CAHIERS DU SÉMINAIRE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

DANIEL BERNOULLI

Esquisse d'une théorie nouvelle de mesure du sort

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1re série, tome 6 (1985), p. 61-77
<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1985__6__61_0>

Avertissement du traducteur

A propos de D. Bernoulli : né à Groningue, mort à Bâle (1700-1782), fils de Jean (1667-1748), neveu de Jacques (1654-1705) auquel on doit la première démonstration d'une loi des grands nombres (Ars conjectandi, 1713), cousin de Nicolas. D. Bernoulli fut médecin, philosophe et physicien de génie. On lui doit l'équation qui régit le mouvement des fluides et par laquelle débute aujourd'hui encore maint traité d'hydrodynamique. Le texte que nous avons traduit du latin "Specimen THEORIAE NOVAE DE MENSURA SORTIS" avait été donné par lui à l'université impériale tout nouvellement créée de Saint-Petersbourg où il a professé entre 1725 et 1734. L'auteur s'appuie sur le concept d'UTILITE défini au préalable, pour donner sa réponse au problème fameux connu depuis sous le nom de "paradoxe de Saint-Petersbourg". Ce problème a reçu en son temps deux réponses satisfaisantes, d'ailleurs très proches l'une de l'autre, celle du mathématicien Gabriel Cramer (1704- 1752) et celle de D. Bernoulli[1].

A propos du titre : "... de mensura sortis" : le mot latin "sors" (sortis au génitif) peut signifier 1) l'objet, un caillou, une tablette portant une inscription, qu'on met dans une urne en vue d'un tirage au sort, 2) le tirage au sort, 3) l'issue du tirage au sort, 4) la destinée. Le mot français qui traduirait le plus précisément le sens donné par Bernoulli à "sors" dans le titre de son étude serait celui de "loterie". Mais ne sait-on pas que le sort, le destin, la destinée est une loterie ! On a retenu de préférence dans cette traduction le mot français qui a la même racine que le mot latin correspondant, lorsque le sens y est.

A propos du texte original[2] : le document dont nous avons disposé est celui qui est détenu à Paris par la Sorbonne ; il s'agit du tome V des "Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae" où se trouve pages 175 à 192 et table VII la communication de Bernoulli.

A propos de la traduction[3]: c'est une traduction au plus près et elle conduit tout naturellement à une phrase qui rappelle celle des écrivains français du 17e siècle et du début du 18e. Un seul exemple emprunté à Descartes (Discours de la méthode, seconde partie) suffit pour faire voir ce style : "en quoi je ne vous paraîtrai peut-être pas être fort vain, si vous considérez que, n'y ayant qu'une vérité de chaque chose, quiconque la trouve en sait autant qu'on en peut savoir ; et que, par exemple, un enfant instruit en l'arithmétique, ayant fait une addition suivant ses règles, se peut assurer d'avoir trouvé, touchant la somme qu'il examinait, tout ce que l'esprit humain saurait trouver".

Autres traductions : il n'existe aucune autre traduction en français de ce texte, du moins à notre connaissance, mais il existe une traduction en anglais faite par le Docteur Louise Sommer et publiée par Econometrica, Vol. 22, n° I, January 1954. Il est certainement plus aisé de traduire mot à mot du latin en français qu'en anglais et, de ce fait, notre traduction est sans doute plus stricte et plus fidèle mais la brièveté de la phrase anglaise et la simplicité de sa structure grammaticale jointes à l'emploi du vocabulaire restreint de mode aujourd'hui peuvent faire apparaître cette traduction anglaise comme préférable quant à la facilité de lecture. Sauf en quelques points, le sens est bien le même.

A propos de l'origine de cette traduction : dans leur ouvrage "LA DECISION ECONOMIQUE" (Edit. Les Presses Universitaires de France, à paraître en 1984) les auteurs R. CHARRETON et J.M. BOURDAIRE font référence au texte de D. Bernoulli "Specimen theoriae novae de mensura sortis". R. CHARRETON a été amené ainsi à traduire ce texte en français et il livre sa traduction qui, pense-t-il, pourrait intéresser quelques lecteurs.

Paris, janvier 1984

Raoul CHARRETON

Esquisse

d'une THEORIE NOUVELLE

de

MESURE DU SORT

Auteur : Daniel BERNOULLI

Depuis le moment où les géomètres ont commencé à considérer la mesure des sorts, ils ont tous affirmé que *la valeur d'une loterie*[4] *s'obtient par multiplication de la valeur de chaque lot par le nombre de cas dans lesquels son obtention est acquise, sommation des produits et division par le nombre total des cas : étant entendu que les cas sont entre eux également possibles* ;[5] cette règle posée, ce qui reste à faire selon cette doctrine est de passer en revue tous les cas, de les désagréger[6] en termes d'égale possibilité et de les ranger dûment par classe.

§ 2. Les démonstrations de cette proposition, nombreuses, mettent en lumière[7] pour celui qui les examine bien que toutes relèvent de cette hypothèse initiale que *comme il n'y a aucune raison qu'une loterie favorise volontairement l'un plutôt que l'autre, le résultat doit apparaître à l'un et à l'autre égal* ; donc aucune raison qui repose sur l'état des personnes n'est à considérer, mais seulement celles qui se rapportent aux conditions du sort.

Que les juges suprêmes établis par l'autorité publique arrêtent dans cet esprit, bien que, en l'espèce, ce ne soit pas un jugement mais un conseil[8] qui soit attendu, les règles, n'est-ce pas, à partir desquelles chacun serait à même d'estimer son sort à travers sa propre situation.

§ 3. Afin d'être clair, il n'est pas mauvais de présenter ce cas d'un homme tout à fait pauvre attendant d'un tirage au sort avec une probabilité égale, soit rien du tout, soit vingt mille ducats ; doit-il estimer son sort dix mille ducats et prend-il une mauvaise résolution en vendant son droit pour neuf mille ducats ? Il ne me le semble pas quoique je crois qu'un homme très riche irait contre son intérêt si, pouvant acquérir ce droit à ce même prix, il s'y refusait. Si, de fait, je ne me trompe pas, il est évident qu'on ne peut imposer le même étalon à tous les hommes pour mesurer le sort, ni, par conséquent, adhérer à la règle du § 1. Mais n'importe qui, désireux d'examiner attentivement tout ceci, s'aperçoit qu'on peut donner une définition du vocable *valeur* utilisé dans cette règle, de façon que tout ce qui s'ensuit s'impose sans réserve à tous, à savoir celle de *valeur* estimée non pas à partir du prix de la chose mais à partir de l'*utilité* (1) que chacun peut en tirer. Le prix estimé à partir de la chose elle-même est le même pour tous, l'*utilité* dépend de la condition de chacun. Il n'y a pas de doute que mille ducats offrent plus d'avantages pour un pauvre que pour un riche, bien que le montant soit le même pour l'un et l'autre.

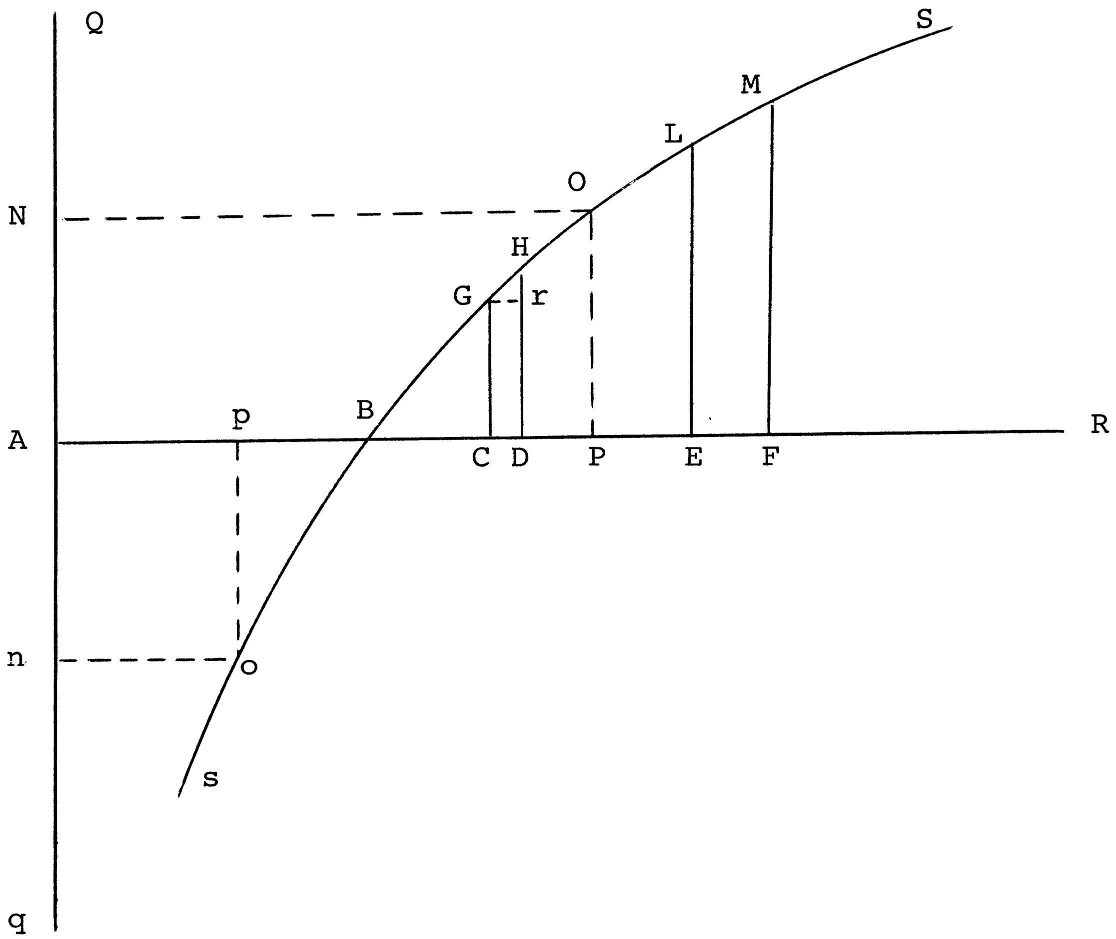
(1) note du trad. : le terme latin traduit ici par "utilité" est "emolumentum"[9]

§ 4. Donc, à ce point maintenant de nos déductions, chacun peut retenir un simple changement de vocable : mais, comme il y a là une hypothèse nouvelle, cela nécessitera quelque éclaircissement. J'ai dressé en conséquence des[10] modèles à présenter en bonne place, et que j'ai médités à cette fin. Mais, pour l'instant, voici la règle fondamentale que nous utiliserons : *Par multiplication de l'utilité, de chaque lot par le nombre de cas dans lesquels il est obtenu, sommation des produits et division par le nombre total de cas, on obtiendra sans faille une* utilité *moyenne et le gain correspondant à cette* utilité *équilibrera le sort considéré.*

§ 5. Ainsi, il est clair qu'aucune mesure du sort ne pourra s'obtenir sans que, simultanément, soit mise en évidence l'*utilité* qui, pour chacun, correspond à un gain, et, vice versa, quel est le gain requis pour valoir à quelqu'un une certaine utilité dont il est à peine possible de dire quelque chose de certain, tellement elle peut changer selon que les circonstances varient. Ainsi, quoique le plus souvent un pauvre se réjouira plus qu'un riche d'une même somme, cependant et par exemple, il est possible qu'un homme, captif, riche de deux mille ducats, duquel encore le même montant serait exigé pour prix de sa liberté, ressente davantage la valeur de ces deux mille ducats qu'un autre qui serait moins riche ; des exemples de ce genre peuvent être trouvés sans limite, mais leur occurence est fort rare. Nous examinerons donc principalement ce qui arrive le plus communément, et en outre, on comprend mieux la chose ainsi, nous estimerons que la fortune d'un homme peut être augmentée continuellement et progressivement par incréments infiniment petits. Il est hautement vraisemblable *qu'un petit gain, n'importe lequel, apporte*[11] *toujours une utilité inversement proportionnelle à la fortune totale.* Afin d'éclairer cette hypothèse, je dois dire ce que signifie pour moi la fortune totale, en fait, tout ce qui, vivres, vêtements, objets divers adaptés, procure ou donne largement, du nécessaire au superflu, toute satisfaction désirable, en sorte que personne ne peut dire qu'il n'a rien, celui qui meurt de faim excepté, que de plus la part principale de la fortune de chacun vient de sa capacité productive, mendicité même comprise : celui qui met en balance dix pièces d'or mendiées par an, celui-ci, n'accepte pas facilement cinquante pièces d'or étant entendu qu'il s'abstiendra ensuite de rien mendier ou acquérir par un autre moyen, jusqu'à ce que, ayant dépensé la dernière, il ait à cesser d'être ; plus encore, je doute que celui qui n'a rien, pressé pour quelque dette, accepte d'être libéré en même temps que de recevoir en don un montant largement plus grand, mais à ces mêmes conditions. Si, en réalité, le mendiant ne veut entrer dans ce pacte qu'à condition d'obtenir au moins cent pièces d'or, et le travailleur endetté, mille pièces d'or, nous dirons que la fortune du premier est de cent, celle du second de mille pièces d'or, bien que, dans le langage commun, l'un n'ait rien et l'autre moins que rien.

§ 6. Cette définition faite, je reviens à ce que j'indiquais au paragraphe supérieur, à savoir que, sauf intervention de quelque chose d'insolite, *l'utilité d'une toute petite somme peut être estimée inversement proportionnelle à la fortune.* Je considère assurément que, la nature des hommes étant bien ainsi d'ordinaire, il apparaît possible d'appliquer cette règle pour la plupart d'entre eux. Peu nombreux sont ceux qui ne dépensent pas tout leur revenu annuel : soit quelqu'un dont la fortune vaut cent mille ducats et un autre ayant le même montant en semi-ducats. Si celui-là obtient cinq mille ducats de revenu annnuel, celui-ci a par contre autant en semi-ducats ; il est visible qu'à tous égards un ducat est au premier ce qu'est un semi-ducat au second et qu'un gain en plus d'un ducat pour le premier ne vaut pas plus que ce que vaut au second un semi-ducat. Si donc, l'un et l'autre font un gain de un ducat, le second en a une utilité double puisqu'il a gagné deux semi-ducats et, comme la valeur de cet exemple est générale, je pense qu'il est superflu d'en apporter d'autres. Cette règle est vraie pour ceux, les plus nombreux, qui n'ont pas d'autre fortune que leur force industrieuse et qui, de celle-ci seule, sans interruption, doivent vivre. Il en est cependant pour lesquels un ducat est de plus d'importance que ne le sont plusieurs ducats pour d'autres moins riches qu'eux mais plus généreux. En fait, comme nous ne considérons dans ce qui suit qu'un seul et même homme, ceci ne nous concerne pas. Celui qui se réjouit moins du gain est aussi plus patient dans l'adversité. Mais pourtant, parce que, une fois ou l'autre, des causes particulières peuvent exister par lesquelles les choses sont autrement, j'étudierai le cas le plus général, puis je m'engagerai dans cette hypothèse spéciale afin de satisfaire ainsi tout le monde.

TABLE VII - FIGURE 5



§ 7. Que AB indique la fortune totale avant l'effet du sort. Ensuite AB ayant été prolongée, est construite au dessus de BR (2), la courbe BGS dont les ordonnées CG, DH, EL, FM etc. comme *utilités* correspondent aux abcisses BC, BD, BE, BF, etc. comme gains. Soient, en outre, m, n, p, q, etc. les nombres indiquant par combien de voies seront obtenus les gains BC, BD, BE, BF (3), etc.. *L'utilité* moyenne sera (suivant le § 4) $PO = \dfrac{m.\ CG + n.\ DH + p.\ EL + q.\ FM}{m + n + p + q}$ + etc. Si maintenant, sur la ligne AQ perpendiculaire à la ligne AR, AN = PO est posé, la droite NO - AB, c'est-à-dire BP, sera le gain à attendre légitimement du sort en question. Maintenant, si nous voulons savoir quelle somme doit être engagée pour acquérir ce sort, il faut continuer la courbe dans la partie opposée en sorte que maintenant l'abcisse Bp indique toujours une perte. Puisque dans un jeu fondamentalement juste, le dommage de la perte doit être égal à l'utilité du gain, on posera An = AN, soit encore po = PO et ainsi Bp indiquera l'engagement au delà duquel ne doit aller personne qui désire bien veiller à ses affaires.

Corollaire I

§ 8. Suivant l'hypothèse habituellement posée jusqu'à maintenant par les savants, selon laquelle tout gain doit être estimé seulement en lui-même, et donc toujours apporter à son détenteur une utilité simplement proportionnelle, que la ligne BS soit droite : de là, s'en suivra que, si $PO = \dfrac{m.CG+n.DH+p.EL+q.FM}{m+n+p+q}$ + etc, la proportionalité de l'un et l'autre terme ayant été admise, on aura :

$$BP = \frac{m.BC+n.BD+p.BE+q.BF}{m+n+p+q}$$ + etc, ce qui est conforme à la règle communément posée.

(2) note du trad. : transcrit par erreur BL dans le texte original
(3) " " " CF " "

Corollaire 2

§ 9. Si AB est infiniment grand par rapport au gain maximum BF qui peut être espéré, on considérera par l'arc BM est représentable par une ligne droite infiniment petite, et alors, dans ce cas, de nouveau, s'applique cette règle vulgaire qui, en particulier, convient bien pour tous les jeux dans lesquels les mouvements d'argent ne sont pas grands du tout.

§ 10. Après que nous ayons traité ainsi du sujet le plus généralement, revenons à cette hypothèse particulière mentionnée plus haut qui mérite d'être retenue vraiment avant toute autre. La première question à se poser concerne la nature de la courbe sBS ainsi désignée au septième paragraphe ; puisque selon cette hypothèse on doit considérer des gains infiniment petits, nous définirons des gains BC et BD presque égaux de façon que la différence CD soit infiniment petite ; une fois tracée Gr parallèlement à BR, l'*utilité* infiniment petite rH sera celle de cet homme dont les biens sont AC et qui fait un gain très petit CD. Il faut estimer cette utilité non seulement à partir du gain minuscule CD auquel, toutes choses égales d'ailleurs, elle est proportionnelle, mais aussi à partir de la fortune totale AC qu'elle suit en raison inverse. Donc, s'il est posé AC = x, CD = dx, CG = y , rH = dy, AB = α , et qu'il soit noté b une quantité constante quelconque, on aura $dy = \frac{bdx}{x}$ ou mieux, $y = b \log. \frac{x}{\alpha}$. Cette courbe sBS est logarithmique, de sous-tangente (4) partout = b et d'asymptote Qq.

§ 11. Si maintenant on rapproche ceci de ce qui a été dit au septième paragraphe, il apparaîtra qu'on a $PO = b \log. \frac{AP}{AB}$, $CG = b \log. \frac{AC}{AB}$, $DH = b \log. \frac{AD}{AB}$ et ainsi de suite ; donc, d'après $PO = \frac{m.CG + n.DH + p.EL + q.FM}{m + n + p + q}$ + etc., on a maintenant $b \log. \frac{AP}{AB} = (mb \log. \frac{AC}{AB} + nb \log. \frac{AD}{AB} + pb \log. \frac{AE}{AB} + qb \log. \frac{AF}{AB}$ + etc.) : (m + n + p + q + etc.); de ceci, on déduit : $AP = (AC^m \,.\, AD^n \,.\, AE^p \,.\, AF^q \,.\, \text{etc.})^{1 : (m+n+p+q+\text{etc.})}$ et quand de ceci sera soustrait AB, il restera BP représentant le sort en question.

(4) note du trad. : le terme latin est "subtangens". Nous laissons au lecteur le soin de trouver quelle est la représentation géométrique fort simple de $x \,.\, \frac{dy}{dx}$.

§ 12. Le paragraphe précédent fournit cette règle : *que chaque gain augmenté de la fortune initiale soit élevé à la puissance indiquée par le nombre correspondant de cas ; ensuite que toutes ces puissances soient multipliées entre elles et que de leur produit soit extraite la racine d'ordre indiqué par le nombre total de cas : alors et enfin, qu'il soit soustrait de cette racine la fortune initiale : le reste représentera le sort en question.* C'est là, pour mesurer le sort dans des cas variés, une proposition principale sur laquelle, comme il est fait habituellement en pareil cas, j'aurais bâti une théorie complète, travail qui pouvait se justifier tant par l'utilité que par la nouveauté, si d'autres travaux déjà acceptés m'en avaient laissé le loisir. Dans l'immédiat, je n'examinerai de tous les aspects qui me sont apparus au premier abord que les plus remarquables.

§ 13. D'abord, il apparaît que, même si les conditions d'un jeu sont parfaitement équitables, l'un et l'autre joueurs ont à en attendre un certain préjudice ; leçon de la nature, assurément remarquable, d'avoir à éviter les aléas ... Ceci vient de la concavité de la courbe sBS vers BR, en vertu de laquelle, si la mise Bp est égale au gain espéré BP, le *dommage* po issu de l'évènement défavorable [12] est toujours plus grand que l'utilité espérée PO. Bien que ceci soit assez clair pour les géomètres, je l'illustrerai cependant par un exemple afin que ce soit compris de tous. Soit deux partenaires ayant chacun une fortune de cent ducats et jouant la moitié de celle-ci, l'un contre l'autre, au sort, à chances égales. Ainsi, chacun se trouvera avec cinquante ducats et l'espoir de cent ducats. La somme de ces deux termes vaut, selon la règle du paragraphe 12, $(50^1 \cdot 150^1)^{1/2}$ soit $\sqrt{(50.150)}$, c'est-à-dire moins de quatre vingt sept ducats, en sorte que chaque partenaire, dans ce jeu parfaitement équitable, perd plus de treize ducats : et de fait, pour mettre en lumière maintenant cette vérité, que chacun perçoit naturellement d'instinct, à savoir, que l'imprudence à courir des risques est d'autant plus grande qu'on met en jeu une partie plus notable de sa fortune, nous étudierons le même exemple à cette seule différence près pour un partenaire de posséder deux cents ducats avant d'en miser cinquante : le dommage alors accepté s'exprime par $200 - \sqrt{150.250}$, soit à peine plus de six ducats.

§ 14. Puisque se comporte inconsidérément celui qui confie au hasard dans de telles conditions une partie, même minime, de sa fortune, il convient de rechercher quel avantage, quant à la mise d'argent, il devrait avoir sur son partenaire afin de pouvoir entrer dans le jeu sans préjudice. Nous construirons à nouveau un jeu très simple, avec deux éventualités seulement, également possibles, l'une favorable, l'autre contraire ; soit a le gain attaché à l'évènement favorable, x la mise perdue en cas de malchance, α la fortune totale ; ainsi donc on aura $AB = \alpha$; $BP = a$; $PO =$ (§ 10) $b \log. \frac{\alpha + a}{\alpha}$ et puisque (selon le § 7) on a $po = PO$ on aura, en raison de la nature logarithmique de la courbe, $Bp = \frac{\alpha a}{\alpha + a}$; or, Bp note la mise x ; on a donc $x = \frac{\alpha a}{\alpha + a}$ qui est une quantité toujours plus petite que le gain espéré a ; on déduit encore de celà, qu'il agit follement, celui qui [13] risque toute sa fortune dans l'espoir d'un gain, si grand soit-il, comme s'en persuadera sans difficulté celui qui suivra bien la chaîne de nos prémisses.

Suit ceci encore, qui semble unanimement perçu dans la vie civile, à savoir qu'un homme peut tenter avec raison une chose risquée et qu'un autre ne le peut pas.

§ 15. A ce propos, sont dignes notamment d'être étudiées les habitudes des[14] commerçants relatives à l'assurance des marchandises qui sont transportées par mer ; en fait, j'exposerai ceci en suivant un exemple. Caius, exerçant à Pétersbourg, a acheté des marchandises que, s'il les avait à Pétersbourg, il pourrait vendre pour dix mille roubles. Il s'occupe donc de les faire transporter par mer, mais il se demande s'il doit ou non se couvrir par une assurance. En attendant, il n'ignore pas que sur cent navires prenant le départ à cette saison d'Amsterdam pour Pétersbourg, cinq d'ordinaire périssent ; et cependant, il ne peut s'assurer pour un prix inférieur à huit cents roubles, ce qu'il estime anormal. La question est donc de savoir quelle fortune, non compris ces marchandises, doit avoir Caius pour pouvoir négliger avec raison de s'assurer : soit x celle-ci ; cette fortune jointe à l'espoir de faire rentrer heureusement les marchandises est :

$$\sqrt[100]{(x + 10000)^{95}\, x^5} = \sqrt[20]{(x + 10000)^{19}\, x}$$

s'il ne règle aucune prime d'assurance ; dans le cas contraire, il aura une fortune certaine x + 9200. Ces quantités sont égalées par :

$$(x + 10000)^{19}\, x = (x + 9200)^{20} \quad \text{soit environ } x = 5043.$$

Si par conséquent, Caius détient, non compris ces marchandises attendues,[15] plus de cinq mille quarante trois roubles, il fera bien en repoussant l'assurance, s'il a moins, en l'acceptant. Si la question est de savoir quelle est la fortune minimale que doit posséder celui qui a offert sa garantie pour huit cents roubles, étant entendu qu'il peut assumer avec raison cette garantie, posons sa fortune = y ; on aura $\sqrt[20]{(y + 800)^{19} \cdot (y - 9200)} = y$ soit approximativement y = 14243, nombre qui dérive sans autre calcul de la relation précédente. Celui qui moins riche offre sa garantie est inepte, tandis que celui qui est plus opulent le fait non sans raison. A partir de là, on comprend combien l'introduction de ce type de garantie est appropriée puisque l'une et l'autre partie peuvent en tirer une grande utilité. De même, si Caius peut obtenir une garantie pour six cents roubles, il serait imprudent en l'écartant s'il possédait moins de 20478 R, et timide dans ses actes, si, riche au delà de 20478, il assurait ses marchandises. De même, agirait inconsidérément celui qui possédant moins de 29878 R. offrirait sa garantie à Caius pour six cents roubles ; mais se conduit bien en le faisant celui qui possède davantage. Personne en tout cas, si riche soit-il, ne gèrerait bien ses affaires s'il offrait sa garantie pour cinq cents roubles.

§ 16. Dérive en outre de notre théorie une autre règle qui ne sera pas inutile aux hommes ; bien sûr, il est plus prudent de diviser en plusieurs parties des biens qui sont exposés au péril plutôt que de les placer en danger tous ensemble ; à nouveau, je vais développer ce point. Sempronius a des biens disponibles de 4000 ducats au total et possède, en sus, en terres étrangères, des marchandises pour 8000 ducats qu'on ne peut faire venir autrement que par mer. En outre, c'est un fait établi issu d'une longue pratique, que sur dix navires, un périt. Ceci étant posé, je dis que, pour Sempronius, la valeur attendue de ses marchandises, s'il les place toutes de

8000 ducats sur un seul navire, est de 6751 ducats, à savoir

$$\sqrt[10]{12000^9 \cdot 4000^1} - 4000$$

Si, au contraire, il hasarde ses marchandises, par parties égales, sur deux navires, leur valeur attendue pour lui est $\sqrt[100]{12000^{81} \cdot 8000^{18} \cdot 4000} - 4000$, soit 7033 ducats. Et ainsi augmente la valeur attendue pour Sempronius aussi longtemps que la part hasardée sur un navire diminue, sans cependant que cette valeur puisse excéder jamais 7200 ducats. Pareillement, ce qui vient d'être montré servira aussi à ceux qui placent leurs biens en lettres de change ou les exposent sous d'autres formes hasardeuses. 16

§ 17. Il y a certainement bien d'autres aspects tout à fait nouveaux et pas du tout inutiles sur lesquels je suis contraint de passer. Tout ceci, pour la plus grande partie, quelqu'un d'avisé le suit et le voit en quelque sorte sans le dire et par instinct naturel, mais personne sans doute n'aurait cru possible de le cerner aussi précisément, comme il est fait dans ces exemples. Puisqu'il en est ainsi, que toutes ces propositions si remarquables sont en accord avec ce que la nature nous apprend, on aurait tort, comme si c'étaient de simples règles fondées sur des hypothèses précaires, de les négliger. Le confirmera encore l'exemple suivant qui a été à l'origine de ces réflexions et dont l'histoire est la suivante : le distingué Nicolas Bernoulli, professeur à l'Université de Bâle de droit romain et canon, mon très honoré cousin germain, proposa un jour à l'illustre Montmort cinq problèmes qu'on peut voir (5) *dans l'analyse sur les jeux de hasard de Mr. de Montmort p. 402*. Celui-ci reprend ainsi le dernier de ces problèmes, *Pierre jette en l'air une pièce et refait de même jusqu'à ce que, à la chute à terre, face apparaisse pour la première fois : si ceci se produit au premier jet, il est tenu de donner à Paul un ducat ; si c'est au second, deux ; au troisième,* 17
quatre ; au quatrième, huit et ainsi de suite en doublant à chaque jet le nombre de ducats. On demande quel est le sort espéré de Paul ? (6)
Mon cousin susnommé a fait mention de ce problème dans une lettre qu'il m'a adressée car il désirait connaître mon opinion à ce sujet. Bien que le calcul montre que le sort espéré de Paul est infini, il n'est cependant personne sain d'esprit, dit-il, qui ne vendrait très volontiers son espoir de gain pour vingt ducats. Et en vérité, chaque fois qu'on est disposé à se fier aux règles usuelles de calcul, on trouve que la chance de Paul est infinie, bien qu'il n'y ait personne pour l'estimer à ce prix où même à un prix bien plus médiocre. De fait, en menant le calcul selon nos principes, on comprend précisément comment cette difficulté est résolue. Voici la solution du problème, conformément à nos principes.

(5) Note du trad. : le titre du livre de Montmort est en français dans le texte.

(6) Note du trad. : l'énoncé de ce problème est issu de sa transcription en latin selon Bernoulli puis de la traduction en français de cette transcription.

§ 18. Les cas à considérer ici sont infinis : dans la moitié d'entre eux, le jeu finira au premier jet ; dans le quart d'entre eux, il finira au second jet ; dans le huitième, au troisième, dans le seizième, au quatrième et ainsi de suite. Si le nombre total des cas, bien qu'infini, est désigné par N, il est patent que le nombre de cas dans lesquels Paul gagnera un ducat est :

$\frac{1}{2}$ N, deux ducats $\frac{1}{4}$ N, quatre $\frac{1}{8}$ N, huit $\frac{1}{16}$ N et ainsi sans fin.

Soit maintenant α la fortune totale de Paul et son sort espéré sera :

$$\sqrt[N]{(\alpha+1)^{N/2} \cdot (\alpha+2)^{N/4} \cdot (\alpha+8)^{N/16} \cdot \text{etc.}} - \alpha \quad \text{ou encore,}$$

$$= \sqrt{(\alpha+1)} \cdot \sqrt[4]{(\alpha+2)} \cdot \sqrt[8]{(\alpha+4)} \cdot \sqrt[16]{(\alpha+8)} \cdot \text{etc.} - \alpha$$

§ 19. De cette formule donnant le sort de Paul, il ressort que celui-ci croît avec sa fortune mais n'atteindra jamais l'infini sauf si sa fortune est infinie. Voici des corollaires particuliers. Si Paul ne possède rien, son sort sera $\sqrt[2]{1} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{4} \cdot \sqrt[16]{8} \cdot \text{etc.}$, ce qui fait précisément deux ducats. S'il possède dix ducats, la valeur attendue pour lui sera à peu près de trois, de quatre s'il possède un peu plus de cent et enfin de six s'il possède mille. On trouve aisément à partir de là quelle immense fortune devrait posséder Paul pour pouvoir acheter avec raison cette loterie pour vingt ducats. Le prix auquel il devrait acheter diffère de la valeur du droit de jouer déjà possédé, mais cependant la différence est si petite lorsque α est grand qu'on peut les considérer égaux : x, le prix d'achat correctement établi est déterminé par l'équation :

$$\sqrt[2]{(\alpha+1-x)} \cdot \sqrt[4]{(\alpha+2-x)} \cdot \sqrt[8]{(\alpha+4-x)} \cdot \sqrt[16]{(\alpha+8-x)} \cdot \text{etc.} = \alpha$$

à laquelle satisfait à peu près, lorsque α est grand, cette valeur

$$x = \sqrt[2]{(\alpha+1)} \cdot \sqrt[4]{(\alpha+2)} \cdot \sqrt[8]{(\alpha+4)} \cdot \sqrt[16]{(\alpha+8)} \cdot \text{etc.} - \alpha$$

Cette communication ayant été présentée à l'Académie, j'en ai envoyé copie[18] *au distingué Nicolas Bernoulli, cité plus haut, afin de savoir ce qu'il penserait de ma proposition pour résoudre son problème. Et de fait, dans une lettre qu'il m'a écrite en l'an 1732, il atteste que ma manière de voir la mesure des sorts ne lui déplait nullement, pour autant que quelqu'un ait à estimer son sort mais non, comme cela peut arriver, si un tiers, à l'instar d'un juge, doit fixer en toute équité et justice le sort de l'une et l'autre parties. Moi-même, j'ai exposé ceci semblablement au paragraphe 2. Cet éminent* *magistrat m'a communiqué ensuite l'avis donné par le distingué Cramer il y a quelques années sur ce même problème, l'exposé duquel j'ai trouvé à ce point conforme à ma propre rédaction qu'il est merveilleux que nous ayons pu nous trouver en accord aussi précisément en un tel sujet. Dans ces conditions, il vaut la peine de présenter le texte par lequel le distingué Cramer a présenté sa position dans la lettre qu'il a envoyée à mon cousin en l'an 1728 : le voici :*

(7) "Je ne sai si je ne me trompe, mais je crois tenir la résolution du cas
" singulier, que Vous avez proposé à Mr. de Montmort dans Votre lettre du
" 9. 7bre 1713. Probl. 5. pag. 402. Pour rendre le cas plus simple, je sup-
" poserai que A jette en l'air une pièce de monnoye, B s'engage de lui donner
" 1 ecu si le côté de la croix tombe le premier coup, 2 si ce n'est que le
" second, 4 si c'est le troisième coup, 8 si c'est le quatrième coup etc.
" Le paradoxe consiste en ce que le calcul donne pour l'équivalent que A doit
" donner à B une somme infinie, ce qui paroit absurde, puisqu'il n'y a per-
" sonne de bon sens, qui voulut donner 20 ecus. On demande la raison de cette
" différence entre le calcul mathématique et l'estime vulgaire. Je crois
" qu'elle vient de ce que ("dans la theorie") les mathematiciens estimant
" l'argent à proportion de sa quantité & ("dans la pratique") les hommes de
" bon sens à proportion de l'usage qu'ils en peuvent faire. Ce qui rend l'es-
" pérance mathematique infinie c'est la somme prodigieuse que je peux recevoir
" si le côté de la croix ne tombe que bien tard, le centieme ou le millieme
" coup. Or cette somme si je raisonne en homme sensé, n'est pas plus pour moi,
" ne me fait pas plus de plaisir, ne m'engage pas plus à accepter le parti,
" que si elle n'etoit que 10 ou 20 millions d'ecus. Supposans donc que toute
" somme au dessus de 10 millions ou (pour plus de facilité) au dessus de
" 2^{24} = 166777216 d'ecus lui est egale, ou plutot que je ne puisse jamais
" recevoir plus de 2^{24} ecus, quelque tard que vienne le coté de la croix, et
" mon espérance sera $\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{8} \times 4 + \ldots + \frac{1}{2^{25}} \times 2^{24} + \frac{1}{2^{26}} \times 2^{24} +$
" $\frac{1}{2^{27}} \times 2^{24}$ + ec.
" $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$ jusqu'à 24 termes, $+ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ + &c.
" = 12 + 1 = 13. Ainsi moralement parlant mon esperance est reduite à 13 ecus
" et mon equivalent à autant, ce qui paroit bien plus raisonnable que de le
" faire infini."

(7) Note du trad. : La lettre de Cramer, citée par Bernoulli, est en français dans le texte.

Içi, cette explication de la solution est vague et exposée à la critique ; s'il est vrai que la somme 2^{25} ne doit pas nous apparaître plus grande que 2^{24}, aucune attention du tout ne sera portée à une somme qui pourrait être acquise après le vingt-quatrième jet car juste avant que le vingt-cinquième jet soit à faire, je possède déjà $2^{24} - 1$ qui ne diffère pas dans cette théorie de 2^{24}. Donc, on peut dire que mon espérance vaut aussi bien 12 écus que 13. Je ne dis nullement ceci pour attaquer le principe de base de l'auteur, qui est aussi le mien, que les hommes de bon sens doivent estimer l'argent à proportion de l'usage qu'ils en peuvent faire, *mais bien plutôt pour qu'on ne puisse en tirer prétexte pour mésestimer cette théorie. Et de fait, l'illustre Cramer met encore en relief ce même principe dans les termes suivants qui répondent parfaitement à notre propre sentiment. Il termine donc ainsi :*

" On le (l'equivalent) pourra encor trover plus petit en faisant quelque
" autre supposition de la valeur morale de richesses ; car celle que je
" viens de faire n'est pas exactement juste, puisqu'il sera vrai que 100.
" millions font plus de plaisir de 10 millions quoiqu'ils n'en fassent pas
" 10. fois plus. Par exemple si l'on vouloit supposer que la valeur morale
" des biens fut comme la racine quarrée de leurs quantités mathematiques,
" c'est-à-dire, que le plaisir que me fait 40000000. fut double du plaisir
" que me fait 10000000., alors mon esperance morale seroit

" $\frac{1}{2}\sqrt{1} + \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\sqrt{4} + \frac{1}{16}\sqrt{8} + \text{etc.} = \frac{1}{2-\sqrt{2}}$. Mais cette quantité n'est

" pas l'equivalent, car l'equivalent doit etre non pas egal à mon esperance
" mais tel que le chagrin de sa perte soit egal à l'esperance morale du
"plaisir que j'espere de recevoir en gagnant. Donc l'equivalent doit etre

" (par supposition) $\left(\frac{1}{2-\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{6-4\sqrt{2}}$ = 2,9 &c., moins que 3 ce qui

" est bien mediocre & que je crois pourtant aprocher plus de l'estime vul-
"gaire que 12. &c.[19]

NOTES DE LA RÉDACTION

1 L'ensemble des informations et des remarques contenues dans ces notes est dû à Bernard BRU.

Buffon a donné également une réponse analogue au "paradoxe de Saint-Petersbourg", vers la même époque. Il écrit dans son *Essai d'arithmétique morale*, Histoire Naturelle, 4^e supplément, 1777 = *Oeuvres complètes*, t.XIII, Paris (Baudouin), 1827 (p.33) :

"Cette question m'a été proposée pour la première fois par feu M. Cramer, célèbre professeur de mathématiques à Genève, dans un voyage que je fis en cette ville en l'année 1730."

Et il précise (p.33-35) :

"Voici ce que j'en laissai alors par écrit à M. Cramer, et dont j'ai conservé la copie originale.

"M. de Montmort se contente de répondre à M. Nicolas Bernoulli que l'équivalent est égal à la somme de la suite $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, etc. écu, continuée à l'infini, c'est-à-dire $= \frac{\infty}{2}$, et je ne crois pas qu'en effet on puisse contester son calcul mathématique ; cependant, loin de donner un équivalent infini, il n'y a point d'homme de bon sens qui voulût donner vingt écus, ni même dix.

La raison de cette contrariété entre le calcul mathématique et le bon sens me semble consister dans le peu de proportion qu'il y a entre l'argent et l'avantage qui en résulte. Un mathématicien, dans son calcul, n'estime l'argent que par sa quantité, c'est-à-dire par sa valeur numérique : mais l'homme moral doit l'estimer autrement, et uniquement par les avantages ou le plaisir qu'il peut procurer ; il est certain qu'il doit se conduire dans cette vue, et n'estimer l'argent qu'à proportion des avantages qui en résultent, et non pas relativement à la quantité qui, passé de certaines bornes, ne pourroit nullement augmenter son bonheur : il ne seroit, par exemple, guère plus heureux avec mille millions qu'il le seroit avec cent, ni avec cent mille millions plus qu'avec mille millions : ainsi, passé de certaines bornes, il auroit très grand tort de hasarder son argent. Si, par exemple, dix mille écus étoient tout son bien, il auroit un tort infini de les hasarder ; et plus ces dix mille écus seront un objet par rapport à lui, plus il aura de tort. Je crois donc que son tort seroit infini tant que ces dix mille écus feront une partie de son nécessaire, c'est-à-dire tant que ces dix mille écus seront absolument nécessaires pour vivre comme il a été élevé et comme il a toujours vécu. Si ces dix mille écus sont de son superflu, son tort diminue ; et plus ils seront une petite partie de son superflu, plus son tort diminuera : mais il ne sera jamais nul, à moins qu'il ne puisse regarder cette partie de son superflu comme indifférente, ou bien qu'il ne regarde la somme espérée comme nécessaire pour réussir dans un dessein qui lui donnera, à proportion, autant de plaisir que cette même somme est plus grande que celle qu'il hasarde, et c'est sur cette façon d'envisager un bonheur à venir qu'on ne peut point donner de règles ; il y a des gens pour qui l'espérance elle-même est un plaisir plus grand que ceux qu'ils pourroient se procurer par la jouissance de leur mise. Pour raisonner donc plus certainement sur toutes ces choses il faudroit établir quelques principes : je dirois, par exemple, que le nécessaire est égal à la somme qu'on est obligé de dépenser pour continuer à vivre comme on a toujours vécu : le nécessaire d'un roi sera, par exemple, dix millions de rente (car un roi qui auroit moins seroit un roi pauvre) ; le nécessaire d'un homme de condition seroit dix mille livres de rente (car un homme de condition qui auroit moins seroit un pauvre seigneur) ; le nécessaire d'un paysan sera cinq cents livres, parce qu'à moins d'être dans la misère il ne peut moins dépenser pour vivre et nourrir sa famille. Je supposerois que le nécessaire ne peut nous procurer des plaisirs nouveaux, ou, pour parler plus exactement, je compterois pour rien les plaisirs ou avantages que nous avons toujours eus, et d'après cela je définirois le superflu ce qui pourroit nous procurer d'autres plaisirs ou des avantages nouveaux : je dirois, de plus, que la perte du nécessaire se fait ressentir infiniment, qu'ainsi elle ne peut être compensée par aucune espérance ; qu'au contraire le sentiment de la perte du superflu est borné, et que par conséquent il peut être compensé. Je crois qu'on sent soi-même cette vérité lorsqu'on joue, car la perte, pour peu qu'elle soit considérable, nous fait toujours plus de peine qu'un gain égal ne nous fait de plaisir, et cela sans qu'on puisse y faire entrer l'amour-propre mortifié, puisque je suppose le jeu d'entier et pur hasard. Je dirois aussi que la quantité de l'argent dans le nécessaire est proportionnelle à ce qui nous en revient, mais que, dans le superflu, cette proportion commence à diminuer, et diminue d'autant plus que le superflu devient plus grand.

Je vous laisse, monsieur, juge de ces idées, etc. Genève, ce 3 octobre 1730. *Signé* Le Clerc de Buffon." "

2 De 1738. Il est publié dans le tome II des *Werke* de Daniel Bernoulli, en 1982, chez Birkhäuser à Bâle.

3 Il existe aussi une traduction allemande : Pringsheim, Alfred, *Die Grundlage der modernen Wertlehre : Daniel Bernoulli, Versuch einer neuen Theorie der Wertbestimmung von Glücksfällen*, Leipzig(Dancher und Humboldt), 1896. Avec une introduction de L. Fick et de nombreuses notes bibliographiques intéressantes.

4 Loterie = *expectatio* , qu'on peut aussi traduire par espérance.

5 C'est la règle de C. Huygens (voir Jacob Bernoulli, *Werke*, t.III, p.110-114 de *Ars conjectandi*).

6 Désagréger = *resolvere*, qu'on pourrait aussi traduire par décomposer.

7 Voir les notes p.110-111 de l'ouvrage cité de J. Bernoulli dans la note 5, ainsi que, dans le même volume, celles p.290-291 de *De usu artis conjectandi in jure* de Nicolas I Bernoulli.

8 C'est une réponse probable à la première partie de la lettre de Nicolas I Bernoulli, citée plus loin dans le § 18 (voir p.566 du tome I des *Werke* de Jacob Bernoulli).

9 En allemand : *Vorteil* ; en anglais : *utility*.

10 Modèle = *specimen*.

11 Fortune totale = *summa bonorum*, que Laplace traduit par fortune physique. Il énonce à ce propos p.441 de sa *Théorie analytique des probabilités* (t.VII de ses *Oeuvres complètes*) :

" x étant la fortune physique d'un individu, l'accroissement dx qu'elle reçoit produit à l'individu un bien moral [[bien moral = *emolumentum* de Daniel Bernoulli]] réciproque à cette fortune ; l'accroissement de sa fortune morale peut donc être exprimé par $\frac{k\,dx}{x}$, k étant une constante. Ainsi, en désignant par y la fortune morale correspondante à la fortune physique x , on aura

$$y = k \log x + \log h ,$$

h étant une constante arbitraire que l'on déterminera au moyen d'une valeur de y correspondante à une valeur donnée de x ."

12 Dommage = *detrimentum*.

13 Cet exemple est donné sous une forme plus générale par Laplace, p.442-443 de sa *Théorie analytique des probabilités*.

14 Voir p.318-319 de l'ouvrage de Nicolas I Bernoulli cité dans la note 7, ainsi que G.J. 's Gravesande, *Introduction à la philosophie, contenant la métaphysique et la logique*, 1737, traduit du latin par M. de Joncourt (l'original est de 1736), qui traite p.245 de l'application du calcul des probabilités à l'assurance maritime.

15 Cet exemple est traité par Laplace p.447-448 de sa *Théorie analytique des probabilités*.

Cette solution donnée au paradoxe des assurances a été critiquée par de nombreux auteurs, en particulier par A.A. Cournot dans le ch.XIV, n° 184, de son *Exposition de la théorie des chances et des probabilités* (t.I des *Oeuvres complètes*, édité par B. Bru).

16 Comme l'a remarqué I. Todhunter, dans *A history of the mathematical theory of probability*, Bronx(Chelsea), 1965 (p.220) :

"The proposition is certainly by no means easy."

La première démonstration connue est due à Laplace, p.443-446 de sa *Théorie analytique des probabilités*.

Le problème du § 16 peut se formuler de la façon suivante :

Un marchand dispose d'une fortune totale α et en outre de marchandises de valeur vénale A, réparties également sur n navires $(1,2,\ldots,n)$ qui ont chacun, et indépendamment des autres, la même probabilité p d'arriver à bon port (et $1-p$ de faire naufrage).

Pour simplifier, on note $f(x) = b \operatorname{Log} \frac{\alpha+x}{\alpha}$ (§ 10) la fonction d'utilité du marchand qui fixe l'avantage moral que tire le marchand d'une augmentation de sa fortune totale de x.

On désigne par X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le navire n° i arrive à bon port et 0 sinon ($1 \leqslant i \leqslant n$).

La valeur vénale des marchandises arrivées à bon port est

$$\frac{A}{n}(X_1+\ldots+X_n) ,$$

c'est une martingale (descendante) en n, d'espérance mathématique fixe Ap.

L'utilité de cette valeur vénale pour le marchand est

$$f(\frac{A}{n}(X_1+\ldots+X_n)) ,$$

c'est donc une sous-martingale d'espérance croissante vers $f(Ap)$:

$$E[f(\frac{A}{n-1}(X_1+\ldots+X_{n-1}))] \leqslant E[f(\frac{A}{n}(X_1+\ldots+X_n))] \leqslant f(Ap) .$$

Par conséquent la valeur (physique) de l'espérance morale du marchand vérifie les inégalités de Bernoulli

$$f^{-1}\{E[f(\frac{A}{n-1}(X_1+\ldots+X_{n-1}))]\} \leqslant f^{-1}\{E[f(\frac{A}{n}(X_1+\ldots+X_n))]\} \leqslant Ap .$$

De plus, comme Laplace l'a montré (p.445-446 de la *Théorie analytique des probabilités*), améliorant encore l'énoncé de Bernoulli, la "valeur" de l'espérance morale du marchand qui a placé son bien sur n navires s'approche d'autant plus de la valeur de l'espérance mathématique Ap, que n est grand. La démonstration de Laplace, qui conserve tout son intérêt, est évidemment assez différente, mais elle utilise explicitement la propriété de concavité du logarithme ; on peut donc considérer ces résultats de Bernoulli-Laplace comme des signes annonciateurs des premières inégalités générales de convexité.

Curieusement Daniel Bernoulli ne semble pas avoir remarqué que les valeurs vénales des marchandises arrivées à bon port,

$$\frac{A}{n}(X_1+\ldots+X_n) \ ,$$

sont d'autant plus concentrées autour de leur moyenne commune Ap que n est grand, ce qui réconcilie beaucoup plus simplement le calcul des probabilités et le bon sens populaire. T. Simpson sera sans doute le premier à faire cette remarque vers 1750 dans le contexte de la théorie des erreurs (*Miscellaneous Tracts*, 1757, p.65-75).

Pour d'autres remarques sur ces questions, on consultera l'intéressant article de O. Sheynin : *D.Bernoulli's work on probability*, réédité dans *Studies in the History of Statistics and Probability*, vol.II, ed. M. Kendall and R.L. Plackett, Griffin, 1977, p.105-132.

17 Pour l'historique du problème de Pétersbourg voir p.557-567 du t.I des *Werke* de Jacob Bernoulli.

Ce problème est à l'origine de très nombreuses recherches : voir les *Werke* de Jacob Bernoulli, ainsi que la traduction de Pringsheim citée dans la note 3.

Pour une présentation moderne de la question voir :

- K. Menger, *Das Unsicherheitsmoment in der Wertlehre. Betrachtungen im Anschluß an das sogenante Petersburger Spiel* (Zeitschrift f. Nationalökonomie, 5(1934), 459-485) ;
- W. Doeblin (Bull. Sci. Math., 63(1939), 56-58) ;
- W. Feller, *An Introduction to Probability Theory*, vol.I, ch.X, n°4 ;
- J. Aaronson, *Sur le jeu de Saint-Pétersbourg* (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, série A, 286(1978), 839-842).

18 Voir la note 8.

19 Ce mémoire de Daniel Bernoulli a été traduit en français, à partir de la traduction aglaise signalée dans l'*Avertissement*, dans la *Revue de Statistique Appliquée*, t.19(1971), n° 3, p.5-18.