient également <u>possibles</u> ; le constater était nécessaire pour mettre en lumière la particularité des nombres complexes ordinaires.

Comme les nombres entiers et les opérations qui y sont définies sont typiques du système des nombres (ou des grandeurs) et ont été déclarés valables en permanence, de façon analogue les expressions algébriques, en tant qu'elles sont dérivées directement des quatre opérations, doivent fournir les lois permanentes pour le système des fonctions. Car comme les nombres entiers forment la charpente sur laquelle reposent plus ou moins directement tous les autres nombres, de même les fonctions algébriques, en tant que fonctions dont on peut <u>vraiment</u> calculer les valeurs, sont les formes typiques des fonctions en général ; dans la mesure où elles représentent des relations entre grandeurs et doivent en tant que telles être <u>calculables</u>, elles doivent également pouvoir s'exprimer par les quatre opérations élémentaires ; sauf que les fonctions transcendantes ne sont pas représentées exhaustivement

---

*) <u>Vorlesung über die complexen Zahlen und ihre Functionen</u>, Leipzig 1867, 1ère partie , p. 1o - 13.

par des série finie d'opérations, mais nécessitent un processus infini.

Les fonctions transcendantes formées sur le modèle des expressions algébriques, entières ou rationnelles, correspondent d'une certaine façon aux nombres irrationnels et complexes ordinaires, formés eux sur le modèle des nombres entiers et rationnels ; et de même qu'il existe une infinité de classes de grandeurs irrationnelles par exemple, il existe une infinité de classes de fonctions transcendantes.

Comme on peut en outre concevoir et construire des nombres complexes supérieurs qui n'obéissent pas aux lois formelles de l'arithmétique*), de même on peut imaginer des fonctions <u>illégitimes</u> qui n'épouseront pas le modèle des formes algébriques. Il était nécessaire de considérer les systèmes de nombres supérieurs afin d'arriver à la double conviction suivante : expérimentalement la possibilité de les construire existe ; le concept de nombre complexe ordinaire n'épuise pas le concept général de nombre. De même, il était nécessaire de démontrer effectivement, comme j'ai tenté de le faire dans ce mémoire, l'existence des espèces les plus illégitimes de fonctions, afin de souligner que la légitimité des fonctions ne nous est pas du tout dictée par une mystérieuse nécessité incontournable, qui aurait son origine dans "la nature de la chose", comme on l'entend souvent dire, mais qu'elle est une restriction conventionnelle, sage et adéquate, que nous nous imposons - et dont nous ne sommes par conséquent pas sûrs des limites.

S'il s'agit maintenant de définir effectivement un système déterminé de conditions de légitimité des fonctions, nous commencerons par en choisir un qui soit conforme aux hypothèses que l'on a l'habitude d'admettre, lors de recherches analytiques, parfois consciemment, la plupart du temps inconsciemment, et nous appellerons

> <u>légitimes</u> les fonctions qui seront déterminées, finies et continues pour toutes les valeurs réelles de l'argument,

---

*) <u>Ibid</u>. p.99.

excepté en quelques points, jamais en nombre infini dans un intervalle fini, et dont toutes les dérivées possèdent les mêmes propriétés.

De telles fonctions peuvent, selon le théorème de T a y l o r , toujours être représentées par des séries, c'est-à-dire qu'il existe toujours un intervalle pour x, dans lequel le développement de f(a + x) selon les puissances croissantes de x converge partout là où a ne coïncide pas avec un des points où la fonction , ou une de ses dérivées, devient indéterminée, infinie ou discontinue. Les valeurs d'une fonction entre deux points de discontinuité sont par conséquent toujours liées entre elles de sorte qu'elles sont nécessairement définies pour le segment entier dès qu'elles sont connues dans le plus petit intervalle fini. Si, sur un tel segment, deux séries de valeurs sont données dans deux intervalles finis, il ne pourra jamais y avoir de doute sur leur appartenance ou non à la même fonction.

Mais qu'en est-il du prolongement d'une telle fonction au-delà de ces points de discontinuité ? Les séries de T a y l o r ne sont pas valables au-delà et il est complètement vague ce que nous devrons entendre par une fonction complètement déterminée entre deux points de discontinuité situés en dehors du segment initial. Ces points, comme des barrières, séparent les différents segments et on ne peut décider, à l'aide de la définition donnée, si deux séries de valeurs séparées par un de ces points appartiennent à la même fonction ou non.

Il a déjà été montré plus haut[57] de quelle manière on a tenté de vaincre ces obstacles par l'introduction d'un nouveau principe ; ce principe n'a jamais été mis dans une forme non ambiguë et acceptable et peut-être ne la trouvera-t-on jamais ?

La science devait chercher d'autres moyens pour prolonger la fonction au-delà de ces points de discontinuité ; et on a découvert qu'au lieu de <u>sauter</u> en quelque sorte <u>pardessus</u> de ces points, on pouvait les <u>contourner</u> en faisant parcourir à la variable des valeurs non seulement réelles, mais aussi <u>complexes</u>.

S'il est ainsi prouvé qu'en restreignant la variation de l'argument aux valeurs réelles on ne pourra obtenir une définition de la fonction satisfaisant aux besoins de l'analyse, le but que nous nous étions fixé dans cet essai est atteint.

Mais il me sera permis, sur la lancée, de faire quelques pas de plus afin de découvrir une perspective sur le nouveau domaine.

Une fonction w de deux variables x,y peut alors être considérée comme fonction d'une seule variable (x + yi), si elle peut s'exprimer de manière à ce que x et y n'y apparaissent que dans la relation (x + yi). Cette définition provisoire n'a de sens que si la fonction est construite sur le modèle des fonctions algébriques, c'est-à-dire déduite des variables à l'aide des quatre opérations arithmétiques élémentaires. Si elle est dérivable, elle possédera la propriété

$$i \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} \quad .$$

Alorsque la première définition perd son sens lorsque w n'est pas déterminée par des opérations arithmétiques, cette équation conserve sa signification dans tous les cas ; et nous définissons maintenant une fonction w de deux variables x,y comme une fonction <u>monogène</u> de la variable complexe (x + yi) en déclarant que cette dernière propriété est permanente.

On admet donc simultanément que les quotients différentiels $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ existent et possèdent une valeur déterminée et finie ; car si les quotients des accroissements de w et de x,y n'avaient pas de limites déterminées et finies dans la partie finie du plan dans laquelle on représente géométriquement la variable complexe (x + yi), on ne pourrait même pas décider si la fonction peut y être considérée comme fonction d'une variable complexe. Il en découle que l'hypothèse selon laquelle une fonction légitime admet en général des quotients différentiels déterminés et finis est fondamentale, et nous posons la définition suivante :

Une fonction monogène de (x + yi) est une grandeur complexe w variable si elle varie avec x et y de telle sorte qu'en général, c'est-à-dire excepté en quelques points et lignes isolés, les quotients différentiels $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ sont partout définis et finis et satisfont la condition

$$i\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} \quad .$$

Voici la loi générale et simple à laquelle subordonner toutes les fonctions légitimes, c'est-à-dire monogènes, et à laquelle nous devons donner le nom de définition de R i e m a n n *). D'après des théorèmes connus, on peut déduire de la finitude, de la continuité et du caractère bien déterminé de la fonction elle-même ainsi que de ses dérivées premières, les mêmes propriétés pour toutes les autres dérivées; une fonction monogène peut donc toujours être développée en série de T a y l o r ; la définition ci-dessus des fonctions continues dans le domaine réel apparaît maintenant comme subordonnée à notre nouvelle définition.

Le problème du prolongement d'une fonction donnée sur un segment fini ou à l'intérieur d'une surface finie, qui équivaut à celui de déterminer les valeurs de la fonction dans tous les points du plan, n'acquiert un sens définitif qu' en subordonnant justement la fonction à la condition ci-dessus. Les valeurs de la fonction pour les différents arguments sont dès lors insolublement liées et on ne pourra plus douter si deux séries de valeurs données dans deux parties distinctes du plan correspondent à la même fonction ou non, - à condition que de nouvelles barrières sous forme de lignes le long desquelles la fonction cesse d'être définie, finie et continue, ne s'érigent au moment où nous savons facilement contourner les points faisant obstacle au prolongement dans le domaine réel, ainsi que les autres points de discontinuité. Bien que nous ayons effectivement exclu, grâce à la définition de monogénéité ci-dessus, des discontinuités qui s'étendraient sur des parties entières du plan, nous ne pouvions faire autrement qu'admettre des discontinuités en certains points et lignes lorsque celles-ci découlent nécessairement du comportement de la fonction dans les parties où elle est

---

*) Principes fondamentaux pour une théorie générale des fonctions d'une grandeur variable complexe, p.2. 58

continue. Je démontrerai en annexe (note III) que de telles lignes, le long desquelles la fonction est discontinue de façon ponctuée ou même totalement discontinue, existent effectivement, malgré le caractère monogène de la fonction ; dans les exemples que j'y indiquerai, la courbe de discontinuité, sous forme d'un cercle, sépare l'espace intérieur, dans lequel la fonction a d'abord été établie, de l'extérieur sans qu'il existe une bande de surface de largeur finie commune aux deux où la fonction posséderait les propriétés nécessaires à un prolongement légitime.

La fonction est alors restreinte à la portion de plan située à l'intérieur du cercle, elle perd toute signification en dehors, c'est-à-dire que notre concept de fonction ne nous renseigne pas sur la nature des valeurs de la fonction dans la partie du plan située à l'extérieur du cercle.

Dans la note III est mis en évidence le fait étrange qu'il peut y exister des développements analytiques qui ne perdent pas leur signification à l'extérieur, mais sont identiques à l'intérieur et à l'extérieur du cercle, partout convergentes et monogènes à l'exception de la périphérie du cercle.

Dans la mesure où l'on ne peut nier à ces développements, identiques de part et d'autre de la courbe fermée de discontinuités, le pouvoir de représenter la fonction, initialement donnée à l'intérieur du cercle, également à l'extérieur, la question se pose :

Dans quel sens les deux séries de valeurs séparées par une barrière insurmontable peuvent-elles être considérées comme appartenants à la même fonction ?

N o t e I

Le concept de limite.

Confronté aux définitions souvent peu satisfaisantes, en partie trop riches, en partie trop pauvres, du concept de "limite" qui intervient de manière profonde dans nos recherches, je crois nécessaire de donner ici brièvement une définition rigoureuse, tout en renvoyant, quant à la justification de ce qui suit, à un autre petit mémoire que j'ai écrit*). La notion de fonction est à prendre dans le sens décrit au §1 :

> S'il existe pour une fonction $f(x)$ une certaine grandeur finie A et si on peut définir pour tout σ arbitrairement petit un intervalle compris entre le point fixe $x = a$ et le point $x = a + \varepsilon$ et tel que la différence $A - f(a + \delta)$ ne dépasse pas en valeur absolue cette grandeur σ, si δ parcourt *toutes* les valeurs situées à l'intérieur de cet intervalle de o à ε, $\delta = 0$ *exclu*, alors A est la *limite* vers laquelle $f(a + \delta)$ tend infiniment lorsque δ décroît infiniment.

Si l'on admet que ε est positif, $f(x)$ étant construit comme ordonnée sur l'abscisse x, alors j'ai appelé A la limite vers laquelle tend $f(x)$ lorsque x tend vers le point $x = a$ à partir de la droite. J'ai appelé limite à gauche la limite vers laquelle tend $f(a - \delta)$.

> Si par contre il *n'* existe *pas* de grandeur déterminée et finie A telle que la différence $A - f(a + \delta)$ soit, pour *tous* les $\delta < \varepsilon$ et différents de zéro, *toujours* inférieure en valeur absolue à une grandeur σ arbitrairement petite, quelque petit que soit ε, alors nous dirons que $f(a + \delta)$ ne tend vers *aucune* limite pour δ décroissant infiniment.

Dans beaucoup de cas, et même dans la plupart des cas qui nous ont intéressés dans ce qui précède, il n'est pas possible de déterminer la valeur effective des limites vers lesquelles tendent des fonctions ; on devra plutôt se contenter du constat de l'*existence* d'une limite ; à cela servira le théorème suivant qui est déduit de la définition du concept de limite :

---

*) Encyclopédie de Ersch et Gruber. Article Limite.

Si on peut déterminer un intervalle ε tel que, pour tous les δ différents de zéro contenus dans cet intervalle, la différence $$f(a + \varepsilon) - f(a + \delta)$$ soit inférieure en valeur absolue à une grandeur σ arbitrairement petite, alors $f(a + \delta)$ tendra vers une limite finie bien déterminée lorsque δ décroît infiniment.

On remarquera d'ailleurs que, conformément à la terminologie fixée au §2, le concept peut aussi être défini comme suit :

$f(a + \delta)$ tend, pour δ décroissant infiniment, vers une limite lorsque dans un voisinage immédiat de $x = a$ (situé à droite de ce point) $f(x)$ est continue.

N o t e II

<u>Exemples de fonctions totalement discontinues en des lignes entières</u>.

La série ci-dessous fournit un exemple, intéressant à plus d'un égard, d'une fonction totalement discontinue :

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega^m}{(m \sin mx\pi)^2} ,$$

où ω représente une fraction positive irréductible.

Si x est <u>rationnel</u>, le dénominateur $\sin mx\pi$ de certains termes de cette série s'évanouira, et par conséquent on aura, pour de tels x, $f(x) = \infty$, puisque $f(x)$ ne comprend que des termes positifs.

Si x est <u>irrationnel</u>, on déterminera pour un terme $m = \mu$ le nombre entier ν tel que la différence

$$\mu x - \nu = \varepsilon_\mu$$

soit aussi petite que possible, et on obtiendra[60]

$$\sin mx\pi = (-1)^\nu \sin \varepsilon_\mu \pi .$$

La question est maintenant de savoir si ε_μ peut devenir assez petit et si $\mu\varepsilon_\mu$ peut décroître infiniment lorsque μ croît de sorte que la série ci-dessus diverge.

Afin de répondre à cette question, il faut décomposer la grandeur irrationnelle x en une fraction continue infinie[61]

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots \text{ in infin.}}}$$

où, hypothèse toujours possible, a_0, a_1, a_2, ... sont des nombres entiers positifs.

Soient $\frac{\vartheta_n}{\mu_n}$ les fractions approchées qui, comme on sait, s'approchent infiniment, d'en haut et d'en bas, de la valeur x ; afin de calculer leurs différences de x même, nous introduisons $x_1, x_2, \ldots$ au moyen des relations :

$$x = a_o + \frac{1}{x_1} , \ldots, x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}$$

et il vient, comme on sait :

$$x - \frac{\vartheta_n}{\mu_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{\mu_n(\mu_n x_n + \mu_{n-1})} .$$

Lorsque l'indice de sommation m dans la série ci-dessus coïncide avec un numérateur approché μ_n, le nombre entier ϑ qui rend $(\mu_n x - \vartheta)$ minimale est, comme on sait, ϑ_n et la différence $\mu_n x - \vartheta_n$ est égale à ε_n, où

$$\varepsilon_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\mu_n x_n + \mu_{n-1}} .$$

Pour des μ_n grands, les équations suivantes sont vérifiées :

$$\pm \frac{\pi}{\mu_n \sin \mu_n x \pi} = \pm \frac{\pi}{\mu_n \sin \varepsilon_n \pi} = \frac{\pm 1}{\mu_n \varepsilon_n} = x_n + \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n} ,$$

et il s'en suit, comme on voit aisément :

$$\frac{\pi^2}{(\mu_n \sin \mu_n x \pi)^2} < (a_n + 2)^2 .$$

On peut alors montrer*) que, pour toutes les valeurs de m, situées entre le numérateur approché μ_n et le μ_{n+1} suivant, il existe le même rapport de grandeur, et que par suite la somme

$$\pi^2 \sum_{m=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1} \frac{\omega^m}{(m \sin m x \pi)^2} < (a_n+2)^2 \sum \omega^m = (a_n+2)^2 \omega^{\mu_n} \cdot \frac{1-\omega^{\mu_{n+1}-\mu_n}}{1-\omega}$$

et par conséquent

$$\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega^m}{(m \sin m x \pi)^2} < \frac{1}{1-\omega} \sum_n (a_n+2)^2 (\omega^{\mu_n} - \omega^{\mu_{n+1}}) ,$$

de sorte que

$$\pi^2 f(x) < (a_o + 2)^2 \omega + \sum_n \left[(a_n + 2)^2 - (a_{n-1} + 2)^2\right] \omega^{\mu_n} .$$

---

*) Je regrette qu'à cause du manque de place je sois obligé de repousser à une occasion ultérieure la démonstration de cet énoncé, qui me mènerait trop loin dans la théorie des fractions continues.

Si l'on considère maintenant que les dénominateurs approchés $\mu_n = a_{n-1}\mu_{n-1}+\mu_{n-2}$, composés de a positifs, croissent beaucoup plus rapidement que les a_n eux-mêmes, il sera clair que cette série <u>convergera</u> pour une infinité de x irrationnels ; c'est le cas par exemple pour les racines carrées de nombres rationnels qui peuvent être développées, comme on sait, en fractions continues, périodiques, du genre demandé, les dénominateurs a_n étant finis. En outre, notre série converge pour les nombres irrationnels $x = e$, $x = \frac{1}{e}$, $x = \tan 1$ etc., comme l'indiquent les fractions continues de G a u s s pour e^y, tan y, dans lesquelles les dénominateurs peuvent tous être rendus positifs et tendent très lentement vers l'infini.

La série <u>divergera</u> pour toutes les valeurs irrationnelles, pour lesquelles a_n croît avec n trop rapidement et par à-coups pour que $(a_n^2 - a_{n-1}^2)\omega^{\mu_n}$ tende convenablement vers zéro. Le faible développement de la théorie des fractions continues numériques est insuffisant pour indiquer de manière spécifique quels types d'irrationnalité en sont concernés ; ces indications ne sont cependant pas nécessaires à notre propos.

> Car il suffit de savoir que notre fonction f(x) reste <u>finie</u> pour une infinité de valeurs irrationnelles, dont au moins une, même dans le plus petit intervalle possible, peut toujours être donnée ; qu'elle devient <u>infinie</u> pour certaines valeurs irrationnelles de x et pour toutes les valeurs rationnelles ; et qu'elle saute ainsi, dans tout intervalle arbitrairement petit, une infinité de fois du fini à l'infini et inversement. -

La série suivante, qui devient infinie pour tout x rationnel, fournit un exemple analogue : $\sum \frac{\omega^m}{(\sin m x\pi)^2}$.

Pour x irrationnel, le dénominateur ne s'annule jamais ; il admet ses valeurs les plus petites lorsque m coïncide avec le dénominateur d'une fraction approchée μ_n ; le terme correspondant vaut alors :

$$\pi^2 \frac{\omega^{\mu_n}}{(\sin \mu_n x\pi)^2} = (a_n+2)^2 \mu_n^2\, \omega^{\mu_n}$$

et lui aussi décroîtra, pour une infinité de nombres irrationnels, assez fortement, bien que plus faiblement que celui de la série précédente, pour que la série puisse converger.

N o t e III

Fonctions d'une variable complexe linéairement discontinues.

Il est facile de construire des fonctions de variables complexes dont la partie réelle devient discontinue en des lignes entières :

En effet, si x est une variable complexe, r un module quelconque mais fixe, a_o, a_1, ... , b_o, b_1, ... des suites de grandeurs réelles, finies ou décroissant infiniment, la série

$$f(x) = \sum(a_n - b_n i)(\frac{x}{r})^n$$

sera, comme on sait, une fonction synectique (c'est-à-dire une[62] fonction qui, avec toutes ses dérivées, est bien déterminée et univoque) pour tous les x de module inférieur à r) ; pour $x = re^{\varphi i}$ la partie réelle sera

$$\sum(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) ;$$

cette série peut cependant être affectée des discontinuités les plus diverses.

Inversement, toute fonction admettant un développement en série de F o u r i e r

$$F(\varphi) = \sum(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

quelque discontinue qu'elle soit, donne lieu à une fonction synectique à l'intérieur d'un cercle.

Par conséquent une fonction monogène d'une variable complexe peut devenir <u>discontinue de façon ponctuée</u> sur la périphérie d'un cercle.

Mais je peux également donner des exemples de fonctions monogènes et synectiques en général, qui deviennent <u>totalement discontinues</u> dans un disque entier : Dans la série

$$f(q) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \frac{\omega^m}{(q^m - q^{-m})^2} ,$$

soit ω une fraction réelle, positive et irréductible, q la variable complexe. Si mod.q est différent de 1, le dénominateur ne s'annulera pas et la convergence de la série dépendra de la limite du quotient

$$\omega\left(\frac{m}{m+1}\right)^2 \left(\frac{q^m - q^{-m}}{q^{m+1} - q^{-(m+1)}}\right)^2$$

lorsque m tend vers l'infini. Or, celle-ci sera égale, si $\text{mod.}q < 1$, à ωq^2 et comme, par hypothèse, $\omega < 1$ et donc aussi $\text{mod.}\,\omega q^2 < 1$,

la série convergera pour tous les q dont le module est < 1. Si mod.q > 1, la limite sera $\frac{\omega}{q^2}$ et par conséquent la série convergera aussi pour tous les q dont le module > 1.

La convergence ne peut cesser que lorsque mod.q = 1. En effet, si nous posons $q = e^{x\pi i}$, alors

$$f(e^{x\pi i}) = -\frac{1}{4}\sum\frac{\omega^m}{(m \sin mx\pi)^2} .$$

Or, nous reconnaissons dans cette série celle de la note précédente.

Cette série infinie convergente pour tous les q, excepté si mod.q = 1, représente donc une fonction de la variable complexe q, synectique à l'intérieur et à l'extérieur d'un cercle de rayon 1, mais totalement discontinue sur la périphérie du cercle, où elle prend à la fois des valeurs finies et infinies, infinies en tous les points où l'argument porteur de l'irrégularité est proportionnelle à 2π , ainsi que pour une certaine espèce d'irrégularités irrationnelles , finies pour une infinité d'autres valeurs irrationnelles de l'irrégularité.

Afin d'examiner plus en détail ce passage à l'infini, posons

$$q = (1 - \varepsilon)e^{x\pi i} ,$$

où ε désigne une grandeur petite, positive, tendant vers zéro ; pour x rationnel, $x = \frac{\nu}{\mu}$, seuls les termes de f(q) dont $m = \mu r$ tendront vers l'infini avec ε décroissant et, par conséquent, nous n'avons qu'à exclusivement tenir compte de ceux-ci ; leur somme est

$$\frac{1}{\mu^2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^2}\frac{\omega^{\mu r}(1-\varepsilon)^{2\mu r}}{\left[1-(1-\varepsilon)^{2\mu r}\right]^2} .$$

On peut en déduire que

$$f(\overline{1-\varepsilon}\, e^{\frac{\nu}{\mu}\pi i})$$

se comporte essentiellement comme $\frac{\text{Const.}}{\varepsilon^2}$ losque ε décroît infiniment, $\varepsilon^2 f(\overline{1-\varepsilon}\; e^{\frac{\nu}{\mu}\pi i})$ tendant vers une limite finie.

On peut approximativement décrire ce comportement comme suit : Lorsqu'à partir de l'origine du plan complexe on irradie dans toutes les directions, f(q) variera continûment jusqu'à ce qu'on atteigne le cercle de rayon 1, sur lequel la série continue de valeurs, que f(q) admettait jusque là dans le cercle, s'interrompt ou, pour ainsi dire, explose pour devenir totalement discontinue.

f(q) admet des singularités analogues lorsqu'on tend de l'extérieur vers le même cercle.

On peut faire des considérations très analogues sur la série

$$\psi(q) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega^m}{(q^m - q^{-m})^2} \quad ,$$

qui est synectique pour tous les q dont le module est différent de 1. Si mod.q = 1, alors $q = e^{x\pi i}$, et

$$\psi(e^{x\pi i}) = -\frac{1}{4}\sum \frac{\omega^m}{(\sin mx\pi)^2} \quad .$$

Nous avons discuté cette série à la fin de la Note II et par suite il est évident que $\psi(q)$ sera également une fonction totalement discontinue sur le cercle de rayon 1, bien qu'elle soit synectique à l'extérieur et à l'intérieur de ce cercle.

On peut d'ailleurs réduire la fonction $\psi(q)$, à l'aide de l'équation

$$\psi(q) = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial \log \varphi(q)}{\partial \log q} \quad ,$$

à la fonction $\varphi(q)$, où

$$\log \varphi(q) = -\sum \frac{\omega^m}{m(1 - q^{2m})}$$

est également un développement qui converge partout sauf pour mod.q = 1. La fonction $\varphi(q)$ par contre, qui, avec la même condition pour q, peut s'écrire*) sous la forme

$$\varphi(q) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{n(n-1)}\,\omega^n}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{2n})} \quad ,$$

---

*) Cf. S c h e i b n e r , Sitzungsberichte der math.-phys. Classe, Leipzig 1862, p.98.

peut être représentée par les produits infinis

$$\varphi(q) = \prod_{n=o}^{\infty}(1 - q^{2n}\omega) \quad \text{pour mod.}q < 1$$

et

$$\varphi(q) = \frac{1}{\prod_{n=o}^{\infty}(1 - \frac{\omega}{q^{2n+2}})} \quad \text{pour mod.}q > 1$$

dont les relations avec les fonctions θ de J a c o b i sont évidentes.

NOTES DE LA RÉDACTION

1 *Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Functionen, ein Beitrag zur Fesstellung des Begriffes der Function überhaupt*, Gratulationsprogramm der Tübinger Universität vom 6. März 1870, Tübinger Universitätsschriften aus dem Jahre 1870, N° 3 = (Mathematische Annalen, 20(1882), 63-112) = Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 153, S. 63-102, herausgegeben von P.E.B. Jourdain, Leipzig(Wilhelm Engelmann).

La partie du titre *Ein Beitrag zur Fesstellung des Begriffes der Function überhaupt* ("Donc une contribution à la fondation de la notion de fonction") ne figure plus dans les éditions de ce mémoire publiées après 1870.

Sur l'origine et l'importance de ce mémoire de Hankel, voir p.103-107 de son édition par P.E.B. Jourdain, citée plus haut, ainsi que p.1, 125-126, 177, 219 et 221-222 de [14].

2 Voir p.7-9 de G. Cantor, *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*, translated, and provided with an introduction and notes, by P.E.B. Jourdain, Open Court Publishing Company 1915 = New York(Dover), 1955 ; ainsi que [16], p.254 et 261.

3 Voir [16], p.271.

4 "Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes " (p.2 du t.I de l'*Introduction à l'analyse infinitésimale*, traduite du latin par J.B. Labey). Voir p.172 de P. Dugac, *Euler, d'Alembert et les fondements de l'analyse*, p.171-184 de *Leonhard Euler 1707-1783. Beiträge zu Leben und Werk. Gedenkband des Kantons Basel-Stadt*, Basel(Birkhäuser Verlag), 1983 ; ainsi que p.13 de P. Dugac, *Des fonctions comme expressions analytiques aux fonctions représentables analytiquement*, p.13-36 de *Mathematical Perspectives. Essays on mathematics and its historical development*, edited by J.W. Dauben, New York(Academic Press), 1981.

5 Fonctions "continues" et fonctions "discontinues, ou mixtes et irrégulières" (p.4 du t.II de l'*Introduction à l'analyse infinitésimale*, traduite du latin par J.B. Labey, Paris, 1835).

6 *Gesamm. math. Werke*, S.227-271, New York(Dover), 1953 = traduction française, p.225-279 des *Oeuvres mathématiques*, Paris(Blanchard), 1968.

7 Ce n'est pas en 1829 que Cauchy "découvrit" que ce théorème est parfois "en défaut", mais il a lu le 31 décembre 1821 à l'Académie des Sciences de Paris son *Mémoire sur le développement des fonctions en séries, et sur l'intégration des équations*

différentielles, p.6-13 de *Analyse des travaux de l'Académie royale des Sciences, pendant l'année 1821, partie mathématique* = (Bulletin de la Société Philomatique, 1822, 49-54) = *Oeuvres complètes*, (2), t.II, p.276-282, Paris(Gauthier-Villars), 1958, dans lequel il donne, en particulier, son fameux exemple de fonction $f(x) = e^{-(1/x^2)}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$, telle que $f^{(n)}(0) = 0$ quel que soit l'entier positif n (p.276-277).

8 *Werke*, t.III, p.63. Voir aussi la note 1 , p.108, de l'édition du mémoire de Hankel par P.E.B. Jourdain.On renvoie d'ailleurs le lecteur aux autres notes de Jourdain, p.108-115. Voir aussi [12], p.IV.

9 *Oeuvres complètes*, éd. Sylow et Lie, t.I, p.219-250, Kristiania(Grøndhal), 1881.

10 *Application du théorème de Taylor au développement des fonctions* $(1+x)^m$, a^x , $Log(1+x)$, $\cos x$ *et* $\sin x$ (Correspondance sur l'Ecole royale polytechnique à l'usage des élèves de cette école, n°II, Janvier 1810, 2(1809-1813), 81-86).

11 Voir [7], p.62-64.

12 Dirichlet P.G. Lejeune, *Ueber die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen* (Dove's Repertorium der Physik, 1(1837), 152-174) = *Werke*, t.I, p.133-160, Berlin(Reimer), 1889.

13 Voir [16], p.271, alinéa 1.

14 B. Riemann, *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer Verenderlichen complexen Grösse*, Göttingen, 1851 = *Gesamm. math. Werke*, p.3-48, New York (Dover), 1953 = trad. française par L. Laugel, p.1-60 des *Oeuvres mathématiques*, Paris(Gauthier-Villars), 1898.

15 G. Darboux écrit à J. Houël, le 18 mars 1873, à propos du mémoire de Riemann *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* (p.150 de P. Dugac, *Eléments d'analyse de Karl Weierstrass* (Archive for History of Exact Sciences, 10(1973), 41-176)) :

"Ce mémoire de Riemann est un chef-d'oeuvre semblable à ces vieux tableaux dont quelques parties en pleine lumière vous font regretter ce que le temps a détruit ou ce que l'auteur a négligé."

16 Voir [6], p.29.

17 Voir [12], p.II.

18 Voir [12], p.3.

19 Voir [16], p.262, note 5.

20 B. Riemann, *Oeuvres mathématiques*, p.24, Paris(Gauthier-Villars), 1898 = *Gesammelte*

mathematische Werke, 2. Auflage, p.21, New York(Dover), 1953.

21 R. Lipschitz, *Recherches sur le développement en séries trigonométriques des fonctions arbitraires d'une variable et principalement de celles qui, dans un intervalle fini, admettent une infinité de maxima et de minima*, traduit du latin par P. Montel (Acta Mathematica, 36(1913), 281-295).

22 Voir [12], p.4, note ★ .

Pour *rota aristotelica*, la "roue d'Aristote", voir p.785-787 du t.II de l'*Encyclopédie Méthodique, Mathématiques*, Paris(Panckoucke), 1785.

23 Voir p.92-94 des *Eléments d'analyse de Karl Weierstrass* (Archive for History of Exact Sciences, 10(1973), 41-176).

24 Voir p.169 des *Eléments d'analyse de Karl Weierstrass*, cités dans la note précédente.

25 L'idée du principe de condensation des singularités trouve son inspiration dans l'article 6 du mémoire de Riemann *Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique*, p.225-279 des *Oeuvres mathématiques*.

Voir aussi sur cette question [10], p.58; G. Cantor, *Ueber ein neues und allgemeines Condensationsprincip des Singularitäten von Functionen* (Mathematische Annalen, 19(1882), 588-594) ; [9], p.188 ; [14], p.144 ; [16], p.269 et 279-280 ; [13], p.80 et 82-83 ; [11] ; p.17, note 1 des *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, 2e édition, Paris(Gauthier-Villars), 1950 ; p.72-75 de K. Yosida, *Functional Analysis*, Berlin(Springer-Verlag), 1965 ; [8], p.84-85 ; [6], p.82-83.

26 Voir [13], p.78.

27 Voir [3], p.202-203.

28 Voir [12], p.6-7.

29 Voir p.150 du compte rendu de G. Cantor de ce mémoire de Hankel dans *Literarisches Centralblatt für Deutschland, 18. Februar 1871*, p.150-151, ainsi que [12], p.7-13 et [16], p.279, note 1.

A propos des critiques de P. Gilbert, G. Darboux écrit à J. Houël (Archives de l'Académie des Sciences de Paris) :

18 février 1873

"Gilbert m'a envoyé deux exemplaires de son fameux Mémoire et je l'ai parcouru. Rien n'est perdu, mais si Gilbert rapporte exactement les raisonnements de Hankel nous sommes dans notre tort [[J. Houël a publié un compte rendu de l' "intéressant" mémoire de Hankel, sans y émettre aucune objection, dans le t.1(1870), p.117-124, du *Bulletin des Sciences mathématiques*]]. Hankel s'est trompé dans ses raisonnements et il faudrait examiner les séries qu'il apporte de nouveau ; je me rappelle que je vous demandais des exemples, j'avais bien raison."

24 mars 1873

"Il serait bien important d'avoir une réponse de Hankel que vous feriez bien de relancer. Il faut qu'il nous dise son opinion que diable [[Hankel est mort le 29 août 1873]]."

16 juin 1873

"Je trouve que Hankel n'est pas très net. La question n'est pas de savoir si Gilbert se trompe dans la partie *positive* de son mémoire, mais si lui Hankel a fait des raisonnements inexacts, ou plutôt (il en a fait) s'il a un moyen de remplacer ses raisonnements inexacts par d'autres rigoureux. Gilbert est inouï, il raisonne comme un Peau-Rouge. Il dit : le raisonnement de Hankel est faux (accordé) et il conclut : la proposition est donc fausse."

9 juillet 1873

"A propos de Hankel : ce géomètre baisse décidément dans mon estime, il me paraît un singe de Riemann, mais les bottes que lui a portées Gilbert sont parfaitement justes et nous aurions été enfoncés si Gilbert, après avoir démoli ses adversaires, n'avait pas cédé à la malheureuse tentation d'édifier à son tour ; mais hélas il a bâti sur le sable mouvant et il est obligé d'en faire son *mea culpa*."

30 Voir [1], p.91-100.

31 Voir [2], p.IV, VII et 117-147 ; [9], p.157-204 et [13], p.78, note 223 et p.80.

32 Cette fonction se trouve déjà dans [3], p.203.

33 Voir [6], p.44-45 et 50 (et qui renvoie à [3], p.199-200).

34 Cette propriété n'est pas vérifiée (voir [1], p.127-128, et [13], p.90, note 270).

35 Voir [12], p.13-16 ; [10], p.103-106 ; [1], p.116-121, et [13], p.92, note 278.

36 Voir [6], p.29-30.

37 Voir [15], p.12-13.

38 U. Dini désigne ces fonctions par "fonctions discontinues une infinité de fois" (*funzioni infinite volte discontinue*) et les étudie dans [2], p.62-66.

39 Voir [15], p.14-15.

40 Voir [15], p.16.

41 Voir [6], p.30-31.

42 Voir [6], p.37.

43 Voir [15], p.20-27.

44 Voir [14], p.181.

45 Voir [16], p.271, note 1, et [15], p.18-19.

46 Voir [4], p.96.

47 Voir [14], p.89 et 101, et [6], p.31.

48 Voir [6], p.31-32.

49 Voir [6], p.59.

50 Voir [4], p.96-97 ; [2], p.250 ; [5], p.80-82 ; [9], p.340-341 ; [13], p.84, note 243, et [6], p.55-56.

51 Voir [4], p.97, et [6], p.40.

52 Voir [13], p.87.

53 Voir [5], p.77.

54 Voir [13], p.88.

55 Voir [16], p.278, note 1.

56 Voir [2], p.232, et [9], p.316-317.

57 Le "nouveau principe" énoncé dans les *Remarques préliminaires sur la notion de fonction.*

58 Voir la note 14.

59 Voir [3] .

60 Voir [13], p.88, note 263, et p.89.

61 Voir [10], p.100, et [9], p.199.

62 Voir p.147 du tome I de l'*Abrégé d'histoire des mathématiques. 1700-1900,* Paris (Hermann), 1978.

63 Voir p.129 du t.8(1987) des *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] PASCAL E., *Esercizi e note critiche di calcolo infinitesimale,* Milano(Ulrico Hoepli), 1895.

[2] DINI U., *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali,* Pisa(T. Nistri), 1878.

[3] HANKEL H., Grenze, p.185-211, 1. Section A-G, 90. Theil, *Allgemeine Encyklopädie der Wissenschaften und Künste,* herausgegeben von J.S. Ersch und J.G. Gruber, Leipzig (Brockhaus), 1871.

[4] SMITH H.J.S., On the integration of discontinuous functions, p.86-100, vol. II, *The Collected Mathematical Papers,* Bronx New York(Chelsea), 1965 = (Proceedings of the London Mathematical Society, 6(1875), 140-153).

[5] VOLTERRA V., Alcune osservazioni sulle funzioni punteggiate discontinue (Giornale di Matematiche, 19(1881), 76-86).

[6] HAWKINS T., *Lebesgue's theory of integration*, The Bronx New York (Chelsea), 1975.

[7] YOUSCHKEVITCH A.P., Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIX^{e} siècle, traduit par J.-M. Bellemin, p.7-68 des *Fragments d'histoire des mathématiques*, Paris(A.P.M.E.P.), 1981.

[8] MONNA A.F., Hermann Hankel (Nieuw Archief voor Wiskunde, (3), 21(1973), 64-87).

[9] DINI U., *Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse*, deutsch bearbeitet von J. Lüroth und A. Schepp, Leipzig(Teubner), 1892.

[10] DARBOUX G., Mémoire sur les fonctions discontinues (Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, (2), 4(1875), 57-112).

[11] BANACH S. et STEINHAUS H., Sur le principe de la condensation de singularités (Fundamenta Mathematicae, 9(1927), 50-61).

[12] GILBERT P., Mémoire sur l'existence de la dérivée dans les fonctions continues (présenté à la Classe des Sciences de l'Académie le 4 mai 1872) (Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des beaux-Arts de Belgique, 23(1873)).

[13] PRINGSHEIM A. et MOLK J., Principes fondamentaux de la théorie des fonctions, p.1-112, t.II, vol.I, *Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, Paris(Gauthier-Villars), 1909.

[14] SCHOENFLIES A., Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker- Vereinigung, 8(1900), zweites Heft).

[15] DESENTI J.-T., *Recherches sur la formation du concept de mesure des ensembles (de Riemann - 1866 - à Lebesgue - 1918)*, thèse complémentaire pour le doctorat ès-lettres, Paris, 1968.

[16] JOURDAIN P.E.B., The Development of the Theory of Transfinite Numbers. Part 1 : The growth of the Theory of Functions up to the year 1870 (Archiv der Mathematik und Physik, (3), 10(1906), 254-281).