CAHIERS DU SÉMINAIRE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

JEAN HORVATH

L'œuvre mathématique de Marcel Riesz I

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1re série, tome 3 (1982), p. 83-121
<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1982__3__83_0>

L'OEUVRE MATHÉMATIQUE DE MARCEL RIESZ I*

PAR JEAN HORVATH

Marcel Riesz est né à Györ le 16 novembre 1886. Comme chez son frère - son aîné de six ans - Frédéric Riesz, ses aptitudes mathématiques se révélèrent tôt. Cependant, l'aîné eut à lutter pour pouvoir étudier les mathématiques, le père, médecin, considérant la carrière médicale ou celle d'ingénieur comme socialement plus élevée que celle de professeur ; Frédéric Riesz fut donc obligé de faire des études d'ingénieur pendant deux ans à Zurich avant d'obtenir le consentement de son père pour s'inscrire à la Faculté des Sciences de Budapest.

Par contre, Marcel Riesz commence tout de suite ses études à l'Université de Budapest pour être professeur de mathématiques et de physique. Il est premier au concours mathématique Eötvös Loránd en 1904. Il participe en tant qu'étudiant au Congrès international des Mathématiciens à Rome, en 1908 ; parmi les participants, nous relevons les noms de : "F.Riesz, prof.,Löcse-M.Riesz,étudiant en mathématiques, Budapest". A Rome, il a des contacts personnels avec Mittag-Leffler, dont il avait déjà auparavant étudié les travaux : sa première publication[1] [1] est un exposé de la méthode de Mittag-Leffler sur le prolongement des fonctions analytiques dans un domaine étoilé ({28}).

Après le Congrès, il reste en relations épistolaires avec Mittag-Leffler. Les articles cités sous les rubriques {29} et [8] sont des extraits de leurs échanges de lettres.

Marcel Riesz passe à Paris l'année universitaire 1910-1911. A cette époque, il n'y avait à Paris qu'une seule université ; les facultés des lettres et des sciences formaient la fameuse Sorbonne et se trouvaient logées en leur entier dans ses locaux. Il n'existait encore aucun institut à l'extérieur, tel l'Institut Henri Poincaré - d'ailleurs Poincaré était encore en vie (il est mort en 1912), et les frères Riesz le rencontrèrent même une fois dans la rue en se promenant en compagnie de Maurice Fréchet, et c'est celui-ci que les lui présenta.

Marcel Riesz travaillait à la bibliothèque de la Sorbonne et habitait juste en face, à l'Hôtel des Etrangers, qui existait encore il y a quelques années. C'est là qu'il reçut une invitation de Mittag-Leffler pour donner trois conférences. Riesz partit pour Stockholm pour répondre à l'invitation et resta en Suède jusqu'à la fin de

---

★ L'article est traduit du hongrois par Agnès KAHANE de *Mat.Lapok,* t.26(1975), p.11-37.

1 Les crochets renvoient aux travaux de Marcel Riesz et les accolades à ceux des autres mathématiciens.

ses jours. De 1911 à 1926 il fut maître de conférences à l'Université de Stockholm, tout en travaillant comm actuaire pour arrondir ses maigres revenus. Il maintint, plus tard, ses contacts avec l'actuariat : ses visites à Paris en 1937 et 1949 furent d'abord motivées par sa participation aux congrès de l'actuariat. Lors du premier, il fit sa fameuse conférence sur les intégrales de Riemann-Liouville ([44]) ; lors du second, il donna de nombreuses conférences à Paris, à Nancy et à Grenoble (voir *Annales Inst. Fourier*, t.1(1950), p.27).

Il est nommé professeur à Lund en 1926, puis il prend sa retraite en 1952 et passe en grande partie aux Etats-Unis les huit années suivantes. Déjà en 1947-1948 il avait été professeur associé à l'Université de Chicago ; de 1952 à 1955 il partage son temps entre Princeton, Stanford, l'Institut Courant de New York et l'Université de Maryland ; puis, de 1956 à 1960, entre l'Université de Maryland et celle d'Indiana. Jeune étudiant, il écrivait et parlait l'allemand et le français de façon remarquable, mais il ne commença à étudier l'anglais que juste avant sa visite à Chicago, c'est-à-dire à un âge avancé. Malgré cela, il parvint très vite à une connaissance parfaite et raffinée de cette langue. Alors que jusqu'en 1955, à part [17], il ne publie rien en anglais (et encore c'est Hardy qui rédige le texte du [17]), à partir de 1955 il ne publie plus qu'en anglais.

Au printemps de 1960 il tombe malade. L'une de ses filles jumelles le reconduit à Lund, où, à part quelques courts déplacements, il reste dans son bel appartement jusqu'à la fin de sa vie. Au Congrès international des Mathématiciens de 1962, à Stockholm, il est fêté comme le "nestor" des mathématiques suédoises, et son élève Lars Hörmander reçoit en sa présence la médaille Fields. Il meurt le 4 septembre 1969 après avoir supporté sa maladie avec stoïcisme.

Marcel Riesz était membre de l'Académie des Sciences de Suède. En 1950, à l'occasion du centenaire de la création de la Faculté des Sciences Naturelles de Copenhague, il remit le titre de Docteur *Honoris causa* à douze savants scandinaves de valeur exceptionnelle. On peut voir, sur une photographie découpée dans un journal, les douze Docteurs assis, en habit, au premier rang, et parmi eux Marcel Riesz et György Hevesi, prix Nobel de chimie.

Parmi ses élèves, on compte toute une série de très grands noms des mathématiques suédoises : Harald Cramér, Einar Hille, Otto Frostman, G.O. Thorin, Nils Erik Fremberg, Lars Gårding, Harry Malmheden et Hörmander, que nous avons déjà cité. Ses succès pédagogiques s'expliquent surtout par le fait qu'il était toujours prêt à parler des mathématiques avec n'importe qui et à tout moment. Il aimait à se lever tard, pour travailler ensuite, infatigablement, avec une énergie fantastique, jusqu'au lendemain à l'aube, voire jusqu'au matin. En juin 1949, nous avons fait le trajet Paris-Grenoble de nuit, dans un train bondé : pas question de dormir, bien entendu. Marcel Riesz, debout devant la fenêtre, regardait dehors ; Alfréd Rényi lui demanda à quoi il pensait. "Au problème de Dirichlet", répondit-il. L'été de la même année Jacques Deny vint de Strasbourg à Paris pour le rencontrer. Deny était en train de rédiger sa thèse de doctorat {10} sur la théorie du potentiel, thèse qui pour une grande part prolonge les travaux de Frostman en les replaçant sur des bases nouvelles. Riesz faisait grand cas du travail de Deny, et déclarait qu'il jouait le même rôle par rapport à la théorie des distributions de Schwartz que la thèse de Fatou, datant de 1906, par rapport à la notion d'intégrale - alors nouvelle - de Lebesgue. Donc Deny arriva à Paris, rencontra Riesz à midi et jusqu'au lendemain à l'aube ils parlèrent sans interruption de la théorie du potentiel. Le jour même le pauvre Deny, de constitution fragile, retournait déjà à Strasbourg et déclarait qu'il ne survivrait pas à une nouvelle rencontre avec Marcel Riesz.

En dehors des mathématiques, Marcel Riesz s'intéressait à beaucoup de choses ; en particulier, il suivait avec une grande attention l'actualité quotidienne. Dans sa jeunesse, il aimait beaucoup le théâtre et, grâce à sa prodigieuse mémoire, il était encore capable, de longues années plus tard, de réciter, voire de jouer, des séquences entières des pièces qu'il avait vues. C'est sans doute aussi grâce à sa mémoire étonnante que, bien qu'il parlât cinq langues à la perfection, il a continué jusqu'à la fin de sa vie à parler un hongrois à la fois impeccable et plein de saveur, sans la moindre trace de ce défaut, trop répandu chez les Hongrois émigrés, qui consiste à émailler leurs propos de termes étrangers. Il lui suffisait d'entendre une fois une démonstration, jamais plus il ne l'oubliait, et grâce à cela une belle estimation de Leopold Fejér a été sauvée de l'oubli (voir *Gesammelte Arbeiten*, t.II, p.849).

Mes propres rapports avec la famille Riesz remontent à loin : dans ses jeunes années, ma grand-mère maternelle habitait la même rue que le docteur Riesz, à Györ,et elle a connu les frères Riesz au berceau. Lorsqu'en été 1949, à Paris, j'ai fait la connaissance de Marcel Riesz, il a su tout de suite qui était ma grand-mère, et se rappelait même mon grand-père, qu'il avait souvent vu sur la scène du fameux théâtre "Vígszinház". J'ai eu l'occasion de voir Marcel Riesz durant plusieurs semaines à Paris à la fin de 1951, puis nous avons travaillé ensemble de 1957 à 1960 à l'Université de Maryland. Ces contacts furent pour moi d'un prix inestimable, et je ne m'acquitte que d'une faible part de ma dette de reconnaissance en retraçant dans ces pages l'activité scientifique de Marcel Riesz.

Je rendrai compte, ci-dessous, des travaux de Marcel Riesz en les regroupant par sujets ; non seulement je ne citerai pas tous ses articles, mais je laisserai de côté des domaines entiers, par exemple les travaux qui ont des liens avec la physique

[48,49,53,54,56,59]. Par contre, j'essaierai de montrer comment les résultats de Riesz ont pu influencer des recherches ultérieures.

1. *Séries trigonométriques* [3,6,7,12,16,26,32]. Comme presque tous les mathématiciens hongrois de la première moitié du 20^e siècle, Marcel Riesz s'inspire de Leopold Fejér pour parvenir à son premier résultat. Cantor a montré que si la série trigonométrique

$$(1) \qquad \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

converge vers zéro, à l'exception d'un ensemble dénombrable[1], $a_n = b_n = 0$ pour tout n {49,chap.IX,§3}. Dans sa version allemande, la thèse de Leopold Fejér {14} montre que,si nous remplaçons la convergence par la sommabilité des moyennes arithmétiques, cette affirmation n'est plus valable. Ainsi, partout où l'on n'a pas un multiple entier de 2π, les moyennes arithmétiques des tranches [[sommes partielles]] de la série

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx + \dots$$

tendent vers zéro. Fejér pose la question suivante : si nous n'acceptions pas de points exceptionnels, est-il possible de conclure à la nullité des coefficients ? A ce sujet, Marcel Riesz énonce le théorème suivant [3,7,12] :

Si l'hypothèse

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n| + |b_n|}{n^2} < \infty$$

est vérifiée et si les moyennes arithmétiques des tranches de (1) tendent vers zéro, on a $a_n = b_n = 0$ *pour tout* n.

Notons que (2) est vérifié si pour n'importe quel exposant $\alpha < 1$ les suites $a_n n^{-\alpha}$ et $b_n n^{-\alpha}$ sont bornées. L'ingénieuse démonstration de Riesz s'appuie sur un théorème de Fejér {14} sur les valeurs limites, lequel est l'analogue de ce que l'on appelle le premier théorème de Riemann {35,§ 450, t.II, p.145 ; 49, chap.IX, (2.4)} : Soit

$$(3) \qquad F(x) = \frac{1}{48} a_0 x^4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^4}$$

la série obtenue en intégrant quatre fois (1). Nous avons alors

1 Cantor suppose cet ensemble dénombrable *réductible*, c'est-à-dire que le dérivé d'un certain ordre, fini ou transfini, est vide. Le résultat énoncé ici est dû à W.H.Young.

$$\frac{\Delta^4 F(x;2h)}{16h^4} = \frac{F(x+4h)-4F(x+2h)+6F(x)-4F(x-2h)+F(x-4h)}{16h^4} =$$

$$\frac{1}{2}\, a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^4$$

et,si les moyennes arithmétiques des tranches de (1) tendent vers $f(x)$, on peut dire pour la dérivée 4^e symétrique qu'on a

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta^4 F(x;2h)}{16h^4} = f(x) \; .$$

La démonstration de Riesz s'appuie aussi sur son théorème {35, t.II, § 451, p.146} suivant : supposons que la dérivée seconde symétrique de la fonction F est continue dans l'intervalle I , et que sa dérivée 4^e symétrique - que nous désignerons par Φ - existe dans I . Dans ce cas, pour n'importe quel point $x \in$ I et n'importe quel nombre $h > 0$, le rapport

$$\frac{\Delta^4 F(x;h)}{h^4}$$

se trouvera entre les bornes inférieure et supérieure de Φ sur l'intervalle $(x-2h, x+2h)$.

Il suit de là, par un raisonnement astucieux, l'analogue suivant d'un théorème de H.A. Schwarz {35,t.II,p.147} : Si la dérivée seconde symétrique de F est continue et si la dérivée 4^e symétrique de F s'annule partout, F est un polynôme du 3^e degré.

Supposons maintenant que les moyennes arithmétiques des tranches de (1) tendent vers zéro. On peut conclure de la condition (2) que la dérivée seconde de la fonction F définie en (3) est continue, et conclure du théorème des valeurs limites de Fejér que la dérivée 4^e symétrique de F est nulle. Ainsi, d'après le théorème de Schwarz généralisé :

$$- \frac{1}{48}\, a_0\, x^4 + c_0 x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^4} \, ,$$

où la série de droite est uniformément convergente. La partie de gauche non périodique doit disparaître : $a_0 = c_0 = c_1 = c_2 = 0$, et,comme la partie de droite est la série de Fourier de celle de gauche, $a_n = b_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$, c.q.f.d.

Riesz démontre ensuite que,si à la place de (2) nous faisons l'hypothèse plus forte que les coefficients a_n et b_n tendent vers zéro, il nous suffit de supposer que les moyennes arithmétiques des tranches de (1) tendent vers zéro, à l'exception de ce qu'on appelle un ensemble réductible. L'analogue du théorème de Du Bois-Reymond {35,t.II,§ 453,p.149} est également valable : Si les coefficients de la série trigonométrique (1) satisfont à la condition (2) et si les moyennes arithmétiques des tranches de la série convergent, pour tout x , vers la valeur $f(x)$ prise en x par une fonction f bornée, (1) sera la série de Fourier de f .

Les résultats de Riesz ont été plus tard généralisés à des moyennes d'ordre plus élevé et aux sommes d'Abel ; cependant la démonstration décrite plus haut n'est plus applicable à ces cas. Voici ce qu'écrivent Rajchman et Zygmund {33} :

"Si intéressant que soit le théorème de M. Fejér, utilisé avec succès par M. Riesz, la voie qu'il ouvre ne nous paraît pas être une voie à suivre dans la théorie d'unicité du développement trigonométrique. Nous croyons qu'on doit tenir compte des circonstances suivantes : 1° L'hypothèse dont la nécessité a été mise en évidence par M. Riesz, à savoir celle de la convergence de la série

$$(4) \qquad \frac{1}{2} a_0 x^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}$$

vers une fonction continue, nous amène à croire que la double intégration devrait suffire dans le cas considéré. 2° Quoique le théorème de M. Fejér paraît être susceptible d'une extension aux séries sommables par le procédé de Cesaro d'un ordre plus élevé, il ne nous donne aucun point d'attache [[*sic*]] pour l'étude des séries sommables par le procédé de Poisson. 3° L'application de la 4^e dérivée généralisée symétrique (et, à plus forte raison, des dérivées d'ordre plus élevé) est assez embarrassante."

Ensuite Rajchman et Zygmund démontrent une inégalité qui relie la dérivée seconde symétrique aux moyennes de Poisson de la série (1), puis, dans sa note {48} qui suit immédiatement ce qui précède, Zygmund montre que,si (4) est une série de Fourier de fonction continue et si les moyennes de Poisson de la série (1) tendent vers la fonction f intégrable et finie, (1) est la série de Fourier de f . Cette théorie, exploitée plus tard par Verblunsky, est aisément accessible aux § 7 et 8 du chapitre IX du livre de Zygmund {49} ; l'auteur insiste dans ses notes sur le fait que toute sa démarche découle des travaux de Marcel Riesz.

A la fin de sa publication [12], Riesz se demande si la série (1) est uniformément convergente au cas où

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n\, a_n \cos nx + n\, b_n \sin nx)$$

est convergent. Neder a répondu à cette question ({31}).

Selon le théorème fondamental de Leopold Fejér, les moyennes arithmétiques des tranches d'une série de Fourier de fonction f intégrable, en tous points où il existe une valeur limite

$$(5) \qquad \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)}{2} ,$$

tendent vers cette valeur limite. Il s'ensuit immédiatement que, pour $k \geqslant 1$, les moyennes de Cesaro de puissance k tendent également vers (5).

Or, dans sa note [6] de 1909, Marcel Riesz affirmait, sans le démontrer, que ce qui précède est vrai pour $0 < k < 1$. Des années passèrent sans qu'il fournît de démonstration, ce qui était courant chez ce perfectionniste : il écrivait ses articles très lentement, avec un grand soin, pesant chaque mot pour parvenir à un texte parfaitement compréhensible, au style choisi. Entre temps d'autres publièrent des démonstrations de ce théorème - jusqu'à ce qu'enfin, comme il le dit lui-même, il ait eu l'occasion, en écrivant l'article d'encyclopédie Hilb-Riesz [32] , d'étudier toutes ces diverses démonstrations et de parvenir à la conclusion que la sienne restait encore la plus simple ; et c'est ainsi qu'il finit par la publier en 1922 ([26]).

Avant d'en donner les grandes lignes, j'aimerais rappeler au lecteur la définition des moyennes de Cesaro - nous en aurons besoin de toute façon par la suite. Soit

$$(6) \qquad u_o + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

une série à termes complexes. Désignons par

$$s_n = u_o + u_1 + \ldots + u_n \qquad\qquad n = 0,1,\ldots$$

les sommes partielles [[tranches]] de cette série. Hölder a introduit les moyennes $H_n^{(k)}$ d'ordre arbitrairement élevé de la suite (s_n) {20,§ 5.2,p.94}. Pour la valeur $k = 1$, $H_n^{(1)}$ est tout simplement la moyenne arithmétique des $n+1$ premières tranches

$$(7) \qquad \frac{s_0+s_1+\ldots+s_n}{n+1} = \frac{(n+1)u_0+nu_1+\ldots+u_n}{n+1} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{j}{n+1}\right) u_j ,$$

tandis que, pour le nombre k entier supérieur à 1 , la définition par récurrence

$$H_n^{(k)} = \frac{H_0^{(k-1)} + \ldots + H_n^{(k-1)}}{n+1}$$

est valable pour les moyennes de Hölder. L'utilisation des moyennes de Hölder s'étant cependant avérée peu commode, Cesaro les a modifiées de la façon suivante : alors que Hölder parvient à la moyenne $H_n^{(k)}$ par une alternance d'additions et de divisions, Cesaro commence par faire k additions et divise à la fin seulement par la quantité qui convient. Pour être plus précis, soit

$$S_n^{(1)} = s_0 + s_1 + \dots + s_n$$

et pour $k > 1$

$$S_n^{(k)} = S_0^{(k-1)} + \dots + S_n^{(k-1)} .$$

Désignons par $E_n^{(k)}$ la valeur de $S_n^{(k)}$ dans le cas particulier où dans la série (6) $u_0 = 1$ et $u_n = 0$ pour tout indice $n \geqslant 1$. Les moyennes de Cesaro des sommes d'ordre k de la série (6) sont définies par la formule

$$C_n^{(k)} = \frac{S_n^{(k)}}{E_n^{(k)}} \tag{8}$$

{20,§ 5.4,p.96}. Nous pouvons encore définir les sommes $S_n^{(k)}$ par l'identité

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} x^n ,$$

d'où

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(k)} x^n .$$

Knopp, Marcel Riesz, Chapman et d'autres {46,§ 53,p.104} se sont aperçus chacun de leur côté que ces dernières formules, et en conséquence les moyennes de Cesaro (8), ont un sens pour tout nombre k supérieur à -1 . Explicitement

$$E_n^{(k)} = \binom{n+k}{n} ,$$

$$S_n^{(k)} = \sum_{j=0}^{n} E_{n-j}^{(k)} u_j = \sum_{j=0}^{n} E_{n-j}^{(k-1)} s_j ,$$

et, dans le cas de k entier,

$$C_n^{(k)} = \sum_{j=0}^{n} \left(1-\frac{j}{n+1}\right) \left(1-\frac{j}{n+2}\right) \dots \left(1-\frac{j}{n+k}\right) u_j . \tag{9}$$

Pour la valeur $k = 0$, $E_n^{(0)} = 1$ $(n \geqslant 0)$ et $C_n^{(0)} = s_n$. Pour $k = 1$, $E_n^{(1)} = n+1$ et $C_n^{(1)} = H_n^{(1)}$ correspondent justement à la formule (7). Pour k entier supérieur à 1 , $C_n^{(k)}$ et $H_n^{(k)}$ sont différents l'un de l'autre, mais en conséquence du théorème de Knopp-Schnee {20,§ 5.8,p.103 ; 27,§ 6,p.43} $C_n^{(k)}$ n'a de valeur limite pour $n \to \infty$ que dans le cas où $H_n^{(k)}$ en a une, et dans ce cas les deux valeurs limites concordent.

Cela posé, soit $0 < k < 1$, et désignons par $S_n^{(k)}(x)$ les sommes $S_n^{(k)}$ de la série de Fourier de la forme (1) de la fonction f intégrable, c'est-à-dire

$$S_n^{(k)}(x) = \frac{1}{2} E_n^{(k)} a_0 + \sum_{j=1}^{n} E_{n-j}^{(k)} (a_j \cos jx + b_j \sin jx) .$$

Dans ce cas les moyennes de Cesaro d'ordre k de la série de Fourier sont données par la formule

$$C_n^{(k)}(x) = \frac{S_n^{(k)}(x)}{E_n^{(k)}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi(t)\, K_n(t)\, dt ,$$

où $\varphi(t) = f(x+t) + f(x-t)$ et

$$E_n^{(k)} K_n(t) = \frac{1}{2} E_n^{(k)} + \sum_{j=1}^{n} E_{n-j}^{(k)} \cos jt .$$

A l'encontre du cas $k = 1$ étudié par Fejér, le noyau $K_n(t)$ n'est pas positif, et le nombre de changements de signes tend vers l'infini avec n. Riesz prouve par une voie élémentaire deux inégalités [26,(15) et (16),p.110], {49,chap.III,(5.5)}

(10) $$|K_n(t)| \leqslant An ,$$

(11) $$|K_n(t)| \leqslant \frac{B}{t^{k+1}\, n^k} ,$$

lorsque $0 \leqslant t \leqslant \pi$, où les constantes A et B ne sont fonction que de k. Alors que (10) est une conséquence immédiate de $E_n^{(k)} \leqslant E_{n+1}^{(k)}$, la preuve de (11) repose sur un certain nombre d'idées subtiles, que Fejér lui-même mentionne et utilise {15 ; 16,introduction,article 5 et § 2,article 10}.

Le théorème de Marcel Riesz découle aisément de ces deux inégalités. En premier lieu l'intégrale

$$\int_0^\pi |K_n(t)|\, dt$$

est bornée, quand $n \to \infty$, car, en décomposant l'intégration en les intervalles $[0,\frac{1}{n}]$ et $[\frac{1}{n},\pi]$, nous obtenons à partir de (10) et (11) la borne supérieure

$$An\,\frac{1}{n} + \frac{B}{n^k} \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{dt}{t^{k+1}} = C .$$

Si nous désignons par S la limite (5), nous avons

$$C_n^{(k)}(x) - S = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \{\varphi(t) - 2S\} K_n(t)\, dt \, .$$

Etant donné $\varepsilon > 0$, soit $\delta > 0$ assez petit pour que $|\varphi(t)-2S| \leqslant \varepsilon$ quand $0 \leqslant t \leqslant \delta$. Alors, à l'aide de (11), nous obtenons

$$|C_n^{(k)}(x)-S| \leqslant \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^\delta |K_n(t)|\, dt + \frac{B}{\pi\delta^{k+1} n^k} \int_\delta^\pi |\varphi(t)-2S|\, dt \, .$$

Etant donné que la première intégrale est $\leqslant C$ et que la seconde est finie, parce que d'après l'hypothèse $\varphi(t)-2S$ est intégrable, nous pouvons rendre le côté droit arbitrairement petit, si nous choisissons d'abord ε assez petit et ensuite n assez grand. De la même façon on peut démontrer la généralisation du théorème de Lebesgue, selon laquelle $C_n^{(k)}(x)$ tend vers $f(x)$ en tous les points dits de Lebesgue, c'est-à-dire presque partout, quand $n \to \infty$.

L'article d'encyclopédie de Hilb-Riesz [32], déjà mentionné, est facile à lire, et donne un aperçu intéressant des résultats obtenus dans le premier quart de notre siècle sur les séries de Fourier.

2. *Séries de puissances* [1,2,6,7,8,10,20,21]. Fatou a démontré, dans sa thèse de doctorat mentionnée plus haut {12,p.389-391}, que si la fonction f est régulière à l'intérieur du disque unité $|z| \leqslant 1$ et admet le développement en série de puissances

(12) $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \, , \quad \text{et si l'on a } c_n \to 0 \text{ quand } n \to \infty \, ,$$

alors la série de puissances est convergente en tous les points du cercle $|z| = 1$ où f est régulière. Bien entendu, si la série de puissances est convergente ne serait-ce qu'en un seul point du cercle unité, c_n tend nécessairement vers zéro. Landau souligne dans son livre {27,p.15} que ce théorème mérite grande attention, parce que la convergence ou la divergence de la série de puissances, en un point frontière du disque de convergence, n'a généralement aucun rapport avec la régularité ou la singularité de la fonction au point en question, de sorte que les quatre cas sont également possibles. Il cite en exemple les séries suivantes : $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ diverge partout sur le cercle unité, mais la fonction $f(z) = (1-z)^{-1}$ qu'elle représente est régulière pour $z = -1$ et singulière pour $z = 1$; $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} z^n$ est convergente et $-\log(1-z)$ est régulière au point $z = -1$, tandis que $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} z^n$ converge au point $z = 1$, mais d'après le théorème de Vivanti-Pringsheim {27,§ 17}, la fonction qu'elle représente est singulère à cet endroit.

Déjà dans ses travaux du début [6,7,10], Marcel Riesz manifeste un grand intérêt pour le théorème de Fatou ; il le généralise, lui donne un démonstration plus simple, et plus tard [20,21] il simplifie encore les démonstrations. Les généralisations de Riesz vont dans deux directions :

1) Si f est régulière en tous les points d'un arc fermé du cercle $|z| = 1$, et si $c_n \to 0$, alors (12) est uniformément convergente sur le dit arc. C'est ce qu'on appelle généralement le théorème de Fatou-Riesz.

2) Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{n^k} = 0$$

a lieu pour un nombre $k \geqslant 0$, et si f est régulière au point z du cercle unité, les moyennes de Cesaro d'ordre k des sommes partielles de la série de puissances (12) tendent vers $f(z)$ au point z. Ici aussi, il se confirme que la convergence est uniforme sur tous les arcs fermés de **régularité.**

Comme nous allons le voir au paragraphe suivant, Marcel Riesz a encore étendu le théorème de Fatou des séries de puissances aux séries de Dirichlet.

L'idée de la démonstration apparaît chez Riesz en d'autres occasions ; je voudrais l'esquisser à propos du théorème suivant, qui est la proposition la plus simple sur ce sujet : *Si c_n est borné, les sommes partielles de la série de puissances (12) sont uniformément bornées sur tous les arcs de régularité.* Ce théorème est aussi généralisable aux moyennes de Cesaro : si pour un nombre $k \geqslant 0$ la suite $n^{-k} c_n$ est bornée, sur tous les arcs de régularité les moyennes de Cesaro de puissance k des sommes partielles de la série (12) sont uniformément bornées. Pour la démonstration du théorème de Fatou-Riesz, je propose de se reporter en premier lieu au livre de Landau {27,§ 18,p.73}, mais pour les propositions se rapportant aux moyennes de Cesaro je suggère plutôt les travaux de Riesz en [21].

Si le rayon de convergence de (12) est plus grand que 1, la proposition est évidemment vraie. Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que la fonction f est régulière sur l'arc $-\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$ du cercle $z = e^{i\theta}$ et soit $|c_n| \leqslant C$ pour tout entier $n \geqslant 0$. On peut trouver un nombre θ_1, $\theta_0 < \theta_1 < \pi$ et $A > 1$, tels que f soit régulière en tout point $z = re^{i\theta}$ du secteur S fermé $0 \leqslant r \leqslant A$, $-\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_1$. Soit $z_1 = e^{i\theta_1}$. L'idée de base de Riesz est l'introduction des fonctions auxiliaires

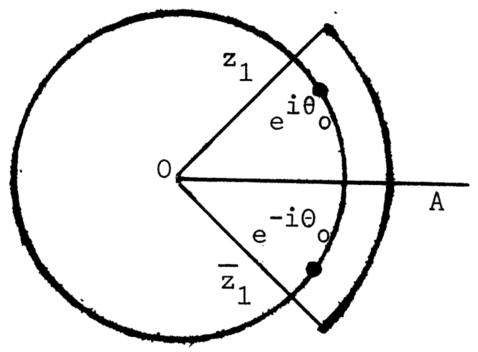

Figure 1

$$g_n(z) = \{ f(z) - (c_0+c_1z+\ldots+c_nz^n) \} \frac{(z-z_1)(z-\bar{z}_1)}{z^{n+1}} .$$

Je dis que sous les conditions données, les fonctions $g_n(z)$ sont uniformément bornées sur le secteur S , c'est-à-dire que

(13) $$|g_n(z)| \leqslant M \quad \text{pour} \quad z \in S \ , \ n = 0,1,2,\ldots \ .$$

Le théorème découle directement de là, car si nous désignons par B le maximum sur S de $|f(z)|$, nous avons

$$|c_0+c_1z+\ldots+c_nz^n| \leqslant \frac{M}{|z-z_1|.|z-\bar{z}_1|} + B ,$$

et la partie droite est bornée si $-\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$ et $z = re^{i\theta}$.

Sur la base du principe du maximum, il suffit de démontrer l'inégalité (13) sur la frontière de S . Notons d'abord que lorsque $r = |z| < 1$, l'évaluation

(14) $$|f(z)-(c_0+c_1z+\ldots+c_nz^n)| \leqslant |\sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_\nu z^\nu| \leqslant C \frac{r^{n+1}}{1-r}$$

est valable. Considérons à présent les différentes parties de la frontière de S :

1) Au point $z = 0$, $g_n(0) = c_{n+1} |z_1|^2 = c_{n+1}$, d'où $|g_n(0)| \leqslant C$.

2) Sur le segment rectiligne ouvert qui joint les points 0 et z_1 , c'est-à-dire quand $\theta = \theta_1$ et $0 < r < 1$, les évaluations $|z-z_1| = 1-r$ et $|z-\bar{z}_1| \leqslant 2$ sont valables, et donc, à l'aide de (14),

$$|g_n(z)| \leqslant C \frac{r^{n+1}}{1-r} . \frac{2(1-r)}{r^{n+1}} = 2C .$$

Vu la symétrie, cette même estimation est valable sur le segment rectiligne joignant le point 0 au point $\bar{z}_1$.

3) $g_n(z_1) = g_n(\bar{z}_1) = 0$.

Avant d'aller plus loin, notons que quand $1 \leqslant r \leqslant A$, nous avons

(15) $$|f(z)-(c_0+c_1z+\ldots+c_nz^n)| \leqslant B + C|1+z+\ldots+z^n| \leqslant B + C \frac{r^{n+1}-1}{r-1} .$$

4) Soit $1 < r < A$. Si $\theta = \theta_1$, nous avons $|z-z_1| = r-1$ et $|z-\bar{z}_1| \leqslant 2A$, tandis que si $\theta=-\theta_1$, nous avons $|z-z_1| \leqslant 2A$ et $|z-\bar{z}_1| = r-1$. Dans les deux cas, à l'aide de (15), nous arrivons à l'estimation

$$|g_n(z)| \leqslant (B + C\,\frac{r^{n+1}}{r-1})\,\frac{2A(r-1)}{r^{n+1}} \leqslant 2AB + 2AC\ .$$

5) Enfin, soit $r=A$ et $-\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_1$. Dans ce cas $|z-z_1| \leqslant 2A$, $|z-\overline{z}_1| \leqslant 2A$ et par conséquent, toujours d'après (15),

$$|g_n(z)| \leqslant (B + C\,\frac{A^{n+1}}{A-1})\,\frac{4A^2}{A^{n+1}} \leqslant 4A^2(B + \frac{C}{A-1})\ .$$

Il est clair que l'estimation (13) et en même temps le théorème lui-même sont ainsi entièrement démontrés.

Zygmund {47,p.91-96 ; 49,chap.IX,(5.7) et (9.21),p.338 et 368} a donné des démonstrations totalement différentes du théorème de Fatou et des extensions que lui a données Riesz. Ces démonstrations reposent sur ce qu'on appelle le principe des localisations de Riemann et sur les raffinements de ce principe fournis par Zygmund et Rajchman, raffinements qui ont joué un rôle important dans les considérations signalées au paragraphe précédent. Auparavant Neder ({31}) avait déjà communiqué des résultats semblables à propos du théorème de Fatou-Riesz.

On peut énoncer en gros le problème d'Abel qui figure dans le titre de l'article [8] de la façon suivante : Soit f analytique dans le domaine T . Supposons que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(z)$ pour tout $z\in T$, et que $f(z)$ tend vers la valeur limite $f(z_0)$ quand z converge vers le point z_0 de T . Est-il vrai que $f(z_0)$ soit égal à $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(z_0)$? A ce propos, Riesz a énoncé le théorème suivant : Soit $R > 1$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ et S l'ensemble fermé défini par les inégalités $|z| \leqslant R$, $\alpha \leqslant \arg(z-1) \leqslant 2\pi-\alpha$. Si f est continue sur l'ensemble S et régulière en tout point de S à l'exception de $z=1$, la série de puissances (12) de f convergente dans $|z| < 1$ est aussi uniformément convergente sur le cercle $|z| = 1$, et en particulier $f(1) = \Sigma\, c_n$. Mittag-Leffler ({29}) croyait que le théorème n'était valable que si f satisfaisait à la condition de Lipschitz. Le livre de Landau {27,§ 12} mentionne une démonstration simple de ce théorème (démonstration attribuée à Hardy), selon laquelle, sous les conditions données, nc_n tend vers zéro quand

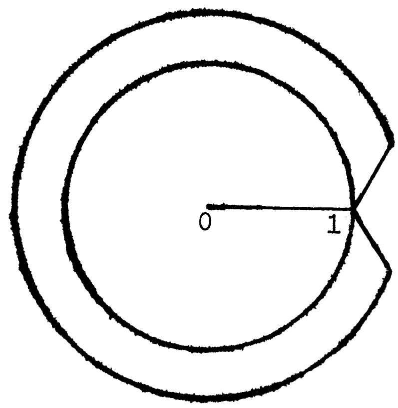

Figure 2

n croît indéfiniment. La thèse découle de là sur la base d'une variante simple ({27,§ 11})du "petit" théorème de Tauber.

3. *Séries de Dirichlet et les moyennes typiques* [4,5,6,9,11,13,17,22,27,29,30]. Le premier résultat vraiment important de Marcel Riesz, qui a du même coup rendu son nom célèbre et lui a valu l'amitié de Hardy, est lié également à une observation de Fejér. La série

(16) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

est convergente pour les valeurs $\operatorname{Re} s > 1$ et sa somme y est fonction analytique de la variable complexe s : c'est la fonction zêta de Riemann désignée par $\zeta(s)$. La fonction ainsi définie peut être prolongée dans tout le plan, à l'exception du point $s = 1$, où elle a un pôle simple.Or, Fejér s'est aperçu que la série (16) n'est sommable en aucun point de la droite $\operatorname{Re} s = 1$ par la méthode de Cesaro (quel que soit l'ordre k). Il fallait donc trouver une méthode telle que (16) soit sommable pour la valeur $\zeta(s)$ en n'importe quel point $s \neq 1$ de la susdite droite.

Plus généralement, considérons la série de Dirichlet

(17) $$\sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s} ,$$

où

$$0 \leqslant \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$$

est une suite croissante de nombres réels qui tend vers l'infini ; nous désignerons cette suite par λ et l'appellerons type de la série (17). Ainsi, le type de la série (16) est $(\log n)$, tandis qu'une série de puissances rentre dans la catégorie des séries de Dirichlet de type (n) par la substitution $z = e^{-s}$. C'est pour la sommabilité de ce genre de séries que Riesz a introduit les moyennes typiques.

Soit

(6) $$u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots$$

une série infinie, $k > 0$ et $0 < \omega < \infty$ un nombre réel. Construisons les sommes

(18) $$R(\omega;\lambda,k) = \sum_{\lambda_j \leqslant \omega} (1 - \frac{\lambda_j}{\omega})^k u_j .$$

Si (18) tend vers une valeur limite finie h quand $\omega \to \infty$, on dira que (6) est sommable vers h par la méthode de Riesz de type $\lambda = (\lambda_n)$, de puissance k . Dans le cas où $\lambda_j = j$, nous obtenons pour la valeur $\omega = n+1$ la somme

$$R_n(k) = R(n+1;(j),k) = \sum_{j=0}^{n} \left(1 - \frac{j}{n+1}\right)^k u_j$$

qui est visiblement semblable à la formule (9) de la moyenne de Cesaro $C_n^{(k)}$. Cependant, comme nous allons le voir, il est essentiel, avec la méthode de Riesz, que le paramètre ω tende vers l'infini de façon continue et non discrète.

Quand $k = 1$, pour la valeur $\omega = \lambda_n$,

$$R(\lambda_n;\lambda,1) = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} (\lambda_n - \lambda_j)\, u_j}{\lambda_n} = \frac{\sum_{j=0}^{n-j} (\lambda_{j+1} - \lambda_j)\, s_j}{\lambda_n} ,$$

où, comme jusqu'ici, $s_j = u_0 + \ldots + u_j$. Si en plus $\lambda_j = j$, alors nous obtenons les moyennes

$$R_n(1) = \frac{(n+1)u_0 + nu_1 + \ldots + u_n}{n+1} = \frac{s_0 + \ldots + s_n}{n+1} ,$$

c'est-à-dire $C_n^{(1)}$.

Pour pouvoir comparer les moyennes de puissances différentes de l'unité, introduisons les sommes

$$(19) \qquad T(\omega;\lambda,k) = \sum_{\lambda_j \leqslant \omega} (\omega - \lambda_j)^k u_j .$$

Dans le cas de $k = 0$, nous obtenons la fonction "compteuse" $\sum_{\lambda_j \leqslant \omega} u_j$, que nous désignerons simplement par $T_\lambda(\omega)$. Cela nous premet d'écrire (19) sous la forme

$$T(\omega;\lambda,k) = \int_0^\omega (\omega-\tau)^k \, dT_\lambda(\tau) = k \int_0^\omega (\omega-\tau)^{k-1} \, T_\lambda(\tau)\, d\tau .$$

Sauf pour un facteur constant, cette dernière intégrale est justement l'intégrale d'ordre fractionnaire

$$(I^k f)(\omega) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^\omega (\omega-\tau)^{k-1} f(\tau)\, d\tau$$

de Riemann-Liouville : c'est ici que nous rencontrons pour la première fois ce concept de Marcel Riesz qui tiendra une place cruciale dans ses travaux ultérieurs. On sait - et il est facile de prévoir - que $I^k(I^h f) = I^{k+h} f$ et que pour k entier $I^k f$ est l'intégrale itérée k fois de la fonction f . Grâce à l'égalité $k\,\Gamma(k) = \Gamma(k+1)$, nous obtenons les formules

$$T(\omega;\lambda,k) = \Gamma(k+1)\ (I^k T_\lambda)(\omega)$$

et

$$R(\omega;\lambda,k) = \frac{\Gamma(k+1)}{\omega^k}\ (I^k T_\lambda)(\omega)\ .$$

D'autre part, sur la base de la formule de Stirling {35,t.I,p.543},

$$\lim_{n\to\infty} n^{-k}\ E_n^{(k)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(k+1)\ n!\ n^k} = \frac{1}{\Gamma(k+1)}$$

et ainsi la formule (8) définissant les moyennes de Cesaro d'ordre k peut être remplacée par l'expression

$$C_n^{(k)} = \frac{\Gamma(k+1)}{n^k}\ S_n^{(k)}\quad :$$

nous pouvons comparer en gros les formules obtenues en disant que Riesz fait intervenir l' "intégrale d'ordre k de la somme partielle", tandis que chez Cesaro on trouve l' "itéré d'ordre k de la somme partielle". Cela nous premet de penser que la méthode de sommation de Cesaro d'ordre k équivaut à la sommation de Riesz de puissance k et de type $\lambda = (j)$, c'est-à-dire que (6) est sommable par l'une des méthodes s'il est sommable par l'autre, et que les deux sommes sont les mêmes. Cette affirmation est vraie ([9]), mais sa démonstration est assez compliquée ({20,§ 5.16, p.113 ; 18}).

Soit (p_j) une suite de nombres strictement positifs (c'est-à-dire $p_j > 0$), et supposons qu'avec la notation

$$P_n = p_0 + p_1 + \dots + p_n$$

nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{P_n} = 0\ . \tag{20}$$

Nous appelons les quotients

$$N_n(p) = \frac{p_n s_0 + p_{n-1} s_1 + \dots + p_0 s_n}{P_n} = \frac{P_n u_0 + P_{n-1} u_1 + \dots + P_0 u_n}{P_n}$$

moyennes de Voronoi-Nörlund de la série (6), et la valeur limite pour $n \to \infty$ de la suite $(N_n(p))$ - si tant est qu'elle existe - somme de la série (6) pondérée par les poids (p_j) ; dans ce cas nous dirons simplement que la série (6) est $N(p)$-sommable. Par exemple, la suite $C_n^{(k)}$ des moyennes de Cesaro d'ordre k est une suite de moyennes de Voronoi-Nörlund, où

$$p_j = \binom{j+k-1}{j} .$$

Autre exemple : la suite $R_n(k)$, où $P_n = (n+1)^k$.

Considérons, en plus des moyennes $N_n(p)$, une suite de moyennes de Voronoi-Nörlund $N_n(q)$ définie par les poids $q = (q_j)$. Notons que, par suite de (20) et de l'hypothèse analogue concernant la suite q , les séries $\Sigma\, p_n x^n$, $\Sigma\, P_n x^n$, $\Sigma\, q_n x^n$ et $\Sigma\, Q_n x^n$ convergent quand $|x| < 1$. Définissons les suites (k_j) et (ℓ_j) par les égalités

$$\frac{\Sigma\, q_j x^j}{\Sigma\, p_j x^j} = \frac{\Sigma\, Q_j x^j}{\Sigma\, P_j x^j} = \Sigma\, k_j x^j$$

et

$$\frac{\Sigma\, p_j x^j}{\Sigma\, q_j x^j} = \frac{\Sigma\, P_j x^j}{\Sigma\, Q_j x^j} = \Sigma\, \ell_j x^j .$$

Riesz ([20]) démontre ({20,§ 4.3-4})le théorème suivant, qui dérive de façon relativement simple du théorème des valeurs limites de Toeplitz ({35,t.I,p.549,§ 308} :

Pour que toute série $N(p)$*-sommable soit* $N(q)$*-sommable, il faut et il suffit, d'une part, que la suite*

$$\frac{|k_0|\, P_n + |k_1|\, P_{n-1} + \dots + |k_n|\, P_0}{Q_n}$$

soit bornée, d'autre part, qu'il y ait la relation

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{Q_n} = 0 .$$

D'où il s'ensuit aisément que :

Pour que les méthodes de sommabilité $N(p)$ *et* $N(q)$ *soient équivalentes, il faut et il suffit que* $\Sigma\, |k_n| < \infty$ *et que* $\Sigma\, |\ell_n| < \infty$.

Soit à présent $k = 2$; comparons les moyennes $C_n^{(2)}$ et $R_n(2)$. Nous avons $P_j = E_j^{(2)}$, $Q_j = (j+1)^2$ et

$$\Sigma\, Q_j x^j = \Sigma\, (j+1)^2 x^j = x\, \Sigma\, (j+1) j x^j + \Sigma\, (j+1) x^j =$$

(21) $$\frac{2x}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1+x}{(1-x)^3} = (1+x)\ \Sigma\ E_j^{(2)}\ x^j\ ,$$

c'est-à-dire que $k_0 = k_1 = 1$, $k_j = 0$ si $j \geqslant 2$ et $\ell_j = (-1)^j$. Ainsi $\Sigma|k_j|<\infty$, mais $\Sigma|\ell_j|=\infty$, et les deux méthodes ne sont pas équivalentes : il ressort de là que les moyennes de Riesz se comportent tout à fait autrement si ω tend vers l'infini suivant les valeurs 1,2,... et non de façon continue. Nous pouvons dire plus précisément que toute série $C^{(2)}$-sommable est $R(2)$-sommable, mais que la réciproque n'est pas vraie. Nous en avons un exemple concret dans la suite d'égalités

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2\ R_n(2)\ x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{n} (n+1-j)^2\ u_j \Big)\ x^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2\ x^n\ .\ \sum_{j=0}^{\infty} u_j\ x^j = \frac{1+x}{(1-x)^3} \sum_{j=0}^{\infty} u_j x^j = (1+x) \sum_{j=0}^{\infty} S_j^{(2)}\ x^j$$

qui n'est autre que (21) quand $u_0=1,\ u_1=u_2=\ldots=0$. Choisissons maintenant les termes u_j de façon que

$$\sum_{j=0}^{\infty} u_j\ x^j = \frac{1-x}{(1+x)^3}\ ,$$

c'est-à-dire que $u_j = (-1)^j\ (j+1)^2$. Nous avons alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2\ R_n(2)\ x^n = \frac{1}{(1-x^2)^2} = 1+2x^2+3x^4+\ldots$$

et ainsi $R_n(2) \to 0$ quand $n \to \infty$. Mais la série Σu_j n'est pas sommable par la méthode $C^{(2)}$, car il faudrait que $j^{-2}u_j$ tende vers zéro ({20,p.102}).

De même que pour (21), nous avons, pour $k=3$,

$$\Sigma\ (j+1)^3\ x^j = \frac{1+4x+x^2}{(1-x)^4} = (1+4x+x^2)\ \Sigma\ E_j^{(3)}\ x^j\ .$$

Puisque le polynôme $1+4x+x^2$ s'annule au point $x = -2+\sqrt{3}$ à l'intérieur du disque unité, la série $\Sigma|\ell_j|$ correspondant à ce cas diverge également.

Riesz rappelle encore ([29]) que lorsque $-1 < k \leqslant 1$, les méthodes $C^{(k)}$ et $R(k)$ discret sont équivalentes, et que cela est une conséquence du théorème d'Eneström-Kakeya ({32,t.I,p.88,III.22}).

Marcel Riesz a découvert en 1909 la méthode qui porte son nom, mais il n'en a fourni des discussions détaillées que dans le livre [17] écrit en collaboration avec Hardy et paru en 1915. La première guerre mondiale faisait déjà rage. Riesz était encore de nationalité hongroise, et il fut affecté comme officier de réserve à l'ambassade d'Autriche-Hongrie à Stockholm. C'est ainsi que les deux auteurs associés se trouvèrent dans des camps ennemis, et le très pacifiste Hardy dédia le livre - en plein milieu de la frénésie guerrière - à la fraternité des mathématiciens "où qu'ils soient".

Riesz est revenu encore deux fois sur la théorie générale de sa méthode de sommation : une fois dans sa lettre à Hardy déjà mentionnée ([29]), une autre fois dans l'un des trois articles [27] parus dans le premier volume des *Acta* de Szeged. Dans cet article figure à nouveau l'intégrale de Riemann-Liouville

$$\Phi_\alpha(x) = (I^\alpha\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t)\, dt ,$$

où $\alpha > 0$ et φ est une fonction mesurable définie pour les valeurs $x \geqslant 0$, fonction bornée dans les intervalles finis. Le théorème des valeurs moyennes figurant dans le titre de l'article est le suivant :

Soit $0 < \alpha < 1$, $0 \leqslant \xi < x$ *et*

$$g(x,\xi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\xi (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t)\, dt .$$

Il existe alors une valeur τ *pour laquelle* $0 \leqslant \tau < \xi$ *et* $g(x,\xi) = \Phi_\alpha(\tau)$.

Une affirmation moins forte figure déjà dans le livre de Hardy-Riesz [17,p.28, lemme 7]. La démonstration repose sur l'identité un peu délicate

$$g(x,\xi) = - \int_0^\xi \Phi_\alpha(v)\, M'(v)\, dv ,$$

où

$$M(v) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)} \int_v^\xi (x-t)^{\alpha-1} (t-v)^{-\alpha}\, dt .$$

en outre

Comme $M(\xi) = 0$, il existe $0 \leqslant \tau_1 \leqslant \xi$ d'après le premier théorème des valeurs moyennes du calcul intégral, de sorte que $g(x,\xi) = \Phi_\alpha(\tau_1)\, M(0)$, et comme $0 < M(v) < 1$, il existe $0 < \tau < \tau_1$ de sorte que $\Phi_\alpha(\tau_1)\, M(0) = \Phi_\alpha(\tau)$.

De ce théorème des valeurs moyennes ont découlé beaucoup de raffinements de théorèmes déjà connus, de Harald Bohr, Hardy-Littlewood et d'autres, ainsi que de nombreux nouveaux résultats. Je donnerai pour exemple de ces derniers le théorème suivant :

Soient V *et* W *des fonctions croissantes définies pour les valeurs* $\omega > 0$ *. Supposons que*

$$|T_\lambda(\omega)| \leqslant V(\omega) \quad et \quad |T(\omega;\lambda,k)| \leqslant W(\omega).$$

Alors, pour tout nombre $0 \leqslant j \leqslant k$ *, il existe un* $C > 0$ *indépendant de* ω *, qui ne dépend que de* j *et de* k *et pour lequel*

$$|T(\omega;\lambda,j)| \leqslant C\ (V(\omega))^{1-\frac{j}{k}}\ (W(\omega))^{\frac{j}{k}}$$

pour tout ω *positif.*

Ce théorème dit pour l'essentiel que $\log T(\omega;\lambda,j)$ est fonction convexe de la variable j , et c'est pourquoi certains auteurs l'appellent "théorème de convexité de Marcel Riesz", comme par exemple Irwin et Peyerimhoff, qui l'ont généralisé ({22}). Cependant, c'est un autre théorème, discuté au paragraphe 9 et concernant les opérateurs linéaires, qu'on a l'habitude d'appeler "théorème de convexité".

Du théorème que nous venons de voir découle entre autres un théorème démontré par d'autres voies par Hardy et Littlewood en 1917 : Si la série (6) est sommable dans une puissance ou dans une autre par la méthode de Riesz de type λ , et si pour un k les moyennes $R(\omega;\lambda,k)$ de puissance k sont bornées, la série est sommable pour toute puissance supérieure à k par la méthode de type λ ({8,p.19,corollaire 1.71}).

Les prolongements les plus intéressants des résultats de Marcel Riesz se trouvent dans un ouvrage d'Ananda-Rau {2}, couronné en 1918 à Cambridge par le prix Smith, mais paru seulement en 1932. Parmi ces prolongements, l'un est que si $(\lambda_n-\lambda_{n-1})^{-1}\lambda_n u_n$ est borné et si (6) est $R(\omega;\lambda,k)$-sommable pour tout k , la série (6) est convergente. En observant que pour le cas où $\lambda_n = n$ les méthodes de Riesz et de Cesaro sont équivalentes, nous retrouvons immédiatement l'observation de Fejér mentionnée au début.

Le livre de Chandrasekharan et Minakshisundaram {8} englobe toutes les recherches poursuivies jusqu'en 1951 sur la méthode de sommabilité de Riesz ; on trouve chez Zeller {46} un tableau assez complet de la littérature sur ce sujet jusqu'en 1955. De nombreux articles parus jusqu'à ce jour traitent de ce sujet, et j'en ai énuméré un certain nombre parmi les plus récents dans mes notes bibliographiques {11 ; 23 ; 25 ; 26 ; 30 ; 43}. Il est intéressant de considérer ce qu'on appelle les moyennes de Cesaro généralisées ({6}), que définit, par l'analogie de (9) à un type $\lambda = (\lambda_j)$, l'égalité

$$C(n;\lambda,k) = \sum_{j=0}^{n} \left(1-\frac{\lambda_j}{\lambda_{n+1}}\right)\ldots\left(1-\frac{\lambda_j}{\lambda_{n+p}}\right)\left(1-\frac{\lambda_j}{\lambda_{n+p+1}}\right)^{\delta} u_j \;,$$

où $k = p+\delta$, p est entier et $0 \leqslant \delta < 1$. Le lien entre les méthodes $C(n;\lambda,k)$ et $R(\omega;\lambda,k)$ n'a pas encore été clairement établi.

Une autre direction de recherche intéressante et forte est la sommation de Riesz introduite en 1951 par Boyd et Hyslop. Soit $0 < p < \infty$, $k > -\frac{1}{p}$ et, comme toujours, $\lambda = (\lambda_n)$; la série (6) est sommable avec l'indice p , l'ordre k et le type λ pour le nombre s si

$$\frac{1}{\omega^{kp+1}} \int_0^{\omega} |T(\omega;\lambda,k) - s\omega^k|^p \, d\omega$$

tend vers zéro quand $\omega \to \infty$. Cette méthode non linéaire a été utilisée par Richert dans la théorie des nombres. Nous en trouvons un exposé exhaustif dans les articles de Glatfeld {19} et Warlimont {45}.

Les chapitres V, VI et VII du livre de Hardy et Riesz [17] traitent des applications aux séries de Dirichlet de forme (17) des moyennes typiques. Le théorème le plus simple concernant ce genre de séries ([17,p.3,théorème 1]) énonce que si (17) converge au point $s_0 = \sigma_0 + it_0$, elle converge uniformément pour tout nombre $\varepsilon > 0$ dans le demi-plan $\{s=\sigma+it \; ; \; \sigma > \sigma_0+\varepsilon\}$. Il s'ensuit immédiatement qu'il existe un nombre réel σ_0 , qui peut cependant être $+\infty$ ou $-\infty$, tel que (17) converge en tout point $s = \sigma+it$ pour lequel $\sigma > \sigma_0$, et diverge en tout point $s = \sigma+it$ pour lequel $\sigma < \sigma_0$. Le cercle de convergence de la théorie des séries de puissances correspond ici à un demi-plan de convergence, qui, dans le cas où $\sigma_0 = -\infty$, est le plan tout entier, et, dans le cas où $\sigma_0 = +\infty$, est l'ensemble vide. Nous appelons le nombre σ_0 abscisse de convergence de la série (17).

Je voudrais éclairer par deux observations la différence des comportements des séries de puissances et des séries de Dirichlet. On sait qu'il y a au moins un point singulier sur le bord du cercle de convergence de la fonction représentée par une série de puissances. Par contre, si σ_0 est l'abscisse de convergence finie de la série (17) et si la fonction analytique $f(s)$ est la somme de (17) pour $\sigma > \sigma_0$, $f(s)$ n'a pas nécessairement de singularité sur la droite $\sigma = \sigma_0$. Ainsi la série

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\, n^{-s}$ représente la fonction entière $(1-2^{1-s})\zeta(s)$, mais son abscisse de convergence est $\sigma_o = 0$. L'autre différence des comportements des séries de puissances et des séries de Dirichlet se manifeste dans la convergence absolue des séries. Une série de puissances est absolument convergente en tous points de l'intérieur du cercle de convergence. Pour une série de Dirichlet on peut trouver un nombre réel $\bar{\sigma}$ (qui cette fois encore peut être $+\infty$ ou $-\infty$) tel que, en tout point $s = \sigma+it$ pour lequel $\sigma > \bar{\sigma}$, la série est absolument convergente et que, en tout point pour lequel $\sigma < \bar{\sigma}$, la série n'est pas absolument convergente ([17,p.8,théorème 8]). Il est clair que $\sigma_o \leqslant \bar{\sigma}$, mais il peut arriver aussi que $\sigma_o < \bar{\sigma}$. Ainsi,

$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n}\, n^{-1/2}\, (\log n)^{-s}$ est convergente en tout point du plan, mais n'est absolument convergente en aucun point.

De la même façon, pour l'abscisse de convergence il existe pour tout nombre $k > 0$ un nombre σ_k $(-\infty \leqslant \sigma_k \leqslant \infty)$ tel que pour tout nombre $s = \sigma+it$, pour lequel $\sigma > \sigma_k$, la série (17) est sommable par la méthode $R(\omega;\lambda,k)$, alors que pour un nombre s , pour lequel $\sigma < \sigma_k$, la série n'est pas sommable par la méthode $R(\omega;\lambda,k)$ ([17,p.43,théorème 26], {8,p.56,théorème 3.33}). Le nombre σ_k est fonction décroissante de k : cela découle du théorème de Hardy et Riesz appelé *first theorem of consistency* , qui établit que si la série (6) est sommable vers h par la méthode de Riesz d'ordre k et de type λ , pour tout nombre $k' \geqslant k$ la série est aussi sommable vers h par la méthode d'ordre k' et de type λ ([17,p.29,théorème 16] , {8,p.9,théorème 1.51}). Le théorème dit *second theorem of consistency* compare les méthodes de sommation de divers types ({8,chap.II}). Pour le cas où $\lambda_n = \log n$, Hardy et Riesz démontrent ([17,p.58,théorème 49]) que,si $k' \geqslant k > 0$, on a $\sigma_k \leqslant \sigma_{k'}+(k'-k)$, c'est-à-dire $\sigma_k-(k'-k) \leqslant \sigma_{k'} \leqslant \sigma_k$. Pour le type général et pour la sommabilité absolue, des résultats analogues sont valables ({8,p.63,3.4}). Un important groupe de théorèmes établit des relations entre l'ordre de sommabilité et la croissance de la fonction représentée par la série.

Dans l'article mentionné en [22], Marcel Riesz étend aux séries de Dirichlet le cercle de problèmes liés au théorème de Fatou et étudiés au paragraphe précédent. Le résultat le plus important de l'article est le suivant :

Soit $c > 0$ *et supposons que la série (17) satisfait à la condition*

$$(22) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{d_0 e^{\lambda_0 c} + d_1 e^{\lambda_1 c} + \ldots + d_n e^{\lambda_n c}}{e^{\lambda_n c}} = 0 .$$

Dans ce cas (17) converge dans le demi-plan $\sigma > 0$ et représente une fonction $f(s)$ régulière. Si $f(s)$ est régulière au point $s=it$ de l'axe imaginaire, (17) converge en ce point vers $f(s)$. Si $f(s)$ est régulière en tout point d'un segment fermé de l'axe imaginaire, (17) est uniformément convergente sur ce segment.

Notons que si (17) converge en un point de la droite $\sigma = 0$, (22) est satisfait. Supposons que la série $\sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-i\lambda_n t}$ converge. Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe un nombre entier N tel que

$$|d_N e^{-i\lambda_N t} + \ldots + d_n e^{-i\lambda_n t}| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour} \quad n \geqslant N .$$

Soit $n \geqslant N$,

$$S_1 = \sum_{j=0}^{N-1} d_j e^{\lambda_j c} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{j=N}^{n} d_j e^{\lambda_j c} .$$

Comme λ_n tend vers l'infini, il est clair que $|S_1| e^{-\lambda_n c} \to 0$ quand $n \to \infty$. Par la transformation d'Abel ({35,t.I,p.222,§144}), nous obtenons

$$S_2 = \sum_{j=N}^{n-1} (d_N e^{-i\lambda_N t} + \ldots + d_j e^{-i\lambda_j t})(e^{\lambda_j (c+it)} - e^{\lambda_{j+1}(c+it)}) + (d_N e^{-i\lambda_N t} + \ldots + d_n e^{-i\lambda_n t})\, e^{\lambda_n (c+it)} .$$

Maintenant

$$e^{\lambda_j (c+it)} - e^{\lambda_{j+1}(c+it)} = - \int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}} (c+it) e^{(c+it)\lambda}\, d\lambda ,$$

et ainsi ([17,p.3,lemme 2])

$$|e^{\lambda_j (c+it)} - e^{\lambda_{j+1}(c+it)}| \leqslant |c+it| \int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}} e^{c\lambda}\, d\lambda = \frac{|c+it|}{c} (e^{\lambda_{j+1} c} - e^{\lambda_j c}) .$$

D'où il suit que

$$|S_2| \leqslant \varepsilon \frac{|c+it|}{c} (e^{\lambda_n c} - e^{\lambda_N c}) + \varepsilon e^{\lambda_n c}$$

et que

$$|S_2| e^{-\lambda_n c} \leqslant (\frac{|c+it|}{c} + 1)\ \varepsilon \ .$$

La démonstration du théorème s'établit par la même méthode que j'ai esquissée au paragraphe précédent concernant le théorème de Fatou sur les séries de puissances. Plus tard, Agmon a appliqué la même méthode au problème des moments et à l'approximation polynomiale pondérée ({1}).

Dans le cas où $\lambda_n = n$, en posant $z = e^{-s}$, la série de Dirichlet (17) n'est autre que la série de puissances (12), et, en posant $R = e^c > 1$, la condition (22) n'est autre que la condition

(23) $$\lim_{n\to\infty} \frac{c_0 + c_1 R + \dots + c_n R^n}{R^n} = 0 \ .$$

Si nous démontrons que (23) découle de la condition $c_n \to 0$, le théorème de Fatou relatif aux séries de puissances sera en réalité un cas particulier du théorème relatif aux série de Dirichlet. Supposons donc que $c_n \to 0$, et soit $R > 1$. Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe un nombre entier N tel que $|c_n| \leqslant \varepsilon$ quand $n \geqslant N$. Nous avons alors, pour $n \geqslant N$,

$$\frac{|c_0+c_1R+\dots+c_nR^n|}{R^n} \leqslant \frac{|c_0+\dots+c_{N-1}R^{N-1}|}{R^n} + \varepsilon \frac{R^N+\dots+R^n}{R^n} \leqslant$$

$$\frac{|c_0+\dots+c_{N-1}R^{N-1}|}{R^n} + \varepsilon \frac{R}{R-1} \leqslant (1 + \frac{R}{R-1})\ \varepsilon \ ,$$

si n est assez grand.

La proposition contraire est aussi valable dans le cas des séries de Dirichlet. Supposons en effet que la condition (22) est remplie, et soit $\varepsilon > 0$. Nous avons alors, pour n assez grand :

$$|d_0 e^{(\lambda_0-\lambda_n)c} + d_1 e^{(\lambda_1-\lambda_n)c} + \dots + d_n| \leqslant \varepsilon$$

et

$$|d_0 e^{(\lambda_0-\lambda_{n-1})c} + d_1 e^{(\lambda_1-\lambda_{n-1})c} + \ldots + d_{n-1}| \leqslant \varepsilon \ .$$

Puisque $0 < e^{(\lambda_{n-1}-\lambda_n)c} < 1$, il est d'autant plus vrai que

$$|d_0 e^{(\lambda_0-\lambda_n)c} + d_1 e^{(\lambda_1-\lambda_n)c} + \ldots + d_{n-1} e^{(\lambda_{n-1}-\lambda_n)c}| \leqslant \varepsilon \ ,$$

et, par une soustraction, nous arrivons à l'inégalité $|d_n| \leqslant 2\varepsilon$.

Dans son article, figurant en [30] , Marcel Riesz étend aux séries de Dirichlet les généralisations du théorème de Fatou qui ont rapport avec la sommabilité de Cesaro de la série des puissances. Avant de communiquer les résultat de l'article en question, je voudrais noter que la méthode de sommabilité de Riesz est applicable, à la place des séries infinies, aux intégrales du type

$$(24) \qquad \int_0^\infty u(t)\ dt$$

([17,p.23]). Soit $k \geqslant 0$, et λ la fonction continue strictement croissante de la variable $t \geqslant 0$, où $\lambda(0) = 0$ et $\lambda(t) \to \infty$ quand t tend vers l'infini. Les moyennes de Riesz d'ordre k et de type λ de l'intégrale (24) sont définies par

$$(25) \qquad R(\omega;\lambda,k) = \frac{1}{\omega^k} \int_{\lambda(t)\leqslant\omega} (\omega-\lambda(t))^k\, u(t)\ dt \ .$$

Si nous introduisons la notation

$$T_\lambda(\omega) = \int_{\lambda(t)\leqslant\omega} u(t)\ dt \ ,$$

les moyennes de Riesz peuvent s'écrire sous la forme

$$R(\omega;\lambda,k) = \frac{1}{\omega^k} \int_0^\omega (\omega-\tau)^k\ dT_\lambda(\tau) = \frac{k}{\omega^k} \int_0^\omega (\omega-\tau)^{k-1}\ T_\lambda(\tau)\ d\tau$$

qui concorde parfaitement avec l'égalité obtenue dans le cas des séries. Dans le cas où $\lambda(t) \equiv t$, on appelle généralement les moyennes de Riesz moyennes de Cesaro de l'intégrale (24) ({20,p.110,§ 5.14}).

Nous pouvons considérer comme généralisation commune des séries infinies et des intégrales impropres l'intégrale de Stieltjes

$$\int_0^\infty u(t)\ dA(t)$$

et ses moyennes de Riesz de la forme

$$R(\omega;\lambda,k) = \frac{1}{\omega^k} \int_{\lambda(t)\leqslant\omega} (\omega-\lambda(t))^k\, u(t)\, dA(t) \ .$$

Riesz avait déjà communiqué dans les Comptes Rendus [6] en 1909 l'essentiel de ses résultats de [30]. Entre temps les travaux de Cramer {9}, Walfisz {44} et d'autres ont montré que ces résultats pouvaient avoir des applications dans la théorie des nombres, ce qui fait qu'au bout de quinze ans Riesz s'est enfin décidé à publier les démonstrations. L'article d'encyclopédie de Bohr et Cramer {5} donne une bonne idée de ces applications. Récemment Paul Turán a appliqué les moyennes typiques à l'évaluation de la fonction zêta de Riemann dans l'intervalle $\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\, s < 1$ ({42}) ; la formulation exacte et le schéma de la démonstration de son théorème figurent dans l'exposé détaillé de Schoenfeld dans le tome 15 des *Mathematical Reviews* (p.402).

J'en viens à l'exposé du [30]. Dans cet article Marcel Riesz considère les intégrales de Stieltjes de forme

$$\int_0^\infty e^{-st}\, dA(t) \tag{26}$$

et leurs moyennes $\omega^{-k} A_k(s,\omega)$ d'ordre k, où

$$A_k(s,\omega) = \int_0^\omega e^{-ts}(\omega-t)^k\, dA(t) \ .$$

Si $A(t) = d_0+d_1+\ldots+d_n$ quand $\lambda_n < t \leqslant \lambda_{n+1}$, et $A(t) = 0$ quand $0 \leqslant t \leqslant \lambda_0$, (26) rentre dans la série de Dirichlet (17). Introduisons la notation

$$A_k(\omega) = \int_0^\omega (\omega-t)^k\, dA(t)$$

et supposons que la condition

$$A_k(\omega) = o(e^{\omega c}\omega^k)$$

est satisfaite pour le nombre $c > 0$ quand $\omega \to \infty$. Alors (26) est uniformément sommable dans **tous** les domaines bornés du demi-plan $\mathrm{Re}\, s > c$ avec l'aide des moyennes d'ordre k, et, ainsi, il définit une fonction $f(s)$ holomorphe dans ce demi-plan. D'autre part, les énoncés suivants sont valables :

1) Si $f(s)$ est régulière en un point de la droite $\mathrm{Re}\, s = c$, les moyennes d'ordre k de (26) tendent, en ce point aussi, vers la valeur $f(s)$.

2) Supposons que $k = 0$ et que $f(s)$ est bornée à droite d'un segment de la droite $\mathrm{Re}\, s = c$. Alors (26) converge vers la valeur $f(s)$ en tous les points où la fonction limite existant presque partout sur le segment satisfait à une condition de Lipschitz. La condition de Lipschitz peut être remplacée par n'importe quelle

condition entraînant la convergence de la série de Fourier.

3) Soit $k > 0$ et $f(s)$ à nouveau bornée à droite d'un segment de $\mathrm{Re}\, s = c$. Dans ce cas les moyennes d'ordre k de (26) tendent vers $f(s)$ en presque tous les points du segment.

A chacun de ces énoncés correspond un énoncé semblable sur la convergence uniforme. Ainsi, par exemple, dans le cas 1) les moyennes tendent uniformément vers $f(s)$ sur tous les segments fermés où $f(s)$ est régulière.

La démonstration s'appuie sur le théorème auxiliaire suivant, qui, encore une fois, est prévisible par la méthode mentionnée au point précédent, concernant le théorème de Fatou :

Soit b une fonction intégrable sur la demi-droite $t \geqslant 0$, k un nombre réel. Supposons que $b(t) = o(t^k)$ quand $t \to \infty$, et soit $F(s)$ la fonction holomorphe dans le demi-plan $\mathrm{Re}\, s > 0$, représentée par l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-ts}\, b(t)\, dt$$

qui y est absolument convergente. En tout point ξ de l'axe imaginaire où F est régulière, la relation

$$e^{-\omega\xi}\, \frac{d^j}{d\xi^j}(e^{\omega\xi}F(\xi)) - \int_0^\omega e^{-t\omega}(\omega-t)^j\, b(t)\, dt = o(\omega^k)$$

est satisfaite pour n'importe quel nombre entier positif j.

Un théorème auxilaire analogue, concernant les séries de puissances, a été appliqué par Gábor Szegö ({36}) dans le cas $k=j=0$ et o à la place de O.

Dans sa lettre à Mittag-Leffler postée à Györ en date du 6 octobre 1910 - et mentionnée en [13] - Riesz applique aux séries de Dirichlet non pas sa propre méthode de sommation mais celle de Borel. Supposons que la série de puissances (12) est convergente dans un voisinage de l'origine des coordonnées et qu'elle y définit une fonction holomorphe $f(z)$. Nous entendons par étoile de Mittag-Leffler de la fonction $f(z)$ la frontière de l'ensemble des points z où $f(z)$ peut être prolongée analytiquement le long du segment de droite allant de 0 à z. Mittag-Leffler et d'autres ont défini plusieurs méthodes de sommation qui somment vers la valeur $f(z)$ la série (12) dans toute l'étoile ({20,p.77,§ 4.11 et p.190, § 8.10}). Riesz considère la série de Dirichlet (17) et lui transpose les notions mentionnées. Supposons que (17) converge dans n'importe quel demi-plan $\mathcal{H} = \{s \mid \mathrm{Re}\, s > c\}$ et qu'il y détermine ainsi une fonction $f(s)$ holomorphe. Riesz appelle étoile horizontale de la fonction $f(s)$ l'ensemble des points $s = \sigma + it$ pour lesquels

$f(s)$ peut être prolongée analytiquement le long du segment de droite allant du demi-plan $\mathcal{H}$ au point s, et parallèle à l'axe réel. Pour un nombre réel t, désignons par σ_t la borne inférieure des valeurs σ telles que $\sigma+it$ appartient à l'étoile horizontale de $f(s)$. Quand σ_t est finie, σ_t+it est la première singularité de $f(s)$, que nous rencontrons en allant depuis le demi-plan $\mathcal{H}$, vers la gauche le long de la droite $\operatorname{Im} s = t$. On appelle sommets de l'étoile les points σ_t+it ({3,p.184-192,n° 56-59 ; 5,p.759,n° 13}). Pour le nombre α positif, Riesz introduit les sommes Borel-Mittag-Leffler généralisées de la série (17) :

$$\varphi_\alpha(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n e^{-\lambda_n s}}{\Gamma(1+\alpha\lambda_n)}$$

et obtient, pour la fonction $f(s)$, l'intégrale

$$f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^v} \varphi_\alpha(s-\alpha v) e^v \, dv .$$

Il examine avec précision les cas où cette intégrale est valable, et il tire les conclusions que, d'une part, $\varphi_\alpha(s)$ tend vers la valeur $f(s)$ en tout point s de l'étoile horizontale quand $\alpha \to 0$, et ,d'autre part, que l'abscisse σ_t du sommet de l'étoile s'obtient par l'égalité

$$\sigma_t = \lim_{\alpha\to 0} \limsup_{\omega\to\infty} (\alpha \log^+ |\varphi_\alpha(-\omega+it)| - \omega)$$

où $\log^+ x = \max(0, \log x)$.

La méthode de sommation de Riesz joue un grand rôle dans la théorie des séries de Fourier à plusieurs variables. Soit f une fonction définie dans un espace $\mathbb{R}^n$ réel à n dimensions, intégrable dans le cube unité Q_n défini par $-\frac{1}{2} \leqslant x_j \leqslant \frac{1}{2}$, et périodique, c'est-à-dire que $f(x+m) = f(x)$, où $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $m = (m_1,\dots,m_n)$ est un "noeud de réseau" Z^n, c'est-à-dire que chaque composante m_j est un nombre entier. Les coefficients de la série de Fourier (complexe)

$$(27) \qquad \sum_m \gamma_m e^{2\pi i m.x}$$

de la fonction f sont donnés par

$$\gamma_m = \int_{Q_n} f(x)\, e^{-2\pi i m.x} dx ,$$

où $m.x = m_1x_1+\dots+m_nx_n$ et, dans la somme (27), m parcourt le réseau Z^n

Les moyennes de Riesz d'ordre k de la série (27) sont les sommes

(28) $$R(x,\omega;k) = \sum_{|m| \leqslant \omega} \left(1 - \frac{|m|^2}{\omega^2}\right)^k \gamma_m \, e^{2\pi i m.x} \quad ,$$

où $|m|$ est la longueur $(m_1^2+\ldots+m_n^2)^{1/2}$ du vecteur de réseau m . Bochner a démontré en 1936 ({4}) que, si $k > \frac{n-1}{2}$, les expressions (28) tendent vers la valeur $f(x)$ en presque tous les points x quand $\omega \to \infty$. C'est à cause de ce théorème qu'on appelle parfois les sommes (28) moyennes de Bochner-Riesz ; on utilise aussi l'expression "moyennes sphériques". Dans le cas où $n=1$, le théorème est équivalent au théorème mentionné à la fin du premier paragraphe.

Je voudrais rappeler ici que les moyens d'expression actuels de l'analyse harmonique éclairent bien les causes plus profondes de ce genre de théorèmes de sommation ({34,chap.VII}). Soit g une fonction intégrable dans tout l'espace $\mathbb{R}^n$ et

$$\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \xi.x} g(x)\, dx$$

la transformée de Fourier de g , où $\xi \in \mathbb{R}^n$ et $\xi.x = \xi_1 x_1+\ldots+\xi_n x_n$. Si nous supposons que, pour tout nombre $\alpha > 0$, g et $\hat{g}$ satisfont aux inégalités

(29) $$|g(x)| \leqslant C(1+|x|)^{-n-\alpha} \quad , \quad |\hat{g}(\xi)| \leqslant C(1+|\xi|)^{n-\alpha} \quad ,$$

la formule de Poisson

(30) $$\sum_{m \in Z^n} \hat{g}(m)\, e^{2\pi i m.x} = \sum_{m \in Z^n} g(x+m)$$

est vérifiée ({34,chap.VII,p.252,corollaire 2.6}). Considérons à présent une fonction φ pour laquelle $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = 1$, et désignons sa transformée de Fourier par Φ au lieu de $\hat{\varphi}$. Supposons que φ et Φ satisfont les inégalités analogues à (29). Soit, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$; nous avons alors $\hat{\varphi}_\varepsilon(\xi) = \Phi(\varepsilon\xi)$.

Désignons, d'autre part, par f_0 la fonction qui coïncide avec la fonction f dans le cube unité et qui est égale à zéro ailleurs. Nous avons $\gamma_m = \hat{f}_0(m)$, et si nous observons que, pour la convolution $\varphi_\varepsilon \star f_0$ définie par

$$(\varphi_\varepsilon \star \delta_0)(x) = \int_{Q_n} \varphi_\varepsilon(x-y)\,\delta(y)\,dy\ ,$$

la "formule d'échange"

$$(\varphi_\varepsilon \star \delta_0)^\wedge(\xi) = \Phi(\varepsilon\xi)\,\hat{\delta}_0(\xi)$$

est valable, nous obtenons, en la substituant au (30), l'identité

$$(31) \qquad \sum_{m \in Z^n} \Phi(\varepsilon m)\,\gamma_m\, e^{2\pi i m.x} = \sum_{m \in Z^n} (\varphi_\varepsilon \star \delta_0)(x+m)\ .$$

D'après (29), il est aisément prévisible que

$$\sum_{m \neq 0} (\varphi_\varepsilon \star \delta_0)(x+m)$$

tend vers zéro quand $\varepsilon \to 0$. D'autre part, φ_ε tend vers ce qu'on appelle le delta de Dirac quand $\varepsilon \to 0$, c'est-à-dire que $(\varphi_\varepsilon \star \delta_0)(x) \to \delta_0(x)$ en presque tout point x .

Soit à présent Φ la fonction de noyau Φ_k de Riesz déterminée par

$$(32) \qquad \Phi_k(\xi) = \begin{cases} (1-|\xi|^2)^k\ , & \text{si } |\xi| \leqslant 1\ , \\ 0\ , & \text{si } |\xi| > 1\ , \end{cases}$$

et soit $\omega = \frac{1}{\varepsilon}$; alors le côté gauche de (31) entre dans la moyenne de Riesz mentionnée au (28). D'autre part, nous avons $\Phi_k = \hat{\varphi}_k$, où

$$\varphi_k(x) = \frac{\Gamma(k+1)}{\pi^{k+1}}\,\frac{1}{|x|^{\frac{n}{2}+k}}\,J_{\frac{n}{2}+k}(2\pi|x|)$$

et J_υ désigne la fonction de Bessel d'ordre υ . Comme $|J_\upsilon(t)| \leqslant Ct^{-1/2}$ quand $t \to \infty$, la formule (29) est valable quand $\frac{n}{2} + k + \frac{1}{2} > n$, c'est-à-dire quand $k > \frac{n-1}{2}$.

Un résultat analogue est obtenu pour l'intégrale de Fourier d'une fonction $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$: si $k > \frac{n-1}{2}$ les moyennes

$$\int_{|\xi| \leqslant \omega} \left(1 - \frac{|\xi|^2}{\omega^2}\right)^k \hat{g}(\xi)\, e^{2\pi i \xi.x}\, d\xi$$

tendent vers la valeur $g(x)$ en presque tout point $x \in \mathbb{R}^n$ ({34,p.170}). D'une manière voisine se pose le problème de savoir quand les fonctions-noyaux de Riesz vues en (32) sont des multiplicateurs de Fourier. Soit μ une fonction mesurable bornée ; définissons pour la fonction f appartenant à l'espace $L^p(\mathbb{R}^n)$ l'opérateur T par la relation $(Tf)^\wedge = \mu \hat{f}$. Si T est une projection continue en lui-même de l'espace $L^p(\mathbb{R}^n)$, nous disons que μ est multiplicateur de Fourier regardant l'exposant p . A la question de savoir pour quelles valeurs p et k Φ_k sera multiplicateur de Fourier, les résultats obtenus jusqu'à présent - même très approfondis - n'ont pu donner qu'une réponse partielle ({13}). Utilisant les propriétés de multiplicateurs des noyaux de Riesz, Trebels a découvert de nouvelles classes de multiplicateurs de Fourier et en même temps généralisé en partie un résultat de Béla Szőkefalvi-Nagy ({37,39,40,41}).

Les moyennes de Riesz jouent un rôle dans l'approximation, surtout dans la théorie abstraite de Butzer et son école. Soit X un espace de Banach et $\{P_j\}$ une suite de projections de l'espace sur lui-même telle que $P_j P_k = 0$ si $j \neq k$. Nous supposons que, si le vecteur $f \in X$, pour tout indice j , satisfait à la condition $P_j f = 0$, nous avons $f = 0$. La série $\sum_j P_j f$ peut être considérée comme la série de Fourier abstraite du vecteur f , et la question qui se pose est de savoir si la série converge ou est sommable vers f . Le problème est trop général pour pouvoir être résolu, et c'est pourquoi on stipule d'ordinaire que pour n'importe quelle valeur de $k > 0$ les sommes de Riesz de la série à termes vecteurs satisfont à la condition

$$\| \sum_{j \leq \omega} \left(1 - \frac{j}{\omega}\right)^k P_j f \| \leq C \| f \|$$

({38,p.19 et 42}). Outre cette condition, on peut poser des conditions qui indiquent si la suite $\mu = (\mu_j)$ est ou non multiplicateur, c'est-à-dire s'il existe un $f^\mu \in X$ (nécessairement unique) qui satisfait pour tout j l'égalité $P_j f^\mu = \mu_j P_j f$ ({38}). Parmi les méthodes de sommation figurent les moyennes de Riesz de forme

$$R(\omega;\Lambda,k) = \sum_{j \leq \omega} \left(1 - \frac{\Lambda(j)}{\Lambda(\omega)}\right)^k P_j f ,$$

où Λ est une fonction strictement croissante définie sur la demi-droite $(0,\infty)$, fonction qui satisfait à des conditions précises ({38,p.57}). Pour ces moyennes Trebels démontre un théorème correspondant au *second theorem of consistency* ({38, p.47}). Des résultats semblables sont valables si nous remplaçons la série $\sum P_j f$ par une intégrale ({7}).

Enfin, Hörmander a utilisé les moyennes de Riesz pour étudier le comportement asymptotique des fonctions spectrales des opérateurs différentiels elliptiques ({21 ; MR 40 # 4618}).

TRAVAUX DE MARCEL RIESZ

[1] Megadott hatványsor folytatásának analitikai elöállitása (Math. Phys. Lapok, 16(1907), 1-25 ; 17(1908), 96-108).

[2] A hatványsor összegezhetösége az összetartási körön (Math.Term. Értesitö, 26 (1908), 221-229).

[3] Sur les séries trigonométriques (C.R.Acad.Sci.Paris, 145(1907), 583-586).

[4] Sur les séries de Dirichlet (C.R.Acad.Sci.Paris, 148(1909), 1658-1660).

[5] Sur la sommation des séries de Dirichlet (C.R.Acad.Sci.Paris, 149(1909), 18-21).

[6] Sur les séries de Dirichlet et les séries entières (C.R.Acad.Sci.Paris, 149 (1909), 909-912).

[7] Összegezhetö trigonometrikus sorok és összegezhetö hatványsorok (Math.Phys. Lapok, 19(1910), 1-56).

[8] Sur un problème d'Abel, extrait de deux lettres à M. G. Mittag-Leffler (Rend.Circ. Mat. Palermo, 30(1910), 339-345).

[9] Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques (C.R.Acad.Sci. Paris, 152(1911), 1651-1654).

[10] Über einen Satz des Herrn Fatou (J. reine angew. Math., 140(1911), 89-99).

[11] Megadott Dirichlet-sor folytatásának analitikai elöállitása (Math. Term. Értesitö, 29(1911), 283-301).

[12] Über summierbare trigonometrische Reihen (Math. Ann., 71(1912), 54-75).

[13] Sur la représentation analytique des fonctions définies par des séries de Dirichlet, lettre à M. Mittag-Leffler (Acta Math., 35(1912), 253-270).

[14] Formule d'interpolation pour la dérivée d'un polynôme trigonométrique (C.R.Acad. Sci. Paris, 158(1914), 1152-1154).

[15] Eine trigonometrische Interpolationsformel une einige Ungleichungen für Polynome (Jber. Deutsch. Math.-Verein., 23(1914), 354-368).

[16] Sammanfattende överblick över teorien för trigonometriska series, *Reports 3rd Scandinavian Math. Congress 1913,* Kristiania, 1915, p.107-127.

[17] *The general theory of Dirichlet's series* (avec G.H. Hardy), Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, N° 18, Cambridge University Press, 1915. Nouvelle édition 1952.

[18] Sur l'hypothèse de Riemann (Acta Math., 40(1916), 185-190).

[19] Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein, aus zwei Briefen an Herrn G. Mittag-Leffler (Acta Math., 40(1916), 337-347).

[20] Neuer Beweis des Fatouschen Satzes (Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, 1916, 62-65).

[21] Sätze über Potenzreihen (Ark. Mat. Astronom. och Fys., 11(1916-1917), N° 12, 16 p.).

[22] Ein Konvergenzsatz für Dirichletsche Reihen (Acta Math., 40(1916), 349-361).

[23] Über die Randwerte einer analytischen Fuktion (avec F. Riesz), *Quatrième Congrès des Mathématiciens Scandinaves, Stockholm 1916*, Uppsala(Almquist & Wiksells), 1920, p.27-44.

[24] Sur le principe de Phragmén-Lindelöf, extrait d'une lettre adressée à M. G.H. Hardy (Proc. Cambridge Philosophical Society, 20(1920-1921), 205-207) ; Note by G.H. Hardy, même tome, p.208-209 ; *Errata*, même revue, t.21(1922-1923), p.6.

[25] Sur le problème des moments. Première note (Ark. Mat. Astronom. och Fys., 16 (1921-1922), N° 12, 23 p.) ; Deuxième note, même tome, N° 19, 21 p. ; Troisième note, même revue, t.17(1923), N° 16, 52 p.

[26] Sur la sommation des séries de Fourier (Acta Litt. ac Sient. Univ.Hung.Francisco-Josephinae, Sec. Sci. Math. (Szeged), 1(1922-1923), 104-113).

[27] Sur un théorème de la moyenne et ses applications (Acta Litt. ac Scient. Univ. Hung. Francisco-Josephinae, Sect. Sci. Math. (Szeged), 1(1922-1923), 114-126).

[28] Sur le problème des moments et le théorème de Parseval correspondant (Acta Litt. ac Scient. Univ. Hung. Francisco-Josephinae, Sect. Sci. Math. (Szeged), 1(1922-1923), 209-225).

[29] Sur l'équivalence de certaines méthodes de sommation, extrait d'une lettre adressée à M. G.H. Hardy (Proc. London Mathematical Society, (2), 22(1922-1924), 412-419).

[30] Über die Summierbarkeit durch typische Mittel (Acta Litt. ac Scient. Univ. Hung. Francisco-Josephinae, Sect. Sci. Math. (Szeged), 2(1924-1926, 18-31).

[31] Les fonctions conjuguées et les séries de Fourier (C.R. Acad. Sci. Paris, 178 (1924), 1464-1467).

[32] Neuere Untersuchungen über trigonometrische Reihen (avec E. Hilbbel), *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften,* Band II., 3. Teil, 2.Hälfte, C.10, p.1189-1228, Leipzig(Teubner), 1924.

[33] Sur les séries trigonométriques conjuguées, extracted from a letter to Prof. G.H. Hardy (Proc.London Mathematical Society, (2), 23(1925), XXIV-XXVI).

[34] Sur les fonctions conjuguées (Math. Zeitschrift, 27(1927), 218-244).

[35] Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires (Acta Math., 49(1927), 465-497).

[36] Sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions avec quelques remarques sur les géométries non-euclidiennes (Kungl. Fysiografiska Sällskapets i Lund Förhandlingar, 1(1931), 21 p.).

[37] Sur les ensembles compacts de fonctions sommables (Acta Litt. ac Scient. Univ. Hung. Francisco-Josephinae, Sect. Sci. Math.(Szeged), 6(1932-1934), 136-142).

[38] Zum Eindeutigkeitssatz der fastperiodischen Funktionen (Kungl. Fysiografiska Sällskapets i Lund Förhandlingar, 3(1933), N° 10, 9 p.).

[39] Eine Bemerkung über den Eindeutigkeitssatz der Theorie der fastperiodischen Funktionen (Mat. Tidsskrift B H. 1(1934), 11-13).

[40] Volumes mixtes et facteurs invariants dans la théorie des modules, *Comptes Rendus du Congrès International des Mathématiciens, Oslo 1936,* Oslo(Brøgger) , 1937, t.II, 16.

[41] Modules réciproques, *Comptes Rendus du Congrès International des Mathématiciens, Oslo 1936,* Oslo(Brøgger) , 1937, t.II, 36-37.

[42] Intégrale de Riemann-Liouville et solution invariante du problème de Cauchy pour l'équation des ondes, *Comptes Rendus du Congrès International des Mathématiciens, Oslo 1936,* Oslo(Brøgger), 1937, t.II, 44-45.

[43] Potentiels de divers ordres et leurs fonctions de Green, *Comptes Rendus du Congrès International des Mathématiciens, Oslo 1936,* Oslo(Brøgger), 1937, t.II, 62-63.

[44] L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy pour l'équation des ondes, *Société Mathématique de France, Conférences à la Réunion Internationale des Mathématiciens, Paris, Juillet 1937,* Paris(Gauthier-Villars), 1938, p.1-18.

[45] Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels (Acta Litt. ac Scient. Univ. Hung. Francisco-Josephinae, Sect. Sci. Math.(Szeged), 9(1938), 1-42).

[46] Rectification au travail "Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels" (Acta Litt. ac Scient.Univ. Hung. Francisco-Josephinae, Sect. Sci. Math. (Szeged),

9(1939), 116-118).

[47] En åskådlig bild av den ecke-euklidiska geometrien ; geometriska strövtåg inom relativitetsteorien (Lunds Universitets Årsskrift N.F. Avd. 2, Bd.38, N° 9 - Kungl. Fysiografiska Sällskapets Handlingar N.F. Bd. 53, N° 9, C.W.K. G leerup (Lund), 1943, 76 p.).

[48] Sur certaines notions fondamentales en théorie quantique relativiste, *Dixième Congrès des Mathématiciens Scandinaves, Copenhague 1946*, Copenhague(Bagges), 1947, 123-148.Traduction russe: Успехи Мат. наук Н.С., N° 5(39)(1950), 120-144.

[49] Eléments de probabilité en théorie quantique relativiste, Försäkr. mat. studier till., Stockholm(Lundberg), 1946.

[50] L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy (Acta Math., 81(1949), 1-223).

[51] Remarque sur les fonctions holomorphes (Acta Sci. Math. (Szeged), 12 A (1950), 53-56).

[52] Court exposé des propriétés principales de la mesure de Lebesgue (Annales de la Société Polonaise de Mathématique, 25(1952), 298-308).

[53] Sur le potentiel de Liénard-Wiechert attaché à une ligne d'univers (C.R. Acad. Sci. Paris, 234(1952), 2159-2161).

[54] Sur le potentiel retardé attaché à un courant continu (C.R. Acad. Sci. Paris, 234(1952), 2260-2261).

[55] Sur le lemme de Zolotareff et sur la loi de réciprocité des restes quadratiques (Math. Scandinavica, 1(1953), 159-169).

[56] L'équation de Dirac en relativité générale, *Douzième Congrès des Mathématiciens Scandinaves, Lund 1953*, Lund(Ohlsson), 1954, p.241-259.

[57] A short proof of a classical theorem in the theory of Fourier integrals (avec A.E. Livingstone) (American Math. Monthly, 62(1955), 434-437).

[58] Problems related to characteristic surfaces, *Proceedings of the Conference on Differential Equations, University of Maryland, March 1955*, p.57-71.

[59] A special characteristic surface - a new relativistic model for the electron ? Technical Report N° 25, Department of Mathematics, University of Maryland, College Park, Maryland, Jan. 1957, 18 p.

[60] *Clifford numbers and spinors*, chap. I-IV, The Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, Lecture Series N° 38, University of Maryland, College Park, Maryland, 1957-1958, 193 p.

[61] A geometric solution of the wave equation in space-time of even dimension (Communications on Pure and Applied Math., 13(1960), 329-354).

[62] The analytic continuation of the Riemann-Liouville integral in the hyperbolic case (Canadian J. Math., 13(1961), 37-47).

TRAVAUX D'AUTRES AUTEURS

{1} Agmon S., Sur deux théorèmes de M. S. Mandelbrojt (C.R. Acad. Sci. Paris, 228 (1949), 1835-1837).

{2} Ananda-Rau K., On the convergence and summability of Dirichlet's series (Proc. London Math. Soc., (2), 34(1932), 414-440).

{3} Bernstein V., *Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet,* Paris(Gauthier-Villars), 1933.

{4} Bochner S., Summation of multiple Fourier series by spherical means (Transactions Amer. Math. Soc., 40(1936), 175-207).

{5} Bohr H. und Cramér H., Die neuere Entwicklung der analytischen Zahlentheorie, *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaten,* Band II, 3. Teil, 2. Hälfte, C.8, 722-849, Leipzig(Teubner), 1923.

{6} Borwein D., On Riesz and generalised Cesàro summability (J. London Math. Soc, (2), 2(1970), 61-66).

{7} Butzer P.L., Nessel R.J. and Trebels W., Multipliers with respect to spectral measures in Banach spaces and approximation. I. Radial multipliers in connection with Riesz-bounded spectral measures (J. Approximation Theory, 8(1973), 335-356).

{8} Chandrasekharan K, and Minakshisundaram S., *Typical means,* Oxford University Press, 1952.

{9} Cramér H., Über das Teilerproblem von Piltz (Ark. Mat. Astronom. och Fys., 16 (1921-1922), N° 21.

{10} Deny J., Les potentiels d'énergie finie (Acta Math., 82(1950), 107-183).

{11} Dikshit G.D., On absolute Riesz summability of Fourier series (J. Austral. Math. Soc., 19(1975), 97-102).

{12} Fatou P., Séries trigonométriques et séries de Taylor (Acta Math., 30(1906), 335-400).

{13} Fefferman C., A note on spherical summation multipliers (Israel J. Math., 15 (1973), 44-52).

{14} Fejér L., Untersuchungen über Fouriersche Reihen (Math. Annalen, 58(1904), 51-69) = *Gesammelte Arbeiten*, t.I, p.142-160, Basel(Birkhäuser), 1970.

{15} Fejér L., Über die Summabilität der Laplacesche$_n$Reihe durch arithmetische Mittel (Math. Zeitschrift, 24(1925), 267-284) = *Gesammelte Arbeiten*, t.II, p.144-161.

{16} Fejér L., Abschätzungen für die Legendreschen und verwandte Polynome (Math. Zeitschrift, 24(1925), 285-298) = *Gesammelte Arbeiten*, t.II, p.161-175.

{17} Gårding L., Marcel Riesz in memoriam (Acta Math., 124(1970), I-XI).

{18} Gergen J.J., Summability of double Fourier series (Duke Math. J., 3(1937), 133-148.

{19} Glatfeld M., Einführung in die allgemeine Theorie der starken Rieszschen Summierbarkeit (Überblicke Mathematik (1971), Band 4, 93-120, Biographisches Inst. Mannheim, 1972).

{20} Hardy G.H., *Divergent series*, Oxford University Press, 1949.

{21} Hörmander L., On the Riesz means of spectral functions of elliptic differential operators and the corresponding spectral expansions, *Some Recent Advances in Basic Sciences*, t.II, p.155-202, New York(Belfer Graduate School of Science), 1969.

{22} Irwin R. and Peyerimhoff A., On the convexity theorem of M. Riesz (Indian J. Math., 9(1967), 109-121).

{23} Khan A.A., Absolute Riesz summability of a series associated with a Fourier series (Indian J. Math., 15(1973), 1-6).

{24} Kogbetliantz E., Sommation des séries et intégrales divergentes par les moyennes arithmétiques et typiques, Mémorial des Sciences Mathématiques, fascicule 51, Paris(Gauthier-Villars), 1931.

{25} Kuttner B., On the "second theorem of consistency" for absolute Riesz summability (Proc. London Math. Soc., (3), 29(1974), 17-32).

{26} Kuttner B., On iterated Riesz transforms of order 1 (Proc. London Math. Soc., (3), 29(1974), 272-288).

{27} Landau E., Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin(Springer), 1929 = New York(Chelsea), 1946.

{28} Mittag-Leffler G., Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène, Première note (Acta Math., 23(1900), 43-62).

{29} Mittag-Leffler G., Sur un problème d'Abel, extrait d'une lettre à M. Marcel Riesz (Rend. Circ. Mat. Palermo, 30(1910), 337-338).

{30} Moldenkov V.A., Equisummability in the sense of M. Riesz of expansions in certain systems of exponential functions (Mat. Zametki, 15(1974), 381-386) = (Math. Notes, 15(1974), 218-221).

{31} Neder L., Theorie der trigonometrischen Reihen (Math. Annalen, 84(1921), 117-136).

{32} Pólya G. und Szegö G., *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Berlin(Springer), 1925.

{33} Rajchman A. et Zygmund A., Sur la possibilité d'appliquer la méthode de Riemann aux séries trigonométriques sommables par le procédé de Poisson (Math. Zeitschrift, 25(1926), 261-273).

{34} Stein E.M. and Weiss G., *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean spaces*, Princeton University Press, 1971.

{35} Szász P., A differenciál- és integrálszámitás elemei, Budapest(Közoktatásügyi Kiadóvállalat), 1951.

{36} Szegö G., Tchebyscheffsche Polynome und nichtfortsetzbare Potenzreihen (Math. Annalen, 87(1922), 90-111).

{37} Trebels W., On a Fourier $L^1(E^n)$-multiplier criterion (Acta Sci. Math. Szeged, 35(1973), 21-26).

{38} Trebels W., Multipliers for (C,α)-bounded Fourier expansions in Banach spaces and approximation theory, Springer(Berlin), 1973.

{39} Trebels W., *Fourier multipliers on $L^p(R^n)$ in connection with bounded Riesz means. Approximation Theory*, p.505-519, New York(Academic Press), 1973.

{40} Trebels W., Some Fourier multiplier criteria and the spherical Bochner-Riesz kernel (Revue Roumaine de Math. pures et appl., 20(1975), 1173-1185).

{41} Trebels W., On Fourier M_q^p multiplier criteria of Marcinkiewicz type (Studia Math., 58(1976), 7-19).

{42} Turán P., On an application of the typical means in the theory of zeta-function of Riemann (Comm. Sém. Math. Univ. Lund, tome supplémentaire(1952), 239-251).

{43} Tzimbalario J., Generalized Riesz typical means (J. Indian Math. Soc., (N.S.), 39(1975), 83-101).

{44} Walfisz A., Über die summatorischen Funktionen einiger Dirichletscher Reihen, Thèse, Göttingen, 1922.

{45} Warlimont R., Die starke Rieszsche Summierbarkeit von Dirichletreihen (Überblicke Mathematik (1972), Band 5, 87-110, Bibliographisches Inst., Mannheim, 1972).

{46} Zeller K., Theorie der Limitierungsverfahren, Berlin(Springer), 1958.

{47} Zygmund A., Sur la théorie riemannienne des séries trigonométriques (Math. Zeitschrift, 24(1926), 47-104).

{48} Zygmund A., Sur les séries trigonométriques sommables par le procédé de Poisson (Math. Zeitschrift, 25(1926), 274-290).

{49} Zygmund A., *Trigonometric series*, Cambridge University Press, 1959.