CAHIERS DU SÉMINAIRE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

JEAN HORVATH

L'œuvre mathématique de Marcel Riesz II

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1re série, tome 4 (1983), p. 1-59
<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1983__4__1_0>

L'OEUVRE MATHÉMATIQUE DE MARCEL RIESZ II ★

PAR JEAN HORVATH

4. *Les inégalités de Bernstein* [14, 15, 19] .

Soit

$$T_n(\theta) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} (a_j \cos j\theta + b_j \sin j\theta)$$

un polynôme trigonométrique à coefficients réels, d'ordre n , et soit $M = \max_\theta |T_n(\theta)|$. D'après l'inégalité célèbre de S.N. Bernstein {56, p.26 ; 57}

(33) $$|T_n'(\theta)| \leqslant n\ M ,$$

et le signe $<$ est ici valable si $T_n(\theta)$ n'est pas de la forme $M \sin n(\theta-\theta^{\star})$.

L'inégalité de Bernstein joue son rôle dans la théorie dite de la meilleure approximation. Si f est une fonction continue sur la droite numérique réelle, périodique et de période 2π , alors soit $E_n(f)$ la borne inférieure des expressions $\max_\theta |f(\theta) - T_n(\theta)|$ quand T_n parcourt l'ensemble des polynômes trigonométriques d'ordre n . Soit d'autre part $0 < \alpha < 1$; nous dirons que f satisfait à une condition de Lipschitz d'exposant α , et nous écrirons $f \in \mathrm{Lip}\ \alpha$, s'il existe un nombre $A > 0$ tel que

$$|f(\theta) - f(\theta')| \leqslant A\ |\theta-\theta'|^\alpha$$

pour tout couple de nombres réels θ, θ' . D. Jackson a démontré en 1911, dans sa thèse de Göttingen, que la condition $f \in \mathrm{Lip}\ \alpha$ a pour conséquence que $E_n(f) = O(\frac{1}{n^\alpha})$ quand $n \to \infty$ {52, § 89} . Bernstein a aussi montré {56 ; 57 ; 52 , § 91} que réciproquement, si $E_n(f) = O(\frac{1}{n^\alpha})$, nous avons $f \in \mathrm{Lip}\ \alpha$, et dans la démonstration de ce théorème figure l'inégalité (33) .

C'est Léopold Fejér qui a fait connaître en Hongrie l'inégalité de Bernstein à l'occasion de ses travaux concernant les séries trigonométriques conjuguées {78 ; 81} . Je reviendrai plus loin sur ces travaux.

★ L'article est traduit du hongrois par Agnèse KAHANE de *Matematikai Lapok*, t.28 (1980), p.65-100 ; la première partie a été publiée dans les *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, t.3(1982), p.83-121.

Les crochets renvoient aux travaux de Marcel Riesz et les accolades à ceux des autres mathématiciens.

Marcel Riesz donne, dans ses travaux figurant en [14] et [15], plusieurs démonstrations de l'inégalité de Bernstein. Une partie d'entre elles est basée sur la formule d'interpolation suivante, relative au polynôme trigonométrique $T_n(\theta)$. Divisons l'intervalle $[0,2\pi]$ en $2n$ parties égales, et soient $\theta_1, \ldots, \theta_{2n}$ les milieux des intervalles du partage, c'est-à-dire

$$\theta_\nu = (2\nu-1)\frac{\pi}{2n} \quad (\nu = 1,2,\ldots,2n) .$$

La relation

$$T_n(\theta) = a_n \cos n\theta + \frac{\cos n\theta}{2n} \sum_{\nu=1}^{2n} T_n(\theta)\ (-1)^\nu \operatorname{cotg} \frac{\theta-\theta_\nu}{2} \tag{34}$$

est alors valable. Riesz donne deux démonstrations de cette formule d'interpolation ([15]). Je veux détailler ici la première, que Riesz ne fait qu'esquisser. On a tout d'abord

$$(-1)^\nu \cos n\theta \operatorname{cotg} \frac{\theta-\theta_\nu}{2} = (-1)^\nu \cos n(\theta-\theta_\nu+\theta_\nu) \operatorname{cotg} \frac{\theta-\theta_\nu}{2} =$$

$$(-1)^\nu [\cos n(\theta-\theta_\nu) \cos n\theta_\nu - \sin n(\theta-\theta_\nu) \sin n\theta_\nu] \operatorname{cotg} \frac{\theta-\theta_\nu}{2} .$$

Comme $\cos n\theta_\nu = 0$, $\sin n\theta_\nu = (-1)^{\nu-1}$, nous obtenons

$$(-1)^\nu \cos n\theta \operatorname{cotg} \frac{\theta-\theta_\nu}{2} = \sin n(\theta-\theta_\nu) \operatorname{cotg} \frac{\theta-\theta_\nu}{2} =$$

$$\sin n(\theta-\theta_\nu) \frac{\cos \frac{\theta-\theta_\nu}{2}}{\sin \frac{\theta-\theta_\nu}{2}} = \frac{\sin (n+\frac{1}{2})(\theta-\theta_\nu)}{\sin \frac{\theta-\theta_\nu}{2}} - \cos n(\theta-\theta_\nu) = \tag{35}$$

$$2\left(\frac{1}{2} + \cos(\theta-\theta_\nu) + \ldots + \cos n(\theta-\theta_\nu)\right) - \cos n(\theta-\theta_\nu) ,$$

où nous avons utilisé l'identité qui conduit à l'intégrale de Dirichlet ({35, § 184 ($1^{☆☆}$), vol. I, p.311}). D'autre part, en utilisant les valeurs

$$T_n(\theta_\nu) = \sum_{j=0}^{n} (a_j \cos j\theta_\nu + b_j \sin j\theta_\nu)$$

nous voyons que le côté droit de (34) est identique à la formule suivante :

$$a_n \cos n\theta + \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{n} \sum_{\nu=1}^{2n} (a_j \cos j\theta_\nu + b_j \sin j\theta_\nu)(-1)^\nu \cos n\theta \operatorname{cotg} \frac{\theta-\theta_\nu}{2} . \tag{36}$$

Si k est un nombre entier, $0 \leqslant k \leqslant n$, nous avons

$$\cos j\theta_\nu \cos k(\theta-\theta_\nu) = \frac{1}{4}\,(e^{ij\theta_\nu}+e^{-ij\theta_\nu})(e^{ik(\theta-\theta_\nu)}+e^{-ik(\theta-\theta_\nu)}) =$$

$$\frac{1}{4}(e^{i(j-k)\theta_\nu+ik\theta}+e^{-i(j+k)\theta_\nu+ik\theta}+e^{i(j+k)\theta_\nu-ik\theta}+e^{-i(j-k)\theta_\nu-ik\theta}),$$

d'où, si $1 \leqslant j \leqslant n-1$,

$$\sum_{\nu=1}^{2n} \cos j\theta_\nu \cos k(\theta-\theta_\nu) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ \frac{1}{4}\,2n(e^{ij\theta}+e^{-ij\theta})=n\cos j\theta & \text{si } k = j, \end{cases}$$

si $j = n$, alors $\cos j\theta_\nu = \cos n\theta_\nu = 0$ pour toute valeur ν et ainsi

$$\sum_{\nu=1}^{2n} \cos n\theta_\nu \cos k(\theta-\theta_\nu) = 0 \quad , \quad 0 \leqslant k \leqslant n,$$

tandis que, si $j = 0$,

$$\sum_{\nu=1}^{2n} \cos k(\theta-\theta_\nu) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 0 \\ 2n & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

Il s'ensuit de là et de la formule (35) que

$$\sum_{\nu=1}^{2n} \cos j\theta_\nu\,(-1)^\nu \cos n\theta \operatorname{cotg}\frac{\theta-\theta_\nu}{2} = \begin{cases} 2n\cos j\theta & \text{si } 0 \leqslant j < n \\ 0 & \text{si } j = n. \end{cases} \tag{37}$$

De la même façon

$$\sin j\theta_\nu \cos k(\theta-\theta_\nu) = \frac{1}{4i}(e^{ij\theta_\nu}-e^{-ij\theta_\nu})(e^{ik(\theta-\theta_\nu)}+e^{-ik(\theta-\theta_\nu)}) =$$

$$\frac{1}{4i}\,(e^{i(j-k)\theta_\nu+ik\theta}-e^{-i(j+k)\theta_\nu+ik\theta}+e^{i(j+k)\theta_\nu-ik\theta}-e^{-i(j-k)\theta_\nu-ik\theta}),$$

d'où, si $0 \leqslant j \leqslant n-1$,

$$\sum_{\nu=1}^{2n} \sin j\theta_\nu \cos k(\theta-\theta_\nu) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ \frac{1}{4i}\,2n(e^{ij\theta}-e^{-ij\theta}) = n\sin j\theta & \text{si } k = j, \end{cases}$$

tandis que dans le cas de $j = n$

$$\sum_{\nu=1}^{2n} \sin n\theta_\nu \cos k(\theta-\theta_\nu) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 2n\sin n\theta & \text{si } k = n. \end{cases}$$

D'où encore, en utilisant (35),

$$(38) \qquad \sum_{\nu=1}^{2n} \sin j\theta_\nu \, (-1)^\nu \cos n\theta \operatorname{cotg} \frac{\theta-\theta_\nu}{2} = 2n \sin j\theta .$$

En tenant compte des égalités (37) et (38) dans la formule (36), nous voyons que le côté droit de (34) est en effet identique à $T_n(\theta)$.

Après la dérivation de la formule d'interpolation (34) , nous obtenons

$$(39) \qquad T_n'(0) = \frac{1}{2n} \sum_{\nu=1}^{2n} T_n(\theta_\nu) \frac{(-1)^{\nu-1}}{2 \sin^2 \frac{\theta_\nu}{2}} ,$$

d'où, par une translation,

$$(40) \qquad T_n'(\theta) = \frac{1}{2n} \sum_{\nu=1}^{2n} T_n(\theta+\theta_\nu) \frac{(-1)^{\nu-1}}{2 \sin^2 \frac{\theta_\nu}{2}} .$$

En appliquant la formule (39) au polynôme $T_n(\theta) = \sin n\theta$, et sachant que $\sin n\theta_\nu = (-1)^{\nu-1}$, nous voyons que

$$\frac{1}{2n} \sum_{\nu=1}^{2n} \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\theta_\nu}{2}} = n .$$

L'inégalité de Bernstein (33) s'ensuit immédiatement, c'est-à-dire

$$|T_n'(\theta)| \leqslant \frac{1}{2n} \sum_{\nu=1}^{2n} |T_n(\theta+\theta_\nu)| \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\theta_\nu}{2}} \leqslant nM .$$

En outre, si $T_n'(\theta^\star) = nM$ en tout point $\theta^\star$, nous aurons nécessairement $T_n(\theta^\star+\theta_\nu) = (-1)^{\nu-1} M$ pour les valeurs $\nu = 1,2,\ldots,2n$. En conséquence, le polynôme trigonométrique d'ordre n

$$U(\theta) = M \sin n(\theta-\theta^\star) - T_n(\theta)$$

s'annule aux points $\theta^\star+\theta_\nu$ $(\nu = 1,2,\ldots,2n)$. Comme, d'autre part, les extremums et de $\sin n(\theta-\theta^\star)$ et de $T_n(\theta)$ se trouvent en ces points, les zéros sont tous d'ordre 2 , d'où il ressort immédiatement ({35, § 427, vol.II, p.82}) que U s'annule identiquement. La démonstration est similaire si $T_n'(\theta^\star) = -nM$ en tout point $\theta^\star$.

Notons que l'égalité (39) est prévisible directement, c'est-à-dire sans passer par la formule d'interpolation (34) . Riesz donne deux démonstrations de ce genre ([14]), dont l'une figure dans le manuel de Paul Szász ({35, § 433, vol.II, p.95}).

Appliquons la formule d'interpolation (34) au polynôme-sinus d'ordre n

$$S_n(\theta) = b_1 \sin\theta + b_2 \sin 2\theta + \dots + b_n \sin n\theta \,.$$

En remarquant que $\theta_\nu + \theta_{2n-\nu+1} = 2\pi$, d'où

$$(-1)^\nu S_n(\theta_\nu) = (-1)^{2n-\nu+1} S_n(\theta_{2n-\nu+1})$$

et également

$$\operatorname{cotg}\frac{\theta-\theta_\nu}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\theta-\theta_{2n-\nu+1}}{2} = \frac{-\sin\theta}{\frac{1}{2}(\cos\theta - \cos\theta_\nu)} \,,$$

nous obtenons l'égalité

$$(41) \qquad S_n(\theta) = \frac{\sin\theta \cos n\theta}{n} \sum_{\nu=1}^{n} S_n(\theta_\nu) \frac{(-1)^{\nu-1}}{\cos\theta - \cos\theta_\nu} \,,$$

qui est aussi immédiatement prévisible en utilisant la formule d'interpolation de Lagrange ({35, § 387, vol.II, p.3}). D'où l'énoncé suivant :

Soit $M = \max_\nu |S_n(\theta_\nu)| \leqslant \max_\theta |S_n(\theta)|$. *Dans les intervalles* $-\frac{\pi}{2n} < \theta < \frac{\pi}{2n}$ *et* $\pi - \frac{\pi}{2n} < \theta < \pi + \frac{\pi}{2n}$, *on a l'inégalité*

$$\left|\frac{\frac{S_n(\theta)}{n}}{\sin\theta}\right| \leqslant M \left|\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right| \,,$$

et le signe $<$ *est valable si on n'a pas* $S_n(\theta) = \mp M \sin n\theta$.

En réalité, si nous appliquons la formule (41) au polynôme $S_n(\theta) = \sin n\theta$, nous obtenons

$$\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = \frac{\cos n\theta}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\cos\theta - \cos\theta_\nu} \,,$$

d'où, en observant que dans les intervalles indiqués les expressions $\cos\theta - \cos\theta_\nu$ sont précédés du même signe,

$$\left|\frac{S_n(\theta)}{\sin\theta}\right| \leqslant \frac{|\cos n\theta|}{n} \sum_{\nu=1}^{n} |S_n(\theta_\nu)| \frac{1}{|\cos\theta - \cos\theta_\nu|} \leqslant$$

$$\frac{|\cos n\theta|}{n} M \left| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\cos\theta - \cos\theta_\nu} \right| = M \left|\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right| .$$

Si, d'autre part,

$$\frac{S_n(\theta^\star)}{\sin\theta^\star} = \mp M \left|\frac{\sin n\theta^\star}{\sin\theta^\star}\right|$$

en tout point $\theta^\star$ des intervalles indiqués, nous avons alors $S_n(\theta_\nu) = \mp(-1)^{\nu-1}M$, et ainsi le polynôme-sinus $\mp M \sin n\theta - S_n(\theta)$ a $2n$ zéros dans l'intervalle ouvert $(0,2\pi)$. Comme le polynôme s'annule aussi en $\theta = 0$, il s'ensuit qu'il est identiquement nul.

L'intérêt de l'énoncé que nous venons de démontrer, c'est qu'il permet d'obtenir facilement l'inégalité de A.A. Markov ({35, § 434, vol.II, p.97}) :

Soit

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

un polynôme rationnel de degré n *, à coefficients réels, et* $M = \max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |P_n(x)|$.
Nous avons sur le segment fermé $-1 \leqslant x \leqslant 1$

$$|P_n'(x)| \leqslant n^2 M ,$$

où le signe $<$ *est valable quand on n'a pas* $x = \mp 1$ *, et* $P_n(x)$ *est égal à* $\mp M \cos n\theta$ *lorsque* $x = \cos\theta$.

D é m o n s t r a t i o n . Le changement de variable $x = \cos\theta$ transforme l'intervalle $[0,\pi]$ de la variable θ en l'intervalle $[-1,1]$ de la variable x, et $T_n(\theta) = P_n(\cos\theta)$ est un polynôme-cosinus d'ordre n ; donc, d'après l'inégalité de Bernstein, $|T_n'(\theta)| \leqslant nM$. En outre

$$P_n'(x) = -\frac{T_n'(\theta)}{\sin\theta} .$$

1. Prenons d'abord l'intervalle $\frac{\pi}{2n} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. Ici

$$|P'_n(x)| \leqslant \frac{n\,M}{\sin\theta} \leqslant \frac{n\,M}{\sin\frac{\pi}{2n}} \leqslant n^2\,M\,,$$

puisque $\sin\theta > \frac{\pi}{2}\,\theta$ quand $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, d'où $\sin\frac{\pi}{2n} > \frac{1}{n}$.

2. D'après le théorème précédent, dans l'intervalle $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2n}$ - en observant que $T'_n(\theta)$ est un polynôme-sinus -

$$|P'_n(x)| = \left|\frac{T'_n(\theta)}{\sin\theta}\right| \leqslant nM\left|\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right| \leqslant n^2 M\,,$$

puisque $\sin n\theta < n\sin\theta$ si $0 < \theta < \frac{\pi}{2n}$. L'égalité n'a lieu que si $\theta = 0$ et $T'_n(\theta) = \mp nM\sin n\theta$, c'est-à-dire si $T_n(\theta) = \mp M\cos n\theta + C$. Comme, d'autre part, $|T_n(\theta)| \leqslant M$, la constante C ne peut être que nulle.

La démonstration est similaire dans l'intervalle $[\frac{\pi}{2},\pi]$.

Le livre d'Ahijezer ({52, § 74}) comporte une généralisation importante de la formule (40) et de l'inégalité de Bernstein. Soit $\sigma > 0$. Nous dirons que la fonction entière $f(z)$, définie sur le plan numérique complexe $\mathbb{C}$, est de type exponentiel, et que son type ou son exposant est au plus σ, si pour tout nombre $\varepsilon > 0$ on peut trouver un nombre $A(\varepsilon) > 0$ tel que l'inégalité

$$|f(z)| \leqslant A(\varepsilon)e^{(\sigma+\varepsilon)|z|}$$

soit valable pour toute valeur $z \in \mathbb{C}$. Si en outre f est bornée sur l'axe réel, la formule d'interpolation

(42) $$\sin\alpha\,.\,f'(x) - \sigma\cos\alpha\,.\,f(x) = \sigma\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{k-1}f\left(x+\frac{k\pi-\alpha}{\sigma}\right)\frac{\sin^2\alpha}{(\alpha-k\pi)^2}$$

est valable pour tout nombre réel α. On peut déduire de cette formule, en posant $M = \sup_x|f(x)|$, que nous avons

$$|\sin\alpha\,.\,f'(x) - \sigma\cos\alpha\,.\,f(x)| \leqslant \sigma M\,.$$

Si nous considérons qu'un polynôme trigonométrique d'ordre n est une fonction entière 2π-périodique, de type exponentiel d'exposant n, et si nous observons l'identité

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\ell.2\pi n+(2\nu-1)\frac{\pi}{2})^2} = \frac{1}{4n^2\sin^2(2\nu-1)\frac{\pi}{2n}}$$

({35, § 628 ($10^{\star}$), vol.II, p.547}), nous voyons que pour un tel polynôme trigonométrique, en posant $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\sigma = n$, (42) résulte de l'égalité (40).

Au chapitre 4 de son article [15], Riesz donne de l'inégalité de Bernstein une autre démonstration, totalement différente, basée sur la considération des racines. Soit $\max_\theta |T'_n(\theta)| = nL$ et supposons que $L \geqslant M$. Soit $\theta^\star$ un point de l'intervalle semi-fermé $[0,2\pi)$ où $|T'_n(\theta^\star)| = nL$, par exemple soit $T'_n(\theta^\star) = nL$. Le polynôme trigonométrique d'ordre n

$$U(\theta) = L \sin n(\theta-\theta^\star) - T_n(\theta)$$

aux points successifs

$$\theta^\star + \theta_\nu = \theta^\star + (2\nu-1)\frac{\pi}{2n} \qquad (\nu = 1,2,\dots,2n)$$

vérifie tour à tour

$$U(\theta^\star+\theta_1) \geqslant 0 \ , \ U(\theta^\star+\theta_2) \leqslant 0 \ , \ \dots \ , \ U(\theta^\star+\theta_{2n}) \leqslant 0 \ .$$

Supposons maintenant que U n'est pas identiquement nul. Il existe alors des points $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{2n}$ tels que

$$\theta^\star+\theta_\nu < \xi_\nu < \theta^\star+\theta_{\nu+1} \quad (\nu=1,\dots,2n-1) \ , \ \theta^\star+\theta_{2n} < \xi_{2n} < \theta^\star+\theta_1+2\pi$$

et aussi

$$U'(\xi_1) < 0 \ , \ U'(\xi_2) > 0 \ , \ \dots \ , \ U'(\xi_{2n}) > 0 \ .$$

D'où le polynôme trigonométrique $U'(\theta)$ d'ordre n a $2n$ racines distinctes dans l'intervalle $[0,2\pi)$. Mais $U'(\theta^\star) = 0$, et, puisque les fonctions $nL\cos(\theta-\theta^\star)$ et $T'_n(\theta)$ ont toutes les deux leur maximum au point $\theta^\star$, nous avons de plus $U''(\theta^\star) = 0$. Ainsi le polynôme trigonométrique $U'(\theta)$, en tenant compte de la multiplicité, a au moins $2n+1$ racines dans $[0,2\pi)$, ce qui est impossible. Donc $U(\theta) \equiv 0$ et $M = L$.

Je veux insister sur le fait que dans son article [15] Riesz utilise les méthodes précédemment décrites pour démontrer plusieurs autres théorèmes, que je n'énoncerai pas. Dans le dernier paragraphe de l'article est démontrée une version locale d'un théorème de Fejér en utilisant l'égalité (40). Dans son ouvrage {78} déjà mentionné Fejér montre entre autres que si la série de puissances (12) converge vers $f(z)$ dans le disque $|z| < 1$, si $f(z)$ est continue sur le disque fermé $|z| \leqslant 1$ et si la partie réelle de (12) est uniformément convergente sur le cercle $|z| = 1$, la partie imaginaire de (12) est aussi uniformément convergente sur ce cercle. Riesz démontre la proposition suivante : Soit $f(z)$ la somme de la série de puissances (12) sur le disque $|z| < 1$, et supposons que $f(z)$ soit continue dans le secteur fermé $0 \leqslant r \leqslant 1$, $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$, où $z = re^{i\theta}$. Si la partie réelle de (12) est uniformément convergente sur tous les sous-arcs fermés de l'arc $\theta_1 < \theta < \theta_2$ du cercle $|z| = 1$, il en est de même de la partie imaginaire de (12). Zygmund ({47, p.95}) démontre ce théorème par une autre méthode, et Kuttner ({49, chap. XIII, (5.1)}) nous en donne une généralisation importante.

Une autre conséquence de (40) est que si le polynôme $P_n(z)$ d'ordre au plus n satisfait à l'inégalité $|P_n(z)| \leqslant 1$ sur le disque $|z| \leqslant 1$, nous avons de même pour sa dérivée $|P_n'(z)| \leqslant n$ sur le disque $|z| \leqslant 1$. Otto Szász ({132}) a donné de cet énoncé une démonstration si simple que Léopold Fejér la communique en entier dans l'article {80} qu'il a écrit à l'occasion de la remise à Otto Szász du prix Jules König. Gabriel Szegö a été plus loin et a démontré que si déjà la partie réelle de $P_n(z)$ satisfait à l'inégalité $|\mathrm{Re}\, P_n(z)| \leqslant 1$ dans $|z| \leqslant 1$, $|P_n'(z)| \leqslant n$ est aussi vrai sur le même ensemble. De la proposition plus faible où dans l'inégalité de Bernstein ou de Szegö $2n$ remplace n à droite, Léopold Fejér ({79}) a donné une démonstration très simple, qui s'appuie sur le fait que les sommes de Fejér de la série de Fourier se trouvent entre le maximum et le minimum de la fonction.

Paul Turán ({140}) a établi des inégalités opposées aux inégalités de Markov et de Riesz, en ce qu'il a montré que,si toutes les racines de $P_n(x)$ se trouvent dans l'intervalle $-1 \leqslant x \leqslant 1$, nous avons

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |P_n'(x)| \geqslant \frac{n}{2} \max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |P_n(x)| ,$$

et que si toutes les racines de $P_n(z)$ se trouvent sur le disque $|z| \leqslant 1$, nous avons

$$\max_{|z|\leqslant 1} |P_n'(z)| \geqslant \frac{\sqrt{n}}{6} \max_{|z|\leqslant 1} |P_n(z)| .$$

L'une des conséquences du résultat de Marcel Riesz est que si le polynôme trigonométrique $T_n(\theta)$ d'ordre n a un maximum absolu au point $\theta=\theta_0$, n'importe quelle racine de $T_n(\theta)$ est à une distance de θ_0 d'au moins $\frac{\pi}{2n}$. Ce fait est utilisé plusieurs fois par Erdös et Turán, par exemple dans la démonstration ({74}) d'un de leurs profonds théorèmes concernant la répartition uniforme. Turán ({141}) démontre par une méthode voisine de celle de Riesz que,si la valeur absolue du polynôme $P_n(z)$ d'ordre n atteint au point $z = 1$ son maximum sur le disque $|z| \leqslant 1$,

$P_n(e^{i\theta}) \neq 0$ quand $-\frac{\pi}{n} < \theta < \frac{\pi}{n}$, et ce résultat est exact, comme le montre l'exemple $P_n(z) = 1 + z^n$. Si $P_n(x)$ s'annule aux points ∓ 1 , mais n'est nulle part égal à zéro dans l'intervalle ouvert $-1 < x < 1$, Turán ({141}) obtient des bornes exactes pour la distance à laquelle se trouvent les points ∓ 1 des points où $|P_n(x)|$ atteint son maximum.

A la fin de l'article [15], Marcel Riesz se demande si, lorsque nous remplaçons, à droite de (34), les vaieurs $T_n(\theta_\nu)$ par les valeurs $f(\theta_\nu)$ prises par une fonction continue f , la méthode d'interpolation converge quand $n \to \infty$. A cette question, Kryloff ({110}) a donné une réponse positive.

Dans son article [19], extrait cette fois encore de deux lettres adressées à Mittag-Leffler, Marcel Riesz donne deux démonstrations de l'inégalité de S.N. Bernstein ({58}). Soit $z = x+iy$ un point du plan numérique complexe, vérifiant

$$x = a \cos \psi \ , \quad y = b \sin \psi \quad (0 \leqslant \psi < 2\pi) \ , \tag{43}$$

équation d'une ellipse dont les points focaux sont les points (1,0) et (-1,0) , c'est-à-dire $a^2+b^2=1$. Introduisons le paramètre $\rho = a+b$; nous avons alors

$$a = \frac{1}{2}(\rho+\rho^{-1}) \ , \quad b = \frac{1}{2}(\rho-\rho^{-1}) \ .$$

Considérons un polynôme P_n d'ordre n à coefficients complexes, et soit $M = \max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1} P_n(x)$ .L'inégalité de Bernstein entraîne que

$$|P_n(z)| \leqslant M\rho^n \ .$$

Cette inégalité joue un rôle dans l'approximation polynomiale des fonctions analytiques.

L'une des démonstrations de Riesz est utilisée aujourd'hui de façon générale ({32, III, problème 270, p.137 et 320}), et Montel l'a découverte indépendamment ({114, p.155-157}). Cette démonstration s'appuie sur la théorie du maximum, et également sur le fait connu en hydrodynamique que la fonction définie par

$$z = \frac{1}{2}(w + \frac{1}{w}) \ , \quad w = \rho e^{i\psi} \ ,$$

applique de façon conforme à la fois le disque $|w| < 1$ et son extérieur $|w| > 1$ sur le plan z coupé le long du segment [-1,1] , et applique les cercles $|w| = \rho$ et $|w| = \rho^{-1}$ sur l'ellipse (43).

L'autre démonstration s'appuie sur l'interpolation de Lagrange, et l'un de ses intérêts est que c'est peut-être la première fois que l'on rencontre un artifice qui trouve son origine chez Landau ({32, vol.II, p.31-32}). En effet, Riesz démontre d'abord seulement que

$$|P_n(z)| \leqslant M \frac{\rho^{n+1}}{\delta},$$

où δ est la distance du point z au segment $[-1,1]$. Si nous appliquons cette inégalité au polynôme d'ordre mn $[P_n(z)]^m$, extrayons des deux côtés la racine $m^{\text{ième}}$ et faisons tendre m vers l'infini, nous obtenons l'inégalité cherchée.

5. *L'hypothèse de Riemann* [18].

Dans cette brève communication, Marcel Riesz trouve d'abord, pour la fonction zêta de Riemann :

$$\frac{\Gamma(1-\frac{s}{2})}{\zeta(s)} = \int_0^\infty F(x)\, x^{-(\frac{s}{2}+1)}\, dx ,$$

où

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\, x^k}{(k-1)!\ \zeta(2k)} .$$

Ensuite il observe que l'égalité $F(x) = o(x^{\frac{1}{2}})$ est valable, et enfin il démontre que l'égalité $F(x) = o(x^{\frac{1}{4}+\delta})$, pour tout nombre $\delta > 0$, est valable si, et seulement si, la fameuse hypothèse de Riemann - non encore démontrée à ce jour - est vraie : hypothèse selon laquelle les racines de la fonction zêta (à l'exception des racines dites triviales $s = -2$, -4 , ...) sont toutes situées sur la droite $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$. Sous l'influence de ce résultat, Hardy et Littlewood donnent une condition nécessaire et suffisante du même genre ({93, p.123 et 161 ; 138, 14.32, p.328}). Titchmarsh fait la remarque suivante : "Ces conditions ont une certaine force d'attraction superficielle, puisqu'explicitement elles ne dépendent que des valeurs prises aux points situés dans le demi-plan $\sigma > 1$ de $\zeta(s)$; cependant personne n'en a encore fait usage."

6. *Théorème de Frédéric Riesz et Marcel Riesz* [23].

Le seul article que Marcel Riesz ait écrit en association avec son frère se situe à la frontière de la théorie classique des fonctions analytiques d'une variable complexe et de la théorie, encore nouvelle en 1916, des fonctions d'une variable réelle. Le résultat principal de cette étude a été généralisé dans une large mesure durant les années 1960, et le "théorème abstrait de F. et M. Riesz" est devenu, avec la généralisation d'un théorème de Gabriel Szegö, l'un des théorèmes de base de la théorie des algèbres de fonctions. Le mémoire [23], puis, très peu après, les articles de Frédéric Riesz et Gabriel Szegö ({122 ; 133 ; 123}) ont jeté les bases de la théorie des classes de fonctions de Hardy.

Le point de départ de l'article de Frédéric et Marcel Riesz est une fois de plus la thèse de doctorat de Fatou {12}, dont l'un des résultats principaux, devenu classique, est le suivant :

Soit w *une fonction analytique bornée dans le disque-unité ouvert* $|z| < 1$. *La valeur limite* $f(e^{i\theta}) = \lim_{r \uparrow 1} w(re^{i\theta})$ *existe en presque tous les points du cercle* $|z| = 1$, c'est-à-dire que les points $e^{i\theta}$ où il n'existe pas de valeur limite constituent sur le cercle un ensemble de mesure de Lebesgue nulle.

On sait que si une fonction analytique s'annule le long d'un arc de courbe situé à l'intérieur de l'ensemble de régularité, la fonction est identiquement nulle. De façon un peu plus générale, si $w(z)$ est régulier à l'intérieur d'un domaine et s'annule sur un arc de courbe à la frontière du domaine, de façon que $w(z)$ soit continu sur l'ensemble constitué de l'arc de courbe et du domaine, il est aussi vrai que $w(z)$ est indentiquement nul. Fatou démontre aussi que si la fonction $w(z)$ figurant dans le théorème n'est pas identiquement nulle, alors sur n'importe quel arc du cercle $|z| = 1$ les points $e^{i\theta}$, pour lesquels $f(e^{i\theta}) \neq 0$, constituent un ensemble de mesure positive. Il énonce sans démonstration la proposition suivante, que j'appelerai hypothèse de Fatou :

Si $w(z)$ *n'est pas identiquement nul,* $f(e^{i\theta})$ *ne peut s'annuler que sur un ensemble de mesure nulle.*

Le premier résultat de l'article des frères Riesz est une belle démonstration de l'hypothèse ci-dessus.

Avant de poursuivre mon exposé sur l'article de Frédéric et Marcel Riesz, je voudrais éclairer un peu le théorème de Fatou concernant l'existence des valeurs limites, et, en liaison avec lui, introduire quelques notions et observations dont nous aurons besoin. En fait, le théorème de Fatou ne concerne pas les fonctions analytiques, mais les fonctions harmoniques. Désignons par D le disque ouvert $|z|<1$ et par T le cercle $|z| = 1$ constituant la frontière du disque. Si $1 \leqslant p < \infty$ et $u(z)$ est une fonction harmonique dans D , l'égalité

$$M_p(r;u) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right)^{1/p}$$

définit une fonction croissante du rayon r ({73, p.10}), qui, de la sorte, ou bien reste bornée, ou bien tend vers $+\infty$. Désignons par $h^p(D)$ l'ensemble des fonctions $u(x,y) = u(z)$, qui sont harmoniques dans D et pour lesquelles $M_p(r;u)$ est borné. L'expression

$$\|u\|_p = \lim_{r\uparrow 1} M_p(r;u) = \sup_{0\leq r<1} M_p(r;u)$$

définit une norme dans l'espace vectoriel $h^p(D)$. De la même façon, $h^\infty(D)$ désigne l'espace des fonctions u, harmoniques dans D , pour lesquelles

$$M_\infty(r;u) = \max_{0\leq\theta<2\pi} u(re^{i\theta})$$

est borné, et dans ce cas

$$\|u\|_\infty = \lim_{r\uparrow 1} M_\infty(r;u) = \sup_{|z|<1} |u(z)| \ .$$

Supposons que $1 < p \leq \infty$ et soit $u \in h^p(D)$. Quand r varie dans l'intervalle $0 \leq r < 1$, les fonctions $u(re^{i\theta})$ du point $e^{i\theta} \in T$ déterminent un ensemble borné de l'espace des fonctions $L^p(T)$. De la condition $p > 1$ découle que de tels ensembles sont faiblement relativement compacts, et ainsi il existe une fonction $f(e^{i\theta}) \in L^p(T)$, qui est le point d'accumulation faible de la famille de fonctions $(u(re^{i\theta}))_{0\leq r<1}$. D'autre part, la fonction harmonique u est développable en série de polynômes harmoniques

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta} , \tag{44}$$

où

$$r^{|n|} c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \, e^{-in\theta} \, d\theta \ .$$

Si r tend vers 1 sur une suite convenablement choisie, nous obtenons

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \, e^{-in\theta} \, d\theta , \tag{45}$$

c'est-à-dire que les constantes c_n sont les coefficients de Fourier complexes de la fonction $f(e^{i\theta})$. Les sommes d'Abel de la série de Fourier

(46) $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$$

de la fonction complexe $f(e^{i\theta})$ sont justement définies par la série (44), d'où nous obtenons la représentation

(47) $$u(re^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} P(re^{i(\theta-\psi)})\, f(e^{i\psi})\, d\psi \ ,$$

où

$$P(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Re}\,\frac{1+z}{1-z}$$

est le noyau de Poisson. En outre, nous avons toujours la convergence forte

$$\lim_{r\uparrow 1} \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p\, d\theta = 0$$

({102, p.32-33 ; 49, chap.IV, (6.17), p.150}).

La situation est sensiblement différente quand $p = 1$, c'est-à-dire quand u appartient à l'espace des fonctions $h^1(D)$, puisque les ensembles bornés de l'espace $L^1(T)$ ne sont pas nécessairement faiblement relativement compacts. Dans ce cas, nous utilisons le fait que toute fonction f intégrable définit une forme linéaire continue dans l'espace $C(T)$ des fonctions continues : soit en effet

$$L_f(\varphi) = \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta})\, f(e^{i\theta})\, d\theta \ , \quad \varphi \in C(T) \ ,$$

alors

$$|L_f(\varphi)| \leq \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|\, d\theta \ . \max_{0\leq\theta<2\pi} |\varphi(e^{i\theta})| \ .$$

Dans la conception fondamentale de Frédéric Riesz, à toute forme linéaire continue définie sur l'espace $C(T)$ correspond une fonction $F(e^{i\theta})$ à variation bornée ({135, VI, 1.3 , p.188}). La fonction $F(e^{i\theta})$ est la différence de deux fonctions croissantes : $F(e^{i\theta}) = F_1(e^{i\theta}) - F_2(e^{i\theta})$; ainsi, si nous définissons les mesures μ_1 , μ_2 par l'expression

$$\mu_j(\{e^{i\theta};\theta_1\leq\theta\leq\theta_2\}) = \lim_{\theta\downarrow\theta_2} F_j(e^{i\theta}) - \lim_{\theta\uparrow\theta_1} F_j(e^{i\theta})$$

$(j=1,2)$, et si nous écrivons $\mu = \mu_1 - \mu_2$, nous obtenons une correspondance essentiellement bijective entre les fonctions $F(e^{i\theta})$ et les mesures de Radon définies sur T . Autrement dit, on peut identifier le dual de $C(T)$ avec l'espace $M(T)$ des mesures de Radon. Dans l'espace $M(T)$ les ensembles bornés sont faiblement relativement compacts, et ainsi il découle du raisonnement ci-dessus que pour toute fonction $u \in h^1(D)$ il existe une mesure μ permettant de mettre u sous la forme

(48) $$u(re^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} P(re^{i(\theta-\psi)})\, d\mu(\psi)$$

({73, théorème 1.1, p.2}). Le fait que μ n'est pas toujours absolument continue, c'est-à-dire n'est pas de la forme $\mu(\theta) = f(e^{i\theta})\, d\theta$, nous est montré par l'exemple du noyau $P(re^{i\theta})$, pour lequel μ est la masse unité placée au point 1 .

Un théorème de Lebesgue, dont Frédéric Riesz a donné une démonstration simple ({135, III. 1.3, p.86}), énonce que la dérivée $f(e^{i\theta})$ de la fonction à variation bornée $F(e^{i\theta})$ existe presque partout, c'est-à-dire que la mesure correspondant à $F(e^{i\theta})$ peut s'écrire sous la forme $\mu(\theta) = f(e^{i\theta})\, d\theta + \sigma(\theta)$, où σ est une mesure singulière. On voit aisément ({102, p.34-36}) qu'en tout point $e^{i\theta} \in T$, où la dérivée $f(e^{i\theta})$ existe, la relation $\lim\limits_{r\uparrow 1} u(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ est valable pour la fonction harmonique définie par (48). D'après cela, on peut généraliser le théorème de Fatou mentionné au début de ce paragraphe suivant deux directions :

1) il suffit d'admettre que la fonction est harmonique dans le disque D au lieu d'être analytique ;

2) il suffit d'admettre que la fonction appartient à la classe $h^1(D)$ dans le disque D , au lieu d'appartenir à la classe $h^\infty(D)$.

Par contre, le théorème pressenti par Fatou et démontré par les frères Riesz n'est valable que pour les fonctions analytiques. En général, une fonction harmonique peut très bien s'annuler sur un arc de courbe sans être nécessairement identiquement nulle, comme on le voit par l'exemple de la fonction $u(x,y) = x$. De la même façon $\lim\limits_{r\uparrow 1} P(re^{i\theta}) = 0$ pour toute valeur $\theta \neq 0$, bien que $P(z) \in h^1(D)$ et $P(z)$ ne soit nulle part égal à zéro dans D . Nous appelons conjuguée de la fonction harmonique u une fonction harmonique v telle que $w = u + iv$ soit analytique, c'est-à-dire que v satisfait aux égalités différentielles de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} .$$

Si la fonction u s'annule sur un ensemble trop grand, v veille à ce que w ne puisse s'annuler que sur un ensemble discret.

Introduisons les espaces analogues à $h^p(D)$ dont les éléments ne sont pas des fonctions harmoniques, mais analytiques. Si $w(z)$ est une fonction analytique dans

$\mathcal{D}$, alors, d'après le principe du maximum,

$$M_\infty(r;w) = \max_{0 \leqslant \theta < 2\pi} |w(re^{i\theta})|$$

est une fonction croissante de r et, d'après le théorème des trois cercles d'Hadamard, $\log M_\infty(r;w)$ est une fonction convexe de $\log r$. Hardy a démontré en 1915 que des énoncés semblables sont valables pour l'expression

$$M_p(r;w) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |w(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right)^{1/p} ,$$

où $0 < p < \infty$ ({73, théorème 1.5, p.9}). En hommage à Hardy, et en suivant Frédéric Riesz ({123}), on désigne par $H^p(\mathcal{D})$, ou plus succinctement par H^p , l'espace des fonctions $w(z)$ analytiques dans $\mathcal{D}$ pour lesquelles $M_p(r;w)$ est borné ($0<p\leqslant\infty$).

La quantité définie par

$$\|w\|_p = \lim_{r \uparrow 1} M_p(r;w) = \sup_{0 \leqslant r < 1} M_p(r;w)$$

est, si $1 \leqslant p \leqslant \infty$, une norme dans l'espace vectoriel $H^p(\mathcal{D})$, tandis que si $0<p<1$ elle n'est qu'une "quasi-norme", c'est-à-dire qu'à la place de l'inégalité triangulaire elle satisfait à l'inégalité

$$\|w_1 + w_2\|_p \leqslant 2^{(1-p)/p} \left(\|w_1\|_p + \|w_2\|_p \right) .$$

Frédéric Riesz ({123}) a encore souligné l'importance de la classe des fonctions constituée des fonctions $w(z)$ analytiques dans $\mathcal{D}$ telles que

$$\int_0^{2\pi} \log^+ |w(re^{i\theta})| \, d\theta$$

reste inférieure à une borne indépendante de r , où $\log^+ t = \max(0,\log t)$. Cette classe est désignée par $N(\mathcal{D})$ en hommage aux frères Nevanlinna, qui ont démontré qu'une fonction analytique appartient à $N(\mathcal{D})$ si, et seulement si, elle est le quotient de deux fonctions analytiques bornées ({73, théorème 2.1, p.16}). Il est clair que $H^\infty(\mathcal{D}) \subset H^p(\mathcal{D})$ et aussi que $H^p(\mathcal{D}) \subset H^q(\mathcal{D})$ si $p > q$. De l'inégalité $p \log^+ t \leqslant t^p$ $(t \geqslant 0)$ il découle que $H^p(\mathcal{D}) \subset N(\mathcal{D})$. Une fonction analytique dans $\mathcal{D}$ appartient à $H^2(\mathcal{D})$ si et seulement si, pour le développement de la série des puissances

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n , \tag{12}$$

on a $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$.

Après ces observations, revenons à l'article [23]. La démarche consiste à transposer à un domaine général le théorème de Fatou concernant l'existence des valeurs frontières et le complément de ce théorème. Dans ce but les frères Riesz considèrent un domaine Ω situé sur une surface de Riemann et dont la frontière Γ est une courbe fermée rectifiable. Si F est une projection conforme de D sur Ω , l'un des théorèmes de Carathéodory ({49, chap.VII,(10.9), p.290}) nous permet d'étendre F à la fermeture $\overline{D} = D \cup T$ du disque ouvert D , et ainsi la fonction étendue est la projection homéomorphe de $\overline{D}$ sur l'ensemble $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. La rectifiabilité de la frontière Γ signifie que la fonction $F(e^{i\theta})$ est à variation bornée sur T .

Nous avons de cela l'équivalent exact si l'on se donne une fonction $F(z)$ analytique et bornée dans D , pour laquelle la fonction limite $F(e^{i\theta}) = \lim_{r\uparrow 1} F(re^{i\theta})$ existant presque partout est à variation bornée. Alors $\lim_{r\uparrow 1} F(re^{i\theta})$ existe partout, car l'égalité

$$F(z) = \int_0^{2\pi} P(re^{i(\theta-\psi)})\ F(e^{i\psi})\ d\psi$$

est valable pour $F(z)$, et la valeur limite de l'intégrale de Poisson pour $r\uparrow 1$ existe en tout point où $F(e^{i\theta})$ possède au plus une discontinuité de première espèce, ce qui, d'après l'hypothèse, est le cas en tout point de T . Mieux : d'après un théorème de Pringsheim que plusieurs mathématiciens hongrois - dont Léopold Fejér ({77}) et François Lukács ({49, chap.II, (8.13), p.60}) - ont généralisé, $F(e^{i\theta})$ est également continue.

Sous ces conditions les Riesz démontrent les deux propositions suivantes :

1) La fonction $F(e^{i\theta})$ transfère les ensembles de mesure nulle du cercle T dans les ensembles de mesure nulle de la courbe rectifiable Γ .

2) Si l'image d'un des ensembles de T est de mesure nulle, l'ensemble lui-même est de mesure nulle.

La proposition 1) signifie que $F(e^{i\theta})$ est absolument continue ; pour la démontrer, il est essentiel de construire une fonction auxiliaire $\omega(z)$ analytique dans D et continue dans $\overline{D}$, pour laquelle $\omega(e^{i\theta}) = 1$ en tout point $e^{i\theta}$ de l'ensemble donné E de mesure nulle, fermé, de T , tandis que $|\omega(z)| < 1$ dans l'ensemble complémentaire en $\overline{D}$ de l'ensemble E . 2) découle aisément de 1).

De nos jours, la plupart des auteurs appellent la proposition 1) "théorème de Frédéric et Marcel Riesz". Nous pouvons l'énoncer par de nombreuses formulations équivalentes, dont nous citerons tout de suite deux, que l'on trouvera par exemple dans le livre de Zygmund ({49, chap.VII, (8.2) et (8.3), p.285}) :

Si la fonction harmonique u *et son conjugué* v *appartiennt tous deux à* $h^1(D)$, u *peut être écrit sous la forme*

$$u(z) = \int_0^{2\pi} P(re^{i(\theta-\psi)})\ f(e^{i\psi})\ d\psi ,$$

où $f(e^{i\theta}) \in L^1(T)$.

Si la mesure $\mu \in M(T)$ *satisfait, pour les valeurs* $n = 1,2,3,\dots$, *à l'égalité*

(49) $$\int_0^{2\pi} e^{in\theta}\ d\mu(\theta) = 0 ,$$

μ *est absolument continue.*

Notons, pour éclairer ce qui précède, que,si $F(z) \in H^1(D)$, nous avons, en nous appuyant sur le théorème de Cauchy

$$r^n \int_0^{2\pi} e^{in\theta}\ dF(re^{i\theta}) = \int_{|z|=r} z^n\ dF(z) = -n \int_{|z|=r} z^{n-1}\ F(z)\ dz = 0 .$$

Une démonstration simple de Bochner se trouve dans les notes de la conférence de Sarason ({125, p.13}). Dans un article consacré principalement aux ensembles "rares" (auxquels on a donné le nom de Simon Sidon), Rudin montre ({124, 5.7, p.226}) qu'il n'est même pas nécessaire que (49) ait lieu pour tout nombre entier n positif.

Comme je l'ai déjà laissé entendre, la première conséquence du théorème de F. et M. Riesz peut s'énoncer comme suit :

Soit Ω *un domaine, délimité par des courbes rectifiables, sur une surface de Riemann, et soit* $w(z)$ *une fonction analytique et bornée définie dans* Ω . *Les valeurs frontières de* $w(z)$ *existent alors presque partout et sont indépendantes du chemin que nous suivons en nous rapprochant du point limite, dans la mesure où il ne touche pas la frontière. Si* $w(z)$ *n'est pas identiquement nul, les valeurs frontières sont presque partout différentes de zéro.*

Plus importantes peut-être sont les propriétés des espaces $H^p(D)$: *Si* $w(z)$ *appartient à l'espace* $N(D)$, $\lim_{r\uparrow 1} w(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ *existe presque partout. Si* $w(z) \in H^p(D)$ *et* $0 < p \leqslant \infty$, $f(e^{i\theta}) \in L^p(D)$ ({73, théorème 2.2, p.17}) *et*

$$\lim_{r\uparrow 1} \int_0^{2\pi} |w(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p\ d\theta = 0$$

({73, théorème 2.6, p.21}). Dans le cas où $p > 1$, l'affirmation découle immédiatement de l'assertion analogue concernant la classe $h^p(D)$. Dans le cas où $p = 1$, comme nous l'avons vu, les propositions analogues ne sont pas valables pour $h^1(D)$, et les propriétés de l'espace $H^1(D)$ découlent du théorème de F. et M. Riesz ; mieux, elles lui sont équivalentes, de sorte que certains auteurs appellent ces propriétés "théorème des frères Riesz".

Si $p \geqslant 1$, la projection $w(z) \mapsto f(e^{i\theta})$ est isométrique de l'espace $H^p(D)$ dans l'espace $L^p(T)$, et $f(e^{i\theta}) \in L^p(T)$ est l'image d'un élément $w(z)$ si, et seulement si, $c_n = 0$ pour tout $n < 0$ dans la série de Fourier (46) complexe de $f(e^{i\theta})$ ({73, théorème 3.4, p.38}).

Le premier résultat complètement généralisé des frères Riesz peut s'énoncer comme suit : *si* $w(z) \in N(D)$ *et* $w(z)$ *n'est pas identiquement nul, la fonction* $\log|f(e^{i\theta})|$ *est intégrable* ({73, théorème 2.2, p.17}), et, par suite, $f(e^{i\theta})$ peut tout au plus s'annuler sur un ensemble de mesure nulle. Frédéric et Marcel Riesz ont montré que,si $w(z) \in H^1(D)$ n'est pas identiquement nul, $f(e^{i\theta})$ est différente de zéro presque partout ; Gabriel Szegö a démontré ({122, 133}) que,si $w(z) \in H^2(D)$, $\log|f(e^{i\theta})|$ est intégrable, alors que la généralisation vient de Frédéric Riesz ({123}).

Avant d'en venir aux différentes généralisations du théorème de Frédéric et Marcel Riesz, je voudrais l'énoncer sous une autre forme équivalente. Soit $C(T)$ l'algèbre des fonctions à valeurs complexes, continues sur le cercle T , algèbre sur laquelle nous désignerons la norme par

$$\|f\| = \max_{0 \leqslant \theta < 2\pi} |f(e^{i\theta})| .$$

Soit $A(D)$ l'algèbre des fonctions $w(z)$ analytiques dans D et continues dans $\bar{D}$, où la norme est

$$\|w\| = \max_{|z| \leqslant 1} |w(z)| = \max_{|z|=1} |w(z)| .$$

D'après le principe du maximum, l'application $w(z) \mapsto w(e^{i\theta})$ est une projection isométrique de $A(D)$ sur une sous-algèbre fermée de $C(T)$, que nous désignerons par $A(T)$. Désignons encore par $A_0(T)$ l'ensemble des images des fonctions dans $A(D)$ pour lesquelles $w(0) = 0$, c'est-à-dire

$$\int_0^{2\pi} w(e^{i\theta})\, d\theta = 0 .$$

Si nous désignons par c_n les coefficients de Fourier des $f(e^{i\theta}) \in C(T)$ complexes définies par (45), nous avons

$$A(T) = \{f(e^{i\theta}) \in C(T) \ ; \ c_n = 0, \text{ si } n<0\}$$

et

$$A_0(T) = \{f(e^{i\theta}) \in C(T) \ ; \ c_n = 0, \text{ si } n \leqslant 0\} \ .$$

Il est évident que $A_0(T)$ est un idéal de l'algèbre $A(T)$. Pour qu'un élément μ de l'espace $M(T)$, dual de $C(T)$, soit orthogonal au sous-espace $A_0(T)$, c'est-à-dire pour que

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \, d\mu(\theta) = 0$$

soit valable pour toute fonction $f(e^{i\theta}) \in A_0(T)$, il faut et il suffit que (49) soit satisfait pour $n = 1,2,\ldots$. Le théorème des frères Riesz peut s'énoncer ainsi : *si* μ *est orthogonal à* $A_0(T)$, μ *est absolument continue.*

Nous devons à Hille et Tamarkin ({101}), ainsi qu'à Esseen ({75, p.19-21}) un transfert assez évident des théorèmes des frères Riesz du disque au demi-plan. Ainsi, par exemple, si μ est une mesure de Radon finie sur la droite numérique entière $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire que $|\mu|(\mathbb{R}) < \infty$), et si sa transformée de Fourier $F\mu = \hat{\mu}$ définie par

$$\hat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi x} \, d\mu(x)$$

s'annule sur $\xi \leqslant 0$, μ est absolument continue. Forelli ({85}) montre que la conclusion est déjà valable si nous n'exigeons pas de $\hat{\mu}$ qu'il s'annule sur toute la demi-droite $\xi \leqslant 0$. Soient α et β deux nombres réels linéairement indépendants sur l'anneau des nombres entiers. Si $\hat{\mu}$ s'annule en tout point $m\alpha + n\beta$, où m et n sont des entiers négatifs, μ est absolument continue.

Une des premières applications du théorème des frères Riesz est le théorème de John Wermer appelé "de maximalité" ({91, 1.1, p.1}), d'après lequel $A(T)$ est une sous-algèbre fermée maximale de l'algèbre $C(T)$. Quand Wermer généralise son théorème ({142}), il transfère le théorème des frères Riesz du disque D au domaine d'une surface de Riemann, dont la frontière est une courbe analytique fermée simple. Sa démonstration suit de près celle des Riesz, les notations aussi sont les mêmes, mais à la place du noyau de Poisson il utilise ce qu'il appelle mesure harmonique.

Bishop ({60, 61}) étend le théorème de Frédéric et Marcel Riesz du disque fermé $\overline{D}$ à un sous-ensemble K compact du plan numérique complexe, dont l'ensemble complémentaire est connexe. Comme application, il obtient une démonstration simple du théorème d'approximation de Mergelian. D'après ce théorème, si K est un sous-ensemble compact du plan numérique complexe tel que son complémentaire est connexe, toute fonction qui est continue sur K et analytique à l'intérieur de celui-ci est uniformément approchable par des polynômes ({86, II. 9.1, p.48}). On remarquera que la manière d'énoncer la généralisation de Bishop n'est pas immédiatement évidente, étant donné qu'il ne suppose pas que la frontière de K est une courbe rectifiable. Pour l'énoncé exact, à part l'article de Bishop {61}, je renvoie à l'article (# 9621) paru dans le volume 22 des *Mathematical Reviews*.

Cullen ({70}) n'élimine même plus, dans sa généralisation, la possibilité que l'ensemble complémentaire du domaine ait plusieurs composantes connexes ; il va jusqu'à admettre que le nombre de ces composantes soit infini, mais il suppose que la frontière du domaine est nécessairement composée d'une suite de courbes de Jordan rectifiables.

Dans sa thèse de 1918 à l'Université de Saratov, Privalov a redécouvert les résultats des frères Riesz indépendamment d'eux. Privalov ne pouvait pas avoir connaissance des résultats de Riesz, non seulement parce qu'ils n'ont paru qu'en 1920 et que les événements de l'époque rendaient les contacts difficiles, mais aussi parce qu'il était difficile de se procurer l'ouvrage : par erreur, l'éditeur ne fit imprimer que 50 exemplaires du volume dans lequel figurait l'article des frères Riesz - ce qui fait dire à Bieberbach que c'était la publication la plus rare des temps modernes. En 1925, dans un ouvrage écrit en commun avec Luzin, Privalov revient sur l'examen des valeurs frontières des fonctions analytiques, et il démontre entre autres le théorème suivant, qui généralise dans une grande mesure la réponse des frères Riesz à l'hypothèse de Fatou ({120, chap.IV, 2.5}) : *Si la fonction* w *est méromorphe dans le disque ouvert* $|z| < 1$ *et si la valeur limite* $\lim_{r\uparrow 1} w(re^{i\theta})$ *existe sur un ensemble de mesure positive des points* $e^{i\theta}$ *du cercle* $|z| = 1$ *et est égale à zéro,* w *s'annule identiquement.* Observons que ce théorème ne comporte aucune restriction concernant la croissance de la fonction w , d'où il suit qu'il doit supposer l'existence d'une valeur limite. Les résultats de Privalov, de Luzin et de leurs élèves, et parmi ces résultats la version variation locale du théorème des frères Riesz ({120, chap.III, § 11}), sont traités en détail dans la deuxième édition du livre de Privalov, publiée par les soins de Markuchevitch ({120}), où on peut aussi trouver exposés les résultats signalés plus haut.

Les ensembles de mesure nulle sont des ensembles petits du point de vue de la théorie de la mesure. Les ensembles petits du point de vue de la topologie sont ce qu'on appelle des ensembles maigres. Nous appelons *rare* un sous-ensemble du cercle T (ou plus généralement d'un espace topologique) quand sa fermeture ne comporte pas de point intérieur. On dit qu'un ensemble est *maigre* quand on peut le considérer comme la réunion d'une suite dénombrable d'ensembles rares. L'hypothèse de Fatou n'est pas vérifiée si nous y remplaçons la notion d'ensemble de mesure nulle par celle d'ensemble maigre, parce que, d'une part, il existe des ensembles de mesure nulle ayant pour complémentaires des ensembles maigres, et, d'autre part, étant donné un ensemble E de mesure nulle sur le cercle T, il existe une fonction non identiquement nulle qui est analytique dans D, continue sur $\bar{D}$ et nulle sur l'ensemble E ({12, p.393 ; 120, chap.IV, § 3}) ; ce résultat sera renforcé par le théorème de Rudin-Carleson, dont nous parlerons plus loin. Si, d'autre part, nous considérons, à la place des fonctions analytiques bornées, les fonctions dites intérieures, la situation est changée. Suivant Beurling ({59}), nous appelons "intérieure" toute fonction w analytique sur le disque D et pour laquelle la relation $\lim\limits_{r\uparrow 1} |w(re^{i\theta})| = 1$ est valable en presque tout point $e^{i\theta}$ du cercle T. Les produits dits de Blaschke - mais en fait introduits auparavant par Carathéodory et Fejér ({76}) - sont aussi des fonctions intérieures ; mais il en existe encore d'autres sortes ({73, 2.4, p.24}). Cargo ({67}) démontre que, si w_1 et w_2 sont deux fonctions intérieures et si $\lim\limits_{r\uparrow 1} w_1(re^{i\theta}) = \lim\limits_{r\uparrow 1} w_2(re^{i\theta})$ en tout point $e^{i\theta}$ d'un ensemble non maigre, nous avons $w_1 = w_2$.

Un peu plus tôt, Barth et Schneider ({55}), puis de façon plus générale Tse ({139}), ont démontré que nous pouvions utiliser un ensemble non maigre s'il y a des conditions à propos de l'ordre de grandeur de l'annulation de la fonction. Pour être plus précis : Soit $m(r)$ une fonction décroissante dans l'intervalle $[0,1)$, pour laquelle $\lim\limits_{r\uparrow 1} m(r) = 0$, et soit E un sous-ensemble non maigre du cercle T. Si w est une fonction méromorphe dans le disque D et si, en tout point $e^{i\theta} \in E$,

$$\lim_{r\uparrow 1} \frac{w(re^{i\theta})}{m(r)} = 0 ,$$

alors $w(z) \equiv 0$.

Bochner ({63}) remplace le disque unité D et sa frontière T par le produit D^n de n disques et par le tore T^n. Il faut insister sur le fait que, dans le cas où $n \geqslant 2$,

$$T^n = \{z=(z_1,\ldots,z_n)\in \mathbb{C}^n \ ; \ |z_j|=1 \ , \ 1 \leqslant j \leqslant n\}$$

n'est pas la frontière de l'ensemble

$$\mathcal{D}^n = \{z \in \mathbb{C}^n \ ; \ |z_j| < 1 \ , \ 1 \leqslant j \leqslant n\} \ ,$$

mais représente un ensemble partiel de la frontière, ce qu'on appelle la frontière de Silov ({131, 7.10, p.43}). Nous reviendrons plus loin sur certaines des généralisations de Bochner.

C'est Henry Helson qui, d'abord en 1955 ({97}), puis dans un article célèbre paru en 1958 et écrit en collaboration avec David Lowdenslager (trop tôt disparu) ({98}), a examiné avec le plus de minutie le théorème de Frédéric et Marcel Riesz et ses généralisations par Bochner, créant les bases des généralisations futures. Pour simplifier les notations, considérons seulement le cas où $n = 2$ et désignons par Z^2 l'ensemble des noeuds de réseau du plan, c'est-à-dire les couples (m,n), où m et n sont des nombres entiers. Les moments trigonométriques d'une mesure μ définie sur le tore T^2, ou, pour être plus bref, ses coefficients, sont les nombres

$$(50) \qquad c_{mn} = \iint_{T^2} e^{-i(mx+ny)} \, d\mu(x,y) \ ,$$

où $(m,n) \in Z^2$. Si nous divisons c_{mn} par $(2\pi)^2$, nous obtenons le coefficient dit de Fourier-Stieltjes d'indice (m,n).

Du fait que $c_{mn} = 0$ pour tout couple de nombres $(m,n) \in Z^2$ pour lequel $m \leqslant 0$, il ne s'ensuit pas que μ soit absolument continue. Helson et Lowdenslager prennent pour exemple la mesure $\mu(x,y) = e^{ix} \, dx \, d\nu(y)$, où ν est une mesure singulière sur T, donc μ est également singulière, mais où

$$\iint_{T^2} e^{-i(mx+ny)} \, d\mu(x,y) = \int_0^{2\pi} e^{-i(m-1)x} \, dx \ . \ \int_0^{2\pi} e^{-iny} \, d\nu(y) = 0$$

toutes les fois que $m \neq 1$.

Pour établir leur énoncé, les auteurs appellent un ensemble $S \subset Z^2$ *demi-plan* quand il satisfait aux conditions suivantes :

1. Le point $(0,0)$ n'appartient pas à S.
2. Si $(m,n) \neq (0,0)$, un seul parmi les points (m,n) et $(-m,-n)$ appartient à S.
3. Si $(m,n) \in S$ et $(m',n') \in S$, $(m+m',n+n') \in S$.

La généralisation par Helson et Lowdenslager du théorème de Frédéric et Marcel Riesz s'exprime par les deux théorèmes suivants :

I. Soit μ une mesure de Radon singulière sur le tore T^2 et S un demi-plan dans Z^2. Si les coefficients (50) s'annulent pour tout couple de nombres (m,n) appartenant à S, nous avons $c_{00} = 0$.

II. Soient $S \subset \mathrm{Z}^2$ un demi-plan, μ une mesure de Radon sur le tore T^2, et $\mu = \mu_a + \mu_s$ la décomposition de Lebesgue pour la somme d'une mesure μ_a absolument continue et d'une mesure μ_s singulière. Si les coefficients c_{mn} de la mesure μ, de (50), s'annulent pour tous les couples de nombres $(m,n) \in S$, chacun des coefficients des mesures μ_a et μ_s s'annule pour tout $(m,n) \in S$.

Dans le cas d'une variable, il découle d'une proposition analogue au théorème I que, si μ est une mesure singulière sur le cercle T, pour laquelle

(51) $$c_n = \int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\, d\mu(\theta)$$

s'annule quand $n < 0$, nous avons $\mu = 0$. En réalité, d'après le théorème I, $c_0 = 0$. En appliquant le théorème I tour à tour aux mesures $e^{-i\theta}\mu$, $e^{-2i\theta}\mu$, $e^{-3i\theta}\mu$, ... , nous obtenons $c_1 = c_2 = c_3 = \dots = 0$. Ainsi, pour tous les polynômes trigonométriques $T(\theta)$,

$$\int_0^{2\pi} T(\theta)\, d\mu(\theta) = 0\,,$$

d'où, d'après le deuxième théorème d'approximation de Weierstrass ({35, § 431, vol. II, p.91}), $\mu = 0$. Il est évident qu'une telle réduction est impossible dans le cas d'une variable supplémentaire. Soit à présent $\mu = \mu_a + \mu_s$ une mesure sur T pour laquelle les coefficients (51) s'annulent pour tout indice $n < 0$. Suivant une proposition analogue au théorème II, on a aussi

$$\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\, d\mu_s(\theta) = 0$$

pour tout $n < 0$, et, par conséquent, d'après ce que nous venons de voir, $\mu_s = 0$, c'est-à-dire $\mu = \mu_a$ est absolument continue. Nous voyons donc que les théorèmes I et II peuvent être vraiment considérés comme une généralisation du théorème de Frédéric et Marcel Riesz.

Des théorèmes de Helson et Lowdenslager découle aisément le théorème suivant de Bochner :

Soit

$$\Sigma = \{re^{i\theta}\ ;\ r > 0\ ,\ \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2\}$$

un secteur du plan dont l'ouverture $\theta_2 - \theta_1$ *est supérieure à* π . *Soit* μ *une mesure sur le tore* T^2 *telle que* $c_{mn} = 0$ *pour tout couple* (m,n) *du secteur* Σ . μ *est alors absolument continue.*

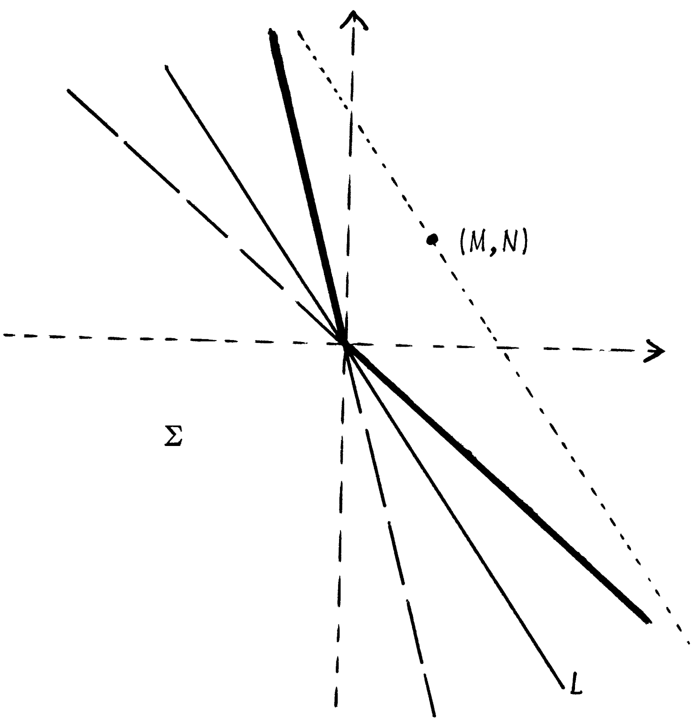

Figure 1.

Démonstration. D'après l'hypothèse, Σ contient deux demi-plans différents, S et S' , dans l'acception de Helson-Lowdenslager. Soit μ_s la partie singulière de la mesure μ . D'après le théorème II, les coefficients $c_{mn}^{(s)}$ de la mesure μ_s s'annulent quand $(m,n) \in S \cup S'$. Supposons que tous les $c_{mn}^{(s)}$ ne soient pas nuls. Soit L une droite passant par le point (0,0) , dont la pente est irrationnelle, et qui se trouve entre les deux droites limitant les les demi-plans S et S' , ce qui fait que l'un des demi-plans ainsi limités tombe dans Σ . Déplaçons L parallèlement à elle-même jusqu'à ce qu'elle rencontre le premier point $(m,n) \in Z^2$ pour lequel $c_{mn}^{(s)} \neq 0$. Comme la pente de L est irrationnelle, ce premier point est déterminé de façon univoque, désignons-le par (M,N) . Alors tous les coefficients de la mesure singulière $e^{-i(Mx+Ny)}\mu_s$, pour lesquels (m,n) appartient au demi-plan de Σ limité par L , sont nuls, mais son coefficient d'indice (0,0) n'est pas nul. Mais cela contredit la théorème I. Ainsi, $c_{mn}^{(s)}$ est nul pour tout couple de nombres (m,n) , d'où $\mu_s = 0$, c'est-à-dire que μ est absolument continue. Nous avons démontré ainsi le théorème de Bochner.

Dahlberg et Benedicks ont démontré récemment un théorème similaire, en remplaçant le secteur Σ par un domaine au-dessus de la courbe d'une fonction convexe.

Helson et Lowdenslager reviennent dans leurs démonstrations à la méthode de

Gabriel Szegö ({133}), dans la mesure où ils travaillent dans l'espace de Hilbert $L^2(\mu)$ et y utilisent des projections orthogonales. Pour illustrer la méthode, je citerai la démonstration par Helson ({99, p.4}) d'une petite généralisation du théorème des frères Riesz, mais, pour la compréhension de l'arrière-plan historique, il est nécessaire de noter qu'en 1949 Arne Beurling ({59}) avait donné une application très importante des théorèmes des frères Riesz. Désignons par $H^2(\mathrm{T})$ l'image de l'espace $H^2(\mathcal{D})$ dans l'espace $L^2(\mathrm{T})$ par l'application déjà mentionnée, qui attache à toute fonction $w(z) \in H^2(\mathcal{D})$ la fonction $f(e^{i\theta}) = \lim\limits_{r \uparrow 1} w(re^{i\theta})$ qui existe presque partout. Beurling considère les sous-espaces de l'espace $H^2(\mathrm{T})$ qui par l'application $f(e^{i\theta}) \mapsto e^{i\theta} f(e^{i\theta})$ rentrent en eux-mêmes, et par là même introduit la notion des fonctions intérieures et extérieures, appelées à jouer un rôle important ({59 ; 99, chap.II ; 100, 1.2 ; 73, p.24}). Paul Halmos ({92}) écrit à propos de la démonstration de Helson : "... Après la parution de l'article de Beurling, il est devenu clair qu'on peut procéder aussi dans le sens contraire et retrouver le résultat des Riesz à partir de celui de Beurling. La démonstration du théorème I de Helson est l'expression finale de cette prévision. Il donne une belle formulation du théorème des Riesz et la démonstration est d'une simplicité et d'une clarté parfaites. La démonstration n'utilise pas le théorème de Beurling ; tout ce qu'il utilise, c'est une démarche simple qui apparaît lorsqu'on place le théorème dans un cadre géométrique. On peut dire aujourd'hui, avec l'habituelle "prescience après coup", que le théorème de F. et M. Riesz est une trivialité géométrique et que - du moins pour ce qui est du changement qualitatif - l'analyse laborieuse de F. et M. Riesz est complètement superflue."

Nous voudrions démontrer que *si* $f(e^{i\theta}) \in H^2(\mathrm{T})$ *n'est pas presque partout égale à zéro, elle peut s'annuler au plus sur un ensemble de mesure nulle.* Rappelons que les coefficients de Fourier c_n de $f(e^{i\theta})$ définis par (45) s'annulent pour $n < 0$. Si $f(e^{i\theta})$ n'est pas l'élément nul de l'espace $H^2(\mathrm{T})$, nous pouvons supposer que

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\, d\theta \neq 0 ,$$

car en cas de besoin nous pouvons diviser par la puissance appropriée de $e^{i\theta}$. Considérons maintenant l'ensemble K de toutes les fonctions de la forme

$$f(e^{i\theta})\ (1 + b_1\, e^{i\theta} + \dots + b_n\, e^{in\theta}) ,$$

où les nombres complexes $b_1, \dots, b_n$ et le nombre entier $n \geqslant 1$ sont arbitraires. L'ensemble K , et donc sa fermeture $\overline{K}$, est un ensemble convexe de l'espace

$H^2(T)$ et tous les éléments de $\overline{K}$ ont pour terme constant de leur série de Fourier le même $c_0 \neq 0$. D'après un lemme fondamental de Frédéric Riesz ({134, I.3, p.7}), il existe dans l'ensemble $\overline{K}$ un élément $g(e^{i\theta})$ et un seul dont la distance à l'élément nul est minimale. Reconnaissons à présent que la valeur absolue $|g(e^{i\theta})|$ est presque partout constante. En réalité, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$ et tout nombre complexe λ , $g(e^{i\theta}) + \lambda e^{in\theta}g(e^{i\theta})$ appartient également à $\overline{K}$ et

$$\|g+\lambda e^{in\theta}g\|^2 = \|g\|^2(1+|\lambda|^2) + 2 \operatorname{Re} \lambda \int_0^{2\pi} |g|^2 e^{in\theta}\, d\theta .$$

Sur la base de la propriété minimale de la fonction $g(e^{i\theta})$, cette expression atteint sa valeur la plus petite par le choix de $\lambda = 0$. Cela n'est cependant possible que si

$$(52) \qquad \int_0^{2\pi} |g|^2 e^{in\theta}\, d\theta$$

s'annule pour tout nombre entier $n \geqslant 1$. Il en résulte, si nous considérons la valeur complexe conjuguée de (52), qu'elle s'annule aussi pour tout nombre entier $n \leqslant -1$. Ainsi tous les coefficients de Fourier de $|g|^2$, à l'exception de l'indice zéro, sont nuls, d'où il suit que $|g|^2$ et, en même temps, $|g|$ sont presque partout identiques à une constante.

Or, les fonctions appartenant à l'ensemble $\overline{K}$, de même que les valeurs limites des fonctions appartenant à K , s'annulent presque partout où $f(e^{i\theta})$ s'annule. Mais comme $|g|$ est presque partout identique à une constante, laquelle, étant donné $c_o \neq 0$, ne peut être nulle, $g(e^{i\theta})$ doit être presque partout différent de zéro, et ainsi $f(e^{i\theta})$ peut au plus s'annuler sur un ensemble de mesure nulle. Nous avons ainsi démontré entièrement la proposition.

Helson et Lowdenslager ({98, II.}) considèrent aussi de façon plus générale, au lieu du tore T^n , des groupes commutatifs compacts dont le groupe dual (qui est discret, voir plus bas) est ordonné de façon linéaire. Bochner ({64, 65}) considère des mesures μ sur la compactification de Bohr $b\mathbb{R}^n$ du groupe additif de l'espace $\mathbb{R}^n$. Si $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $x = (x_1,\ldots,x_n) \in b\mathbb{R}^n$, soit $\lambda.x = \lambda_1x_1 + \ldots + \lambda_nx_n$. Bochner suppose que la mesure μ est "presque périodique", c'est-à-dire que l'expression

$$c(\lambda) = \int_{b\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda.x}\, d\mu(x)$$

(qui est au fond la transformée de Fourier de μ) n'est différente de zéro que pour les valeurs de λ appartenant à une suite $(\lambda^{(k)})$ dénombrable, mais n'exige pas que les vecteurs $\lambda^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ soient des noeuds de réseau. S'il existe un vecteur

$\nu \in \mathbb{R}^n$ de longueur unité tel que pour tout nombre $\rho \in \mathbb{R}$

(53) $$\sum_{\lambda.\nu \leqslant \rho} |c(\lambda)| < \infty$$

est vérifié, μ est absolument continue. De cela découle aisément le théorème de Bochner démontré plus haut, si nous notions que, dans la mesure où $c(\lambda) = 0$ pour tout vecteur λ appartenant à Σ et si ν se trouve sur la bissectrice de l'angle complémentaire de Σ, (53) ne renferme pour tout ρ qu'un nombre fini de termes différents de zéro. On trouve dans l'exposé de Bochner d'autres généralisations ({65, théorèmes 7.3 et 7.6}) du théorème de F. et M. Riesz. Ces démonstrations se basent sur un théorème abstrait, avant-coureur d'une démonstration ultérieure de König et Seever ({107}).

Le fait que T est la frontière du domaine complexe $\mathcal{D}$ a disparu et des généralisations de Helson et Lowdenslager, et de celles de Bochner. Leurs théorèmes ne s'appliquent plus aux valeurs frontières des fonctions analytiques d'une variable complexe, mais appartiennent au domaine de l'analyse harmonique sur un groupe compact. Stein et Weiss ({129 ; 34, chap.VI, point 4, p.228 ; 130, chap.VII, point 3, p.217}) ont poussé leurs analyses dans une autre direction : ils ont élargi la notion des classes H^p au demi-espace supérieur de l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ et chez eux le théorème généralisé de Frédéric et Marcel Riesz ({129, théorème E, p.53 ; 130, chap. VII, 3.2, corollaire 1 du théorème 6, p.221}) est étroitement relié aux valeurs frontières des fonctions appartenant à la classe H^1. J'en reparlerai plus loin à propos des potentiels d'ordre fractionnaire. Je me contenterai pour le moment de rappeler que les études de Stein et Weiss - et parmi elles la généralisation du théorème de Frédéric et Marcel Riesz - ont été transposées par Coifman et Weiss ({69}) aux groupes de Lie compacts, et par Chao et Taibleson ({136, chap.VII, § 3, p.258-259 ; 137, p.550}) à certains espaces vectoriels sur des corps non archimédiens.

Bochner a montré que les méthodes de Helson et Lowdenslager sont efficaces également pour des généralisations beaucoup plus poussées. Pour énoncer les propositions, il nous faut introduire une quantité de notations et de notions. Soit X un espace topologique compact (de Hausdorff) et $C(X)$ l'algèbre des fonctions continues de valeur complexe sur X. Définissons la norme par l'égalité

$$\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)| ,$$

alors $C(X)$ sera une algèbre normée complète, c'est-à-dire une algèbre de Banach. Soit à présent A une sous-algèbre fermée de l'algèbre de Banach $C(X)$, qui contient les fonctions constantes et sépare les points de X, c'est-à-dire étant donnés $x,y \in X$, $x \neq y$, il existe $f \in A$ tel que $f(x) \neq f(y)$. On appelle ces algèbres A *algèbres de fonctions*. Si nous restreignons à A la norme définie sur $C(X)$, A lui-même est une algèbre de Banach. Un *caractère* de l'algèbre A est un homomorphisme, différent de zéro, à valeurs dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes de l'algèbre A, c'est-à-dire une application $\chi : A \to \mathbb{C}$ linéaire, non identiquement nulle, pour laquelle $\chi(fg) = \chi(f).\chi(g)$ pour tout élément $f, g \in A$. Tous les caractères de l'algèbre A forment son *spectre* $\Sigma = \Sigma(A)$. On introduit habituellement sur l'ensemble $\Sigma(A)$ une topologie pour laquelle une base de voisinages d'un point $\chi_o \in \Sigma$ est constituée par les ensembles

$$\{\chi \in \Sigma \; ; \; |\chi(f_j) - \chi_o(f_j)| \leqslant \varepsilon \; , \; 1 \leqslant j \leqslant n\} \; ,$$

où $\varepsilon > 0$ et $f_1, \ldots, f_n$ sont des éléments arbitraires en nombre fini de l'algèbre A. Avec cette topologie, Σ devient un espace compact (de Hausdorff). Tout point x de l'espace X définit un caractère δ_x à l'aide de l'égalité $\delta_x(f) = f(x)$. L'application $x \mapsto \delta_x$ est injective puisque nous avons supposé que A sépare les points de X. Il est évident aussi que cette application fait correspondre bijectivement X à son image dans Σ, et ainsi nous pouvons à notre gré considérer l'espace X comme un sous-espace fermé de l'espace Σ. La *transformée de Gelfand* Gf d'une fonction $f \in A$ est la fonction continue sur l'espace Σ définie par $Gf(\chi) = \chi(f)$. Comme $Gf(\delta_x) = \delta_x(f) = f(x)$, la projection linéaire $G : A \to C(\Sigma)$ est injective. Nous appelons *mesure représentative* d'un caractère $\chi \in \Sigma(A)$ toute mesure m positive sur X telle que

$$\chi(f) = \int_X f(x) \, dm(x)$$

pour toute fonction $f \in A$. Nous appelons *mesure de Jensen* appartenant au caractère χ une mesure positive m pour laquelle on a

$$\log|\chi(f)| \leqslant \int_X \log|f(x)| \, dm(x) \; , \quad f \in A \; .$$

Tout χ comprend au moins une mesure de Jensen ({108, p.585}), et toute mesure de Jensen appartenant à χ représente χ ({86, p.33}). Nous désignons par $M(\chi)$ l'ensemble des mesures représentatives appartenant au caractère χ, et si $m \in M(\chi)$, A_m désigne l'ensemble des fonctions $f \in A$ pour lesquelles $\chi(f) = \int f \, dm = 0$. Il est évident que A_m est un idéal maximal de A. Nous désignons par $A^\times$ le groupe multiplicatif de l'algèbre A, c'est-à-dire l'ensemble des éléments f pour lesquels f^{-1} appartient aussi à A. Si les parties réelles $\mathrm{Re}\, f$ des fonctions $f \in A$ forment un ensemble dense dans l'espace $C(X;\mathbb{R})$ des fonctions continues à valeurs réelles, A est une algèbre *de Dirichlet*. Si l'ensemble

$$\log|A^\times| = \{\log|f| \; ; \; f \in A^\times\}$$

est dense dans $C(X;\mathbb{R})$, l'algèbre A est *logmodulaire*. De l'égalité $\mathrm{Re}\, f = \log|e^{f}|$, il résulte $\mathrm{Re}\, A \subset \log|A^{\times}|$, d'où il suit que toute algèbre de Dirichlet est logmodulaire, mais par exemple l'algèbre $H^{\infty}(D)$ est logmodulaire sans pour autant être de Dirichlet.

Comme exemple le plus important nous choisissons pour X le cercle T , et A est l'algèbre $A(\mathrm{T})$ déjà introduite plus haut, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions f qui sont les restrictions à T des fonctions w continues sur le disque fermé $\overline{D}$ et analytiques dans D . Les caractères de l'algèbre $A(\mathrm{T})$ sont les applications $\chi_z : f \mapsto w(z)$ où $z \in \overline{D}$, d'où il résulte que $\Sigma(A(\mathrm{T}))$ peut être identifié à $\overline{D}$ et w est la transformée de Gelfand de la fonction f . Comme, d'après la formule de Cauchy,

$$w(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{w(z)}{z}\, dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\, d\theta \ ,$$

la mesure représentative du caractère χ_0 est $\frac{1}{2\pi}\, d\theta$. Plus généralement, si $z \in D$, la mesure représentative de χ_z est

$$\frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z}\, d\theta \ .$$

Ainsi, les mesures représentatives se divisent en deux classes : d'une part celles qui correspondent aux points du disque ouvert D , et qui sont toutes absolument continues les unes par rapport aux autres et par rapport à $d\theta$, d'autre part celles qui correspondent aux points de T , c'est-à-dire les masses ponctuelles δ_z $(z = e^{i\theta} \in \mathrm{T})$, et qui sont toutes singulières les unes par rapport aux autres et par rapport à $d\theta$. A_m , appartenant à la mesure $m = \frac{1}{2\pi}\, d\theta$ représentant le caractère χ_0, est l'idéal maximal $A_0(\mathrm{T})$ déjà défini. L'algèbre $A(\mathrm{T})$ est une algèbre de Dirichlet, d'une part parce que les polynômes trigonométriques réels sont denses dans l'espace $C(\mathrm{T};\mathbb{R})$ ({35, § 431, vol.II, p.91}), d'autre part parce que

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n\, e^{in\theta} = c_0 + \sum_{n=1}^{N} (c_n\, e^{in\theta} + \overline{c}_n\, e^{-in\theta}) = c_0 + 2\mathrm{Re} \sum_{n=1}^{N} c_n e^{in\theta} \ ,$$

où c_0 est réel et $c_{-n} = \overline{c}_n$ $(n \geqslant 1)$.

Considérons, pour notre deuxième exemple, la sous-algèbre fermée $A(D)$, déjà mentionnée, de l'algèbre $C(\overline{D})$, sous-algèbre formée des fonctions w continues sur $\overline{D}$ et analytiques dans D . Sur cette algèbre tous les caractères sont de la forme $\delta_z : w \mapsto w(z)$, c'est-à-dire que le spectre de $A(D)$ est cette fois encore $\overline{D}$, ce qui découle à l'évidence de ce que - comme nous l'avons vu - $A(\mathrm{T})$ et $A(D)$

sont des algèbres de Banach isomorphes. Cependant, un caractère peut avoir, dans ce cas, une infinité de mesures représentatives, parce que, par exemple,

$$\delta_0(w) = w(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{w(z)}{z}\,dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(re^{i\theta})\,d\theta ,$$

où $0 < r \leqslant 1$.

Soit à présent X un espace topologique compact, $A \subset C(X)$ une algèbre de fonctions, $\chi \in \Sigma(A)$ un caractère de l'algèbre et $m \in M(\chi)$ une mesure représentative de χ . Nous dirons que *le théorème de Frédéric et Marcel Riesz est vérifié pour la mesure* m quand la proposition suivante est vérifiée :

Soit μ *une mesure de Radon complexe définie sur l'espace* X *et* $\mu = \mu_a + \mu_s$ *, où* μ_a *est absolument continue et* μ_s *singulière par rapport à* m *. Si* μ *est orthogonale à* A_m *, c'est-à-dire si*

$$\int_X f(x)\ d\mu(x) = 0 ,$$

pour toute fonction $f \in A_m$ *,* μ_a *et* μ_s *sont orthogonales séparément à* A_m *, et même* μ_s *est orthogonale à toute l'algèbre* A *.*

Suivant la suggestion de Bochner, Hoffman ({102}) a montré que, de la démonstration de Helson et Lowdenslager, on pouvait conclure également que le théorème de Frédéric et Marcel Riesz est vérifié pour toute mesure représentative si A est une algèbre de Dirichlet. Un peu plus tard ({103}), il a montré la même chose pour le cas où A est logmodulaire, et Ahern et Sarason ({51}) l'ont montré pour le cas des algèbres dites hypo-Dirichlet.

D'après Lumer ({111}), le fait que la démonstration de Helson et Lowdenslager peut s'appliquer aux algèbres logmodulaires s'appuie sur deux propriétés de ces algèbres :

1. Chaque caractère ne comprend qu'une seule mesure représentative ({103, théorème 4.2, p.284}). Notons qu'il est trivial, dans les algèbres de Dirichlet, que chaque caractère est représenté au plus par une mesure positive.

2. Soit m une mesure représentative, $L^2(m)$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable par rapport à la mesure m , $H^2(m)$ la fermeture de l'algèbre A dans $L^2(m)$, $H^2_m(m)$ la fermeture de l'idéal A_m dans $L^2(m)$ et $\overline{H}^2_m(m)$ l'espace formé par les éléments complexes conjugués de l'espace $H^2_m(m)$. $L^2(m)$ est alors la somme directe orthogonale des sous-espaces $H^2(m)$ et $\overline{H}^2_m(m)$ ({103, théorème 5.4, p.293}). Par exemple, si $A = A(T)$, $m = \frac{1}{2\pi}\,d\theta$, nous aurons $L^2(m) =$

$L^2(\mathrm{T})$, l'espace $H^2(m)$ est composé de fonctions $f \in L^2(\mathrm{T})$ pour lesquelles $c_n = 0$ si $n < 0$, et $\overline{H}^2_m(m)$ est composé de fonctions pour lesquelles $c_n = 0$ si $n \geqslant 0$.

Mais Lumer démontre, par des raisonnements basés sur la théorie du potentiel, que 2. - et en même temps les résultats de Hoffmann {103} - découlent déjà de la propriété 1. Le théorème de Frédéric et Marcel Riesz est donc vérifié pour toutes les mesures représentatives quand l'ensemble $M(\chi)$ est composé d'un seul élément pour tous les caractères χ de l'algèbre de fonctions A . La question se pose alors si cette condition est nécessaire, et d'autre part si on peut trouver les critères déterminant, pour une mesure représentative donnée, si le théorème de F. et M. Riesz se vérifie sans que ce soit vrai pour toute mesure représentative.

Entre temps, Forelli ({82}) a fourni, pour le cas initialement étudié par Helson et Lowdenslager, une nouvelle démonstration basée sur un lemme de la théorie de la mesure, quand la mesure μ est définie sur le groupe T^n , ou plus généralement sur un groupe commutatif compact dont le groupe de caractères est ordonné linéairement. Cette démonstration a permis à Ahern ({50}) de donner une réponse aux deux questions qu'on vient de formuler. Soit $A \subset C(X)$ une algèbre de fonctions composée de fonctions continues définies sur l'espace compact X , χ un caractère de A et $m \in M(\chi)$. Supposons que le théorème de Frédéric et Marcel Riesz soit vrai pour m , et soit $n \in M(\chi)$ une autre mesure représentative , $n = n_a + n_s$, où n_a est absolument continue et n_s singulière par rapport à m . La mesure $\mu = n - m = n_a - m + n_s$ est alors orthogonale à A_m , puisque $\int f\, d\mu = \chi(f) - \chi(f) = 0$, et ainsi n_s est orthogonale à A , d'où $\int dn_s = 0$. Comme, d'autre part, $n_s \geqslant 0$, nous avons $n_s = 0$. Nous voyons donc que, si le théorème de Fréderic et Marcel Riesz est vrai pour la mesure représentative $m \in M(\chi)$, toutes les autres mesures représentatives $n \in M(\chi)$ sont absolument continues par rapport à m . Ahern montre que cette condition nécessaire est aussi suffisante, c'est-à-dire que *si $m \in M(\chi)$ est tel que tout $n \in M(\chi)$ est absolument continu par rapport à lui, le théorème de Frédéric et Marcel Riesz est vrai pour m* .

Bien que la condition d'Ahern soit nécessaire et suffisante, Glicksberg ({89}) a réussi à démontrer le théorème de Frédéric et Marcel Riesz dans une forme encore plus générale. Soit M un ensemble composé de mesures m positives définies sur l'espace compact X , pour lesquelles $m(X) = 1$. Nous appelons l'ensemble $F \subset X$ *ensemble nul-M* si $m(F) = 0$ pour tout m appartenant à M . Si μ est une mesure da Radon sur X et F un sous-ensemble de X mesurable par rapport à μ , nous définissons la mesure μ_F par l'égalité $\mu_F(E) = \mu(E \cap F)$. La mesure μ *est* *absolument continue par rapport à* M quand $\mu_F = 0$ pour tout ensemble F qui est un ensemble nul-M .D'autre part, μ *est singulier par rapport à* M s'il existe un ensemble nul-M F tel que $\mu = \mu_F$. Pour toute mesure μ on a une décomposition $\mu = \mu_F + \mu'_F$ de type Lebesgue univoque, où F est un ensemble nul-M , et par conséquent μ_F est singulier par rapport à M et μ'_F absolument continu par rapport à M .Pour vérifier qu'il existe une telle décomposition, considérons, parmi les ensembles nuls-M , l'ensemble F pour lequel la variation totale $\|\mu_F\|$ de la mesure μ_F est maximale. Si E est un ensemble nul-M , $E \cup F$ en est aussi un, et nous avons

$$\|\mu_{E\cup F}\| = \|\mu_F\| + \|(\mu_{\complement F})_E\| \leqslant \|\mu_F\| ,$$

d'où il résulte que $(\mu_{\complement F})_E = 0$, c'est-à-dire que $\mu'_F = \mu_{\complement F}$ est absolument continu par rapport à M . On peut maintenant énoncer ainsi le théorème de Glicksberg :

Soit $A \subset C(X)$ *une algèbre de fonctions sur l'espace compact* X *et* χ *un caractère de* A. *Si la mesure* μ *est orthogonale à* A *et si* $\mu = \mu_F + \mu'_F$ *est la décomposition de Lebesgue par rapport à* $M(\chi)$, μ_F *et* μ'_F *sont, chacun séparément, orthogonaux à* A .

Notons que le théorème de Glicksberg est vraiment une généralisation de celui d'Ahern. Soit en effet $m \in M(\chi)$ tel que χ soit absolument continu par rapport à m pour toute autre valeur représentative, et soit μ orthogonal à A_m . La décomposition $\mu = \mu_a + \mu_s$ par rapport à $M(\chi)$, relative à m , l'est alors également. La mesure $\mu - \int d\mu \, . \, m$ est orthogonale à A , et ainsi, d'après le théorème de Glicksberg et d'après la décomposition

$$\mu - \int d\mu \cdot m = (\mu_a - \int d\mu \cdot m) + \mu_s ,$$

μ_s et $\mu_a - \int d\mu \cdot m$ sont orthogonaux à A , et donc μ_a est orthogonal à A_m .

Je voudrais maintenant démontrer en détail le théorème de Glicksberg ({89 ; 91}); ainsi toutes les généralisations énumérées jusqu'ici seront du même coup démontrées. Comme point de départ, nous utiliserons le théorème du type Hahn-Banach relatif aux espaces vectoriels ordonnés, que je me contenterai de citer ({66 , chap. II, § 3, N° 1, prop. 1 ; 127, p.XIII}) :

Soient E *un espace vectoriel ordonné et* V *un sous-espace de* E *tel que pour tout élément* $a \in E$ *il existe un élément* $v \in V$ *pour lequel* $a \leqslant v$. *Etant donnée une forme linéaire positive* $L : V \to \mathbb{R}$, *l'ensemble* $\mathcal{H}(L)$ *des formes* *linéaires positives* $H : E \to \mathbb{R}$ *qui coïncident avec* L *sur le sous-ensemble* V *n'est pas vide. En outre, si* $a \in E$ *, l'ensemble* $\{H(a) \ ; \ H \in \mathcal{H}(L)\}$ *coïncide avec l'intervalle fermé* $[c,d]$ *, où*

$$c = \sup\{L(v) \ ; \ v \in V, \ v \leqslant a\}, \ d = \inf\{L(v) \ ; \ v \in V, \ v \geqslant a\} \ .$$

Il en résulte le premier maillon de la démonstration proprement dite, maillon qui est une variante du théorème minimax de János Neumann.

Si $u \in C(X;\mathbb{R})$ *est une fonction continue à valeurs réelles sur l'espace compact* X *, nous avons*

$$\sup\{\mathrm{Re}\ \chi(f) \ ; \ f \in A \ , \ \mathrm{Re}\ f \leqslant u\} = \inf\{\textstyle\int u\, dm \ ; \ m \in M(\chi)\} \ . \tag{54}$$

En fait, si $m \in M(\chi)$ et $f \in A$ est tel que $\mathrm{Re}\ f \leqslant u$, nous avons

$$\mathrm{Re}\ \chi(f) = \int \mathrm{Re}\ f\, dm \leqslant \int u\, dm \ .$$

Il en résulte que pour tout m le côté gauche de (54) $\leqslant \int u\, dm$, et donc le côté gauche de (54) est au plus égal au côté droit. Pour démonter l'égalité, choisissons dans le théorème du type Hahn-Banach l'espace de $C(X;\mathbb{R})$ de E , et soit V l'espace formé par les fonctions $\mathrm{Re}\ f$, où f parcourt l'algèbre de fonctions A .La condition figurant dans le théorème est remplie, parce que les éléments de $C(X;\mathbb{R})$ sont des fonctions bornées et que A contient les constantes. Choisissons, parmi les extensions sur $C(X;\mathbb{R})$ de la forme $L : \mathrm{Re}\ f \mapsto \mathrm{Re}\ \chi(f)$, celle qui prend la valeur

$$c = \sup\{\mathrm{Re}\ \chi(f) \ ; \ f \in A \ , \ \mathrm{Re}\ f \leqslant u\}$$

sur l'élément $u \in C(X;\mathbb{R})$. D'après le théorème de Frédéric Riesz, cette extension correspond à une mesure positive $m \in C(X;\mathbb{R})'$, pour laquelle

$$\mathrm{Re}\ \chi(f) = \int \mathrm{Re}\ f\, dm$$

et, par suite de la relation $f = \mathrm{Re}\ f - i\ \mathrm{Re}(if)$, $m \in M(\chi)$. D'autre part , $\int u\, dm = c$, donc l'égalité est bien valable dans (54).

Stade suivant de la démonstration :

Généralisation du lemme de Forelli : Soit K_n $(n=1,2,\dots)$ *une suite croissante d'ensembles nuls-*$M(\chi)$ *compacts de l'espace* X *, et soit* $F = \bigcup_n K_n$ *. Il existe alors une suite de fonctions* (g_n) *dans l'algèbre de fonctions* A *, pour laquelle*

$$\|g_n\| = \max_{x \in X} |g_n(x)| \leqslant 1 \ ,$$

$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$ *sur l'ensemble* F *, et pour tout* m *appartenant à* $M(\chi)$ $\lim_{n\to\infty} g_n(x) =$

1 presque partout par rapport à m .

Démonstration. Fixons le nombre entier $n \geqslant 1$; soient I_n la fonction caractéristique de l'ensemble K_n et

$$U = \{u \in C(X;\mathbb{R}) \ ; \ u \leqslant -nI_n\} .$$

La famille de fonctions U est orientée de façon croissante, c'est-à-dire que, si u_1 , $u_2 \in U$, nous avons $\max(u_1,u_2) \in U$. De cette façon, pour n'importe quelle mesure $m \in M(\chi)$, la valeur limite selon U des nombres $\int u \, dm$ est définie, et comme $m(K_n) = 0$,

$$\lim_U \int u \, dm = \int (-nI_n) \, dm = 0 .$$

Considérons à présent pour chaque élément $u \in U$ la forme $\Phi_u : M(\chi) \to \mathbb{R}$, qui fait correspondre à la mesure m l'intégrale $\int u \, dm$. La proposition que nous venons de démontrer peut aussi s'énoncer ainsi : En tout point $m \in M(\chi)$, $\lim_U \Phi_u(m) = 0$. Or, la famille de fonctions (Φ_u) est croissante, c'estâ-dire que $\Phi_{u_1}(m) \leqslant \Phi_{u_2}(m)$ pour tout $m \in M(\chi)$ si $u_1 \leqslant u_2$. L'ensemble $M(\chi) \subset M(X)$ est compact pour la topologie faible, et donc, d'après le théorème de Dini ({135, II. 2.2, p.57}) , Φ_u tend uniformément vers zéro sur l'ensemble $M(\chi)$.

Il existe donc une fonction $u \in U$ telle que

$$\int u \, dm > - \frac{1}{n^4}$$

pour toute mesure m appartenant à $M(\chi)$. D'après le principe du minimax (54), il existe $f_n \in A$ telle que

$$\mathrm{Re}\ f_n \leqslant -nI_n \quad \text{et} \quad \mathrm{Re}\ \chi(f_n) > - \frac{1}{n^4} .$$

Soit

$$g_n = e^{f_n} \cdot e^{-i \ \mathrm{Im}\ \chi(f_n)} .$$

Nous avons alors

$$|g_n(x)| = e^{\mathrm{Re}\ f_n(x)} \leqslant 1 ,$$

puisque f_n est partout au plus égal à zéro. Si $x \in K_n$, $|g_n(x)| \leqslant e^{-n}$, et , puisque $K_n \subset K_{n+1}$, il s'ensuit immédiatement que (g_n) tend vers zéro sur l'ensemble F .

Enfin

$$\chi(g_n) = e^{\chi(f_n) - i \operatorname{Im} \chi(f_n)} = e^{\operatorname{Re} \chi(f_n)}$$

et

$$1 \geqslant \chi(g_n) = e^{\operatorname{Re} \chi(f_n)} \geqslant e^{-\frac{1}{n^4}} \geqslant 1 - \frac{1}{n^4} .$$

Soit m une mesure arbitraire appartenant à $M(\chi)$. Nous avons alors

(55) $$\int |g_n - 1|^2 dm = \int (|g_n|^2 + 1 - 2\operatorname{Re} g_n) dm \leqslant 2 - 2\operatorname{Re}\chi(g_n) = 2(1-\chi(g_n)) \leqslant \frac{2}{n^4} .$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} |g_n - g_{n+1}| \; dm \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (\int |g_n - g_{n+1}|^2 dm)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} .$$

Ainsi, la suite $g_n = g_1 + \sum_{j=1}^{n-1} (g_{j+1} - g_j)$ converge presque partout par rapport à m , et par suite de (55) la limite est presque partout égale à 1 . Nous avons donc démontré le lemme.

Déduisons le théorème de Glicksberg du lemme de Forelli. Soit F l'ensemble nul-$M(\chi)$ figurant dans le théorème, ensemble dont nous pouvons supposer que c'est l'ensemble réunion de la suite croissante d'ensembles nuls-$M(\chi)$ compacts. Soit encore (g_n) la suite figurant dans le lemme. L'ensemble

$$\{x \in X,\ \lim_{n \to \infty} g_n(x) \neq 1\}$$

est de mesure nulle pour toute mesure $m \in M(\chi)$, et donc aussi pour $|\mu_F'|$, puisque μ_F' est absolument continu par rapport à $M(\chi)$. Ainsi $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 1$ presque partout par rapport à $|\mu_F'|$. Soit f un élément arbitraire de l'algèbre A , fg_n appartient alors également à A , d'où, d'après l'hypothèse, $\int fg_n \, d\mu = 0$. Comme $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$ sur l'ensemble F et $\|g_n\| \leqslant 1$, nous avons, d'après le théorème de convergence de Lebesgue,

$$\int f \, d\mu'_F = \lim_{n\to\infty} \int f g_n \, d\mu'_F = \lim_{n\to\infty} \int_{\complement F} f g_n \, d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_F f g_n \, d\mu =$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f g_n \, d\mu = 0 \ .$$

De cette façon μ'_F est orthogonal à A , et bien entendu $\mu_F = \mu - \mu'_F$ aussi.

La généralisation a été portée à un échelon supérieur par König et Seever ({107 ; 54, chap.II, point 3, p.31}), qui, à la place d'un espace topologique, considèrent un ensemble X sur lequel on se donne une tribu Υ (σ-algèbre) . Rappelons qu'un ensemble Υ des parties d'un ensemble X constitue une tribu si les conditions suivantes sont vérifiées :

a) $X \in \Upsilon$,

b) si (A_n) est une suite d'ensembles appartenant à Υ , $\bigcup_n A_n \in \Upsilon$,

c) si $A \in \Upsilon$, $\complement_X A \in \Upsilon$.

Nous pouvons appeler une fonction $\mu : \Upsilon \to \mathbb{C}$ définie sur la tribu Υ dénombrablement additive ou mesure, si pour toute suite (A_n) , pour laquelle $A_n \in \Upsilon$ et $A_k \cap A_n = \phi$ si $k \neq n$, on a $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$. Désignons par $M(X,\Upsilon)$ la somme des fonctions d'ensemble dénombrablement additives définies sur la tribu Υ . Désignons par $B(X,\Upsilon)$ l'algèbre des fonctions f à valeurs complexes, bornées, définies sur l'ensemble X , qui sont mesurables par rapport à Υ , c'est-à-dire que, pour tout ensemble ouvert U du plan des nombres complexes, l'ensemble $f^{-1}(U) = \{x \in X \ ; \ f(x) \in U\}$ appartient à Υ .

Fixons à présent une sous-algèbre A de l'algèbre $B(X,\Upsilon)$, qui contient les fonctions constantes. De la même façon que pour le cas continu, nous désignons par $\Sigma(A)$ l'ensemble des homomorphismes d'algèbre $\chi : A \to \mathbb{C}$ pour lesquels on peut trouver un $m \in M(X,\Upsilon)$ tel que

(56) $$\chi(f) = \int_X f(x) \, dm(x)$$

pour toute fonction $f \in A$. A tout caractère $\chi \in \Sigma(A)$ est associé un ensemble $M(A,\chi) = M(\chi)$ formé de mesures *positives* m qui satisfont à (56) pour toute fonction $f \in A$. Si $m \in M(\chi)$, $m(X) = 1$, on voit tout de suite que $M(\chi)$ n'est pas vide ({54, II. 1.6, p.26}). Désignons par $A^{\perp}$ l'ensemble des mesures ν qui sont orthogonales à A , c'est-à-dire que $\int f \, d\nu = 0$ pour toute fonction $f \in A$.

Nous appelons *prébande* un sous-ensemble P non vide de l'espace $M(X,\Upsilon)$ si à toute suite (μ_n) appartenant à P correspond une mesure $\mu \in P$ telle que tout

μ_n est absolument continu par rapport à μ . On a des exemples importants de prébandes avec les ensembles $M(\chi)$ que nous venons d'introduire ({54, II. 2.2. iii), p.28}). Si $P \subset M(X,\Upsilon)$ est une prébande, toutes les mesures $\nu \in M(X,\Upsilon)$ sont identiquement décomposables sous la forme $\nu = \nu_P^{\vee} + \nu_P^{\wedge}$, où $\nu_P^{\vee}$ est absolument continu par rapport à toute mesure $\mu \in P$ et $\nu_P^{\wedge}$ est singulier pour toute mesure $\mu \in P$. Nous appelons *bande* un sous-espace linéaire B de l'espace $M(X,\Upsilon)$ s'il satisfait aux conditions suivantes :

a) si $\nu \in B$ et μ est absolument continu par rapport à ν , nous avons $\mu \in B$,

b) si la suite croissante de mesures μ_n positives appartenant à B tend vers la mesure μ , μ est aussi un élément de B .

Si Q est un sous-ensemble quelconque de l'espace $M(X,\Upsilon)$, désignons par $Q^{\wedge}$ le sous-espace composé de toutes les mesures qui sont singulières par rapport à toutes les mesures appartenant à Q . Dans ce cas $Q^{\wedge}$ est une bande et $Q^{\wedge\wedge}$ la plus petite bande qui contienne Q . Si P est une prébande, nous désignons par $P^{\vee}$ l'espace linéaire des mesures qui sont absolument continues par rapport à toute mesure appartenant à P . Nous avons alors $P^{\vee} = P^{\wedge\wedge}$, et de la décomposition $\nu = \nu_P^{\vee} + \nu_P^{\wedge}$ que nous avons vue plus haut il résulte que $M(X,\Upsilon)$ peut être considéré comme la somme directe $P^{\vee} \oplus P^{\wedge}$. Si B lui-même est une bande, nous avons tout naturellement $B = B^{\vee} = B^{\wedge\wedge}$, et dans ce cas nous obtenons la décomposition de Frédéric Riesz $M(X,\Upsilon) = B \oplus B^{\wedge}$. Si B est une bande produite par la mesure μ , $\nu = \nu_B^{\vee} + \nu_B^{\wedge}$ est justement la décomposition de Lebesgue ({54, chap.II, point 2, p.26-29}).

König et Seever donnent la démonstration de la généralisation suivante du théorème de Frédéric et Marcel Riesz :

Soit $\chi \in \Sigma(A)$ *et soit* $B \subset M(X,\Upsilon)$ *une bande telle qu'on ait* $B \cap M(\chi) \neq \phi$. *Si* $\mu \in A^{\perp} \cap B$, *nous avons* $\mu^{\vee}_{B\cap M(\chi)} \in A^{\perp}$.

Dans le cas particulier, le plus important, où $B = M(X,\Upsilon)$, le théorème implique que si $\mu \in A^{\perp}$, nous avons $\mu^{\vee}_{M(\chi)} \in A^{\perp}$. Les auteurs disent qu'une bande B est réductrice quand de $\mu \in A^{\perp}$ il résulte que $\mu^{\vee}_B \in A^{\perp}$. Ainsi la généralisation du théorème des Riesz peut aussi s'énoncer en disant que la bande $M(\chi)^{\vee}$ est réductrice. Si B est une bande réductrice, nous avons soit $M(\chi) \subset B$, soit $M(\chi) \subset B^{\vee}$. Il en résulte immédiatement que pour deux caractères $\chi_1, \chi_2 \in \Sigma(A)$, ou bien $M(\chi_1)^{\vee} = M(\chi_2)^{\vee}$, ou bien $M(\chi_1)^{\vee} \cap M(\chi_2)^{\vee} = \{0\}$. Disons des caractères χ_1 et χ_2 qu'ils sont équivalents si $M(\chi_1)^{\vee} = M(\chi_2)^{\vee}$. Cette relations d'équivalence décompose l'ensemble $\Sigma(A)$ en classes d'équivalence qu'on appelle parties de Gleason ({54, chap.II, point 4, p.35 ; 86, chap.VI ; 131, § 16}). Désignons par $\Gamma(A)$ l'ensemble des parties de Gleason. A toute partie $P \in \Gamma(A)$ nous faisons correspondre la bande $B(P) = M(\chi)^{\vee}$, où χ est un élément quelconque de la classe d'équivalence P . La décomposition en somme directe est alors valable :

$$M(X,\Upsilon) = \Big(\bigoplus_{P\in\Gamma(A)} B(P)\Big) \oplus M(A)^{\wedge} ,$$

où $M(A)$ désigne l'ensemble réunion des ensembles $M(\chi)$, lorsque χ parcourt l'ensemble $\Sigma(A)$. De la sorte tout $\mu \in M(X,\Upsilon)$ peut être mis sous la forme

$$\mu = \sum_{P\in\Gamma(A)} \mu^{\vee}_{P} + \mu^{\wedge}_{M(A)} ,$$

où $\mu^{\wedge}_{P}$ est absolument continue par rapport à toute mesure $m \in M(\chi)$ $(\chi \in P)$ et $\mu^{\wedge}_{M(A)}$ est singulière par rapport à toute mesure appartenant à n'importe quel ensemble $M(\chi)$ ({54, théorème II. 4.4, p.35}). Une décomposition semblable a été déjà démontrée par Glicksberg et Wermer ({88, théorème 1}) qui l'utilisent pour la démonstration du théorème d'approximation de Mergelyan déjà cité - voir encore {89, corollaire 1.3, p.111-112 ; 87 ; 86, II. 7.11, p.45}.

La question se pose si, dans le cas où X est un espace topologique compact, Υ la totalité des sous-ensembles de Borel de l'espace X , et A une sous-algèbre de l'algèbre $C(X)$ des fonctions continues, la décomposition $\mu^{\prime}_{F} + \mu_{F}$ de Glicksberg coïncide avec la décomposition $\mu^{\vee}_{M(\chi)} + \mu^{\wedge}_{M(\chi)}$ de König-Seever . Il est évident que μ_{F} est singulière par rapport à chacune des mesures $m \in M(\chi)$. Les mesures μ_{F} et $\mu^{\wedge}_{M(\chi)}$ coïncident : c'est ce qui découle de la proposition suivante, démontrée par des mathématiciens groupés sous le nom de John Rainwater : Si la mesure v est singulière par rapport à chaque mesure $m \in M(\chi)$, il existe un ensemble de Baire $F \subset X$ qui est un ensemble nul-$M(\chi)$ et pour lequel $v = v_{F}$.

La démonstration initiale du théorème de König-Seever revient à l'idée de Helson et Lowdenslager et suit la méthode de Gabriel Szegö ({107 ; 54, chap.II, point 3}), alors que la démonstration initiale du théorème de Rainwater est basée sur le théorème du minimax ({121 ; 86, II. 7.4, p.43}). Un peu plus tard König a trouvé une généralisation du théorème de Hahn-Banach d'où découlent les deux résultats ({108 ; 131, 23.4, p.256 ; 54, chap.III, point 2}).

Nous avons déjà mentionné que, dans la voie tracée par Beurling, le théorème de Frédéric et Marcel Riesz peut être utilisé pour la démonstration du théorème d'approximation de Mergelyan et du théorème de maximalité de Wermer. De même, il peut servir à la démonstration du résultat suivant[1] de Wermer ({143}) : Soit Γ une courbe fermée simple dans le plan des nombres complexes, contenant l'origine des coordonnées dans son intérieur. Si Γ n'est pas rectifiable, la constante 1 est uniformément approchable sur la courbe Γ par des fonctions de la forme

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n z^n \text{ , où } c_0 = 0 \text{ .}$$

Le théorème de Frédéric et Marcel Riesz peut être utilisé pour la démonstration du théorème dit de Rudin-Carleson. Ce dernier théorème énonce ce qui suit : Soit E un sous-ensemble du cercle $\mathbf{T}$ tel que sa mesure de Lebesgue est nulle. Pour toute fonction g continue sur l'ensemble E , il existe une fonction f appartenant à l'algèbre $A(\mathcal{D})$, dont la restriction à E coïncide avec g et pour laquelle $\max_{z\in\overline{\mathcal{D}}}|f(z)| = \max_{z\in E}|g(z)|$ ({86, II. 12.6, p.58}). A l'inverse, le théorème de Frédéric et Marcel Riesz découle aisément du théorème de Rudin-Carleson ({131, 20.5, p.206 ; 118, p.11}). Bishop a démontré le théorème général suivant, qui montre bien que le théorème de Rudin-Carleson est une conséquence immédiate du théorème des frères Riesz ({62 ; 86, II. 12.5, p.58}) :

Soit $C(X)$ l'algèbre des fonctions continues à valeurs complexes définies sur l'espace topologique compact X et soit A un sous-espace fermé de l'algèbre $C(X)$. Soit E un sous-ensemble fermé de l'espace X tel que $\mu(E) = 0$ pour toute mesure μ orthogonale à A . Si g est une fonction continue définie sur l'ensemble E et p une fonction définie sur l'espace X telle que $p(x) > 0$ $(x\in X)$ et que en tout point $x\in E$ l'inégalité $|g(x)| \leqslant p(x)$ soit satisfaite, alors il existe une fonction $f\in A$ dont la restriction à E coïncide avec g et telle que $|f(x)| \leqslant p(x)$ en tout point $x\in X$.

Dans le cas particulier $X = \mathbf{T}$, $A = A(\mathbf{T})$, si E est un sous-ensemble du cercle $\mathbf{T}$ dont la mesure de Lebesgue est nulle, $\mu(E) = 0$ pour toute mesure $\mu \in A^{\perp}$, car d'après le théorème de Frédéric et Marcel Riesz μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Récemment Oberlin ({117}) a donné une amélioration du théorème de Rudin-Carleson, en démontrant que, si la mesure de Lebesgue de $E \subset \mathbf{T}$ est nulle, on peut trouver pour toute fonction g continue sur E une $f \in A(\mathbf{T})$ dont la série de Fourier est uniformément convergente, et dont la restriction à E est égale à g . Sa démonstration utilise le théorème de Bishop et la variante suivante du théorème de

---

1 C'est mon collègue Larry Zalcman qui a attiré mon attention sur cette utilisation possible.

Frédéric et Marcel Riesz :

Désignons par $s_n(f)$ la $n^{\text{ième}}$ tranche de la série de Fourier de $f \in A(T)$. Soit $\mu_j \in M(T)$ $(j=0,1,2,\dots)$ une suite telle que

$\sum_{j=0}^{\infty} \|\mu_j\|$ converge et que

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\mu_o(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} s_n(f)(\theta)\, d\mu_n(\theta)$$

pour toute fonction $f \in A(T)$ dont la série de Fourier est uniformément convergente. μ_o est alors absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Srinivasan et Wang ({128}) démontrent que si I est un idéal fermé de l'algèbre $A(T)$, il existe une fonction intérieure q et un ensemble $E \subset T$ de mesure nulle telle que $I = q \,.\, Z(E)$, où $Z(E)$ désigne l'ensemble des fonctions $f \in A(T)$ qui s'annulent sur E . Les auteurs insistent sur le fait que leur démonstration s'appuie en grande partie sur le théorème des frères Riesz et qu'elle est valable dans des cas plus généraux où le théorème des Riesz est vrai. Glicksberg ({89, théorème 3.2, p.120}) utilise sa propre généralisation du théorème des Riesz pour décrire les idéaux des sous-algèbres A fermées de l'algèbre $C(X)$. Et dans cet article, et dans le suivant {87}, écrit en collaboration avec Garnett, on trouve nombre d'autres utilisations, la plupart ayant trait aux situations mutuelles des sous-algèbres de l'algèbre $C(X)$ ({cf. 91, théorèmes 3.6 et 3.7, p.19}).

L'étude de Piranian, Shields et Wells {119} a été le point de départ de recherches intéressantes ; ils y démontrent l'hypothèse suivante d'A.E. Taylor : Soit (a_n) une suite de nombres complexes et supposons que pour toute fonction

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ appartenant à l'espace $H^\infty(D)$ la valeur limite

$$\lim_{r \uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n r^n$$

existe et est finie. Il existe alors une fonction $\varphi \in L^1(T)$ telle que

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\, e^{in\theta}\, d\theta \quad n \geqslant 0 \,.$$

A la fin de leur étude, les auteurs énoncent l'hypothèse suivante : Soit (φ_n) une suite de fonctions appartenant à l'espace $L^1(T)$, telle que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, \varphi_n(\theta)\, d\theta$$

existe pour toute fonction f appartenant à l'espace $H^\infty(\mathrm{T})$. On peut alors trouver une fonction $\varphi \in L^1(\mathrm{T})$ telle que

(57) $$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, \varphi_n(\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta)\, \varphi(\theta)\, d\theta$$

pour toute fonction $f \in H^\infty(\mathrm{T})$.

Kahane ({104}) a démontré qu'on peut effectivement trouver une fonction $\varphi \in L^1(\mathrm{T})$ telle que (54) est vérifié pour toute fonction f appartenant à l'algèbre $A(\mathrm{T})$; Mooney ({115}) et Havin ({94}) ont, eux, démontré l'hypothèse en entier. La démonstration de Mooney a été simplifiée par Amar ({53}), quant à Cnop et Delbaen ({68}), ils l'ont généralisée à certaines sous-algèbres de l'algèbre $C(X)$ ({cf. 54, VIII. 3.3, p.179 ; 118, § 8, p.50-54}).

Pour démontrer leurs théorèmes, Piranian, Shields et Wells, de même que Kahane, font observer que sur la base du théorème de Hahn-Banach et du théorème de Frédéric Riesz, il existe une mesure μ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, \varphi_n(\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\mu(\theta)$$

pour toute fonction $f \in A(\mathrm{T})$: on veut montrer que μ est absolument continue. Si μ n'est pas absolument continue, il existe un ensemble $E \subset \mathrm{T}$ fermé dont la mesure de Lebesgue est nulle, mais pour lequel $\mu(E) \neq 0$. Kahane utilise alors le fait - déjà mentionné - qu'il existe une fonction $w \in A(D)$ telle que $w(z) = 1$ sur l'ensemble E et $|w(z)| < 1$ en dehors de l'ensemble E ([23, p.36]) et il en déduit une contradiction à l'aide d'une construction astucieuse. Amar donne une démonstration du même genre, mais il applique le fait susdit non pas au disque $\overline{D} = \Sigma(A(\mathrm{T}))$, mais au spectre de l'algèbre $H^\infty(\mathrm{T})$. A l'inverse, le théorème de F. et M. Riesz résulte du raisonnement de Kahane : si μ est une mesure sur le cercle T dont les coefficients c_n en (51) s'annulent pour l'indice $n < 0$, les sommes de Fejér $S_n(\theta)$ de la série de Fourier

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\theta}$ de la mesure μ appartiennent à $H^\infty(\mathrm{T})$, de sorte que, d'une part, la valeur limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, S_n(\theta)\, d\theta = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta \int_0^{2\pi} S_n(\theta)\, d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta \int_0^{2\pi} d\mu(\theta)$$

existe pour toute fonction $f \in H^\infty(\mathrm{T})$, puisque la mesure de Lebesgue est multiplicative sur cet espace, et, d'autre part,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(\theta)\ S_n(\theta)\ d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta)\ d\mu(\theta)$$

pour toute fonction $f \in A(T)$ ({102, p.20}), d'où il résulte, d'après l'observation de Kahane mentionnée plus haut, que μ est absolument continue.

A cause de cette équivalence, Elizabeth Ann Heard ({95}) appelle le théorème de Kahane "théorème séquentiel de Frédéric et Marcel Riesz". De façon plus générale, elle démontre que si le théorème de Frédéric et Marcel Riesz est vérifié par rapport à un sous-espace fermé de l'algèbre $C(X)$, une proposition analogue au théorème de Kahane est valable. Sa démonstration s'appuie sur la généralisation de Bishop - déjà mentionnée - du théorème de Rudin-Carleson.

Les généralisations du théorème de Frédéric et Marcel Riesz différentes de celles que nous venons de voir font appel à une étude de De Leeuw et Glicksberg ({71}). Soit μ une mesure sur le cercle $\mathbf{T}$, telle que la condition (49) soit satisfaite pour $n = 1,2,3,\ldots$. Les résultats des frères Riesz peuvent se résumer en deux propositions suivantes :

A. μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

B. Si μ s'annule identiquement sur un ensemble E de mesure de Lebesgue positive (c'està-dire si $\mu(F) = 0$ pour tout sous-ensemble de Borel F de l'ensemble E), μ est égale à zéro.

De Leeuw et Glicksberg observent que A. et B. sont équivalents à la proposition suivante :

La totalité des sous-ensembles de Borel du cercle $\mathbf{T}$ *sur lesquels* μ *s'annule identiquement est invariante par rotations.*

Les auteurs transposent cette proposition aux groupes commutatifs compacts. Un *caractère* d'un tel groupe G est par définition un homomorphisme continu $\gamma : G \to \mathbf{T}$, c'est-à-dire une application continue telle que $\gamma(g_1+g_2) = \gamma(g_1)\gamma(g_2)$ pour tout élément $g_1, g_2 \in G$. En définissant le produit des caractères par la formule $\gamma_1\gamma_2(g) = \gamma_1(g)\gamma_2(g)$ ceux-ci forment ce qu'on appelle le groupe de caractères ou groupe dual du groupe G , et que nous désignons par Γ . Soit à présent ψ un homomorphisme fixé, non identiquement nul, de Γ sur le groupe additif des nombres réels : nous pouvons considérer cet homomorphisme $\psi : \Gamma \to \mathbb{R}$ comme l'"organisation" du groupe Γ . Il lui correspond un homomorphisme "dual" $\varphi : \mathbb{R} \to G$ tel que

$$\gamma(\varphi(t)) = e^{i\psi(\gamma)t}$$

pour tout élément $\gamma \in \Gamma$ et $t \in \mathbb{R}$. Nous appelons *quasi-invariante* par rapport à φ une mesure de Borel μ , régulière, finie, définie sur le groupe G , quand la totalité des ensembles de Borel $E \subset G$ sur lesquels μ s'annule identiquement est invariante par rapport aux translations par des éléments de la forme $\varphi(t)$ ($t \in \mathbb{R}$) , c'est-à-dire que, si μ s'annule identiquement sur E , elle s'annule identiquement pour toute valeur $t \in \mathbb{R}$ sur l'ensemble

$$E + \varphi(t) = \{g+\varphi(t) \ ; \ g \in E\}$$

également. La transformée de Fourier $\hat{\mu}$ de la mesure μ sur le groupe Γ est la fonction définie par l'égalité

$$\hat{\mu}(\gamma) = \int_G \gamma(g) \ dm(g) \ ,$$

où m est la mesure, nommée d'après Alfred Haar, qui est invariante, définie sur le groupe G et satisfait en outre la condition $m(G) = 1$. La mesure μ est *φ-analytique* quand $\hat{\mu}$ s'annule sur la moitié "négative" du groupe Γ , c'est-à-dire quand $\hat{\mu}(\gamma) = 0$ pour tout γ tel que $\psi(\gamma) < 0$ ({cf. 100, 1.1, p.3}). Le théorème principal de De Leeuw et Gliksberg peut s'énoncer comme suit ({cf. 86, VII. 5.1, p.172}) :

Si la mesure μ est φ-analytique, elle est quasi-invariante par rapport à φ .

A ce théorème Mandrekar et Nadkarni ({113}) ont donné une démonstration simple qui se base sur la représentation spectrale ({134, XI. 1, p.69}) des groupes de transformations unitaires de l'espace de Hilbert. Ils déduisent du théorème principal de De Leeuw et Glicksberg des théorèmes qui généralisent les propositions A et B. Pour les énoncer, nous avons besoin de quelques nouvelles définitions. Nous dirons du sous-ensemble E de Borel du groupe G qu'il est *nul dans la direction de* φ quand, pour tout élément $g \in E$, l'ensemble des points $t \in \mathbb{R}$ pour lesquels $g + \varphi(t) \in E$ est de mesure nulle sur la droite numérique ; si pour tout élément $g \in E$ la mesure de cet ensemble est rigoureusement positive (c'est-à-dire > 0), E *est épais dans la direction de* φ . La mesure μ définie sur le groupe G est *absolument continue dans la direction de* φ si $\mu(E) = 0$ pour tout ensemble de Borel E nul dans la direction de φ ; μ est *non-annulable dans la direction de* φ si $|\mu|(E) > 0$ pour tout ensemble de Borel E épais dans la direction de φ et tel que $|\mu|(E+\varphi(\mathbb{R})) > 0$. On peut montrer ({71, proposition 2.3, p.183-184}) que μ est quasi-invariante par rapport à φ si et seulement si μ est absolument continue et non-annulable dans la direction de φ . De cela et du théorème principal résultent immédiatement les généralisations des propositions A et B : Si la mesure μ est φ-analytique, elle est absolument continue et non-annulable dans la direction de φ. La première proposition découle également de la généralisation (démonstration détaillée plus haut) par Glicksberg du théorème de Frédéric et Marcel Riesz ({90, p.126}). Le théorème principal a encore pour conséquence une généralisation du théorème de Rudin-Carleson ({71, théorème 3.3, p.186}), la généralisation ({71, théorème 3.4, p.187}) du théorème de Bochner démontré plus haut, et son extension au tore de dimension infinie ({71, p.191}).

Forelli ({83}) a élargi le cadre de De Leeuw-Glicksberg, car il considère, à la place d'un sous-groupe à un seul paramètre d'un groupe commutatif compact, un espace S topologique (de Hausdorff) localement compact, et un homomorphisme $t \to T_t$ de $\mathbb{R}$ dans le groupe des homéomorphismes de l'espace S sur lui-même. Il suppose que la projection $(t,s) \to T_t s$ de $\mathbb{R}\times S$ dans S est continue, introduit la notion de mesure analytique et quasi-invariante et démontre, généralisant le théorème principal de De Leeuw et Glicksberg, que toute mesure analytique est quasi-invariante. Muhly ({116}) est parti du théorème de Forelli pour arriver à une généralisation du théorème de Bochner relative aux espaces homogènes des groupes de Lie beaucoup plus cohérente et qui va bien au delà de celle que nous venons de voir. Forelli lui-même applique un théorème du type Frédéric et Marcel Riesz aux domaines circulaires ({84}), tandis que Kolaski ({105}) fait de même pour la boule unité définie par l'inégalité $|z_1|^2 + \ldots + |z_N|^2 < 1$ de l'espace complexe $\mathbb{C}^N$ à N dimensions. Pour l'extension, due à Henkin, du théorème de Frédéric et Marcel Riesz aux boules unités complexes, je renvoie le lecteur au petit livre de Pelczynski ({118, § 11, p.72}).

De Leeuw ({72}) étend le théorème de Frédéric et Marcel Riesz aux opérateurs linéaires sur $C(\mathrm{T})$. Désignons par $\pounds$ l'espace des opérateurs linéaires définis sur l'espace $C(\mathrm{T})$, c'est-à-dire des applications linéaires continues de $C(\mathrm{T})$ sur lui-même. Si $\theta \in \mathrm{T}$, l'opérateur de translation R_θ est défini par la relation $(R_\theta f)(\psi) = f(\psi-\theta)$. Désignons par $\pounds_\#$ l'ensemble des opérateurs $T \in \pounds$ tels que

$$\lim_{\theta\to 0}\|TR_\theta - R_\theta T\| = 0 .$$

Comme plus haut, soit $A(\mathrm{T})$ l'espace des fonctions $f \in C(\mathrm{T})$ telles que le coefficient de Fourier c_n en (45) s'annule pour les valeurs $n = -1,-2,-3,\ldots$, et désignons par $A(\mathrm{T})^\sim$ l'espace des fonctions telles que $c_n = 0$ si $n=1,2,3,\ldots$.
Selon le théorème de De Leeuw, *si* $T \in \pounds_\#$ *est tel que* $T(A(\mathrm{T})) \subset A(\mathrm{T})^\sim$, T *est un opérateur compact.* Si nous définissons l'opérateur C_μ de la convolution par

par la mesure $\mu \in M(\mathrm{T})$

$$(C_\mu f)(\psi) = \int_0^{2\pi} f(\psi-\theta)\ d\mu(\theta) ,$$

la condition $C_\mu(A(\mathrm{T})) \subset A(\mathrm{T})^\sim$ est équivalente au fait que les coefficients de (49) s'annulent pour les valeurs $n = 1,2,3,\ldots$. D'autre part, C_μ est compact si et seulement si μ est absolument continue. Ainsi le théorème de De Leeuw généralise vraiment le théorème de F. et M. Riesz, mais il utilise celui-ci dans sa démonstration.

Notons pour terminer que nous sommes loin d'avoir énuméré toutes les utilisations qui ont été faites du théorème des frères Riesz. Il est constamment cité dans les ouvrages traitant des fonctions analytiques de variables complexes, par exemple par Heins dans son récent article sur la dérivée angulaire ({96, p.247 et 251}).

Travaux de Marcel Riesz

[1] Megadott hatványsor folytatásának analitikai elöállitása (Math. Phys. Lapok, 16(1907), 1-25 ; 17(1908), 96-108).

[2] A hatványsor összegezhetösége az összetartási körön (Math.Term. Értesitö, 26 (1908), 221-229).

[3] Sur les séries trigonométriques (C.R.Acad.Sci.Paris, 145(1907), 583-586).

[4] Sur les séries de Dirichlet (C.R.Acad.Sci.Paris, 148(1909), 1658-1660).

[5] Sur la sommation des séries de Dirichlet (C.R.Acad.Sci.Paris, 149(1909), 18-21).

[6] Sur les séries de Dirichlet et les séries entières (C.R.Acad.Sci.Paris, 149 (1909), 909-912).

[7] Összegezhetö trigonometrikus sorok és összegezhetö hatványsorok (Math.Phys. Lapok, 19(1910), 1-56).

[8] Sur un problème d'Abel, extrait de deux lettres à M. G. Mittag-Leffler (Rend.Circ. Mat. Palermo, 30(1910), 339-345).

[9] Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques (C.R.Acad.Sci. Paris, 152(1911), 1651-1654).

[10] Über einen Satz des Herrn Fatou (J. reine angew. Math., 140(1911), 89-99).

[11] Megadott Dirichlet-sor folytatásának analitikai elöállitása (Math. Term. Értesitö, 29(1911), 283-301).

[12] Über summierbare trigonometrische Reihen (Math. Ann., 71(1912), 54-75).

[13] Sur la représentation analytique des fonctions définies par des séries de Dirichlet, lettre à M. Mittag-Leffler (Acta Math., 35(1912), 253-270).

[14] Formule d'interpolation pour la dérivée d'un polynôme trigonométrique (C.R.Acad. Sci. Paris, 158(1914), 1152-1154).

[15] Eine trigonometrische Interpolationsformel une einige Ungleichungen für Polynome (Jber. Deutsch. Math.-Verein., 23(1914), 354-368).

[16] Sammanfattende överblick över teorien för trigonometriska series, *Reports 3rd Scandinavian Math. Congress 1913*, Kristiania, 1915, p.107-127.

[17] *The general theory of Dirichlet's series* (avec G.H. Hardy), Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, N° 18, Cambridge University Press, 1915. Nouvelle édition 1952.

[18] Sur l'hypothèse de Riemann (Acta Math., 40(1916), 185-190).

[19] Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein, aus zwei Briefen an Herrn G. Mittag-Leffler (Acta Math., 40(1916), 337-347).

[20] Neuer Beweis des Fatouschen Satzes (Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, 1916, 62-65).

[21] Sätze über Potenzreihen (Ark. Mat. Astronom. och Fys., 11(1916-1917), N° 12, 16 p.).

[22] Ein Konvergenzsatz für Dirichletsche Reihen (Acta Math., 40(1916), 349-361).

[23] Über die Randwerte einer analytischen Fuktion (avec F. Riesz), *Quatrième Congrès des Mathématiciens Scandinaves, Stockholm 1916*, Uppsala(Almquist & Wiksells), 1920, p.27-44.

[24] Sur le principe de Phragmén-Lindelöf, extrait d'une lettre adressée à M. G.H. Hardy (Proc. Cambridge Philosophical Society, 20(1920-1921), 205-207) ; Note by G.H. Hardy, même tome, p.208-209 ; *Errata*, même revue, t.21(1922-1923), p.6.

[25] Sur le problème des moments. Première note (Ark. Mat. Astronom. och Fys., 16 (1921-1922), N° 12, 23 p.) ; Deuxième note, même tome, N° 19, 21 p. ; Troisième note, même revue, t.17(1923), N° 16, 52 p.

[26] Sur la sommation des séries de Fourier (Acta Litt. ac Sient. Univ.Hung.Francisco-Josephinae, Sec. Sci. Math. (Szeged), 1(1922-1923), 104-113).

[27] Sur un théorème de la moyenne et ses applications (Acta Litt. ac Scient. Univ. Hung. Francisco-Josephinae, Sect. Sci. Math. (Szeged), 1(1922-1923), 114-126).

[28] Sur le problème des moments et le théorème de Parseval correspondant (Acta Litt. ac Scient. Univ. Hung. Francisco-Josephinae, Sect. Sci. Math. (Szeged), 1(1922-1923), 209-225).

[29] Sur l'équivalence de certaines méthodes de sommation, extrait d'une lettre adressée à M. G.H. Hardy (Proc. London Mathematical Society, (2), 22(1922-1924), 412-419).

[30] Über die Summierbarkeit durch typische Mittel (Acta Litt. ac Scient. Univ. Hung. Francisco-Josephinae, Sect. Sci. Math. (Szeged), 2(1924-1926, 18-31).

[31] Les fonctions conjuguées et les séries de Fourier (C.R. Acad. Sci. Paris, 178 (1924), 1464-1467).

[32] Neuere Untersuchungen über trigonometrische Reihen (avec E. Hilbbel), *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Band II., 3. Teil, 2.Hälfte, C.10, p.1189-1228, Leipzig(Teubner), 1924.

[33] Sur les séries trigonométriques conjuguées, extracted from a letter to Prof. G.H. Hardy (Proc.London Mathematical Society, (2), 23(1925), XXIV-XXVI).

[34] Sur les fonctions conjuguées (Math. Zeitschrift, 27(1927), 218-244).

[35] Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires (Acta Math., 49(1927), 465-497).

[36] Sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions avec quelques remarques sur les géométries non-euclidiennes (Kungl. Fysiografiska Sällskapets i Lund Förhandlingar, 1(1931), 21 p.).

[37] Sur les ensembles compacts de fonctions sommables (Acta Litt. ac Scient. Univ. Hung. Francisco-Josephinae, Sect. Sci. Math.(Szeged), 6(1932-1934), 136-142).

[38] Zum Eindeutigkeitssatz der fastperiodischen Funktionen (Kungl. Fysiografiska Sällskapets i Lund Förhandlingar, 3(1933), N° 10, 9 p.).

[39] Eine Bemerkung über den Eindeutigkeitssatz der Theorie der fastperiodischen Funktionen (Mat. Tidsskrift B H. 1(1934), 11-13).

[40] Volumes mixtes et facteurs invariants dans la théorie des modules, *Comptes Rendus du Congrès International des Mathématiciens, Oslo 1936*, Oslo(Brøgger) , 1937, t.II, 16.

[41] Modules réciproques, *Comptes Rendus du Congrès International des Mathématiciens, Oslo 1936*, Oslo(Brøgger) , 1937, t.II, 36-37.

[42] Intégrale de Riemann-Liouville et solution invariante du problème de Cauchy pour l'équation des ondes, *Comptes Rendus du Congrès International des Mathématiciens, Oslo 1936*, Oslo(Brøgger), 1937, t.II, 44-45.

[43] Potentiels de divers ordres et leurs fonctions de Green, *Comptes Rendus du Congrès International des Mathématiciens, Oslo 1936*, Oslo(Brøgger), 1937, t.II, 62-63.

[44] L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy pour l'équation des ondes, *Société Mathématique de France, Conférences à la Réunion Internationale des Mathématiciens, Paris, Juillet 1937*, Paris(Gauthier-Villars), 1938, p.1-18.

[45] Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels (Acta Litt. ac Scient. Univ. Hung. Francisco-Josephinae, Sect. Sci. Math.(Szeged), 9(1938), 1-42).

[46] Rectification au travail "Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels" (Acta Litt. ac Scient.Univ. Hung. Francisco-Josephinae, Sect. Sci. Math. (Szeged),

9(1939), 116-118).

[47] En åskådlig bild av den ecke-euklidiska geometrien ; geometriska strövtåg inom relativitetsteorien (Lunds Universitets Årsskrift N.F. Avd. 2, Bd.38, N° 9 - Kungl. Fysiografiska Sällskapets Handlingar N.F. Bd. 53, N° 9, C.W.K. G leerup (Lund), 1943, 76 p.).

[48] Sur certaines notions fondamentales en théorie quantique relativiste, *Dixième Congrès des Mathématiciens Scandinaves, Copenhague 1946*, Copenhague(Bagges), 1947, 123-148.Traduction russe: Успехи Мат. наук Н.С., N° 5(39)(1950), 120-144.

[49] Eléments de probabilité en théorie quantique relativiste, Försäkr. mat. studier till., Stockholm(Lundberg), 1946.

[50] L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy (Acta Math., 81(1949), 1-223).

[51] Remarque sur les fonctions holomorphes (Acta Sci. Math. (Szeged), 12 A (1950), 53-56).

[52] Court exposé des propriétés principales de la mesure de Lebesgue (Annales de la Société Polonaise de Mathématique, 25(1952), 298-308).

[53] Sur le potentiel de Liénard-Wiechert attaché à une ligne d'univers (C.R. Acad. Sci. Paris, 234(1952), 2159-2161).

[54] Sur le potentiel retardé attaché à un courant continu (C.R. Acad. Sci. Paris, 234(1952), 2260-2261).

[55] Sur le lemme de Zolotareff et sur la loi de réciprocité des restes quadratiques (Math. Scandinavica, 1(1953), 159-169).

[56] L'équation de Dirac en relativité générale, *Douzième Congrès des Mathématiciens Scandinaves, Lund 1953*, Lund(Ohlsson), 1954, p.241-259.

[57] A short proof of a classical theorem in the theory of Fourier integrals (avec A.E. Livingstone) (American Math. Monthly, 62(1955), 434-437).

[58] Problems related to characteristic surfaces, *Proceedings of the Conference on Differential Equations, University of Maryland, March 1955*, p.57-71.

[59] A special characteristic surface - a new relativistic model for the electron ? Technical Report N° 25, Department of Mathematics, University of Maryland, College Park, Maryland, Jan. 1957, 18 p.

[60] *Clifford numbers and spinors*, chap. I-IV, The Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, Lecture Series N° 38, University of Maryland, College Park, Maryland, 1957-1958, 193 p.

[61] A geometric solution of the wave equation in space-time of even dimension (Communications on Pure and Applied Math., 13(1960), 329-354).

[62] The analytic continuation of the Riemann-Liouville integral in the hyperbolic case (Canadian J. Math., 13(1961), 37-47).

TRAVAUX D'AUTRES AUTEURS

{1} Agmon S., Sur deux théorèmes de M. S. Mandelbrojt (C.R. Acad. Sci. Paris, 228 (1949), 1835-1837).

{2} Ananda-Rau K., On the convergence and summability of Dirichlet's series (Proc. London Math. Soc., (2), 34(1932), 414-440).

{3} Bernstein V., *Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet,* Paris(Gauthier-Villars), 1933.

{4} Bochner S., Summation of multiple Fourier series by spherical means (Transactions Amer. Math. Soc., 40(1936), 175-207).

{5} Bohr H. und Cramér H., Die neuere Entwicklung der analytischen Zahlentheorie, *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaten,* Band II, 3. Teil, 2. Hälfte, C.8, 722-849, Leipzig(Teubner), 1923.

{6} Borwein D., On Riesz and generalised Cesàro summability (J. London Math. Soc, (2), 2(1970), 61-66).

{7} Butzer P.L., Nessel R.J. and Trebels W., Multipliers with respect to spectral measures in Banach spaces and approximation. I. Radial multipliers in connection with Riesz-bounded spectral measures (J. Approximation Theory, 8(1973), 335-356).

{8} Chandrasekharan K, and Minakshisundaram S., *Typical means,* Oxford University Press, 1952.

{9} Cramér H., Über das Teilerproblem von Piltz (Ark. Mat. Astronom. och Fys., 16 (1921-1922), N° 21.

{10} Deny J., Les potentiels d'énergie finie (Acta Math., 82(1950), 107-183).

{11} Dikshit G.D., On absolute Riesz summability of Fourier series (J. Austral. Math. Soc., 19(1975), 97-102).

{12} Fatou P., Séries trigonométriques et séries de Taylor (Acta Math., 30(1906), 335-400).

{13} Fefferman C., A note on spherical summation multipliers (Israel J. Math., 15 (1973), 44-52).

{14} Fejér L., Untersuchungen über Fouriersche Reihen (Math. Annalen, 58(1904), 51-69) = *Gesammelte Arbeiten,* t.I, p.142-160, Basel(Birkhäuser), 1970.

{15} Fejér L., Über die Summabilität der Laplacesche$_n$Reihe durch arithmetische Mittel (Math. Zeitschrift, 24(1925), 267-284) = *Gesammelte Arbeiten,* t.II, p.144-161.

{16} Fejér L., Abschätzungen für die Legendreschen und verwandte Polynome (Math. Zeitschrift, 24(1925), 285-298) = *Gesammelte Arbeiten,* t.II, p.161-175.

{17} Gårding L., Marcel Riesz in memoriam (Acta Math., 124(1970), I-XI).

{18} Gergen J.J., Summability of double Fourier series (Duke Math. J., 3(1937), 133-148.

{19} Glatfeld M., Einführung in die allgemeine Theorie der starken Rieszschen Summierbarkeit (Überblicke Mathematik (1971), Band 4, 93-120, Biographisches Inst. Mannheim, 1972).

{20} Hardy G.H., *Divergent series,* Oxford University Press, 1949.

{21} Hörmander L., On the Riesz means of spectral functions of elliptic differential operators and the corresponding spectral expansions, *Some Recent Advances in Basic Sciences,* t.II, p.155-202, New York(Belfer Graduate School of Science), 1969.

{22} Irwin R. and Peyerimhoff A., On the convexity theorem of M. Riesz (Indian J. Math., 9(1967), 109-121).

{23} Khan A.A., Absolute Riesz summability of a series associated with a Fourier series (Indian J. Math., 15(1973), 1-6).

{24} Kogbetliantz E., Sommation des séries et intégrales divergentes par les moyennes arithmétiques et typiques, Mémorial des Sciences Mathématiques, fascicule 51, Paris(Gauthier-Villars), 1931.

{25} Kuttner B., On the "second theorem of consistency" for absolute Riesz summability (Proc. London Math. Soc., (3), 29(1974), 17-32).

{26} Kuttner B., On iterated Riesz transforms of order 1 (Proc. London Math. Soc., (3), 29(1974), 272-288).

{27} Landau E., Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin(Springer), 1929 = New York(Chelsea), 1946.

{28} Mittag-Leffler G., Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène, Première note (Acta Math., 23(1900), 43-62).

{29} Mittag-Leffler G., Sur un problème d'Abel, extrait d'une lettre à M. Marcel Riesz (Rend. Circ. Mat. Palermo, 30(1910), 337-338).

{30} Moldenkov V.A., Equisummability in the sense of M. Riesz of expansions in certain systems of exponential functions (Mat. Zametki, 15(1974), 381-386) = (Math. Notes, 15(1974), 218-221).

{31} Neder L., Theorie der trigonometrischen Reihen (Math. Annalen, 84(1921), 117-136).

{32} Pólya G. und Szegö G., *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis,* Berlin(Springer), 1925.

{33} Rajchman A. et Zygmund A., Sur la possibilité d'appliquer la méthode de Riemann aux séries trigonométriques sommables par le procédé de Poisson (Math. Zeitschrift, 25(1926), 261-273).

{34} Stein E.M. and Weiss G., *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean spaces,* Princeton University Press, 1971.

{35} Szász P., A differenciál- és integrálszámitás elemei, Budapest(Közoktatásügyi Kiadóvállalat), 1951.

{36} Szegö G., Tchebyscheffsche Polynome und nichtfortsetzbare Potenzreihen (Math. Annalen, 87(1922), 90-111).

{37} Trebels W., On a Fourier $L^1(E^n)$-multiplier criterion (Acta Sci. Math. Szeged, 35(1973), 21-26).

{38} Trebels W., Multipliers for (C,α)-bounded Fourier expansions in Banach spaces and approximation theory, Springer(Berlin), 1973.

{39} Trebels W., *Fourier multipliers on $L^p(R^n)$ in connection with bounded Riesz means. Approximation Theory,* p.505-519, New York(Academic Press), 1973.

{40} Trebels W., Some Fourier multiplier criteria and the spherical Bochner-Riesz kernel (Revue Roumaine de Math. pures et appl., 20(1975), 1173-1185).

{41} Trebels W., On Fourier M_q^p multiplier criteria of Marcinkiewicz type (Studia Math., 58(1976), 7-19).

{42} Turán P., On an application of the typical means in the theory of zeta-function of Riemann (Comm. Sém. Math. Univ. Lund, tome supplémentaire(1952), 239-251).

{43} Tzimbalario J., Generalized Riesz typical means (J. Indian Math. Soc., (N.S.), 39(1975), 83-101).

{44} Walfisz A., Über die summatorischen Funktionen einiger Dirichletscher Reihen, Thèse, Göttingen, 1922.

{45} Warlimont R., Die starke Rieszsche Summierbarkeit von Dirichletreihen (Überblicke Mathematik (1972), Band 5, 87-110, Bibliographisches Inst., Mannheim, 1972).

{46} Zeller K., Theorie der Limitierungsverfahren, Berlin(Springer), 1958.

{47} Zygmund A., Sur la théorie riemannienne des séries trigonométriques (Math. Zeitschrift, 24(1926), 47-104).

{48} Zygmund A., Sur les séries trigonométriques sommables par le procédé de Poisson (Math. Zeitschrift, 25(1926), 274-290).

{49} Zygmund A., *Trigonometric series*, Cambridge University Press, 1959.

{50} Ahern P.R., On the generalized F. and M. Riesz theorem (Pacific J. Math., 15(1965), 373-376).

{51} Ahern P.R. and Sarason D., The H^p spaces of a class of function algebras (Acta Math., 117(1967), 123-163).

{52} Ahijezer N.I., *Előadások az approximáció elméletéről*, Budapest (Akadémiai Kiadó), 1951.

{53} Amar E., Sur un théorème de Mooney relatif aux fonctions analytiques bornées (Pacific J. Math., 49(1973), 311-314).

{54} Barbey K. and König H., *Abstract analytic function theory and Hardy algebras*, Springer(Berlin), 1977.

{55} Barth K.F. and Schneider W.J., An asymptotic analog of the F. and M. Riesz radial uniqueness theorem (Proc. Amer. Math. Soc., 22(1969), 53-54).

{56} Бернштеин С.Н., О наилучшем приближении непрерывниых функций посредством многочленов данной степени (Сообщ. Харкь. матем. об-ва, (2), 13(1912), 49-194) = *Oeuvres complètes*, vol.I, p.11-104, Moscou(Akad. Nauk SSSR), 1952.

{57} Bernstein S.N., Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes de degré donné (Mémoires publiés par la classe des sciences Acad. de Belgique, (2), 4(1912), 1-103).

{58} Bernstein S.N., Sur une propriété des polynômes (Сообщ. Харьк. матем. об-ва, (2), 14(1913), 1-6) = *Oeuvres complètes*, vol.I, p.146-150.

{59} Beurling A., On two problems concerning linear transformations in Hilbert space (Acta Math., 81(1949), 239-255).

{60} Bishop E., The structure of certain measures (Duke Math. J., 25(1958), 283-289).

{61} Bishop E., Boundary measures of analytic differentials (Duke Math. J., 27(1960), 331-340).

{62} Bishop E., A general Rudin-Carleson theorem (Proc. Amer. Math. Soc., 13(1962), 140-143).

{63} Bochner S., Boundary values of analytic functions in several variables and almost periodic functions (Annals of Math., 45(1944), 708-722).

{64} Bochner S., Function rings and analytic measures (J. Math. Pures Appl., (9), 42(1963), 209-221).

{65} Bochner S., Analytic measures on compact Bohr groups (Scripta Math., 27(1964), 5-26).

{66} Bourbaki N., *Esapaces vectoriels topologiques*, chap. 1-2, Paris(Hermann), 1966.

{67} Cargo G., Some topological analogues of the F. and M. Riesz uniqueness theorem (J. London Math. Soc., (2), 12(1975-1976), 67-74).

{68} Cnop I. and Delbaen F., A Dunford-Pettis theorem for $L^1/H^{\infty\perp}$ (J. Functional Analysis, 24(1977), 364-378).

{69} Coifman R.R. and Weiss G., Invariant systems of conjugate harmonic functions associated with compact Lie groups (Studia Math., 44(1972), 301-308).

{70} Cullen M.R., An F. and M. Riesz theorem for a class of infinitely connected regions (Portugal. Math., 32(1973), 91-100).

{71} De Leeuw K. and Gliksberg I., Quasi-invariance and analyticity of measures on compact groups (Acta Math., 109(1963), 179-205).

{72} De Leeuw K., Fourier series of operators and an extension of the F. and M. Riesz theorem (Bull. Amer. Math. Soc., 79(1973), 342-344).

{73} Duren P.L., *Theory of* H^p *spaces*,New York(Academic Press), 1970.

{74} Erdös P. and Turán P., On the uniformly-dense distribution of certain sequences of points (Annals of Math., 41(1940), 162-173).

{75} Esseen C.G., Fourier analysis of distribution functions, a mathematical study of the Laplace-Gaussian law (Acta Math., 77(1945), 1-125).

{76} Fejér L. et Carathéodory, Remarques sur le théorème de M. Jensen (C.R. Acad. Sci. Paris, 145(1907), 163-165) = *Gesammelte Arbeiten*, vol. I, p.300-302.

{77} Fejér L., A függvény szakadásának meghatározása Fourier-féle sorából (Math. Term. Ertesitö, 31(1913), 385-415) = (J. Reine Angew. Math. 142(1913), 165-188) = *Gesammelte Arbeiten*, vol.I, p.744-770, 718-742.

{78} Fejér L., Konjugált trigonometrikus sorokról (Math. Term. Ertesitö, 32(1914), 85-93) = (J. Reine Angew. Math., 144(1914), 48-56) = *Gesammelte Arbeiten*, vol. I, p.806-813, 776-783.

{79} Fejér L., Über einen S. Bernsteinschen Satz über die Derivierte eines trigonometrischen Polynoms und über die Szegösche Verschärfung desselben (Bull. Calcutta Math. Soc., 20(1930), 49-54) = *Gesammelte Arbeiten*, vol.II, p.281-285.

{80} Fejér L., Jelentés az 1930.évi König Gyula jutalomról (Mat. Fiz. Lapok, 37 (1930), 63-90)= *Gesammelte Arbeiten*, vol. II, p.318-360.

{81} Fekete M., Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein (J. Reine Angew. Math., 146(1916), 88-94).

{82} Forelli F., Analytic measures (Pacific J. Math., 13(1963), 571-578).

{83} Forelli F., Analytic and quasi-invariant measures (Acta Math., 118(1967), 33-59).

{84} Forelli F., The theorems of F. and M. Riesz for circular sets (Math. Scandinavica, 33(1973), 145-152).

{85} Forelli F., The F. and M. Riesz theorem (Proc. Amer. Math. Soc., 47(1975), 431).

{86} Gamelin T.W., *Uniform algebras*, Englewood Cliffs, N.J.(Prentice-Hall), 1969.

{87} Garnett J. and Glicksberg I., Algebras with the same multiplicative measures (J. Functional Analysis, 1(1967), 331-341).

{88} Glicksberg I. and Wermer J., Measures orthogonal to a Dirichlet algebra (Duke Math. J., 30(1963), 661-666). *Errata* (même J., 31(1964), 717).

{89} Glicksberg I., The abstract F. and M. Riesz theorem (J. Functional Analysis, 1(1967), 109-122).

{90} Glicksberg I., Extensions of the F. and M. Riesz theorem (J. Functional Analysis, 5(1970), 125-136).

{91} Glicksberg I., *Recent results on function algebras*, Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Mathematics, N° 11, Providence, R.I.(American Mathematical Society), 1972.

{92} Halmos P., Henry Helson:*Lectures on invariant subspaces* (Bull. Amer. Math. Soc., 71(1965), 490-494).

{93} Hardy G.H. and Littlewood J.E., Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of the distribution primes (Acta Math., 41(1918), 119-196).

{94} Хавин В.П., Слабая полнота пространства L^1/H^1_0 (Вестн. Ленингр. ун-та, N° 13 (1973), 77-81, 172).

{95} Heard E.A., A sequential F. and M. Riesz theorem (Proc. Amer. Math. Soc., 18(1967), 832-835).

{96} Heins M., On the finite angular derivatives of an analytic function mapping the open unit disk into itself (J. London Math. Soc., (2), 15(1977), 239-254).

{97} Helson H., On a theorem of F. and M. Riesz (Colloquium Math., 3(1955), 113-117).

{98} Helson H. and Lowdenslager, Prediction theory and Fourier series in several variables, I-II (Acta Math., 99(1958), 165-202 ; 106(1961), 175-213).

{99} Helson H., *Lectures on invariant subspaces*, New York(Academic Press), 1964.

{100} Helson H., Analyticity on compact abelian groups, p.1-62 de *Algebras in analysis*, Proc. Instructional Conf. and Advanced Study Inst. Birmingham, 1973, London(Academic Press), 1975.

{101} Hille E. and Tamarkin J.D., On the absolute integrability of Fourier transforms (Fundamenta Math., 25(1935), 329-352).

{102} Hoffman K., *Banach spaces of analytic functions*, Englewood Cliffs, N.J.(Prentice-Hall), 1962.

{103} Hoffman K., Analytic functions and logmodular Banach algebras (Acta Math. 108(1962), 271-317).

{104} Kahane J.P., Another theorem on bounded analytic functions (Proc. Amer. Math. Soc., 18(1967), 827-831).

{105} Kolaski C., An F. and M. Riesz type theorem for the unit ball in complex N-space (Proc. Amer. Math. Soc., 61(1976), 19-25).

{106} König H., Zur abstrakten Theorie der analytischen Functionen I (Math. Zeitschrift, 88(1965), 136-165), II (Math. Annalen, 163(1966), 9-17), III (Arch. Math.(Basel), 18(1967), 273-284).

{107} König H. and Seever G.L., The abstract F. and M. Riesz theorem (Duke Math. J., 36(1969), 791-797).

{108} König H., On certain applications of the Hahn-Banach and minimax theorems (Arch. Math.(Basel), 21(1970), 583-591).

{109} König H., Abstract Hardy algebra theory, p.227-246 de *Functional Analysis : Surveys and Recent Results*, Proceedings of the Paderborn Conference on Functional Analysis, Amsterdam(North-Holland), 1977.

{110} Kryloff N., Sur quelques recherches dans le domaine de la théorie de l'interpolation et des quadratures, dites mécaniques, p.651-656, vol. I des *Proc. International Mathematical Congress, Toronto, 1924.*

{111} Lumer G., Analytic functions and Dirichlet problem (Bull. Amer. Math. Soc., 70(1964), 98-104).

{112} Lumer G., *Algèbres de fonctions et espaces de Hardy*, Berlin(Springer), 1968.

{113} Mandrekar V. and Nadkarni M., Quasi-invariance of analytic measure on compact groups (Bull. Amer. Math. Soc., 73(1967), 915-920).

{114} Montel P., Sur les polynômes d'approximation (Bull. Soc. Math. de France, 46(1918), 151-192).

{115} Mooney M.C., A theorem on bounded analytic functions (Pacific J. Math., 43(1972), 457-463).

{116} Muhly P.S., A note on analytic measures (Proc. Amer. Math. Soc., 42(1974), 330-331).

{117} Oberlin D., Uniformly convergent Taylor series and sets of measure zero (Michigan Math.J.).

{118} Pelczynski A., *Banach spaces of analytic functions and absolutely summing operators*, Conference Board of the Mathematicls Sciences Regional Conference Series in Mathematics, N° 30, Providence,R.I.(American Mathematical Society), 1977.

{119} Piranian G., Shields A.L. and Wells J.H., Bounded analytic functions and absolutely continuous measures(Proc. Amer. Math. Soc., 18(1967), 818-826).

{120} Привалов И.И., Граничные свойства аналитических функций, Moscou(Gos. Izdat. Teh.-Teoret. Lit.), 1950 = traduction allemande, Berlin(VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften), 1956.

{121} Rainwater J., A note on the preceding paper (Duke Math. J., 36(1969), 799-800).

{122} Riesz F. és Szegö G., Analytikus függvény kerületi érékeiröl (Math. Term. Ertesitö, 38(1921), 113-127) = *Oeuvres complètes* de F. Riesz, vol.I, p.610-624, Budapest(Akadémiai Kiadó), 1960.

{123} Riesz F., Über die Randwerte einer analytischen Function (Math. Zeitschrift, 18(1923), 87-95) = *Oeuvres complètes*, vol. I, p.645-653.

{124} Rudin W., Trigonometric series with gaps (J. Math. Mech., 9(1960), 203-227).

{125} Sarason D., *Function theory on the unit circle*, Blacksburg, Va.(Department of Mathematics, Virginia Polytechnic Institute and State University), 1978.

{126} Seever G.L., Algebras of continuous functions on hyperstonian spaces (Arch. Math.(Basel), 24(1973), 648-660).

{127} Shohat J.A. and Tamarkin J.D., *The problem of moments*, New York (American Mathematical Society), 1950.

{128} Srinivasan T.P. and Wang J.K., On closed ideals of analytic functions (Proc. Amer. Math. Soc., 16(1965), 49-52).

{129} Stein E.M. and Weiss G., On the theory of harmonic functions of several variables (Acta Math., 103(1960), 26-62).

{130} Stein E.M., *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, 1970.

{131} Stout E.L., *The theory of uniform algebras*, Tarrytown-on-Hudson, N.Y.(Bogden and Quigley), 1971.

{132} Szász O., Korlátos hatványsorokról (Math. Term. Ertesitö, 43(1926), 504-520).

{133} Szegö G., Über die Randwerte einer analytischen Funktion (Math. Annalen, 84(1921), 234-244).

{134} Szökefalvi-Nagy B., *Spectraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes*, Berlin(Springer), 1942.

{135} Szökefalvi-Nagy B., *Valós függvények és függvénysorok*, Budapest(Tankönyvkiadó), 1954.

{136} Taibleson M.H., *Fourier analysis on local fields*, Princeton University Press, 1975.

{137} Taibleson M.H., The existence of natural field structures for finite dimensional vector spaces over local fields (Pacific J. Math., 63(1976), 545-551).

{138} Titchmarsh E.C., *The theory of the Riemann zeta-function*, Oxford University Press, 1951.

{139} Tse K.F., An analog of the Lusin-Privaloff radial uniqueness theorem (Proc. Amer. Math. Soc., 25(1970), 310-312).

{140} Turán P., Über die Ableitungen von Polynomen (Compositio Math., 7(1939), 89-95).

{141} Turán P., On rational polynomials (Acta Univ. Szeged, Sect. Sci. Math., 11(1946), 106-113).

{142} Wermer J., Subalgebras of the algebra of all complex-valued continuous functions on the circle (Amer. J. Math., 78(1954), 225-242).

{143} Wermer J., Advanced Problem N° 4687 (Amer. Math. Monthly, 64(1957), 372).