CAHIERS DU SÉMINAIRE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

MICHEL WALDSCHMIDT

Les débuts de la théorie des nombres transcendants (à l'occasion du centenaire de la transcendance de π)

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1re série, tome 4 (1983), p. 93-115

<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1983__4__93_0>

LES DÉBUTS DE LA THÉORIE DES NOMBRES TRANSCENDANTS
(À L'OCCASION DU CENTENAIRE DE LA TRANSCENDANCE DE π)

PAR MICHEL WALDSCHMIDT*

Cet exposé est consacré à la théorie des nombres transcendants de 1844 à 1900. La première date représente, en quelque sorte, la date de naissance du premier nombre transcendant. La seconde a été choisie principalement à cause du septième problème de Hilbert : sa solution, obtenue en 1934 par Gel'fond et Schneider (après des travaux de Polya en 1914 et Siegel en 1929, notamment), a été la source d'une ère nouvelle pour cette théorie, comme Hilbert l'avait prédit.

Voici quels ont été les événements importants pour la période qui nous intéresse.

En 1844, dans deux notes aux *Comptes Rendus*, Liouville démontre l'existence de nombres transcendants et en donne les premiers exemples. Il développe ce travail en 1851, dans le *Journal de Liouville*.

En 1873, Hermite publie quatre notes aux *Comptes Rendus*, dans lesquelles il démontre la transcendance du nombre e , et crée la méthode qui va être à la base des principaux progrès futurs.

En 1874 paraît le texte de Cantor où celui-ci obtient une nouvelle démonstration de l'existence de nombres transcendants ; il montre plus précisément que les nombres réels transcendants sont denses dans $\mathbb{R}$.

En 1882 Lindemann démontre la transcendance de π , il explique comment sa démonstration s'étend à la transcendance de e^{α} pour α algébrique non nul (théorème de Hermite-Lindemann), et il énonce un théorème général sur l'indépendance linéaire de

$$e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}$$

sur $\overline{\mathbb{Q}}$ quand $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des nombres algébriques deux à deux distincts (théorème de Lindemann-Weierstrass).

Enfin en 1885 paraît le mémoire de Weierstrass avec les démonstrations complètes des résultats énoncés par Lindemann.

---

* Conférence donnée le 14 avril 1982 au Séminaire d'Histoire des Mathématiques.

Avant d'étudier cette période plus en détail nous donnerons un bref aperçu sur les travaux antérieurs. Nous verrons que les démonstrations d'irrationalité s'accompagnaient généralement de conjectures sur la transcendance.

§ 1. Avant 1844 : la préhistoire.

Nous nous contenterons, pour cette période, de donner quelques points de repères historiques, avec des références.

Le sujet qui nous intéresse a des racines dans l'antiquité. Le problème de la quadrature du cercle a été certainement la principale motivation des recherches sur les nombres transcendants au XIX^e siècle (voir le *Numéro Special* π du *Petit Archimède*, n° 64-65, 1980, ainsi que *L'histoire des Nombres Mystérieux* π , e , C , i par P. Dubreil dans *Les grands courants de la pensée mathématique*, éd. Le Lionnais, 1962). D'autre part la transcendance est fille de l'irrationalité, dont la découverte par les mathématiciens grecs a fait couler beaucoup d'encre (voir par exemple Ph. Jones, *Irrationals or incommensurables*, The Math. Teacher (1956) vol.48, 49, 50). Enfin les méthodes de transcendance permettent de résoudre des "problèmes diophantiens", notamment des équations en nombres entiers.

Le concept de nombre transcendant, ou de fonction transcendante, s'est dégagé petit à petit, au fur et à mesure que l'algèbre progressait. Le mot "transcendant" est déjà utilisé par Leibniz en 1704.

La première démonstration d'irrationalité pour un nombre qui (on le saura plus tard) est transcendant est celle d'Euler en 1737, pour les nombres e et e^2 , grâce aux développements en fraction continue (*De fractionibus continuis dissertatio*, Commentarii Acad. Sci. Petropolitanae, 9(1737), 1744, p.98-137 ; *Opera Omnia* Ser. I vol.14, *Commentationes Analyticae*, p.187-215).

L'énoncé de ce qui deviendra, en 1900, le septième problème de Hilbert sur la transcendance de

$$\frac{\log \alpha_1}{\log \alpha_2},$$

quand α_1 , α_2 sont des nombres algébriques multiplicativement indépendants, se trouve déjà, pour l'essentiel, dans l'*Introductio in Analysin Infinitorum* d'Euler (Lausanne, 1748, t.I Chap. VI § 105 ; *Opera Omnia* Ser. I vol. 8 p.108-109).

Enfin, en 1775, Euler formule l'opinion que le nombre π doit être transcendant (*De relatione inter ternas pluresve quantitates instituenda; Opuscula Analytica* 2(1785) 91-101 (14 août 1775) ; *Opera Omnia* Ser. I vol. 4, *Commentationes*

Arithmeticae, p.136-146 ; en particulier § 10, p.141-142).

Le *Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques* (Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 17 (1761), 1768, p.265-322 ; lu en 1767 ; *Math. Werke* t.II) de Lambert marque un progrès important, à la fois pour les résultats, et pour les réflexions qu'il contient, notamment sur le lien entre la transcendance de π et l'impossibilité de la quadrature du cercle.

Lambert commence par remarquer que la somme de la série

$$\frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{7.9} + \dots$$

est égale à 1 , et que, si on omet un terme sur deux,

$$\frac{2}{1.3} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{9.11} + \frac{2}{13.15} + \dots ,$$

on trouve $\frac{\pi}{4}$. "Si c'était une quantité rationnelle", dit-il, "on doit assez naturellement conclure qu'elle sera ou un nombre entier ou une fraction très simple ... Mais comme, après la fraction $\frac{11}{14}$ trouvée par Archimède, qui ne donne qu'un à peu près, on passe à celle de Metius $\frac{355}{452}$ qui n'est pas non plus exacte, et dont les nombres sont considérablement plus grands, on doit être fort porté à conclure que la somme de cette suite, bien loin d'être une fraction simple, est une quantité irrationnelle."

Après avoir reconnu que ce raisonnement ne suffira pas à convaincre les géomètres qui s'attachent à résoudre la quadrature du cercle, il entreprend une démonstration rigoureuse de l'irrationalité de π , puis de $\operatorname{tg} a$ et de e^a pour a rationnel non nul. Comme chez Euler (qu'il ne cite pas), l'outil de base est le développement en fraction continue, par exemple

$$\frac{e^a-1}{e^a+1} = [\ 1\ ,\ \frac{2}{a}\ ,\ \frac{6}{a}\ ,\ \frac{10}{a}\ ,\ \dots\ ]\ .$$

Lambert termine (§ 89 à 91) en conjecturant que les nombres dont il a démontré l'irrationalité sont en fait transcendants, et il conclut : "dans ce cas, la longueur de l'arc sera une quantité transcendante, ce qui veut dire irréductible à quelque quantité rationnelle ou radicale, et par là elle n'admet aucune construction géométrique".

Ce n'est qu'en 1837 que P. Wantzel, dans ses *Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas* (J. Math. Pures et Appl., (1) 2, 1837, 366-372) donnera une démonstration rigoureuse de cette dernière affirmation de Lambert.

Le mémoire de Lambert a été complété en 1794 par une note de A.M. Legendre (*Eléments de géométrie*, Note IV, p.289-296 - 12^{e} éd. 1823). Après avoir exposé l'irrationalité de π et de tg a (pour $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$), Legendre démontre l'irrationalité de π^2, et conjecture la transcendance de π : "Il est probable que le nombre π n'est même pas compris dans les irrationnelles algébriques, c'est-à-dire, qu'il ne peut être la racine d'une équation algébrique d'un nombre fini de termes dont les coefficients sont rationnels : mais il paraît très difficile de démontrer rigoureusement cette proposition."

Une autre démonstration de l'irrationalité de π^2, mentionnée à la fin du mémoire de Lindemann, est due à Hermite en 1873 (Borchardt's Journal, 76, 1873, p.342).

La démonstration, maintenant classique, de l'irrationalité de e à partir de la série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$$

est due à Fourier (1815) et a été étendue par Liouville en 1840 pour redémontrer le résultat d'Euler : e et e^2 ne sont ni rationnels, ni quadratiques (*Sur l'irrationalité du nombre* e, J. Math. Pures et Appl., (1), 5 (1840), p.192 ; *Additif à la note sur l'irrationalité du nombre* e, J. Math. Pures et Appl., (1), 5 (1840), p.193). Ces travaux de "l'illustre géomètre" seront cités par Hermite.

§ 2. Liouville (1809-1882).

La première démonstration de transcendance a été publiée par Liouville dans les *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* (t.18, 1844, 883-885) dans la séance du 13 mai 1844, simplifiée la semaine suivante (t.18, 1844, 910-911), et développée sept ans plus tard, dans son fameux mémoire *Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique ni même réductible à des irrationnelles algébriques* (J. Math. Pures et Appl.*, (1), 16 (1851), 133-142).

Le premier exemple de nombre transcendant qu'il ait obtenu était construit à l'aide de fractions continues, mais dès sa première note sur le sujet il cite l'exemple du nombre

$$\sum_{n \geq 1} \ell^{-n!}$$

quand ℓ est un nombre entier positif. Dans son mémoire de 1851, il étend cette

* C'est le célèbre "Journal de Liouville".

étude au cas où ℓ est un entier de Gauss (c'est-à-dire dans $\mathbf{Z}[i]$) non nul. D'autre part, pour le résultat qu'il obtient sur la transcendance de nombres de la forme

$$\sum_{n\geqslant 1} k_n\, 10^{n!}$$

avec $0 \leqslant k_n \leqslant 9$, il écrit : "Je crois me souvenir qu'on trouve un théorème de ce genre dans une lettre de Goldbach à Euler ; mais je ne sache pas que la démonstration en ait jamais été donnée."

La base de la construction de Liouville est la remarque suivante. Si α est un nombre algébrique de polynôme minimal (à coefficients dans $\mathbf{Z}$)

$$P(X) = a_0 \prod_{j=1}^{d} (X-\alpha_j) \ ,$$

avec $\alpha_1 = \alpha$, et si $\frac{p}{q}$ est un nombre rationnel* distinct de α , alors $P(\frac{p}{q}) \neq 0$. Donc $q^d\, P(\frac{p}{q})$ est un entier rationnel non nul, et on a

$$q^d \left|P(\tfrac{p}{q})\right| \geqslant 1 \ .$$

Mais

$$P(\tfrac{p}{q}) = a_0(\tfrac{p}{q} - \alpha) \prod_{j=2}^{d} (\tfrac{p}{q} - \alpha_j) \ .$$

Si $|\alpha - \frac{p}{q}| \leqslant 1$, on a, pour $2 \leqslant j \leqslant d$,

$$|\tfrac{p}{q} - \alpha_j| \leqslant 1 + |\alpha - \alpha_j|$$

et on trouve

$$q^d\, |a_0|\, |\alpha - \tfrac{p}{q}| \prod_{j=2}^{d} (1 + |\alpha-\alpha_j|) \geqslant 1 \ .$$

Cette inégalité est encore vraie si $|\alpha - \frac{p}{q}| > 1$. On définit alors un nombre $c(\alpha) > 0$, ne dépendant que de α , par

$$\frac{1}{c(\alpha)} = |a_0| \prod_{j=2}^{d} (1 + |\alpha-\alpha_j|)$$

et on obtient l'énoncé suivant.

---

* On écrit $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$ pour $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{Z}$ et $q > 0$.

Inégalité de Liouville. Si α *est un nombre algébrique de degré* d *, il existe un nombre réel positif* $c(\alpha)$ *tel que pour tout nombre rationnel* $\frac{p}{q}$ *, avec* $q > 0$ *et* $\frac{p}{q} \neq \alpha$ *, on ait*

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \geqslant c(\alpha)\, q^{-d} .$$

Voici comment Liouville l'utilise. Choisissons un entier $\ell \geqslant 2$, et considérons le nombre

$$x = \sum_{n \geqslant 1} \ell^{-n^2} .$$

On obtient de bonnes approximations rationnelles de x en considérant les sommes partielles: soit m un entier positif (tout à l'heure on lui demandera d'être suffisamment grand par rapport à α et ℓ) ; posons

$$q = \ell^{m^2} ,$$

et

$$p = \sum_{n=1}^{m} \ell^{m^2-n^2} .$$

Alors on a

$$0 < x - \frac{p}{q} = \sum_{n>m} \ell^{-n^2} < \frac{2}{\ell^{2m+1}\, q} .$$

Si x était rationnel, l'inégalité de Liouville donnerait

$$x - \frac{p}{q} \geqslant \frac{c(\alpha)}{q} ,$$

ce qui est incompatible avec l'inégalité précédente dès que

$$\ell^{2m+1} > \frac{2}{c(\alpha)} ,$$

donc dès que m est suffisamment grand. Par conséquent x est irrationnel. Il faut noter que cette méthode pour démontrer l'irrationnalité d'un nombre est l'une des plus utilisées. C'est elle par exemple qui apparaît dans la démonstration par Apéry de l'irrationalité de $\zeta(3)$. La puissance de ce critère vient de ce que sa réciproque est vraie. Plus précisément, *si* x *est un nombre réel, les trois conditions suivantes sont équivalentes* :

(*i*) x *est irrationnel* ;

(*ii*) *il existe une suite* $\frac{p_n}{q_n}$ *de nombres rationnels deux à deux distincts tels que*

$$q_n \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \to 0$$

quand $n \to +\infty$;

(*iii*) *pour tout réel* $Q > 1$, *il existe* $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $1 \leqslant q < Q$, *avec*

$$0 < |qx-p| \leqslant \frac{1}{Q} .$$

L'implication (*iii*) $\Rightarrow$ (*ii*) est banale. L'implication (*ii*) $\Rightarrow$ (*i*) se déduit de l'inégalité de Liouville avec $d = 1$; on peut refaire la démonstration en écrivant que, si $x = \frac{a}{b}$ est rationnel, alors, pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $\frac{p}{q} \neq \frac{a}{b}$, on a

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{bq} .$$

Enfin (*i*) $\Rightarrow$ (*iii*) est un théorème de Dirichlet (1842)*, dont la démonstration repose sur le principe des tiroirs. On se ramène d'abord au cas où Q est entier (sinon on remplace Q par sa partie entière +1). On considère les $Q+1$ nombres

$$0,\ 1,\ x-[x],\ 2x-[2x],\ \ldots,\ (Q-1)x-[(Q-1)x]$$

qui sont tous dans l'intervalle [0,1]. Par le principe des tiroirs, deux de ces nombres ont une distance mutuelle $\leqslant \frac{1}{Q}$. On les écrit $ax-b$ et $cx-d$, avec $0 \leqslant a \leqslant Q-1$, $0 \leqslant c \leqslant Q-1$, et $a \neq c$, et on choisit $q = |a-c|$, $p = \mp(b-d)$.

Ce principe des tiroirs aura un rôle essentiel dans la théorie des nombres transcendants dès le début du XX^ème^ siècle dans les travaux de Thue et Siegel. Pour rester au XIX^ème^ siècle, il faut citer l'utilisation qu'en fera Minkowski dans ses travaux sur la géométrie des nombres et sur l'approximation diophantienne. (Voir par exemple le texte de son exposé au Congrès International de Chicago en 1893, au titre évocateur : *Sur les propriétés des nombres entiers qui sont dérivées de l'intuition de l'espace*, Annales de Math., 3^e^ Sér., 15(1896) = *Ges. Abh.* I (1911), n° 12).

L'inégalité de Liouville convient donc très bien pour démontrer des résultats d'irrationalité. Si on veut obtenir par cette voie des énoncés de transcendance, il faut prendre des séries qui convergent plus rapidement.

---

* Comme le remarque Dirichlet, l'existence, pour θ irrationnel réel, d'une infinité de $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $q\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < 1$ résulte de la théorie des fractions continues.

On appelle "nombre de Liouville" tout nombre réel t pour lequel il existe une suite $\frac{p_n}{q_n}$ de nombres rationnels vérifiant

$$0 < \left|t - \frac{p_n}{q_n}\right| < q_n^{-n}$$

pour tout n. Grâce à l'inégalité de Liouville un tel nombre est transcendant. Ces nombres ont été abondamment étudiés dans le premier livre sur ce sujet (E. Maillet, *Introduction à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions*, 274 p., Paris, Gauthier-Villars, 1906). Une référence plus récente est le livre de Th. Schneider : *Introduction aux nombres transcendants*, Paris, Gauthier-Villars, 1959.

Les nombres transcendants de Liouville forment un ensemble ayant la puissance du continu, puisqu'il contient les nombres

$$\sum_{n\geqslant 1} \varepsilon_n \, 2^{-n!} ,$$

chaque fois que (ε_n) est une suite de 0 et de 1 ayant infinité de 1. Ils forment aussi un ensemble dense : si t est un nombre de Liouville et $\frac{p}{q}$ un nombre rationnel, alors $t + \frac{p}{q}$ est un nombre de Liouville. Mais on sait aussi, maintenant, que cet ensemble est de mesure nulle (pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$). Il en est ainsi chaque fois que l'on construit un ensemble de nombres transcendants ayant de "bonnes" propriétés d'approximation (voir le chapitre sur la classification de Mahler dans le livre de Schneider). Ainsi, l'inégalité de Liouville, qui donne un bon critère pour l'irrationalité, n'a plus la même efficacité pour établir la transcendance d'un nombre* : la "probabilité" pour qu'un nombre transcendant soit de Liouville est nulle.

Il y a beaucoup de nombres transcendants classiques (e , π , $\log 2$) dont on sait démontrer qu'ils ne sont pas de Liouville. Mais pour e^{π} par exemple on ne possède pas actuellement de démonstration.

Pour revenir aux nombres

$$\sum_{n\geqslant 1} \ell^{-n^2} ,$$

(ℓ entier $\geqslant 2$) considérés par Liouville, il faut avouer, plus d'un siècle après,

---

* Un critère (condition nécessaire et suffisante) de transcendance a été donné par A. Durand : *Indépendance algébrique de nombres complexes et critère de transcendance*, Compositio Math., 35(3), 1977, p.259-267.

qu'on ne sait toujours pas s'ils sont transcendants. Peut-être la solution viendra-t-elle de l'étude des fonctions thêta, sur lesquelles Daniel Bertrand a obtenu récemment des résultats de transcendance.

En utilisant l'équation fonctionnelle

$$f(z) = 1 + z\, f(\tfrac{z}{4})$$

vérifiée par la fonction

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n\, 2^{-n(n-1)} ,$$

on peut montrer que le nombre

$$f(\tfrac{1}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n^2}$$

n'est pas un nombre de Liouville. Il ne suffit pas de reprendre la démonstration précédente, qui donne seulement

$$|f(\tfrac{1}{2}) - \tfrac{p}{q}| > q^{-\log q}$$

pour $q > 7$.

On peut étendre la classe des nombres que l'on construit de cette manière en généralisant l'inégalité de Liouville. Par exemple en reprenant la démonstration de Liouville on peut minorer une expression de la forme $|P(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)|$, quand $P \in \mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n]$ est un polynôme en n variables à coefficients entiers, et $\alpha_1, \ldots,\alpha_n$ des nombres algébriques, tels que $P(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \neq 0$. On retrouve l'énoncé précédent en prenant $n = 1$ et $P(X) = qX-p$. La base de la démonstration consiste toujours à écrire qu'un nombre entier non nul a une valeur absolue supérieure ou égale à 1 . Une généralisation de ce type de l'inégalité de Liouville se trouve dans la note aux *Comptes Rendus* de E. Borel en 1899, où le nombre entier non nul apparaît comme le résultant de deux polynômes à coefficients entiers. Après une éclipse d'un demi-siècle, le résultant jouera de nouveau un rôle important dans la théorie des nombres transcendants (indépendance algébrique par Gel'fond en 1949, et, plus récemment, lemmes de zéros de Brownawell et Masser).

La méthode de Liouville conduit à ce qu'on appelle souvent des "inégalités triviales", par opposition à celles que l'on obtient avec des moyens plus sophistiqués (par exemple dans les travaux de Thue, Siegel, Roth, Schmidt). Mais les inégalités de Liouville sont explicites, et de plus elles continuent à jouer un rôle fondamental dans toutes les démonstrations de transcendance.

§ 3. Cantor (1845-1918).

L'étude de l'ensemble des nombres transcendants du point de vue métrique a été commencée par Cantor en 1873 (*Über eine Eigenschaft der Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*, Crelle's J., 77(1874), 258-262 = *Ges. Abh.* (1932), 116-118).

Cantor démontre d'abord que les nombres algébriques forment un ensemble dénombrable. Cela résulte du fait que $\mathbb{Z}[X]$ est dénombrable ; il suffit ensuite de numéroter les racines de chaque polynôme irréductible. Cette démonstration, en fait, est due à R. Dedekind (*cf*. le Chapitre XI de : *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*, par P. Dugac, Coll. L'histoire des Sciences, Vrin 1976, Paris).

Suivant l'usage, notons $\overline{\mathbb{Q}}$ l'ensemble des nombres algébriques complexes. On peut donc numéroter les éléments de $\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$:

$$\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R} = \{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots \} .$$

Cantor montre alors que dans chaque intervalle $]a,b[$ de $\mathbb{R}$, avec $a < b$, il existe au moins un nombre transcendant. Autrement dit les nombres transcendants sont denses dans $\mathbb{R}$. Cantor attribue ce résultat à Liouville, à juste titre comme nous l'avons vu.

Voici comment procède Cantor. Comme $\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$ contient $\mathbb{Q}$ qui est dense dans $\mathbb{R}$, il y a des éléments de la suite $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ dans l'intervalle $]a,b[$. On considère les deux premiers indices n_1 et n_2 , $n_2 > n_1 \geqslant 1$, tels que α_{n_1} et α_{n_2} appartiennent à cet intervalle ; on note a_1 le plus petit des deux nombres α_{n_1} , α_{n_2} , et b_1 le plus grand :

$$a < a_1 < b_1 < b .$$

Il est utile de remarquer que α_1 n'appartient pas à l'intervalle ouvert $]a_1,b_1[$. On note ensuite a_2, b_2 , avec $a_2 < b_2$, les deux premiers éléments de la suite $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ dans l'intervalle $]a_1,b_1[$. On a aussi $\alpha_2 \notin]a_2,b_2[$. On obtient ainsi une suite croissante $a_1 < a_2 < \ldots$ de nombres réels majorée, et une suite décroissante $b_1 > b_2 > \ldots$ de nombres réels minorée. De plus $\alpha_n \notin]a_n,b_n[$. Chaque suite a une limite qu'on va noter a_∞ et b_∞ , respectivement. Alors on a

$$a < a_1 < a_2 < \ldots < a_\infty \leqslant b_\infty < \ldots < b_2 < b_1 < b .$$

Choisissons alors $x \in [a_\infty, b_\infty]$. Pour conclure, il nous suffit de montrer que x est transcendant, c'est-à-dire qu'il n'appartient pas à la suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$. Cele résulte du fait que,pour tout n , on a $x \in]a_n,b_n[$, donc $x \neq \alpha_n$.

En fait, comme $[a_\infty, b_\infty] \cap \overline{\mathbb{Q}} = \emptyset$, et que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on a $a_\infty = b_\infty$. Ainsi, une fois choisie une numérotation $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ de $\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$, le procédé de Cantor associe à chaque intervalle réel $]a,b[$ avec $a < b$ un nombre transcendant x ($x = a_\infty = b_\infty$). Cette construction est "effective" en ce sens qu'on peut calculer x avec une précision aussi grande que l'on veut (on peut écrire explicitement un algorithme).

Il est facile de voir que si on part *a priori* d'un nombre transcendant $x \in \mathbb{R}$ et d'un intervalle $]a,b[$ qui le contient, on peut numéroter les nombres algébriques réels de telle sorte que la construction précédente conduise justement à x . Ainsi le procédé de Cantor permet de construire tous les nombres transcendants*. Néanmoins il semble peu probable que l'on arrive un jour à démontrer par cette méthode la transcendance d'une constante naturelle provenant de l'analyse.

§ 4. Hermite (1822-1901).

Le mémoire de Ch. Hermite *Sur la fonction exponentielle* publié en 1873 sous forme de quatre notes aux *Comptes Rendus* (vol. 77 ; voir *Oeuvres*, t.III, p.150-181) est certainement le texte le plus important, pour la théorie des nombres transcendants, de toute la période que j'étudie (et il le restera jusqu'au mémoire de Siegel en 1929). Son premier intérêt, bien entendu, est la démonstration de la transcendance de e . Voici enfin un nombre naturel dont on sait montrer la transcendance ! D'autre part toutes les démonstrations de transcendance qui vont fleurir un peu partout dans les quelques trente années suivantes auront pour base la méthode et les formules d'Hermite. Les compléments apportés par Lindemann, Weierstrass, Hilbert, pour ne citer qu'eux, ne sont pas négligeables, mais ils ne font que développer une méthode existante. Enfin le mémoire d'Hermite contient des formules qui ont leur intérêt propre : Mahler m'a fait remarquer que le résumé, par Felix Müller, de ce travail d'Hermite (Jahrbuch Fortschritte Math., 5(1873), 248-249), ne mentionne même pas le fait que la transcendance du nombre e a été démontrée!

Nous allons voir comment Hermite lui-même, dans son introduction, presente sa méthode.

Nous avons déjà vu au § 2 un énoncé de Dirichlet sur l'approximation rationnelle d'un nombre réel. En fait, par la même méthode, Dirichlet a démontré un énoncé plus général sur l'approximation simultanée de plusieurs nombres réels (voir par exemple W.M. Schmidt, *Approximation to algebraic numbers*, L'Enseignement Math.,

---

* On vérifie aussi que le processus diagonal, avec l'écriture en base 2 des nombres réels de l'intervalle $[0,1[$, permet de construire tous les nombres transcendants de cet intervalle.

Monographie n° 19, 1972).

Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_\ell$ des nombres réels, et Q un entier > 1 . Alors il existe des entiers $q,p_1,\dots,p_\ell$ avec $1 \leqslant q < Q^\ell$ et

$$|\alpha_i q - p_i| \leqslant Q^{-1} ,$$

$(1 \leqslant i \leqslant \ell)$. En particulier, si l'un au moins des nombres $\alpha_1,\dots,\alpha_\ell$ est irrationnel, alors il y a une infinité de ℓ-uples

$$\left(\frac{p_1}{q}, \dots, \frac{p_\ell}{q}\right) \in \mathbb{Q}^\ell$$

avec $q > 0$, $\mathrm{pgcd}(p_1,\dots,p_\ell,q) = 1$ et

$$|\alpha_i - \frac{p_i}{q}| < q^{-1-\frac{1}{\ell}}$$

$(1 \leqslant i \leqslant \ell)$. Hermite propose alors d'établir un énoncé analogue pour les fonctions : on remplace les nombres $\alpha_1,\dots,\alpha_\ell$ par des fonctions $\varphi_1,\dots,\varphi_\ell$, et les nombres rationnels $\frac{p_i}{q}$ par des fractions rationnelles $\frac{P_i}{Q}$; au lieu de demander que $\alpha_i q - p_i$ ait une valeur absolue petite, on demande que la fonction $\varphi_i Q - P_i$ ait un zéro d'ordre élevé à l'origine. Les fonctions dont il est question peuvent être des séries formelles, mais pour l'application ici ce seront des exponentielles, donc des fonctions entières (dans $\mathbb{C}$).

Ecrivons

$$\varphi_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{jn} z^n ,$$

avec $a_{jn} \in \mathbb{C}$. On cherche un polynôme

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{m} b_k z^k$$

tel que

$$\varphi_j(z)\, Q(z) = P_j(z) + \sum_{j \geqslant M+1} c_j z^j ,$$

où P_j est un polynôme de degré $\leqslant M-\mu_j$ disons. Cela revient à annuler tous les termes en

$$z^{M-\mu_j+1} , \dots , z^{M-1} , z^M$$

dans le développement de $\varphi_j Q$ à l'origine. On a donc $\mu_1+\dots+\mu_\ell$ équations linéaires à résoudre, et on dispose de $m+1$ nombres, les coefficients de Q . Si

$$\mu_1+\ldots+\mu_\ell \leqslant m ,$$

alors il existe une solution non triviale $Q \in \mathbb{C}[z]$, de degré $\leqslant m$.

C'est ainsi qu'Hermite présente sa méthode, et il faut bien reconnaître que les démonstrations modernes de transcendance s'inspirent toujours de cette idée. Mais, en contraste avec ce qu'a fait Hermite, on ne demande plus une solution explicite à ce problème : on se contente souvent de ce que donne le principe des tiroirs.

Dans le cas particulier où les φ_j sont des exponentielles, $\varphi_j(z) = \exp(a_j z)$, ($a_j \in \mathbb{C}$) , Hermite va donner des formules explicites pour ce problème.

Toujours en suivant Hermite, commençons pour simplifier par démontrer l'irrationalité de e^a pour a rationnel non nul. On se ramène d'abord de manière évidente au cas où a est un entier positif. Soit n un entier (qui tendra vers l'infini à la fin de la démonstration). On pose

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} .$$

Ainsi

$$\frac{1}{z^{n+1}} (e^z - F(z)) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{z^k}{(k+n+1)!} .$$

On dérive n fois chaque membre. On commence par le membre de gauche ; on a d'abord

$$\frac{d^n}{dz^n} \left(\frac{e^z}{z^{n+1}}\right) = \frac{B_n(z)}{z^{2n+1}} e^z ,$$

où $B_n(z) \in \mathbb{Z}[z]$ est un polynôme de degré $\leqslant n$. Ensuite

$$\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{F(z)}{z^{n+1}}\right) = \frac{A_n(z)}{z^{2n+1}} ,$$

où A_n est aussi un polynôme à coefficients entiers (les dénominateurs ont disparu grâce à la dérivation). Enfin la dérivée du membre de droite s'écrit $\frac{1}{n!} R_n(z)$, avec

$$R_n(z) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{n!(k+n)!}{(k+2n+1)!} \frac{z^k}{k!} .$$

On remarquera que $\frac{n!(k+n)!}{(k+2n+1)!} \leqslant 1$, donc $|R_n(z)| \leqslant e^{|z|}$. En regroupant, on trouve

$$(\star) \qquad B_n(z)\, e^z - A_n(z) = \frac{1}{n!} z^{2n+1} R_n(z)\ .$$

Pour montrer que e^a est irrationnel quand a est un entier positif, il suffit de remplacer z par a dans $(\star)$, de remarquer que

$$\frac{a^{2n+1}}{n!}$$

tend vers 0 avec n, et aussi que $R_n(a) \neq 0$. Le critère d'irrationalité cité au § 2 permet de conclure.

Revenons à la condition $(\star)$. Comme A_n et B_n sont des polynômes de degré $\leqslant n$, et que la fonction $B_n(z)\, e^z - A_n(z)$ a un zéro à l'origine d'ordre $\geqslant 2n+1$, on a résolu le problème d'approximation pour $\ell = 1$, $\varphi_1(z) = e^z$, avec $M = 2n$, $\mu_1 = \mu_2 = n$. On peut expliciter A_n et B_n :

$$A_n(z) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!} z^k\ , \quad B_n(z) = A_n(-z)$$

et aussi vérifier

$$R_n(z) = \int_0^1 t^n(1-t)^n e^{tz}\, dt\ .$$

De ces formules on déduit facilement l'irrationalité de π, et plus généralement de $\operatorname{tg} a$ pour a rationnel non nul. (Voir par exemple C.L.Siegel, *Transcendental numbers*, Ann. of Math. Studies, n° 16, 1949).

La démonstration ci-dessus de l'irrationalité de e^a, pour $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$, consistait à approcher la fonction e^z par une fraction rationnelle

$$\frac{A_n(z)}{B_n(z)}\ ,$$

à remplacer z par a, et à constater que cela donne une approximation rationnelle $\frac{p}{q}$ de e^a suffisante pour utiliser le critère d'irrationalité. Un point essentiel consiste à vérifier

$$e^a \neq \frac{A_n(a)}{B_n(a)}\ ,$$

et cela résultait de $R_n(a) \neq 0$.

On ne peut pas espérer que cette approximation rationnelle sera suffisante pour montrer la transcendance de e^a grâce au critère de Liouville, ni même seulement que e^a n'est pas algébrique de degré $\leqslant 2$. On sait* en effet que pour tout $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe $c(a,\varepsilon) > 0$ tel que

$$|e^a - \frac{p}{q}| > c(a,\varepsilon)\, q^{-2-\varepsilon}$$

pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Par exemple pour $a = 1$ cela résulte du développement de e en fraction continue ; on a même

$$|e - \frac{p}{q}| > \frac{\log\log 4q}{18q^2 \log 4q}$$

pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

Il faut donc un argument supplémentaire pour obtenir la transcendance. Supposons que e est algébrique ; on écrit son polynôme minimal sur $\mathbb{Z}$:

$$\sum_{k=0}^{d} a_k e^k = 0 .$$

On va approcher simultanément les fonctions e^{kz} $(0 \leqslant k \leqslant d)$ par des fractions rationnelles, "simultanément" voulant dire que le dénominateur sera le même : e^{kz} va être approchée par

$$\frac{A_{k,n}(z)}{B_n(z)} ,$$

c'est-à-dire que $B_n(z)\, e^{kz} - A_{k,n}(z)$ aura à l'origine un zéro d'ordre élevé (dépendant de n). Les polynômes $A_{k,n}$ et B_n seront à coefficients dans $\mathbb{Z}$, et de degré $\leqslant n$. Alors la fonction

$$T(z) = B_n(z) \sum_{k=0}^{d} a_k e^{kz} - \sum_{k=0}^{d} a_k A_{k,n}(z)$$

aura aussi à l'origine un zéro d'ordre élevé. En utilisant des arguments analytiques on montre que la valeur absolue de $T(1)$ est petite : $|T(1)| < 1$. Mais

$$T(1) = - \sum_{k=0}^{d} a_k A_{k,n}(1) .$$

* Les recherches de mesures de transcendance, initiées par E. Borel en 1899, ont pour objet de démontrer des inégalités de ce type, mais dans un cadre plus général. Par exemple on remplace le nombre rationnel $\frac{p}{q}$ par un nombre algébrique α, ou, ce qui revient en fait au même, au lieu du polynôme $qX-p$ on considère un polynôme quelconque de $\mathbb{Z}[X]$.

Comme les $A_{k,n}$ sont des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$, on a $T(1) \in \mathbb{Z}$. Donc $T(1) = 0$. Il faut montrer que ceci n'est pas possible. Dans la démonstration d'irrationalité, cela provenait de la relation évidente $R_n(a) \neq 0$. Dans le cas général, c'est beaucoup plus délicat.

Il y a un grand choix pour construire les polynômes $A_{k,n}$ et B_n : cela dépend de l'ordre du zéro à l'origine que l'on impose aux fonctions

$$B_n(z)\, e^{kz} - A_{k,n}(z) ,$$

$(0 \leqslant k \leqslant d)$. Hermite utilise cette latitude et construit (explicitement) pour chaque n une famille d'approximations. Le fait que l'un au moins des nombres $T(1)$ ainsi obtenus n'est pas nul résulte alors du calcul d'un déterminant construit à partir des $A_{k,n}$. Ce calcul de déterminant lui pose quelques problèmes : la première méthode qu'il expose n'est pas convaincante : "Il en résulte qu'on ne peut, en général, admettre que le déterminant proposé Δ s'annule." Il en est conscient et ajoute plus loin : "Mais une autre voie conduira à une seconde démonstration plus rigoureuse." En fait, en modifiant le choix de ses paramètres, il aurait pu rendre rigoureux ses premiers arguments. Voir à ce sujet l'Appendice *Classical proofs of the transcendency of* e *and* π du livre de K. Mahler : *Lectures on transcendental numbers*, Lecture Notes in Math., 546 (1976), Springer Verlag.

Voici quelques détails supplémentaires sur les formules d'Hermite. Soient $\omega_0,\dots,\omega_m$ des nombres complexes, $\rho_0,\dots,\rho_m$ des entiers $\geqslant 0$. Le polynôme

$$P(y) = \sum_{k=0}^{m} (y-\omega_k)^{\rho_k}$$

a un zéro d'ordre $\geqslant \rho_k$ au point ω_k, $(0 \leqslant k \leqslant m)$. Si on pose

$$F(x,y) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} x^{-\lambda-1} \frac{d^\lambda}{dy^\lambda} P(y) ,$$

(il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls dans cette somme), alors la dérivée par rapport à y de $F(x,y)\, e^{-xy}$ est $-P(y)\, e^{-xy}$, ce que l'on peut écrire

$$\int P(y)\, e^{-xy}\, dy = - F(x,y)\, e^{-xy} .$$

Posons alors

$$A_k(x) = x^{\rho_0+\dots+\rho_m+1}\, F(x,\omega_k) ,$$

$(0 \leqslant k \leqslant m)$, et

$$R_{k,\ell}(x) = e^{(\omega_k+\omega_\ell)x} \int_{\omega_\ell}^{\omega_k} P(y)\, e^{-xy}\, dy \;,$$

$(0 \leqslant k,\ell \leqslant m)$. On vérifie alors

$$A_k(x)\, e^{\omega_\ell x} - A_\ell(x)\, e^{\omega_k x} = x^{\rho_1+\ldots+\rho_m+1}\, R_{k,\ell}(x) \;,$$

$(0 \leqslant k,\ell \leqslant m)$, et de plus A_k est un polynôme en $x,\omega_0,\ldots,\omega_m$, à coefficients dans $\mathbb{Z}$, de degré $\leqslant \rho_0+\ldots+\rho_m-\rho_k$ en x , et enfin $R_{k,\ell}$ est une fonction entière. (Voir l'article de Mignotte dans le *Numéro spécial* π du *Petit Archimède*).

Voici un cas particulier de ces formules, que l'on obtient en choisissant $x=1$, $\omega_\ell = 0$, $t = \omega_k$: si $P \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme quelconque on a

$$e^t \int_0^t P(y)\, e^{-y}\, dy = F(0)\, e^t - F(t) \;,$$

$(t \in \mathbb{R}\; ,\; t > 0)$, où

$$F(t) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{d^k}{dt^k} P(t) \;.$$

On peut déduire la transcendance de e et l'irrationalité de π de cette identité d'Hermite (*cf.* Feldman et Shidlovskii, *The development and present state of the theory of transcendental numbers*, Russian Math. Surveys, 22, 1967, p.1-79. Voir aussi le § 1 du chap. II de A.O. Gel'fond, *Transcendental and algebraic numbers*, Dover, 1960).

Le problème, résolu par Hermite, de l'approximation simultanée des fonctions e^{kz} par des fractions rationnelles, est un cas particulier de ce qu'on appelle maintenant le problème des approximants de Padé. De même qu'en théorie des nombres pour l'approximation rationnelle un autre problème, qui lui est étroitement lié, est celui de la recherche d'une forme linéaire petite. Hermite a considéré ce problème en 1893, et a construit des polynômes $\mathbb{A}_0,\ldots,\mathbb{A}_m$, de degrés respectivement ρ_0-1, $\ldots,\rho_m-1$, tels que la fonction

$$\sum_{k=0}^{m} \mathbb{A}_k(z)\, e^{\omega_k z}$$

ait un zéro à l'origine d'ordre $\rho_0+\ldots+\rho_m-1$.

En considérant encore la valeur de cette fonction en $z = 1$ (pour $\omega_k = k-1$) on obtient de nouveau la transcendance de e . Chose curieuse : ce n'est pas Hermite qui a fait cette dernière remarque, mais Mahler, en 1931.

§ 5 . Lindemann (1852-1939).

L'article principal de Lindemann : *Über die Zahl* π est paru dans la revue *Mathematische Annalen* (20(1882), 213-225) et il porte la date : *April und Juni 1882*. Ce résultat remarquable, la transcendance du nombre π , a été présenté par Weierstrass à l'Académie de Berlin le 22 juin 1882 (*Über die Ludoplh'sche Zahl*, Sitzungsberichte Preuss. Akad. Wiss. 1882, 679-682), et un extrait d'une lettre de Lindemann à Hermite a été publié dans les *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* du 10 juillet de la même année (C.R. Acad. Sci. Paris, 95(1882), 72-74).

La dernière phrase de cette note aux *Comptes Rendus* est la suivante : "Les logarithmes népériens de tous les nombres rationnels, l'unité seule exceptée, et de toutes les irrationnelles algébriques, sont des nombres transcendants." C'est ce qu'on appelle maintenant théorème de Hermite-Lindemann, et qui s'énonce sous la forme équivalente suivante : *si* α *est un nombre algébrique non nul, alors* e^{α} *est un nombre transcendant*. La transcendance de π résulte alors de la relation d'Euler : $e^{i\pi} = -1$.

Le texte principal de Lindemann contient une démonstration assez détaillée de la transcendance de π , et plus généralement de $\log a$ pour a rationnel $\neq 0$. Autrement dit il montre que pour α algébrique $\neq 0$, le nombre e^{α} est irrationnel. La fin de cet article (§ 4. *Verallgemeinerung der gewonnenen Resultate*) présente d'autres énoncés auxquels la méthode conduit. L'énoncé le plus général qui y est donné est appelé maintenant théorème de Lindemann-Weierstrass : *si* $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ *sont des nombres algébriques deux à deux distincts, et* $\beta_1,\ldots,\beta_n$ *des nombres algébriques non tous nuls, alors*

$$\beta_1 e^{\alpha_1} + \ldots + \beta_n e^{\alpha_n} \neq 0 .$$

En choisissant $\alpha_1 = 0$, $n = 2$, $\beta_n = -1$, on trouve $e^{\alpha_2} \neq \beta_1$: c'est le théorème de Hermite-Lindemann. A la fin de ce texte, Lindemann écrit : "Je me réserve de publier ultérieurement un exposé détaillé des démonstrations qui ont été seulement esquissées ici." Malheureusement il changera de sujet et consacrera ses efforts ultérieurs, sans grand succès, au dernier théorème de Fermat.

Une des idées importantes de Lindemann consiste, à partir d'une relation

$$\beta_1 e^{\alpha_1} + \ldots + \beta_n e^{\alpha_n} = 0 ,$$

à la multiplier par ses conjuguées :

$$\prod_{\sigma} (\sigma\beta_1 e^{\sigma\alpha_1} + \ldots + \sigma\beta_n e^{\sigma\alpha_n}) = 0$$

(où σ désigne l'ensemble des plongements du corps $\mathbb{Q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_n)$ dans $\mathbb{C}$) pour obtenir une relation de la forme

$$\sum_{i=1}^{m} b_i \sum_{j=1}^{d_i} e^{\alpha_{ij}} = 0 ,$$

où $b_1,\ldots,b_m$ sont des nombres rationnels non nuls, α_{ij} sont des nombres rationnels deux à deux distincts, α_{ij} est de degré exactement d_i , et pour chaque i , $1 \leqslant i \leqslant m$, les nombres α_{i1} , ... , α_{id_i} sont conjugués.

Pour montrer l'impossibilité de cette nouvelle relation, il utilise les formules d'Hermite.

§ 6. Weierstrass (1815-1897).

Le mémoire de Weierstrass, présenté à l'Académie Royale des Sciences de Berlin le 3 décembre 1885, est intitulé : *Zu Lindemann's Abhandlung : "Über die Ludolph'sche Zahl"* (Sitzungsberichte Preuss. Akad. Wiss., 1885, 1067-1085) = *Math. Werke*, II , 341-362).

Son intention, dit-il dans l'introduction, est de donner une preuve aussi élémentaire que possible, et ne reposant que sur des résultats bien connus, du théorème de Lindemann. Il ajoute dans une note : "Je remarque expressément que la publication de cet article, élaboré en été 1882 et exposé pour l'essentiel le 26 octobre de la même année devant l'Académie, a lieu en accord avec Monsieur Lindemann, et que mon seul but est de simplifier ou de compléter les démonstrations de ses théorèmes données ou suggérées par lui-même, sans modification essentielle de l'idée directrice. La simplification provient surtout du fait que je ne suppose pas, contrairement à Monsieur Lindemann, que le lecteur connaisse le célèbre mémoire d'Hermité *Sur la fonction exponentielle* (Compt. Rend., t.77, 1873) ; je n'emprunte de ce mémoire que la méthode de déduction du lemme du § 1, n° VI." Le n° VI en question concerne le fait crucial, dont nous avons parlé plus haut, qu'un certain déterminant ne s'annule pas.

Le texte de Weierstrass contient la première démonstration complète et détaillée du théorème que nous avons cité au § 5 sous le nom de théorème de Lindemann-Weierstrass. Un des aspects les plus spectaculaires de ce théorème (mais qui n'est mentionné explicitement ni par Lindemann, ni par Weierstrass) vient de ce qu'il conduit à un énoncé d'indépendance algébrique. En effet, le théorème de Lindemann-Weierstrass s'énonce sous forme équivalente : *si* $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ *sont des nombres algébriques linéairement indépendants sur* $\mathbb{Q}$ *, alors les nombres*

$$e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n}$$

sont algébriquement indépendants.

Un siècle après, il n'y a pas beaucoup d'autres résultats aussi généraux d'indépendance algébrique. Si on laisse de côté les nombres du type de Liouville, voici la liste des méthodes dont on dispose : celle de Siegel-Shidlovskii pour les E-fonctions (fonctions hypergéométriques, fonctions de Bessel, ...), une méthode de Mahler pour des fonctions satisfaisant certaines équations fonctionnelles, et enfin une méthode de Gel'fond, développée notamment par Choodnovski, Wüstholz et Philippon, pour les fonctions paramétrant l'exponentielle d'un groupe algébrique.

En 1886, Weierstrass reviendra à l'étude des nombres transcendants, mais avec un point de vue différent. Le théorème de Hermite-Lindemann concerne une fonction transcendante, la fonction exponentielle, et affirme qu'elle prend des valeurs transcendantes en tout point algébrique α , avec une seule exception : $\alpha = 0$. On peut se demander si, f étant une fonction transcendante, sa valeur en un point algébrique α est "en général" transcendante. Weierstrass donna un exemple d'une fonction f transcendante qui en tout point rationnel prend une valeur rationnelle, et il affirma l'existence d'une fonction entière transcendante qui en tout point algébrique prend une valeur algébrique*. Cela a été démontré par Stäckel en 1895 (voir le chapitre 3 : *First results on the values of analytic functions at algebraic points*, en particulier § 35 : *Historical remarks*, du livre de Mahler - Lecture Notes 546 - cité plus haut),et la seule propriété des nombres algébriques qui intervienne est le fait qu'ils forment un ensemble dénombrable dense. Plus généralement, si S est un ensemble dénombrable de nombres complexes, et T une partie dense de $\mathbb{C}$, on peut construire une fonction entière transcendante f , qui prend ses valeurs dans T en chaque point de S , et même, en supposant de plus que T est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ contenant S , dont tous les coefficients de la série de Taylor en un point de S appartiennent à T . On peut aussi imposer une croissance très faible à cette fonction (par exemple d'être d'ordre 0).

Il n'y a donc pas de conjecture générale sur la transcendance des valeurs de fonctions entières, et il faut se restreindre à des classes de fonctions ayant des

---

* Dans l'énoncé de son septième problème en 1900, Hilbert dit que ce fait est bien connu.

propriétés spécifiques : les équations différentielles ou fonctionnelles doivent intervenir dans les démonstrations.

Même si on se restreint à la fonction exponentielle, il reste encore beaucoup à faire. Un des principaux problèmes ouverts est la conjecture de Schanuel : "*si* $x_1,\ldots,x_n$ *sont des nombres complexes linéairement indépendants sur* $\mathbb{Q}$ *, alors parmi les nombres*

$$x_1, \ldots, x_n, e^{x_1}, \ldots, e^{x_n},$$

il y en a au moins n *algébriquement indépendants*". Le théorème de Lindemann-Weierstrass répond au cas particulier où $x_1,\ldots,x_n$ sont algébriques.

Cette conjecture répondrait aux principales questions que l'on se pose sur la transcendance des nombres liés à la fonction exponentielle. Mais il faut aussi mentionner les problèmes d'approximation diophantienne, dont l'importance a été révélée par les travaux de Gel'fond et Baker sur les formes linéaires de logarithmes. Le premier pas dans cette direction a été accompli par E. Borel, qui a obtenu une mesure de transcendance de e en 1899. Cette date correspond à la fin de la période que nous avions choisie pour ce bref aperçu historique.

Conclusion.

Cet aperçu historique ne serait pas complet s'il ne mentionnait pas les nombreuses publications contenant des variantes des démonstrations originales de Hermite, Lindemann et Weierstrass. Ces publications ont été recensés par J.F. Koksma (*Diophantische Approximationen*, chap. IV, § 4, Springer Verlag, 1936, réédité en 1974). Pour la période qui nous intéresse, après Ch. Hermite en 1873 et F. Lindemann en 1882, il faut mentionner C. Jordan en 1882, A.A. Markoff et E. Rouché en 1883, K. Weierstrass en 1885, Th. Stieltjes, J.J. Sylvester et O. Venske en 1890, V. Jamet et C. Cailler en 1891, D. Hilbert, A. Hurwitz et P. Gordan en 1893, K.A. Possé en 1894, F. Mertens en 1896, et H. Weber en 1899. Dans l'appendice du livre de Mahler on trouvera des commentaires extrêmement pertinents sur les démonstrations de Hermite, Lindemann, Weierstrass, Stieltjes, Venske, Hilbert, Hurwitz, Gordan et Weber.

Cette liste impressionnante témoigne de l'intérêt qu'ont suscité ces résultats de transcendance, et principalement la réponse définitive au problème de la quadrature du cercle. Le désir de posséder plusieurs démonstrations de ce résultat est un phenomène intéressant. Déjà en 1873, Hermite, avant de publier une nouvelle démonstration du résultat de Lambert sur l'irrationalité de e^a pour a rationnel non nul (*Sur l'irrationalité de la base des logarithmes hyperboliques*, 1873, *Oeuvres* t.III, p.127-130), commençait par la phrase suivante :

"On reconnaîtra volontiers que, dans le domaine mathématique, la possession d'une vérité importante ne devient complète et définitive qu'autant qu'on aura réussi à l'établir par plus d'une méthode."

Apparemment, Hermite avait déjà obtenu à cette époque la transcendance du nombre e ("ayant été récemment conduit à m'occuper de ce dernier nombre ...", *op. cit.* p.127), et, comme nous l'avons vu au § 4, pour ce résultat partiel sa démonstration se simplifie notablement.

Mais il faut reconnaître que les progrès de la théorie ne sont pas venus de ces démonstrations nouvelles de résultats connus, mais à l'opposé de travaux originaux sur des problèmes ouverts.

<u>Principaux mémoires originaux : 1844-1900.</u>

1844 a J. LIOUVILLE, Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques (C.R. Acad. Sci. Paris, 18(1844), 883-885). (13 mai 1844)

1844 b J. LIOUVILLE, Nouvelle démonstration d'un théorème sur les irrationnelles algébriques inséré dans le compte rendu de la dernière séance (C.R. Acad. Sci. Paris, 18(1844), 910-911). (20 mai 1844)

1851 J. LIOUVILLE, Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique ni même réductible à des irrationnelles algébriques (J. Math. Pures et Appl., (1), 16(1851), 133-142).

1873 G. CANTOR, Über eine Eigenschaft der Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen (Crelle's J., 77(1874), 258-262) = *Ges. Abh.*, 1932, 116-118. (23 décembre 1873)

1873 Ch. HERMITE, Sur la fonction exponentielle (C.R. Acad. Sci. Paris, 77(1873), 18-24, 74-79, 226-233, 285-293) = *Oeuvres*, III, p.150-181 (voir aussi *Oeuvres*, III, p.127-130 : Sur l'irrationalité de la base des logarithmes hyperboliques (Rep. British Ass. Adv. Sci., 43(1873), 22-23) ; *Oeuvres*, III, p.146-149 : Sur quelques approximations algébriques, extrait d'une lettre de Ch. Hermite à M. Borchardt (Crelle's J., 76(1873), 342-344) ; *Correspondance* Hermite-Stieltjes, t.II, lettre 363, p.291-295).

1882 a F. LINDEMANN, Über die Zahl π (Math. Annalen, 20(1882), 213-225). (Avril et juin 1882)

1882 b F. LINDEMANN, Über die Ludolph'sche Zahl (S.-B. Preuss. Akad. Wiss., 1882, 679-682). (22 juin 1882)

1882 c F. LINDEMANN, Sur le rapport de la circonférence au diamètre, et sur les logarithmes népériens des nombres commensurables ou des irrationnelles algébriques (C.R. Acad. Sci. Paris, 95(1882), 72-74). (10 juillet 1882)

1885 K. WEIERSTRASS, Zu Lindemann's Abhandlung : "Über die Ludolph'sche Zahl" (S.-B. Preuss. Akad. Wiss., 1885, 1067-1085) = *Math. Werke*, II, 341-362 . (3 décembre 1885)

1899 E. BOREL, Sur la nature arithmétique du nombre e (C.R. Acad. Sci. Paris, 128(1899), 596-599). (6 mars 1899)

Michel WALDSCHMIDT
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 PARIS CEDEX 05