CAHIERS DU SÉMINAIRE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

DRAGAN TRIFUNOVIĆ

Contribution à l'histoire d'un problème de la théorie des fonctions

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1re série, tome 8 (1987), p. 19-24
<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1987__8__19_0>

CONTRIBUTION À L'HISTOIRE D'UN PROBLÈME DE LA THÉORIE DES FONCTIONS

PAR DRAGAN TRIFUNOVIĆ *

Dans l'histoire des mathématiques en Serbie des temps nouveaux, on notera certainement aussi l'amitié entre l'illustre mathématicien serbe Michel Petrovitch (1868-1945) et le prince Georges (1887-1973), fils aîné du roi Pierre I^er^ Karageorgévitch (1844-1921), et l'héritier de la couronne jusqu'en 1909[1]. En enseignant les mathématiques à la cour serbe (depuis le 1^er^ septembre 1903), M. Petrovitch informait pendant des années le jeune prince des résultats des sciences mathématiques. En outre, il semble assez fondée l'opinion répandue selon laquelle leurs rapports comprenaient aussi des liens personnels qui créent une amitié ferme et durable. C'est en s'appuyant sur des documents d'archives et d'autres sources historiques, et en profitant de ses relations avec Georges Karageorgévitch (après la guerre il ne portait plus officiellement le titre de prince) pendant plusieurs années, que l'auteur de cet article a établi les "éléments d'intérêt commun professionnel" dans cette amitié. Le prince ne s'occupait pas de la recherche scientifique proprement dite, mais il était bien informé dans plusieurs domaines scientifiques et montrait un vif intérêt pour eux. Ces dispositions du prince Georges influaient aussi directement sur son professeur M. Petrovitch.

C'est en 1911 que le prince Georges a prié son professeur de formuler un problème pour Henri Poincaré (1854-1912). Petrovitch choisit la question suivante, assez simple au premier abord du moins : "Quel est le nombre de valeurs limites que puisse avoir une fonction entière $F(z)$ lorsque la variable z augmente indéfiniment suivant différents rayons vecteurs dans son plan ?". Cette question était contenue dans la lettre du prince adressée au professeur Poincaré le 3 mars 1911. Nous donnon ici la copie complète de cette lettre.

Belgrade le 3. III 911.

Monsieur le Professeur,

En ayant appris, en amateur, quelques éléments de la théorie des fonctions qui m'intéresse vivement et de plus en plus, et en ayant rencontré une question sur laquelle je n'ai pu trouver nulle part des renseignements précis, veuillez bien excuser la liberté que je prends en m'adressant directement au Maître pour m'éclaircir sur les résultats acquis par les recherches modernes relatives à la question. La question est la suivante :

---

* Professeur d'histoire des mathématiques à l'Université de Belgrade.

Quel est le nombre de valeurs limites que puisse avoir une fonction entière $F(z)$ lorsque la variable z augmente indéfiniment suivant différents rayons vecteurs dans son plan.

En vous priant d'excuser mes importunités, je vous prie Monsieur le Professeur d'agréer l'expression de ma respectueuse reconnaissance.

G(eorges) [2]

Pourquoi le prince Georges demandait-il ce problème à Petrovitch afin de le soumettre au grand mathématicien H. Poincaré ? Ne voulait-il pas vérifier par ce geste sa propre opinion sur le savoir de son professeur Petrovitch ? Ou ne s'agissait-il pas de son désir que Poincaré aussi sache que le prince royal serbe pénètre également dans les secrets des sciences mathématiques ? Pour le moment, nous ne connaissons pas la réponse exacte.

Poincaré répondit très vite au prince Georges. Il est sûr, d'après une lettre ultérieure, que sa réponse, contenant la solution du problème, vint à Belgrade avant le 12 mars 1911. La communication entre Paris et Belgrade était vraiment rapide ! La lettre de Poincaré a été longtemps gardée par Michel Petrovitch. Après la mort de Petrovitch, en 1943, l'original de cette lettre a été perdu et n'a pas été retrouvé jusqu'à présent, mais sont contenu *essentiel* a été cité (traduit en serbe) dans l'article [1] de Petrovitch, publié en 1929 par l'Académie serbe des sciences. Dans l'introduction de cet article Petrovitch écrit : " Aujourd'hui la solution du problème est connue, de même que ses rapports avec plusieurs autres problèmes concernant la théorie des fonctions entières. Mais il y a quelques années, ce problème n'était ni posé ni traité d'une manière explicite. Il me semble qu'il y aura quelque intérêt historique à exposer ici un résultat d'Henri Poincaré, non publié jusqu'à présent, en relation avec la question du nombre possible des valeurs asymptotiques d'une fonction entière. Il est contenu dans une lettre privée de Poincaré, écrite en mars 1911, dont je garde l'original." ([1],87).

C'est en le copiant littéralement (à deux traductions consécutives et inverses près, bien entendu), et en conservant les symboles usuels et la façon de s'exprimer de l'époque, que nous reproduisons ici le texte original de la solution de Poincaré que Petrovitch a donnée dans [1].

"Il est possible de construire une fonction entière $F(z)$ qui tend vers les valeurs limites données d'avance

(1) $$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

(arbitrairement choisies et dont le nombre est aussi grand que l'on veut) lorsque z croît indéfiniment dans les directions définies par les arguments donnés d'avance aussi

(2) $\varphi_1 , \varphi_2 , \ldots , \varphi_n .$

A cet effet, nous allons employer la transcendante connue de Mittag-Leffler

(3) $$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)} ,$$

possédant les propriétés analytiques suivantes :

1° Si l'argument de la variable z est égal à zéro, c'est-à-dire si z est un nombre réel positif, la fonction (3) prend des valeurs réelles positives et tend vers $+\infty$ lorsque z croît indéfiniment.

2° Si l'argument de la variable z est situé entre

(4) $$\frac{\alpha\pi}{2} \text{ et } 2\pi - \frac{\alpha\pi}{2} ,$$

la fonction (3) tend vers zéro lorsque z croît indéfiniment.

La fonction

(5) $$\Phi(z) = e^{-E_\alpha(z)}$$

est donc une fonction entière tendant vers zéro lorsque z augmente indéfiniment avec l'argument 0 , et vers 1 quand z croît indéfiniment avec n'importe quel argument situé entre les bornes (4).

Considérons maintenant la fonction

(6) $$F(z) = \sum_{m=1}^{m=n} A_m - \sum_{m=1}^{m=n} A_m \, \Phi(ze^{i\varphi_m}) ,$$

en supposant que le nombre α soit choisi assez petit pour que le nombre $\frac{\alpha\pi}{2}$ soit inférieur à la différence de deux quelconques des arguments (2).

Alors, lorsque z croît indéfiniment, avec l'argument φ_j , toutes les expressions

(7) $$\Phi(ze^{-i\varphi_m})$$

tendent vers l'unité, sauf l'expression

(8) $$\Phi(ze^{-i\varphi_j})$$

qui tend vers zéro.

Donc la fonction $F(z)$ tend vers la limite A_j quand z croît dans la direction définie par l'argument φ_j. En choisissant successivement

$$j = 1 , 2 , \ldots , n ,$$

$F(z)$ va tendre respectivement vers les limites (1).Le nombre de ces valeurs limites peut donc être aussi grand que l'on veut." ([1],87-89).

Petrovitch a fait suivre cet exposé de Poincaré de son propre commentaire, que voici : "On connaît aujourd'hui un grand nombre de fonctions possédant la propriété en question. Je pense toutefois qu'il faut sauver de l'oubli l'exemple de cette espèce donné à l'époque par Henri Poincaré." ([1],89).

A la solution exposée de Poincaré, Petrovitch a ajouté sa propre contribution. A savoir : il a pris la fonction entière de coefficient général a_k

$$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

et représenté la fonction $\Phi(z)$ de (5) sous la forme

$$\Phi(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots .$$

Si l'on désigne, pour abréger, les coefficients de la fonction de Mittag-Leffler (3) par

$$\lambda_k = - \frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)} ,$$

alors les coefficients b_k peuvent être déterminés au moyen de la formule de récurrence

$$kb_k + \lambda_1 b_{k-1} + 2\lambda_2 b_{k-2} + \ldots + (k-1)\lambda_{k-1} b_1 + k\lambda_k b_0 = 0 ,$$

et le coefficient a_k de la fonction $F(z)$ est donné par

$$a_k = (A_1 e^{-ki\varphi_1} + A_2 e^{-ki\varphi_2} + \ldots + A_n e^{-ki\varphi_n}) \, b_k ,$$

avec les significations précédentes des symboles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

Le prince Georges a répondu immédiatement à la lettre de Poincaré, en le remerciant de la solution du problème.

La couronne
Palais de Belgrade

Belgrade le 12. III. 911

Monsieur le Professeur,

Je vous suis très reconnaissant de l'amabilité que vous avez eue de vous occuper de la question que je me suis permis de vous soumettre et de m'avoir éclairci sur le nombre de valeurs A_j de $F(z)$ pour les arguments

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots .$$

M'est-il permis de vous demander encore une bonté ?

Je possède votre portrait ci-joint ; puis-je vous prier de vouloir bien y poser votre signature et de me le renvoyer ?

Veuillez, Monsieur le Professeur, excuser mes importunités et agréer l'expression de ma respectueuse reconnaissance.

Georges[3]

Notons enfin que Jovan (Jean) Karamata (disciple de M. Petrovitch et éminent mathématicien yougoslave) s'occupait aussi du résultat de Poincaré en question, presque en même temps que Petrovitch ([2]), et que ce résultat a été signalé dans la *Revue semestrielle* ([3]). Nous avons aussi relaté, dans notre livre [5], les faits principaux concernant cette histoire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. PETROVIĆ, *Prilog istoriji jednoga problema teorije funkcija* [Contribution à l'histoire d'un problème de la théorie des fonctions] (Glas, 134(1929), 87-90).

[2] KARAMATA J.: (Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, 55(1929), 18).

[3] (Revue semestrielle, 36(1932), 133).

[4] M. PETROVIĆ, *Notice sur les travaux scientifiques*, Paris, 1922.

[5] D. TRIFUNOVIĆ, *Letopis života i rada Mihaila Petrovića* [Chronique de la vie et de l'oeuvre de Michel Petrović], Beograd, 1969.

[6] D. TRIFUNOVIĆ, *Mihailo Petrović-Alas*, Gornji Milanovac, 1982.

[7] DJ. KARADJORDJEVIĆ, *Istina o mome životu* [Vérité sur ma vie], Beograd, 1969.

NOTES

1 On peut trouver plus d'informations sur Michel Petrovitch dans [4] et [5], et sur le prince Georges dans son autobiographie [7].

2 Brouillon de la lettre (Archives du Secrétariat fédéral des affaires étrangères à Belgrade), publié aussi dans [6].

3 Je suis reconnaissant au Séminaire d'Histoire des Mathématiques de Paris qui a bien voulu m'envoyer cette lettre.