CAHIERS DU SÉMINAIRE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

V. I. SMIRNOV

A. P. YOUCHKEVITCH

Correspondance de A. M. Liapunov avec H. Poincaré

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1re série, tome 8 (1987), p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1987__8__1_0>

CORRESPONDANCE DE A.M. LIAPUNOV AVEC H. POINCARÉ

PAR V.I. SMIRNOV ET A.P. YOUCHKEVITCH★

La théorie des figures d'équilibre de la masse fluide, dont les éléments s'attirent réciproquement selon la loi de Newton et qui est en rotation uniforme autour d'un axe quelconque, constitue l'une des parties importantes de la mécanique des fluides. *Le problème de l'existence de ces figures d'équilibre* et de leurs propriétés s'est posé de façon naturelle à la fin du XVII^{e} siècle lors de l'étude de la forme de la terre et des autres corps célestes et il a conservé toute son actualité jusqu'à nos jours. Les premiers pas dans l'étude des problèmes traitant du cas d'une masse homogène ont été faits par Newton (1687), qui a remarqué qu'une telle figure peut être un ellipsoïde de révolution. Les propriétés de ce dernier ont été étudiées d'une manière plus détaillée par Maclaurin (1740),et aussi par Clairaut (1737,1743), qui avait obtenu quelques résultats importants dans le cas d'une masse non homogène, bien que tout a fait particulière. Jacobi (1834) et K.O. Meyer (1842) ont examiné le cas de l'ellipsoïde triaxial. Ensuite, on a commencé l'étude des figures d'équilibre de forme ellipsoïdale variable.

Liouville (1855), puis Riemann (1860) ont posé le *problème de la stabilité des figures d'équilibre* et l'ont fait avancer un peu. Au XIX^{e} siècle, au cours des années 1880, A.M. Liapunov (1857-1918) et H. Poincaré (1854-1912), indépendamment l'un de l'autre, ont commencé à élaborer de nouvelles méthodes d'étude des figures d'équilibre et de leur stabilité : la thèse de doctorat de Liapunov a été publiée en 1884 et en 1885 parurent les premières publications de Poincaré. A peu près jusqu'à leur mort, tous deux firent des recherches dans ce domaine. En 1885-1886, Liapunov, alors chargé de cours à l'Université de Kharkov, et Poincaré, à cette époque professeur à la Sorbonne, confrontèrent, sous une forme épistolaire, leurs idées concernant les questions qu'ils avaient étudiées[1].

Les lettres de Liapunov à Poincaré sont particulièrement intéressantes. Non seulement elles sont riches par leur contenu scientifique, mais elles caractérisent clairement la différence qui se manifeste dans la façon d'aborder la résolution des problèmes de mathématiques appliquées. De plus, dans ses lettres, Liapunov complète quelque peu sa thèse de 1884, et dans la lettre V du 19 novembre 1886 il anticipe partiellement sur des résultats qui seront exposés bien des années plus tard, en 1908 (voir cette lettre, note 33).

On doit à V.I. Smirnov ([2],395-444) une très bonne analyse des travaux de A.M.

★ C'est C. Casamatta qui a traduit l'introduction et les notes de l'article de В.И. Смирнов, А.П. Юшкевич, Переписка А.М. Ляпунова с А. Пуанкаре и П. Дюэмом (Историко-математические Исследования, 29(1985), 265-284). Les lettres de Poincaré à Liapunov ont été publiées en 1957 par V.I. Smirnov (1887-1974) dans [1].

Liapunov dans ce domaine de recherches ([2],395-444). Dans [2], p.494-538, se trouve un index des publications et des écrits sur la vie et l'oeuvre de Liapunov rédigé par A.M. Lukomskaya et qu'elle a complété de façon substantielle dans le livre [3], qui contient également une analyse remaniée par V.I.Smirnov des travaux de Liapunov ([3],58-75).

L'histoire de cette partie de la mécanique des fluides a été mise en lumière bien des fois au cours des travaux de A.M. Liapunov lui-même ; elle occupe une place de choix dans les différentes oeuvres consacrées à l'histoire de la mécanique. Pour pouvoir introduire le lecteur dans le domaine des questions discutées dans la correspondance entre Liapunov et Poincaré, il est utile de faire quelques remarques préliminaires.

En 1882, Liapunov avait discuté avec P.L. Tchebychev du sujet possible de sa thèse de maîtrise. Bien que la mécanique des fluides fut étrangère aux recherches de Tchebychev, celui-ci était néanmoins au courant des travaux effectués dans ce domaine et, avec une étonnante clairvoyance, il conseilla à son ancien élève de s'intéresser au problème de l'existence, sous certaines conditions, des figures d'équilibre des fluides en rotation, différentes des figures ellipsoïdales connues à l'époque. Tchebychev exprima la certitude que la méthode des approximations successives conduirait à la solution. Liapunov en fait le récit dans l'article *Sur un problème de Tchebycheff* (Mém.classe phys.-math.Acad. Sc. St.Pétersbourg, (8), 17(1905),N 3,1-32) publié en français en 1905 ([4],207-236), et il ajoute que, à l'époque, il ne put dépasser la première approximation, ce qu'il considérait comme insuffisant pour répondre exactement à la question de Tchebychev. En 1884, Liapunov a jugé seulement possible de présenter dans sa thèse le résultat correspondant à la première approximation sous la forme d'un bref exposé placé à la fin de sa thèse. De façon générale, il se tourna vers l'analyse d'un autre problème, celui de la stabilité des figures ellipsoïdales qui a fourni le sujet de sa thèse *Sur la stabilité des formes ellipsoïdales d'équilibre d'un fluide en rotation*, d'abord publiée en 1884 ([4],5-113) et soutenue devant l'Université de Saint-Pétersbourg en janvier 1885. Cet ouvrage fut publié en français par E. Davaux ([13]).

Peu de temps après la soutenance de la thèse, A.M. Liapunov prit connaissance des premières recherches de H. Poincaré sur la théorie des figures d'équilibre d'un fluide en rotation brièvement résumées dans les *Comptes Rendus* de Paris en 1885[2]. Les résultats de Poincaré ne surprirent pas Liapunov par leur nouveauté, mais la méthode de démonstration lui parut obscure, et il décida de demander des explications à l'auteur. Ce fut le début de leur correspondance présentée ci-après, et qui se prolongera plus d'une année.

I. A.M. *Liapunov* à H. *Poincaré*

Kharkov, 9 Octobre 1885[3]

Monsieur,

J'ai l'honneur de m'adresser à vous à cause de vos deux Notes intéressantes, insérées dans les tomes C et CI (N^{os} 16 et 4) des *Comptes Rendus*[4]. La question que vous y traitez est celle dont je m'occupe il y a quelque temps, et c'est à la fin de l'année passée que j'ai publié en russe un travail★ qui contient quelques résultats, donnés dans vos Notes. En croyant qu'il vous serait peut être intéressant de voir ce travail, je prends la liberté d'en vous présenter un exemplaire. A la fin du livre vous verrez quatre conclusions dont la dernière traduite en français est ainsi conçue :

"Pour chaque valeur du nombre entier n , plus grande que 2 , on peut trouver parmi les ellipsoïdes de Jacobi au moins un, et parmi ceux de Maclaurin précisément $E(\frac{n+2}{2})$, qui soient infiniment voisins à certaines surfaces algébriques d'ordre n pour lesquelles se trouve accomplie *dans la première approximation* la condition d'équilibre."[5]

Les surfaces algébriques dont j'y parle sont précisément celles qui appartiennent aux séries linéaires de figures d'équilibre que vous avez trouvées. Mais je ne vois pas comment on peut démontrer que ces figures satisfont réellement à la condition d'équilibre. La méthode des approximations successives n'est pas, je le crois, propre à donner cette démonstration.

Vous m'obligerez infiniment si vous voulez bien me donner quelques renseignements sur ce sujet ou de m'indiquer le lieu où je pourrais trouver les éléments d'une pareille démonstration.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma parfaite considération et de mon profond respect.

A. Liapounoff ,

professeur agrégé de l'Université de Kharkov (Russie méridionale).

II. H. *Poincaré* à A.M. *Liapunov*[6]

[[Paris, octobre 1885]][7]

★Sous le titre *Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation.* (Remarque de A.M. Liapunov.)

Monsieur,

Je vous remercie beaucoup de l'envoi de votre mémoire[8] ; je n'ai pu le lire à cause de mon ignorance de la langue russe, mais j'ai vu par une analyse que M. Radau a eu la bonté de m'en faire[9] que vous m'aviez devancé sur un certain nombre de points.

Vous me demandez comment on peut démontrer l'existence des figures d'équilibre qui ne sont qu'approximativement des surfaces algébriques. Comme vous le dites fort bien, la méthode des approximations successives n'est pas applicable, car *la deuxième approximation*, qui d'ailleurs ne nous apprendrait rien de plus que la première, *se heurterait à des difficultés presque inextricables*.

J'ai donc dû suivre une voie toute différente analogue à celle que j'ai employée dans ma note sur certaines solutions particulières du problème des trois corps[10]. A vrai dire, la démonstration n'est pas complète. J'ai été obligé d'admettre le postulat suivant qu'il serait peut-être difficile de démontrer mais qui, je crois, ne saurait être mis sérieusement en doute.

Si un masse fluide est en équilibre stable sous l'action de certaines forces et s'il survient des forces perturbatrices soumises à un potentiel εV (je suppose que V est une fonction donnée de x,y,z et que ε soit une constante arbitraire) on peut prendre ε assez petit, pour que la masse fluide soit encore susceptible d'une figure d'équilibre stable et que cette figure diffère aussi peu qu'on voudra de la primitive.

Ce théorème serait évident s'il s'agissait d'un système de points discrets, mais en ce qui concerne une masse fluide, il soulève un certain nombre de difficultés relatives à l'usage de l'infini et qui sont peut être plus intéressantes pour l'analyste que pour le mécanicien.

Je ne doute pas qu'on ne puisse les surmonter un jour, mais je ne l'ai pas fait encore.

J'oubliais de dire que je suppose la fonction V analytique et qu'il s'agit de l'équilibre absolu et non de l'équilibre relatif et de la stabilité cinétique.

Mon mémoire est imprimé dans les *Acta Mathematica* et paraîtra dans les fascicules 3 et 4 du tome 7[11]. Aussitôt que j'aurai reçu les tirages à part, je vous en enverrai un exemplaire. Vous auriez alors l'obligeance de le lire et de me faire connaître ses ressemblances et ses différences avec le vôtre en ce qui concerne les résultats et les méthodes. Je rédigerais d'après vos indications une note où je vous rendrais justice et qui serait imprimée dans les *Acta*[12].

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée.

Poincaré

rue Gay Lussac 66 , Paris

III. A.M. *Liapunov* à H. *Poincaré*

30. XI. 1886[13]

Monsieur,

Je vous prie de m'excuser de n'avoir pas encore répondu à votre aimable lettre. J'ai voulu vous écrire après avoir lu votre mémoire[14], mais des circonstances qui ne dépendaient pas de moi ne m'ont pas permis de le lire que ces derniers jours.

Permettez-moi avant tout de vous remercier de vos réponses sur mes questions. Votre démonstration de l'existence de nouvelles figures d'équilibre est très ingénieuse, mais l'absence d'une démonstration rigoureuse du postulat sur lequel elle est fondée laisse à désirer une démonstration directe, qui serait fondée par exemple sur des méthodes analogues à celles qu'on emploie pour la séparation des racines des équations. Le dernier temps je m'occupe de cette question, mais je dois avouer que jusqu'à présent toutes mes tentatives dans cette direction restent sans succès[15].

Vous me demandez de vous écrire sur les ressemblances et les différences de mon mémoire avec le vôtre. Après avoir lu votre mémoire dans les *Acta Mathematica*, je viens à la conclusion que vous embrassez la question d'une manière beaucoup plus générale et que vous la traitez plus profondément que je ne le fait dans le mien. Mon mémoire est consacré principalement à la question de la stabilité et ce n'est qu'en passant que j'y mentionne la possibilité d'infinité de figures d'équilibre différentes des figures ellipsoïdales, puisque je n'ai eu le moyen de démontrer leur existence. Du reste, je n'y recherche que la stabilité séculaire et je n'y parle rien de la stabilité ordinaire ; aussi mon mémoire ne contient pas le chapitre sur les mouvements infiniment petits qui se trouve dans le vôtre. Le principe sur lequel est fondée toute ma discussion de la stabilité est celui du minimum de l'énergie totale que M. Thomson et M. Tait ont annoncé dans la nouvelle édition de leur *Treatise on natural philosophy*[16]. Je démontre ce principe dans le chapitre premier de mon mémoire par une méthode analogue à celle que M. Lejeune-Dirichlet[17] avait employé pour démontrer le principe de Lagrange relatif à la stabilité de l'équilibre absolu des systèmes au nombre fini de coordonnées. Mais j'aurais fait peut-être mieux, si je le laissais sans démonstration, parce que malgré mes efforts de donner une définition de la stabilité, quoiqu'un peu artificielle, ma démonstration est restée peu rigoureuse. A présent je me suis même persuadé qu'on ne peut pas en donner une démonstration rigoureuse, quoiqu'on n'a pas de raisons suffisantes pour douter de la vérité du principe.

Vous voyez ainsi que l'objet principal de mon mémoire se distingue de celui du vôtre. Cependant, en ce qui concerne les questions communes à nos mémoires, on apperçoit leur grande ressemblance non seulement dans les résultats mais aussi dans les méthodes. La plus grande ressemblance a lieu entre le chapitre sur les fonctions de Lamé, qui se trouve dans mon mémoire, et les §§ du vôtre où vous traitez le même sujet. Mais vous y déduisez aussi des propriétés nécessaires des fonctions sphériques, en les regardant comme un cas limite des fonctions de Lamé, ce qui donne à votre discussion un caractère plus unique ; tandis que moi je considère les propriétés des fonctions sphériques séparément dans le chapitre consacré à la stabilité des ellipsoïdes de révolution.

Enfin, quant aux résultats peu nombreux qui se trouvent dans mon mémoire et ne se trouvent pas dans le vôtre, ils se réduisent à ce qui suit :

I. Dans le chapitre sur la stabilité des ellpsoïdes de révolution je considère, outre le cas général relatif aux perturbations, deux suppositions particulières : 1) quand la surface du liquide reste dans le mouvement perturbé une surface de révolution, et 2) quand l'ellipsoïde d'inertie de la masse liquide reste un ellipsoïde de révolution. Et je trouve que dans la première supposition la limite supérieure des excentricités des ellipsoïdes de révolution séculairement stables est égale au nombre 0,9979896... , et dans la seconde - au nombre 0,89... (pages 49-53 de mon mémoire)[18].

II. Dans le chapitre sur la stabilité des ellipsoïdes de Jacobi,je démontre le théorème dont vous parlez sur les pages 343 et 344 de votre mémoire, à savoir que l'équation qu'on obtient en égalant au zéro celui des coefficients de stabilité qui s'annule le premier ne peut être satisfaite que d'une seule manière. Dans mon système des dénominations ceux des coefficients de stabilité qui peuvent s'annuler sont dénotés par T^m_{2m+1} , où m est l'ordre des fonctions de Lamé correspondantes. L'équation mentionnée est donc $T^3_7 = 0$, et sa discussion se trouve sur les pages 85-88 de mon mémoire[19]. En ce qui concerne l'équation générale $T^m_{2m+1} = 0$, je ne démontre pas le théorème analogue ; sur les pages 95 et 96[20] je montre seulement qu'elle peut être satisfaite au moins d'une manière, quoique je ne doute pas, aussi bien que vous, qu'elle ne peut l'être que d'une seule manière.

III. Sur les pages 88-94[21] je m'occupe de la résolution numérique de l'équation $T^3_7 = 0$, ce qui revient à la résolution de deux équations $A = 0$ et $B = 0$ (p.90)[22] à deux inconnues s et t , où s et t ont la même signification que dans les mémoires de Meyer[23] et de Liouville[24]. (Cette seconde équation n'est autre que $T^2_4 = 0$ qui doit être satisfaite pour tous les ellipsoïdes de Jacobi.) Ainsi j'obtiens le résultat suivant : les excentricités de l'ellipsoïde limite pour des ellipsoïdes de Jacobi séculairement stables sont comprises : l'une entre les limites 0,6016 et 0,6025 et l'autre entre les limites 0,9380 et 0,9387 . La vitesse angulaire correspondante est comprise entre les limites : $\sqrt{2\pi f\rho}\,\sqrt{0,1419}$ et $\sqrt{2\pi f\rho}\,\sqrt{0,1423}$ (où f est la constante de l'attraction et ρ la densité du liquide).

IV. La conclusion sur la stabilité des ellipsoïdes limites (pour des ellipsoïdes stables) ne me semblait pas évidente. Mais la discussion de la stabilité de ces ellipsoïdes présente en général des difficultés du même ordre que la recherche de la deuxième approximation pour des figures d'équilibre infiniment voisines des figures ellipsoïdales, car il est indispensable pour cela de former la variation du potentiel au moins du quatrième ordre. Cette difficulté n'a pas lieu relativement à l'ellipsoïde de révolution de Jacobi (qui est un ellipsoïde limite pour des ellipsoïdes de révolution séculairement stables), parce qu'on sait l'expression *précise* du potentiel de l'ellipsoïde à trois axes. Le chapitre dernier de mon mémoire est consacré à la discussion de la stabilité de cet ellipsoïde, et j'y trouve que c'est une figure d'équilibre stable.

Voilà tout ce qui distingue mon mémoire relativement au vôtre.

Permettez-moi de vous témoigner, enfin, que la lecture de votre mémoire était pour moi très intéressante et instructive, et de vous remercier de la note sur mon mémoire qui est parue dans le *Bulletin Astronomique* et qui est rédigée, je crois, d'après vos indications. Je vous prie aussi d'exprimer ma reconnaissance à M. Radau qui a eu la bonté de vous traduire mon mémoire[25].

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma parfaite considération et de mon profond respect.

A. Liapounoff
Kharkov, l'Université

IV. *H. Poincaré à A.M. Liapunov*[26]

[[novembre ou décembre 1886]][27]

Monsieur,

Je vous remercie beaucoup de votre lettre. Quand je verrai M. Tisserand[28], je lui demanderai s'il veut bien en insérer un extrait dans le *Bulletin Astronomique*. Je crois que cela pourrait intéresser les lecteurs français. Voulez-vous le permettre ?

Dans l'analyse que M. Radau a faite de votre travail, plusieurs points m'ont paru obscurs.

Serait-ce abuser de votre obligeance que de vous demander à ce sujet quelques explications. Que dois-je entendre par cette nouvelle définition de la stabilité qu'après une perturbation suffisamment petite le liquide doit s'écarter aussi peu qu'on voudra de la figure d'équilibre au moins aussi longtemps qu'il ne se produit pas, à la surface, de saillies sous forme de filets ou de lames, quelque minces qu'on les suppose, en d'autres termes pour qu'il n'y a pas de rides. Qu'est-ce que c'est que ces saillies, ces filets, ces lames et ces rides ?[29]

Je ne comprends pas non plus très bien votre première conclusion[30].

D'ailleurs, si vous voulez bien le permettre nous reparlerons plus en détail de toutes ces questions.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée.

Poincaré

V. A.M. *Liapunov à H. Poincaré*

Kharkov 18 $\frac{19}{\text{XI}}$ 86[31]

Monsieur,

Je vous remercie beaucoup de votre proposition d'insérer un extrait de ma lettre dans le *Bulletin Astronomique*.

Vous me demandez sur quelques points de ma définition de la stabilité[32]. Pour répondre, je dois entrer dans quelques détails sur ce sujet.

Je m'avais proposé de démontrer le principe de Thomson en s'appuyant seulement sur l'équation de l'énergie, ou du moins de déduire de cette équation toutes les conséquences possibles relatives à la stabilité[33].

Soient $d\tau$ et $d\tau'$ deux éléments du volume du liquide, r leur distance mutuelle, S le moment d'inertie de la masse liquide autour de l'axe des z, que je mène par son centre de gravité parallèlement à l'axe de rotation du liquide dans le mouvement non perturbé, J le moment de la quantité du mouvement (non perturbé), et T la force vive du liquide dans le mouvement relatif convenablement défini. Alors, en choisissant convenablement l'unité de densité, l'équation de l'énergie prendra la forme

$$T + \Pi = \text{Const.} \qquad (1),$$

où

$$\Pi = \frac{1}{2}\left(\frac{J^2}{S} - \iint \frac{d\tau\, d\tau'}{r}\right),$$

l'intégration étant étendue au volume entier du liquide. Le problème se ramène ainsi à la démonstration (en s'appuyant seulement sur l'équation (1)) que le minimum de Π (dans les conditions $\int d\tau = \text{Const.}$, $\int x\, d\tau = \int y\, d\tau = 0$) correspond à la figure d'équilibre stable.

Avant tout, il fallait décider ce qu'on doit concevoir ici sous le terme "minimum".

Or, il est facile de se convaincre que Π ne peut être minimum dans ce sens qu'il serait *plus petit que pour toute autre* figure ayant le même volume et le même centre de gravité (le minimum dans le sens mentionné n'a lieu que pour la sphère quand $J = 0$). C'est cela que j'avais affirmé dans ma première conclusion (dont vous me demandez aussi). Le minimum de Π ne peut donc avoir lieu que par rapport aux figures infiniment voisines. Mais tant qu'on a pas donné l'explication de ce qu'on doit entendre par l'expression "infiniment voisin", il est évident qu'on ne peut rien démontrer.

Pour fixer les idées bornons-nous au cas le plus simple, celui quand la figure d'équilibre est une figure de révolution. La déformation quelconque de la surface du liquide peut être définie alors par des distances normales de ses points de la surface d'équilibre. Soit ε la plus grande de ces distances. J'avais adopté que dans le cas de Π minimum la valeur de Π est plus petite que pour toute autre figure (ayant le même volume et le même centre de gravité que la figure d'équilibre), *pour laquelle* ε *ne dépasse pas une certaine limite* E *assez petite et qu'on peut toujour assigner*. Je consens que cette définition du minimum est très volontaire. Maintenant je doute même de sa vérité, et c'est pourquoi je trouve ma démonstration du principe, qui est fondé sur cette définition, peu rigoureuse, comme je vous l'avais déjà écrit.

Outre la quantité ε , je considère aussi le volume qui est compris entre la surface du liquide après la déformation et sa surface d'équilibre. Soit Δ ce volume. Il est évident qu'on peut toujours trouver des déformations telles que, Δ restant aussi petit qu'on voudra, ε sera aussi grand qu'on voudra. *Toutes les déformations de ce genre je les avais désignées par l'expression peu précise des saillies*. D'autre part, il est évident que pour chaque valeur donnée de ε on peut toujours choisir Δ suffisamment petit pour que l'accroissement correspondant de Π soit aussi petit qu'on voudra.

Cela posé, l'équation (1) n'exigeant pas que l'accroissement positif de Π soit assez petit, il ne s'en suivra pas, même dans le cas de Π minimum (et quelques petites que soient les perturbations), que ε ne puisse aller en augmentant. Mais ε étant plus grand que E , Π pourra aller en diminuant, et conséquamment la figure du liquide peut s'écarter de plus en plus de la figure d'équilibre. Ainsi, on ne peut rien démontrer en s'appuyant seulement sur l'équation (1), si on n'exclut pas toutes ces petites perturbations qui s'accompagnent des saillies assez minces. Mais pour la possibilité d'une pareille exclusion il faut être en état de poser certaines conditions pour des perturbations initiales. Cela étant très difficile, j'avais préféré modifier un peu la définition de la stabilité, et cette modification se réduit à ce qu'on doit regarder la figure d'équilibre comme stable même dans le cas quand, après les perturbations infiniment petites, la figure du liquide peut s'écarter de plus en plus de la figure d'équilibre, *si cet écartement ne se fait que par le moyen des déformations qui s'accompagnent des saillies infiniment voisines minces*[34].

Si cette explication, Monsieur, ne vous semble pas suffisante, et si vous voulez bien continuer notre correspondance, je suis à votre disposition.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée.

A. Liapounoff

VI. *H. Poincaré à A.M. Liapunov*[35]

[[Paris, décembre 1886]]

Monsieur,

Merci de votre lettre. Puisque vous m'autorisez à la faire insérer en partie dans le *Buelletin Astronomique*, je vais en parler à M. Tisserand.

Vos explications me satisfont complètement. Je vois que la difficulté que vous avez rencontrée est précisément la même à laquelle je me suis heurté. Mais il me semble qu'elle se présente déjà dans le cas de la sphère ($J = 0$)[36].

Supposons que l'on communique à la sphère une perturbation très petite ; elle correspondra à une addition d'énergie très petite. Imaginons, et rien n'empêche de le supposer, qu'au bout d'un certain temps toute cette énergie additionnelle se soit transformée en force vive et se soit concentrée toute entière dans une petite portion de matière μ . Cette masse μ pouvant être très petite, sa vitesse pourra être très grande bien que la force vive soit très petite. Elle pourra donc être assez grande pour que la masse μ se détache complètement de la sphère et s'en aille à l'infini.

Le théorème de l'énergie ne suffit donc pas[37] en toute rigueur pour montrer qu'une perturbation initiale très petite de la sphère n'en altérera pas la figure d'une façon sensible[38].

Votre bien dévoué.

Poincaré[39]

NOTES

1 Les remarques de V.I. Smirnov ([1]) sont complétées par les miennes ; cela étant, l'existence des lettres de Liapunov exigeait quelques petites modifications dans les commentaires de V.I. Smirnov, notées par les initiales V.S.

Il y a dix ans, A.I. Miller m'a envoyé les photocopies des lettres de A.M. Liapunov à Poincaré ; les originaux sont conservés par le petit-fils de l'illustre savant, M. F. Poincaré. (Remarque de A.P. Youchkevitch.)

2 Dès le début de leur publication, les Notes des *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* avaient une dimension rigoureusement imposée et, de ce fait, elles ne comprenaient d'habitude que de brèves indications concernant la démonstration des résultats publiés.

3 On ne sait pas si les lettres de A.M. Liapunov sont datées suivant le nouveau style, utilisé alors en France, ou d'après l'ancien, conservé en Russie jusqu'au début de 1918.

4 Il s'agit de deux Notes de H. Poincaré, publiées sous le titre général *Sur l'équilibre de la masse liquide animée d'un mouvement de rotation* dans les *Comptes Rendus*, t. C (1885) et CI(1885) ; une autre Note y est jointe dans le t. CIV(1887) ([5],14-16, 34-36, 37-39).

5 *Cf.* [4], p.113. Dans la traduction française autorisée de la thèse de 1884 de Liapunov (1904), cette idée est exposée de façon quelque peu différente ; *cf.* la note au bas de la page 113 de [4].

6 L'original est conservé aux Archives de l'Académie des Sciences de l'URSS, ф. 257, оп. 1, N° 24, л. 1.

7 La date probable est déterminée d'après celle de la lettre I de A.M. Liapunov et d'après celle du "29 octobre 1885" écrite en russe par une main inconnue. V.S.

8 Il s'agit de la thèse de 1884 de A.M. Liapunov. V.S.

9 Rodolphe Radau (1835-1911), astronome et mathématicien, par la suite membre de l'Académie des Sciences de Paris, a donné dans le *Bulletin astronomique*, t.2(1885), p.522-525, le compte rendu de la thèse de 1884 de Liapunov. D'après la lettre de Radau à Liapunov du 8 avril 1887, publiée par V.I. Smirnov, on constate qu'il n'a pu disposer du texte que durant quelques jours et que son analyse, comme il le reconnaît lui-même, est "nécessairement très imparfaite" ([1],700-701).

10 Il s'agit de la Note de Poincaré parue sous le titre *Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps* dans les *Comptes Rendus*, t.97(1883) ([5],251-252). A propos de cette approche du problème par Poincaré, voir la réponse de Liapunov dans

la lettre III et la note 15 correspondante.

11 Il s'agit du grand mémoire de Poincaré portant le même titre que les Notes déjà mentionnées : *Sur l'équilibre d'une masse liquide animée d'un mouvement de rotation*, *Acta Mathematica*, VII, 1885 (publié en 1886) ; voir aussi [5], p.16-140.

12 La note de Poincaré dont il est question à la fin de la lettre n'est parue ni dans les *Acta Mathematica*, ni dans une autre revue. V.S.

13 La date de cette lettre est douteuse, car la lettre suivante de Liapunov, V, porte la date du 19 novembre 1886 écrite de sa main et sur la réponse de Poincaré - lettre IV - à la lettre III quelqu'un a écrit en haut en russe : "26 novembre 1886". Peut-être Liapunov a-t-il écrit "30. XI" au lieu de "30. IX". De toute manière, la lettre III a été envoyée avant la lettre V datée du 19 novembre 1886.

14 C'est à dire le mémoire de Poincaré publié dans les *Acta Mathematica*, t.VII. Voir la note 11.

15 Ici, sous une forme courtoise, Liapunov exprime sa profonde divergence avec Poincaré à propos des exigences d'une démonstration rigoureuse non seulement en mathématiques pures, mais aussi en mathématiques appliquées. Dans l'article rappelé plus haut de 1905 *Sur une problème de Tchebycheff*, Liapunov, parlant de ses premiers travaux sur le problème des figures d'équilibre d'un fluide en rotation, a défini très clairement sa position à ce sujet. Il écrit à propos du mémoire de Poincaré de 1885 :

"Dans ce mémoire, Poincaré, après avoir déterminé la première approximation, ne trouve pas de même que moi les approximations suivantes. Cependant, il considère comme possible d'en tirer une conclusion sur l'existence réelle de nouvelles figures d'équilibre en s'appuyant sur certaines condidérations qui se rapportent au cas des systèmes matériels dont la position est déterminée à partir d'un nombre fini de variables ; et, ensuite, il essaie d'étendre ces considérations au cas d'un fluide. Mais cela n'est possible qu'au prix de raisonnements peu rigoureux. Ce n'est pas une démonstration, c'est plutôt une généralisation par analogie et Poincaré lui-même le reconnaît lorsqu'il dit [[([5],60)]]:"Il y aurait bien des objections à faire, mais on ne saurait exiger en mécanique la même rigueur qu'en analyse pure pour ce qui concerne l'infini."

Mais je ne suis pas de cet avis. Je pense que s'il est permis,dans certains cas, de se servir de considérations vagues pour établir un nouveau principe qui ne découle pas logiquement de ce qui est déjà admis et qui, de par sa nature même, ne peut entrer en contradiction avec d'autres principes de la science, il est impossible d'agir ainsi dans le cas où il faut résoudre un problème précis (de mécanique ou de physique) posé de façon mathématiquement rigoureuse. Ce problème devient alors un problème purement analytique et il doit être résolu en tant que tel.

Par conséquent, je ne pouvais pas considérer que les études de Poincaré, avec toutes leurs subtilités, renfermaient la solution du problème." ([4],209).

Liapunov exprima son opinion dans ce même esprit lors de la séance inaugurale de son cours sur *La forme des corps célestes* en septembre 1918 à l'Université de Novorossiisk (Odessa), peu de temps avant sa mort, s'en tenant à sa correspondance de 1885-1886 avec Poincaré, et il termina son exposé sur une remarque faite à propos du mémoire de Poincaré de 1885, à savoir "que celui-ci ne le satisfaisait pas du tout" ([4],369-370). Il est intéressant de constater que E. Picard, dans son rapport sur les travaux de Liapunov présenté à l'Académie des Sciences le 6 mars 1916, lors de l'élection du savant russe comme correspondant de l'Académie des Sciences, apprécia de façon semblable le travail de Poincaré de 1885, disant que ses considérations "étaient une simple extrapolation par analogie dont la rigueur ne laissait aucune illusion à Poincaré lui-même, mais qui rendait vraisemblable ce que l'on voulait établir".

Par conséquent, on ne pouvait considérer comme résolue la question posée par Tchebychev."([6],69-70). On voit que la position de Picard est très proche de celle de Liapunov citée plus haut.

Dans son article *Sur un problème de Tchebychev*, Liapunov a présenté l'essentiel de la nouvelle méthode qui lui a permis, à partir de 1903 et dans toute une série de travaux, de donner une solution exacte du problème de Tchebychev dont la version antérieure, correspondant à la première approximation, était formulée dans la 4^{e} proposition de sa thèse. Sans nous arrêter là-dessus, disons que,quelque temps auparavant, Poincaré avait publié une note dans les *Proc. Roy. Soc. London*, t.69(1901), puis un mémoire dans les *Philos. Transactions, ser.* A, t.198(1902), sous le même titre : *Sur la stabilité des figures pyriformes affectées par une masse fluide en rotation*, *cf.* [5], p.159-202. Poincaré appelait piriforme une série de nouvelles figures d'équilibre qui pouvait être obtenue à partir des ellipsoïdes de Jacobi pour la plus petite vitesse de rotation possible des ellipses stables de Jacobi ; ces figures piriformes ont joué un rôle très important dans l'hypothèse cosmogonique de G. Darwin. Poincaré utilisa, pour résoudre le problème de la stabilité des figures piriformes, un procédé qui lui donnait la seconde approximation, et que Liapunov qualifia de très ingénieux ([4],210,371) ; il trouva la condition de stabilité sous forme d'une inégalité qu'il analysa incomplètement. G. Darwin, qui n'a pas su trouver la 2^{e} approximation, en partant en 1903 du travail de Poincaré, arriva au prix de calculs complexes à la conclusion que les figures piriformes sont stables. Dans la dernière partie du travail *Sur un problème de Tchebychev*, Liapunov a montré que, bien au contraire, ces figures sont instables. Ainsi naquit la polémique qui se prolongea jusqu'à la mort de G. Darwin en 1912. Peu de temps avant sa mort, Poincaré écrivit dans son travail sur les hypothèses cosmogoniques ([7]) que, bien que les figures piriformes puissent être stables, il n'est pas certain qu'il en soit ainsi réellement et que, pour donner une réponse définitive, il faudrait tout recalculer, ce qui est excessivement complexe (*cf.* [3], p.70-71). En 1916, dans le rapport cité plus haut, Picard de même a écrit sur l'opportunité de vérifier tous les calculs ([6],70). Peu de temps après, en 1917, J. Jeans découvrit une faute dans les calculs de G. Darwin et la question fut tranchée ([4],71).

16 Dans la thèse de 1884 de Liapunov, le principe de Thomson et Tait est cité deux fois en anglais ([4],7-8,22) d'après la 2ème édition de leur *Treatise* (1883). Dans sa préface, Liapunov récapitule les résultats de ces savants anglais concernant le problème de la stabilité des formes ellipsoïdales d'équilibre et énoncés sans démonstration dans la seconde édition du tome I de leur *Treatise on natural philosophy* ; et il dit que Thomson et Tait, "apparamment, basent leur recherches" dans ce domaine sur ce principe ([4],7). Nous donnons une formulation du principe de Thomson-Tait cité par Liapounov en anglais ([4], 7-8) : "When the energy with given moment of momentum is either a minimum or a maximum, the kinetic equilibrium is clearly stable, if the liquid is perfectly inviscid. It seems probable that it is essentially unstable, when the energy is minimax ; but we do not know that this proposition has been ever proved."

17 *Cf.* [4], p.26 et 62.

18 *Cf.* [4], p.60-64. - Dans la thèse de 1884, la valeur de la limite supérieure des excentricités est dans le premier cas égale à 0,985225... ([4],62). Dans le second cas, elle est comprise entre 0,895 et 0,9 ([4],63). Nous n'avons pas vérifié les calculs de A.M. Liapunov ; mais il est possible qu'il les ait refaits lui-même pour le premier cas.

19 *Cf.* [4], p.91-93.

20 *Cf.* [4], p.99-101.

21 *Cf.* [4], p.93-99.

22 *Cf.* [4], p.94-95.

23 Voir la référence dans [4], p.44.

24 Voir la référence dans [4], p.35.

25 Voir la lettre II et la remarque 9.

26 L'original est conservé aux Archives de l'Académie des Sciences de l'URSS, ф. 257, оп. 1, N° 24, л. 2.

27 La date de la lettre n'est pas précise, voir la note 13 de la lettre III.

28 L'astronome F.F. Tisserand (1845-1896), alors professeur à la Sorbonne et membre de l'Académie des Sciences de Paris, fut le fondateur (1884) et le rédacteur jusqu'à sa mort du *Bulletin Astronomique*, dans lequel R. Radau publia le compte rendu sur la thèse de 1884 de A.M. Liapunov (voir la remarque 9 de la lettre II).

29 Voir la réponse de Liapunov V et la note 33 de cette lettre. Il faut remarquer que la traduction de Radau, citée par Poincaré, correcte quant au sens, n'est pas littérale. Voir la note 32 de la lettre V.

30 La première conclusion à laquelle fait allusion Poincaré est la première "proposition" de la thèse de A.M. Liapunov. Elle est liée au principe variationnel concernant l'énergie totale du fluide. Liapunov traite cette question de façon détaillée au début de sa thèse, mais ces parties ne se trouvent pas dans le compte rendu de Radau. V.S.

Voir [4], p.112, et les explications de Liapunov dans sa lettre V.

31 A propos de la date de cette lettre, voir la note 13 de la lettre III.

32 La question majeure de H. Poincaré a trait à la définition de la stabilité d'un fluide en rotation. Nous tirons cette définition de la thèse de A.M. Liapunov.

A propos de la difficulté que présente l'étude de la stabilité d'un milieu continu, A.M. Liapunov écrit : "... Toute la difficulté est supprimée à la seule condition que la forme d'équilibre stable soit déterminée de telle sorte que la forme du fluide s'en écarte aussi peu que possible dès lors que le mouvement du fluide est soumis à des perturbations suffisamment petites, *au moins tant qu'il ne se forme pas à la surface du fluide un grand nombre de saillies filiformes ou folioformes*" ([4],9). Plus loin, Liapunov écrit : "Cette définition sous une forme mathématique sert de base à tout mon travail. En s'appuyant sur celle-ci, et après avoir fait certaines hypothèses sur la continuité du mouvement, j'utilise ensuite la méthode de Lejeune-Dirichlet pour démontrer le théorème fondamental. D'après ce théorème, toute forme d'équilibre pour laquelle il existe un minimum Π (sous certaines conditions) est stable" ([4],10). V.S.

33 Le texte qui suit de la lettre présente un grand intérêt, car Liapunov ne s'y conforme pas à l'exposé donné dans sa thèse, mais à un très proche d'un travail bien plus tardif *Problème du minimum dans une question de stabilité des figures d'équilibre d'un fluide en rotation*, publié en français en 1908 (voir [4], p.237-360 ; en particulier p.237-242),et qui contient l'essentiel du programme de sa partie principale et aussi de sa signification. En même temps, dans la lettre V, il y a la réponse aux questions posées dans la lettre précédente IV de Poincaré. Ainsi, déjà en 1885, Liapunov disposait des éléments importants de son travail de 1908 dans lequel, comme l'a écrit V.I. Smirnov, "il a beaucoup précisé et approfondi son travail antérieur et, en particulier, il a examiné la stabilité des figures non ellipsoïdales proches des figures ellipsoïdales dans le cas d'un fluide homogène. A cette époque, il avait déjà établi de façon rigoureuse l'existence de ces figures d'équilibre." ([1],692).

34 La forme mathématique de la définition de la stabilité dont parle A.M. Liapunov revient, au fond, à ce qui suit : Soit ℓ une grandeur positive qui caractérise dans un certain sens, l'écart entre la surface perturbée du fluide et la surface d'équilibre considérée, et δ la valeur du volume de la partie perturbée du fluide extérieure au volume non perturbé.

Soient encore ℓ_1 et ε deux nombres positifs donnés, ε vérifiant une certaine condition de petitesse. Le résultat fondamental, dont parle A.M. Liapunov plus haut, revient à ce qui suit. Si Π possède un minimum, alors dans l'hypothèse de la continuité du mouvement on a la propriété suivante : si à l'instant initial $\ell < \ell_1$ (★) et $\delta > \varepsilon\ell$ (★★) , et si les perturbations initiales de la vitesse sont suffisamment petites, alors l'inégalité (★) sera satisfaite quand l'inégalité (★★) est satisfaite. Notons que, pour simplifier l'exposé, nous avons adopté la dernière formulation mathématique du travail de A.M. Liapunov de 1908, ce qui est sans importance. V.S. Voir aussi les remarques importantes dans [3], p.66-68.

35 L'original est conservé aux Archives de l'Académie des Sciences de l'URSS, ф. 257, оп. 1, N° 24, л. 3.

36 Dans sa thèse, A.M. Liapunov examine le cas d'une sphère immobile en s'appuyant sur le même principe (minimum Π) que dans le cas de la rotation des figures d'équilibre ellipsoïdales. V.S.

37 Le théorème de l'énergie est rappelé dans la lettre. Remarquons à ce sujet que, dans son travail, A.M. Liapunov ramène le problème du minimum de l'énergie totale du mouvement par rapport au centre de gravité, pour un moment cinétique donné, au problème du minimum de la grandeur Π considérée précédemment. V.S.

38 Citons encore un fait lié à la fin de la lettre. En montrant l'imperfection de la solution en ce qui concerne la forme de la stabilité, A.M. Liapunov écrit dans la préface de sa thèse que la solution complète du problème ne peut être obtenue que par l'étude du mouvement perturbé. Il formule ainsi le sujet de son étude : "*A quels résultats conduit la loi de conservation de l'énergie en ce qui concerne la stabilité des ellipsoïdes de Maclaurin et Jacobi.*" ([4],10). Ce point de vue a été développé par Liapunov en détail dans son travail de 1908 rappelé plus haut.

39 Apparemment, les explications fournies par A.M. Liapunov dans la lettre précédente V avaient donné entière satisfaction à H. Poincaré, car leur correspondance s'arrêta là.

Ajoutons que, peu de temps après, les travaux des deux savants sur la théorie des figures d'équilibre se croisèrent encore une fois. Dans le mémoire *Sur un corps de potentiel maximum*, publié en 1886 dans les *Communications de la Société Mathématique de Kharkov*, Liapunov a montré que s'il existe un corps pour lequel l'intégrale sextuple

$$\Pi = \iint \frac{d\tau\ d\tau}{r} \quad ,$$

étendue à tout le volume, atteint, pour un volume donné, sa borne supérieure, alors ce corps est une sphère ([8],26-32). "Ce travail - écrit V.I. Smirnov - est directement relié à la stabilité de la sphère considérée comme figure d'équilibre" ([3],87). Poincaré répondit rapidemement au résultat de Liapunov et publia, dans le tome CIV des *Comptes Rendus* de 1887, la Note *Sur un théorème de M. Liapounoff relatif à l'équilibre* *d'une masse fluide* ([5],143-146). A la suite des remarques et renvois au mémoire de Liapunov, Poincaré ajoute : "Je crois qu'il est possible de simplifier beaucoup la démonstration de M. Liapounoff, par l'introduction de considérations empruntées à l'électrostatique, et c'est l'objet de la présente Note"([5],144). - En 1919, T. Carleman a démontré ([3],87) de façon rigoureuse l'existence d'un corps dont le potentiel atteint, pour un volume donné, sa borne supérieure.

APPENDICE

Dans l'introduction de cette publication, il est dit que le problème de nouvelles figures d'équilibre d'un fluide en rotation, différentes de celles connues avant, a été posé par P.L. Tchebychev à A.M. Liapunov en 1882. Plus tard, en 1918, Liapunov se rappelait que Tchebychev avait proposé ce même problème à E.I. Zolotarev et à S.A. Kovalevskaya, avant de lui parler de cette question qui l'intéressait beaucoup (encore étudiant Liapunov s'était occupé de façon active de la mécanique des fluides et ses deux premières publications en 1881 avaient trait à l'hydrodynamique), mais ceux-ci, apparemment, ne s'en étaient pas occupés. Il est tout à fait vraisemblable que J. Liouville, lors de leur rencontre à Paris en 1852, attira l'attention de Tchebychev sur le problème dont il est question. En effet, cette année-là, Liouville terminait son article sur la stabilité des figures d'équilibre d'un fluide en rotation ([11]) qui venait de couronner le cycle étendu de ses travaux publiés dès 1834(la date de 1855, généralement admise pour [11], est établie d'après les indication de l'almanach dans lequel est paru pour la première fois l'article de 1852).

Récemment, alors que le fascicule 29 des Историко-математические исследования était déjà sous presse, J. Lützen a publié une très bonne analyse des papiers laissés par Liouville, aussi bien publiés que manuscrits et appartenant au domaine de la mécanique des fluides ([12]). Lützen étudie aussi le problème de l'influence que Liouville a pu exercer sur Liapunov, qui s'est souvent référé aux travaux publiés par Liouville et traitant de cette question, et sur Poincaré, chez qui ces références sont absentes. L'article de Lützen est tout à fait précieux, mais il semble que lui-même n'a pas connaissance des recherches importantes à ce sujet faites par V.I. Smirnov. De toute manière, ces recherches ne sont même pas évoquées dans la bibliographie pourtant assez étendue([12] 162-166).La conférence de Liapunov *Sur la forme des corps célestes* (1918), dans lequel est exposé l'historique de cette question, et, en particulier, les résultats de Liouville connus de Liapunov ([4],367-368), n'est pas mentionnée dans cet article.

BIBLIOGRAPHIE

1. *Смирнов В.И.* Из переписки П. Аппеля, Ж. Адамара, Г. Буркхарда, В.Вольтерра, П. Дюэма, К. Жордана, А. Пуанкаре и Р. Радо с академиком А.М Ляпуновым. – В кн.: Тр. Ин-та истории естествознания и техники. М.: Изд-во АН СССР, 1957, т. 19, с. 690–719.
2. *А.М. Ляпунов.* Избранные труды/Ред. акад. В.И. Смирнова. М.: Изд-во АН СССР, 1948.
3. Александр Михайлович Ляпунов. Библиография/ Сост. А.М. Лукомская под ред. акад. В.И. Смирнова. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1953.
4. *Ляпунов А.М.* Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1959. Т.III.
5. Oeuvres de Henri Poincaré. P., 1952. Vol. VII.
6. Русско-французские научные связи. Л.: Наука, 1968.
7. *Poincaré H.* Leçons sur les hypothèses cosmogoniques. P., 1911.
8. *Ляпунов А.М.* Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1956, Т. II.
9. *Ляпунов А.М.* Собр. соч., М.: Изд-во АН СССР, 1954. Т. I.
10. *Duhem P.* Recherches sur l'hydrodymanique. P., 1903–1904. Vol. 1, 2.
11. *Liouville J.* Formules générales relatives a la question de la stabilité d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation autour d'un axe. Connaissance des Temps pour 1855, p. 26–44; J. math. pures et appl., 1855, vol. 20, p. 164–184.
12. *Lützen J.* Joseph Liouville's work on the figures of equilibrium of a rotating mass of fluid. – Arch. Hist. Exact. Sci., 1984, vol. 30, N 2, p. 113–166.
13. A.M. Liapounov, Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation (Ann. Faculté Sci. Univ. Toulouse, (2), 6(1904), 5-116).