CAHIERS DU SÉMINAIRE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

PAUL DUBREIL

L'algèbre, en France, de 1900 à 1935

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1re série, tome 3 (1982), p. 69-81

<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1982__3__69_0>

L'ALGEBRE, EN FRANCE, de 1900 A 1935

par Paul DUBREIL*

Introduction.

Si vous le voulez bien, nous laisserons de côté le Congrès International des Mathématiciens qui se tint à Paris en 1900. L'algèbre y a occupé une place importante, mais cette place était tenue en grande partie par des étrangers, principalement Hilbert . Je crois aussi qu'une étude sérieuse de ce congrès nécessiterait toute une conférence.

Je dois dire encore que je me libérerai, plus d'une fois, de l'ordre chronologique. Je souhaite vous parler des hommes et des idées, et je voudrais essayer de faire apparaître des filières (ou des courants) ; essayer, car les choses ne sont pas simples ! Chaque mathématicien subit, surtout dans sa jeunesse, des influences variées ; d'autre part, nous constaterons à quel point il est impossible d'isoler l'algèbre de la théorie des nombres, de la géométrie, - et même de l'analyse.

Il reste à l'heure actuelle des livres, des articles ou même de simples phrases qui nous serviront de jalons. Vous me permettrez d'y ajouter, pour la dernière décade, des souvenirs personnels qui, je l'espère, rendront cet exposé moins aride.

I FILIERE CLASSIQUE

1. Hermite (1822-1901).

Le début de notre siècle est marqué par un événement qui a été profondément ressenti par les mathématiciens français et étrangers : la mort de Charles Hermite, le 14 janvier 1901, à l'âge de 78 ans. Il n'avait pas perdu, loin de là, son activité intellectuelle puisque son dernier article, en italien : *Sulle frazioni continue* parut en 1901 (*Le Matematiche pure ed applicate*, t.I, p.1 = *Oeuvres*, t.IV, p.552-553). Il en est de même pour un autre article, daté du 17 décembre 1900 : *Sur une équation transcendante* (*Archiv der Mathematik und Physik*, 3^{e} s., t.1, p.22 = *Oeuvres*,t.IV, p.546-551). On trouve également dans les *Oeuvres* (t.IV, p.529-543) plusieurs lettres au mathématicien italien Pincherle : écrites en 1900, ce sont de véritables notes, presque de petits mémoires.

C'est en pleine maturité, à 51 ans (1873), qu'Hermite avait obtenu un de ses plus beaux résultats : la transcendance de e. Mais je voudrais aussi souligner la

* Conférence donnée le 13 mai 1981 au Séminaire d'Histoire des Mathématiques.

précocité dont il avait fait preuve. Il eut comme professeur au "Collège" Louis-le-Grand M. Richard qui avait eu Galois comme élève. Le jeune Hermite profitait de ses sorties pour aller se plonger, à la Bibliothèque S^te^ Geneviève, dans le *Traité de la résolution des équations algébriques* de Lagrange, et il utilisait son argent de poche pour acheter une traduction française des *Disquisitiones arithmeticae* de Gauss. M. Richard disait à son père : "C'est un petit Lagrange". Nous disons plutôt, aujourd'hui, "ce fut un autre Lagrange" ... tout en admirant la solidité du jugement de M. Richard.

Dans l'oeuvre d'Hermite, l'algèbre, la théorie des nombres et l'analyse s'entrelacent constamment. Hermite, nous dit Emile Picard, "regrettait parfois que la théorie des nombres fût peu cultivée en France" (*Oeuvres*, préface). A ceux qui approchent son oeuvre, il laisse l'impression d'un savant dont l'ouverture d'esprit était exceptionnelle. Ses liens avec de nombreux mathématiciens étrangers, en particulier son "immense correspondance" (*ibidem*)* en sont la preuve. Et je voudrais, à ce sujet, rappeler une autre date.

Hermann Minkowski, né en 1864 près de Kaunas (ou Kovno) en Lituanie, mais en fait de nationalité allemande, très précoce lui aussi, participa, à l'âge de 17 ans, à un concours organisé par l'Académie des Sciences de Paris, sur la décomposition d'un entier en somme de 5 carrés. Il envoya un travail intitulé *Sur la théorie des formes quadratiques à coefficients entiers* portant comme devise cette phrase de La Rochefoucauld : "Rien n'est beau que le vrai, le vrai seul est aimable". C'est son mémoire qui fut couronné.

Des français non mathématiciens comprirent mal que notre Académie couronnât ainsi un tout jeune allemand (on était en 1881 !) et ce choix fut attaqué avec virulence par les plus chauvins de nos journaux ! Avec ses confrères Joseph Bertrand et Camille Jordan, Hermite défendit vigoureusement l'originalité et l'importance du travail de Minkowski, non sans l'encourager à poursuivre ses recherches. Telle fut l'origine des liens de Minkowski avec notre pays et de l'influence profonde qu'eurent chez nous ses travaux, en particulier sa *Geometrie der Zahlen* [[dédiée à *Herrn Charles Hermite : zum siebzigsten Geburtstage in grösster Verehrung gewidmet vom Verfasser*]].

2. Jordan (1838-1922).

Ancien élève de l'Ecole Polytechnique comme Hermite, Jordan travailla aussi, comme lui, dans plusieurs domaines des mathématiques : algèbre, analyse, topologie. Il est

* Irrémédiablement perdue, brûlée dans un incendie.(Note de la rédaction.)

facile d'en juger en ouvrant ses oeuvres complètes, publiées (seulement) à partir de 1961.

Emile Picard s'exprime ainsi, à l'Académie, le 23 janvier 1922, aussitôt après la mort de Jordan : "C'est surtout dans la Théorie des Substitutions et des équations algébriques que Jordan laissa une trace profonde. Dans un ouvrage considérable sur les substitutions (1870), il a fait une étude approfondie des idées de Galois, en y ajoutant des résultats fondamentaux sur les groupes primitifs, les groupes transitifs et les groupes composés, dont un des plus importants est relatif aux facteurs de composition d'un groupe."

On sait en effet que Jordan obtint en 1870, sur les suites de composition, l'invariance, à l'ordre près, de la suite des ordres des groupes-quotients. C'est seulement en 1897 que Hölder démontra l'isomorphisme de ces groupes, convenablement associés d'une suite à une autre. Au cours de l'époque à laquelle nous nous intéressons, Schreier (1901-1929) devait réaliser un progrès important en donnant un théorème valable pour des groupes quelconques, toute condition de finitude ayant disparu (*Abh. math. Sem. Hamburg*, VI, 1928). Après la mort prématurée de Schreier, Zassenhaus a donné une démonstration plus simple par une méthode constructive qui permet de former effectivement des "subdivisions isomorphes" (*ibid.*, X, 1934). Bien d'autres publications ont apporté par la suite des généralisations du théorème de Jordan-Hölder, exemple particulièrement significatif de théorème ayant une longue histoire et de belle conqête de l'esprit humain. Dans la préface des *Oeuvres* de Jordan, Julia a pu écrire : "Jordan nous apparaît, avec Galois et Sophus Lie, comme un des trois grands créateurs de la théorie générale des Groupes".

Il ajoute : "Longtemps, Jordan a travaillé dans une solitude presque totale ... Rares étaient ceux qui pouvaient apprécier la valeur de son oeuvre." En fait, Jordan avait eu un prédécesseur, en la personne d'Alfred Serret (1819-1885, élu à l'Académie en 1860). Serret enseigna, à partir de 1849, l'algèbre à la Sorbonne et s'acquit la réputation d'un "professeur incomparable". Il publia un traité d'algèbre qui connut trois éditions successives, la dernière en trois volumes. Dans la notice nécrologique de Serret, Jordan déclare : "Ce n'est pas un livre sur l'Algèbre, c'est *le* livre" et il ajoute que ce traité contient des recherches originales sur la théorie des substitutions et celle des congruences (*Oeuvres* de Jordan, t.IV, p.415). Malheureusement, dès l'âge de 52 ans (1871, c'est-à-dire un an après la parution du *Traité des substitutions* de Jordan), Serret eut une attaque foudroyante : il survécut mais resta très diminué jusqu'à sa mort. Cela nous explique, dans une certaine mesure, pourquoi Jordan fut longtemps seul, en France, à développer l'oeuvre de Galois.

3. E. Cartan, Drach, Vessiot.

C'est dans le dernier tiers du XIX^e siècle, et en Scandinavie, qu'a germé l'idée si importante d'étudier les "groupes de transformations", proches sur le plan conceptuel de substitutions, mais éloignés techniquement puisque d'ordre infini (en général). Dans ceux qui se présentent naturellement, les transformations dépendent de paramètres, d'une façon continue. C'est Sophus Lie (1842-1899) qui en fonda l'étude par des travaux qui eurent tout de suite un grand retentissement et furent développés par trois mathématiciens français : Elie Cartan (1869-1951), Drach (1871-1949) et Vessiot (1865-1952), tous trois normaliens (alors que, jusqu'à présent, nous n'avons rencontré que des polytechniciens).

Elie Cartan entre dans une carrière mathématique particulièrement riche en publiant, en 1893, deux notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, intitulées toutes les deux : *Sur la structure des groupes simples finis et continus*. La même année, probablement après avoir pris contact avec Sophus Lie alors professeur à Leipzig (il le fut de 1886 à 1898), Cartan publie aux *Leipziger Berichte*, en allemand, une troisième note intitulée : *Über die einfachen Transformationsgruppen*.

En 1894, il soutient sa thèse : *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus* : c'est un véritable monument. Cette thèse, peu accessible et très demandée, fut rééditée en 1933 (Vuibert).

Je ne voudrais pas omettre de signaler qu'Elie Cartan publia, en 1897, deux notes sur : *Les systèmes, et les systèmes réels, de nombres complexes*. Un certain caractère définitif des résultats et l'absence, à cette époque, d'idées générales sur les "structures algébriques" ont fait que, malheureusement, ces travaux, motivés par la rédaction de l'article correspondant de l'*Encyclopédie des sciences mathématiques*, édition française, 1908 (*Nombres complexes*, exposé d'après l'article allemand de E. Study, *Oeuvres complètes*, partie II, vol. 1, p.107-246), ne furent pas poursuivis[1] par leur auteur. A vrai dire, l'attention d'Elie Cartan était attirée par bien d'autres problèmes et notamment par les applications des groupes de transformations à l'analyse et à la géométrie.

C'est ainsi qu'il publie, à partir de 1901, des résultats sur l'intégration des systèmes différentiels et la structure des groupes *infinis* de transformations, qu'il s'intéresse en 1914 aux groupes réels simples, finis et continus, en 1924 (Congrès international de Toronto) à *La théorie des Groupes et les recherches récentes de Géométrie différentielle*, en 1929 aux *Groupes simples clos et ouverts et Géométrie riemannienne*, en 1935 à la méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus et les espaces généralisés. C'est à regret que, arrivant à la fin de la période qui nous intéresse et laissant de côté les travaux plus géométriques, nous arrêtons ici cette description.

Jules Drach entreprit d'étendre la théorie de Galois aux systèmes différentiels (à une varaible indépendante). Dans la notice qu'il lui consacre aux Comptes Rendus (le 14 mars 1949), Julia s'exprime ainsi : "Dès 1897, Drach donnait de l'irréductibilité une définition générale et irréprochable et, dès 1898, il entrevoyait le théorème fondamental qui domine la réductibilité : parmi tous les systèmes réduits, il en est toujours qui sont "automorphes", c'est-à-dire dont l'intégrale générale se déduit d'une intégrale particulière par les transformations d'un groupe ; ces systèmes sont les plus simples de tous. Mais, entraîné par l'analogie avec les équations algèbriques ... Drach donna du théorème un énoncé et une démonstration présentant quelques lacunes. Notre confrère Vessiot, approfondissant à son tour les problèmes posés et étudiés par Drach, donnait en 1902, du théorème fondamental, un énoncé et une démonstration parfaitement satisfaisants."

Cette même année 1902, l'Académie, pour le "Grand Prix" des sciences mathématiques, proposa le sujet suivant : "perfectionner ... l'application de la théorie des groupes continus à la théorie des équations aux dérivées partielles". Le prix fut décerné à Vessiot, à l'unanimité. Plus tard, il devint, comme Drach, membre de la Section de Mécanique de l'Académie.

S'il y eut quelque émulation entre ces deux mathématiciens, il faut retenir qu'à eux deux ils vinrent à bout d'une question fort difficile et nous pouvons penser, avec Painlevé, que "ce qui domine l'oeuvre de Drach, c'est la théorie géniale et hardie dont il est l'initiateur et dont il a lui-même ... montré la fécondité" (cité par Julia, Comptes Rendus, 14 mars 1949) et, avec Caquot, que Vessiot a "abordé avec une rigueur parfaite cette puissante conception et formé un corps de doctrine qui permet de conduire les calculs jusqu'au résultat définitif" (Comptes Rendus, 27 octobre 1952).

N'omettons pas, enfin, de signaler l'*Introduction à la Théorie des nombres et à l'Algèbre supérieure* (Paris, Nony, 1895) de Borel et Drach où une place est faite à l'étude des champs de Galois (ou corps finis).

II FILIERE "NEO-CLASSIQUE"

1. J.A. de Séguier (1862-1935).

Après avoir soutenu une thèse dont la valeur fut soulignée par Hermite, de Séguier publia en 1904, chez Gauthier-Villars, un livre intitulé : *Théorie des Groupes finis ; éléments de la Théorie des Groupes abstraits*.

La préface, très courte, est de l'auteur lui-même. Elle contient ces phrases remarquables : "Des divers groupes particuliers rencontrés en Algèbre, en Analyse et en Géométrie, devait nécessairement se dégager l'idée du *groupe abstrait,* c'est-à-dire du groupe considéré en lui-même, indépendamment de la nature de ses éléments. Beaucoup de recherches déjà faites dans divers domaines viennent dès lors se fondre en une théorie générale qui, depuis, n'a cessé de se développer."

Faire abstraction, en algèbre, de la nature des éléments est en réalité une idée ancienne. Dès la première moitié du XIX^{e} siècle, elle apparaît chez un mathématicien britannique, Peacock, auteur d'un traité d'algèbre. Et de plus, Peacock insiste sur l'importance des grandes lois fondamentales : associativité, commutativité, distributivité, ... qui doivent maintenant être formulées au départ alors qu'on ne les mentionnait même pas quand on travaillait sur des nombres, des polynômes, des applications, ... Mais les idées de Peacock, fort en avance sur son temps, n'ont pas eu d'écho, ou bien peu !

C'est seulement au début de notre siècle qu'en axiomatisant la théorie des groupes on reconnaît toute l'importance de l'associativité. Cette axiomatisation est l'oeuvre des mathématiciens américains : Huntington et Moore en 1902, Miller et L.E. Dickson un peu plus tard. Visiblement, de Séguier connaît les travaux des premiers, mais il va plus loin et sa réflexion est fort méritoire : il s'arrête un instant sur la structure plus générale (que celle de groupe) définie par *la seule associativité* (il lui donne malheureusement le nom de "corps", nous disons : demi-groupe) et il considère aussi le cas où l'on impose en outre la *règle de simplification* (bilatère) : c'est sa notion de *semi-groupe*. Enfin, il donne le théorème : tout semi-groupe fini est un groupe. C'est seulement en 1928 que, par un travail plus étoffé, intitulé *Sur les groupes finis sans existence d'un inverse unique* (Math. Ann., t.99), Suschkewitsch fondera vraiment la théorie des demi-groupes (*Halbgruppen ; semi-group* en anglais).

Dans son livre, de Séguier présente, d'une façon relativement moderne, les questions de morphismes, de suites normales, de décompositions (en produit direct). Un chapitre est consacré aux groupes abéliens et hamiltoniens,un autre aux groupes d'ordre p^{m} (p premier; m quelconque, puis m=3,4,5). L'influence de Jordan et celle de Burnside (1852-1927) sont assez manifestes.

2. Albert Châtelet(1883-1960).

Normalien de la promotion 1905, Albert Châtelet fut, d'une façon très équilibrée, arithméticien et algébriste. Le titre de sa thèse exprime déjà cette double orientation : *Sur certains ensembles de tableaux* (c'est-à-dire de matrices carrées) *et leur application à la Théorie des Nombres* (Annales de l'Ecole Normale Supérieure, (3), t.28, 1910, p.105-202). Les dernières phrases de l'introduction, consacrées aux remerciements d'usage, mais nuancées avec finesse, indiquent fort bien les origines du travail : "Je tiens à remercier particulièrement, ici, M. Picard qui a bien voulu s'intéresser à ce travail et m'aider de ses conseils, et M. Borel qui a contribué pour une large part à l'orientation de mes recherches. Qu'il me soit permis surtout d'exprimer toute la reconnaissance que je dois à mon regretté maître M. Jules Tannery, chez qui j'ai toujours trouvé un accueil si affable et une aide si constante. En dédiant ce travail à sa mémoire, je ne fais qu'acquitter une faible partie de la dette que j'ai contractée envers lui."

Né en 1848, mort en 1910, membre de l'Académie des Sciences en 1907, Jules Tannery a été sous-directeur à l'Ecole Normale Supérieure et y a formé plusieurs générations de mathématiciens. Au lycée d'abord, puis à l'Ecole Normale et à la Sorbonne, j'ai entendu exprimer bien des fois de tels sentiments de respect et de gratitude envers lui.

Alber Châtelet, après sa thèse, fut chargé du cours Peccot au Collège de France au deuxième semestre de l'année 1911-1912. Aidé dans la rédaction de ce cours par un normalien de la promotion 1911, Roger Vidil qui devait, comme sous-lieutenant, être tué au front en 1918, Châtelet le publia en 1913 sous le titre *Leçons sur la théorie des nombres*. Il présente ces leçons comme une "introduction aux théories nouvelles apparues en Théorie des Nombres sous l'influence des idées de Galois et d'Hermite". Il travaille principalement sur les "tableaux" en citant Hermite et, bien entendu, Cayley. A la suite de Minkowski, il utilise le langage géométrique des espaces à n dimensions (distance, volume des corps convexes, etc.) et aussi la théorie des modules selon Dedekind, la méthode de la réduction continuelle selon Hermite complétée et étendue à l'aide de théorèmes donnés par Minkowski dans sa *Geometrie der Zahlen*.

La fin du livre est consacrée aux nombres et aux entiers algébriques. "Cette théorie", écrit Châtelet, "qui a pris en Allemagne une grande extension, a été laissée en France, depuis Hermite, dans un oubli assez curieux à part deux traductions ... (*Introduction à la théorie des nombres algébriques* de Sommer, et *Rapport* de Hilbert), l'article de Dedekind au Bulletin des Sciences mathématiques, 1879, et un ... opuscule de Laurent (Paris, 1909)."

A cause de la guerre, ce livre n'a pas eu le retentissement qu'il aurait dû avoir. Un autre normalien de la promotion 1911, Lambert, particulièrement doué et attiré par l'algèbre et la théorie des nombres, fut tué à l'ennemi, comme caporal, en 1915.

Châtelet, après la guerre, participa au Congrès international des mathématiciens de Strasbourg, en 1920, congrès dont les allemands furent exclus. Il y fit une communication sur la "loi de réciprocité abélienne",qui développe une Note aux Comptes rendus de mars 1920.[2]

Châtelet est maintenant professeur à la Faculté des Sciences de Lille, mais deviendra bientôt recteur de son académie. Il l'est en 1925 quand paraît son ouvrage sur *Les Groupes abéliens finis* dont nous nous occuperons dans un instant.

Entre temps, son activité scientifique s'est manifestée par plusieurs exposés au Séminaire Hadamard et à l'Université de Bruxelles, dont son fils François Châtelet a pu retrouver les traces, qu'il a bien voulu me communiquer. Les sujets en furent :

- au Séminaire Hadamard, un article de Mazoni, *Sulla teoria delle equazioni algebriche secondo Galois* ; puis l'analyse du gros et célèbre mémoire d'Emmy Noether : *Idealtheorie in Ringbereichen* (Math. Ann., t.83, 1921, p.24-66) ; Louis Sartre, son ancien camarade de Normale (promotion 1911), secrétaire du Séminaire, lui écrit à ce sujet : "Il est entendu que tu diras ce que c'est que les idéaux. Nous l'ignorons quasi-absolument." ;

- à Bruxelles, les exposés faits en février 1921 consistaient en une étude détaillée des nombres algébriques et de leurs idéaux.

Le deuxième livre d'Albert Châtelet, *Les groupes abéliens finis et les modules de points entiers*, est publié en 1924, chez Gauthier-Villars, comme "Mémoire de l'Université de Lille".

"Dans ce qui suit", déclare Albert Châtelet dans l'Introduction, "nous étudierons surtout les groupes du point de vue abstrait, c'est-à-dire sans spécifier la nature des éléments qui les constituent." C'est là maintenant, on le voit, une chose acquise, tout au plus éprouve-t-on encore le besoin de le dire explicitement !

Ce livre qu'Emmy Noether cite un peu plus tard, à propos des automorphismes des groupes abéliens, dans son important travail *Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie* (Math. Zeitschr., 30, 1929, p.641-692), contient une foule de résultats, exposés méthodiquement : exprimés dans un langage déjà plus proche du nôtre, il concernent la structure et la génération des groupes abéliens, leurs automorphismes, les représentations, les sous-groupes , en particulier les sous-groupes caractéristiques, et les décompositions directes. Il est abondamment pourvu de notes intéressantes, d'une bibliographie (avec commentaires) et, pour la première fois, je crois, en France, d'un index alphabétique. C'est un outil de travail remarquable, venant très peu de temps après la première édition de la *Theorie der Gruppen von endlichen Ordnung* de Speiser, paru en 1923 dans la Collection Springer (vol. V). Ce synchronisme explique probablement qu'aucun des deux auteurs ne cite l'autre ! Les tâches administratives vont maintenant obliger le Recteur Châtelet à ralentir son activité scientifique, mais sans que son intérêt pour l'algèbre et la théorie des nombres s'en trouve diminué.

3. Humbert et ses élèves.

Georges Humbert (1859-1921), reçu premier à Polytechnique en 1877, docteur ès sciences en 1877, devint professeur d'analyse à Polytechnique en 1885, puis il succéda à Jordan au Collège de France, après l'avoir suppléé. Il entra à l'Académie des Sciences en 1901.

Professeur d'une clarté remarquable, il travailla surtout en analyse et en géométrie, mais s'occupa aussi des formes quadratiques et des fractions continues. Et, dans ce domaine, plusieurs de ses élèves apportèrent aussi des contributions.

Th. Got soutient en 1913 une thèse devant un jury composé de Picard, E. Cartan et Humbert ; il mentionne explicitement que c'est à Humbert qu'il doit l'idée première de son travail, intitulé : Questions diverses concernant certaines formes quadratiques ternaires indéfinies et les groupes fuchsiens arithmétiques qui s'y rattachent. Le titre révèle et le travail lui-même confirme l'influence de Poincaré, et en particulier de son mémoire *Les fonctions fuchsiennes et l'arithmétique* (Journal de Math., 1887).

Chapelon passa en 1914, devant Picard, Painlevé et Humbert, une thèse intitulée : *Sur les relations entre les nombres de classes de formes quadratiques binaires de déterminant négatif*. Il était lui aussi ancien polytechnicien et son travail se rattache, non seulement aux oeuvres de Hermite et de Humbert, mais aussi à celles de Kronecker et de Klein.

Julia, ancien normalien de la promotion 1911, grand blessé de guerre, se remit aux mathématiques à peine rétabli et soutint, en Décembre 1917, devant Picard, Lebesgue et Humbert une thèse intitulée : *Etude sur les formes binaires non quadratiques à indéterminées réelles ou complexes ou à indéterminées conjuguées*. Ce très gros travail (il a 293 pages et établit, je crois, un record pour la longueur d'une thèse de mathématiques) fut couronné par l'Académie des Sciences qui lui attribua le prix Bordin. Il représente une "contribution à la théorie arithmétique des formes non quadratiques et en particulier au problème de la réduction". S'inspirant de "l'admirable" mémoire d'Hermite *Sur l'introduction des variables dans la théorie des nombres* (Oeuvres, t.1), il se propose "d'étendre la belle méthode de réduction continuelle créée par Hermite pour l'étude arithmétique des formes". Julia cite fréquemment, non seulement Hermite, mais Jordan (*Mémoire sur l'équivalence des formes,* Journal de l'Ecole Polytechnique, t.48) et son travail contient des figures remarquables qui révèlent le sens géométrique si profond de l'auteur.

III FILIERE "MODERNE"

Alors que tout ce qui précède est le résultat d'une compilation, à vrai dire assez laborieuse, je vais pouvoir maintenant vous communiquer quelques souvenirs personnels car j'ai connu les mathématiciens dont j'ai à parler, plusieurs d'entre eux, d'ailleurs, sont encore vivants.

Dans les cours que nous suivions à Normale ou à la Sorbonne, mes camarades et moi, qu'y eut-il d'orienté un peu nettement vers l'algèbre, la théorie des nombres ou la géométrie algébrique ? D'abord quelques leçons de Vessiot sur la théorie de Galois, présentée à peu près comme dans le traité d'analyse de Picard (chapitre XVI du tome III du *Traité d'analyse*, Paris(Gauthier-Villars), 2e éd. 1908, 3e éd. 1928) ; puis deux ou trois conférences, de Vessiot également, sur la géométrie des nombres, selon Minkowski, et encore deux conférences d'Hadamard, aux élèves de première année (dont j'étais) et de seconde année, sur la fonction $\zeta(s)$: notre formation était insuffisante pour en tirer vraiment profit.

A un degré moindre, ce fut aussi le cas pour le cours d'analyse supérieure d'Emile Picard, au 2ème semestre 1923-1924, sur les courbes algébriques planes et les intégrales abéliennes. Nous étions quelques uns, dans ma promotion, à le suivre, avec l'intention de nous présenter au certificat en Octobre de façon à dégager le plus possible notre deuxième année d'école et connaître une plus grande liberté dans notre travail. A cause d'un autre cours obligatoire, nous manquions une leçon sur deux, mais le "cacique des carrés", Barbotte, avait la gentillesse de nous en faire une répétition. De plus, nous pouvions utiliser tantôt le *Traité d'analyse* de Picard, tantôt le livre de Picard et Simart *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, Paris(Gauthier-Villars), 1897-1906.

Personnellement, j'eus beaucoup de mal et n'obtins qu'un résultat assez médiocre à l'examen. Mais je me souviens avoir éprouvé un grand enthousiasme en suivant la leçon de Picard sur les surfaces de Riemann et leur représentation sous forme de "tore à p trous", apportant une signification frappante du genre p d'une courbe algébrique. Je fus intéressé aussi par la notion de transformation birationnelle, par la réduction des singularités d'une courbe au moyen de telles transformations, selon Max Noether, et par le "théorème $Af + B\varphi$ " du même auteur, sur l'équation des courbes passant, avec certaines conditions locales, par les points d'intersection de deux courbes données $f = 0$, $\varphi = 0$.

Les deux meilleurs rats de bibliothèque de la promotion, de Possel et Honnorat, eurent vite fait de dénicher le *Traité des substitutions* de Jordan, ainsi que les mémoires d'Halphen et de Noether sur les courbes algébriques gauches, qui avaient obtenu *ex aequo* le prix Steiner de 1882 de l'Académie des Sciences de Berlin (G.-H. Halphen, *Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques*, Oeuvres, t.III, p.261-455, Paris(Gauthier-Villars), 1921 ; M. Noether, *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 93(1882), 271-318). Au milieu de joyeux commentaires, notre curiosité s'éveillait.

Il y eut aussi au Collège de France, en 1924-1925, le cours Peccot, fait par notre ancien "agrégé-préparateur" Marcel Légaut (promotion de 1919). Il s'agissait de l'étude des systèmes de points dans le plan, des courbes algébriques contenant un tel système, du problème analogue dans l'espace : surfaces passant par des courbes et éventuellement des points donnés, tout cela visant à généraliser (évidemment, et beaucoup !) le théorème $Af + B\varphi$ de Max Noether. La méthode relevait de la géométrie algébrique italienne (utilisation systématique des "séries linéaires" de points sur une courbe). D'ailleurs, en 1926, parut la traduction, par Légaut, de l'ouvrage *Courbes et fonctions algébriques d'une variable* de Federigo Enriques qui était, avec Castelnuovo et Francesco Severi,l'un des grands maîtres de la géométrie algébrique italienne.

En octobre 1927, après mon service militaire, j'eus la joie de revenir à l'Ecole comme agrégé-préparateur et, sur le conseil de Légaut, j'entrepris de "faire de la géométrie algébrique". Mais j'eus bien vite le sentiment de n'être réellement pas doué pour cela : je voyais des difficultés partout, j'étais incapable de construire des raisonnements acceptables. J'avais cependant l'idée d'étudier de plus près la question de la "multiplicité de Noether" dans le "théorème $Af + B\varphi$ ", encore insuffisamment connue.

Telles étaient mes tribulations quand j'eus une conversation avec mon camarade André Weil qui revenait de Göttingen où il avait fait un séjour (probablement comme boursier Rockefeller) et rencontré Emmy Noether (fille de Max Noether), et van der Waerden. Il me fit remarquer que j'étais plongé, sans le savoir, dans la théorie des idéaux de polynômes et me conseilla de lire le mémoire de van der Waerden *Zur Nullstellen der Polynomideale* (Math. Ann., 96, 1926, p.183-208) et de m'initier aux travaux fondamentaux d'Emmy Noether[3] et de Krull[4].

La lecture de ces travaux, clairs, riches en idées nouvelles, me rendit l'enthousiasme. En juillet 1928, ma thèse était pratiquement terminée, elle fut imprimée au *Journal de Mathématiques* ((9), 9, 1930, p.231-309) et soutenue en octobre 1930. Une bourse Rockefeller me permit alors d'aller travailler avec Emil Artin à Hambourg, van der Waerden à Groningue, Emmy Noether à Francfort (où elle se trouvait momentanément, ayant fait un échange semestriel avec Siegel), puis, en 1930-1931 avec Enriques à Rome où je pris aussi contact avec Castelnuovo et Severi. Ces géomètres avaient une grande estime pour Emmy Noether : ils m'encouragèrent à persévérer dans l'application de la théorie moderne des idéaux à des problèmes de géométrie et en particulier à celui dont je souhaitais m'occuper : l'étude de l'intersection d'une variété et d'une hypersurface algébriques quelconques dans l'espace projectif.

J'avais épousé en juin 1930 ma camarade normalienne Marie-Louise Jacotin. Elève d'Henri Villat, elle travailla fructueusement à Rome avec Levi-Civita. Le semestre d'été 1931 devait nous ramener en Allemagne, à Göttingen, où ma femme traduisit le *Traité d'hydrodynamique physique* de V. Bjerknes, l'inventeur (norvégien) des "fronts polaires", tandis que je retrouvai Emmy Noether et son groupe d'algébristes.

Je voudrais maintenant, pour terminer, rappeler des choses mieux connues et d'ailleurs aussi plus importantes. André Weil, dont nous avons parlé il y a un instant, fit très vite une thèse ayant pour sujet : *L'arithmétique sur les courbes algébriques* (Acta mathem., 52, 1928, p.281-316). Elle se rattache au mémoire de Poincaré : *Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques* (Journal de Liouville, (V), 7, 1901, p.161) ainsi qu'aux travaux de Hilbert, Hurwitz et de l'arithméticien anglais Mordell. Ce travail touche bien sûr à l'algèbre, à la théorie des nombres et à la géométrie algébrique, mais il me paraît intéressant de signaler une note dans laquelle Weil cite (avant sa parution) l'article de van der Waerden : *Zur Produktzerlegung der Ideale in ganz abgeschlossenen Ringen* (Math. Ann., 101, 1929, p.309-312) qui aurait pu peut-être permettre une algébrisation plus poussée .

Claude Chevalley, de la promotion 1926, fit une thèse *Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps locaux*, soutenue en janvier 1934 après avoir été imprimée au *Journal of the Faculty of Science* de Tokyo (t.2, p.365-476). Les idées de Hilbert concernant la notion de corps de classes (1898) avaient abouti à des résultats décisifs chez le mathématicien japonais Takagi (dont nous avons déjà prononcé le nom à propos du congrès de Strasbourg). Mais son travail, *Über eine Theorie des relativ abelschen Zahlkörpers* (Journal College of Sc. Tokyo, 41, 1920), était d'une grande complication. Après d'importantes publications d'Artin sur la loi de réciprocité générale (Abhandlungen Hambourg, 5, 1927) et de Hasse dans le *Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper* (Jahresbericht Deutscher Math. Ver., 35, 1926), Chevalley réussit à mettre cette théorie particulièrement difficile sous une forme plus simple et plus naturelle.

On sait sans doute qu'il s'est rencontré avec Jacques Herbrand (promotion 1925) sur la démonstration du "théorème d'existence" : le principe de la méthode était le même, mais les calculs étaient conduits de façon différente. Herbrand avait réussi à faire, pendant sa deuxième année d'Ecole, une thèse de logique qui fut soutenue à Paris en juin 1930 après avoir été imprimée à Varsovie. Elle porte sur la théorie de la démonstration et la non-contradiction des axiomes de l'arithmétique et des définitions par récurrence. Par la suite, Herbrand s'intéressa vivement aux théories dont nous venons de parler et je me souviens l'avoir entendu faire un ou deux exposés sur ces questions au Séminaire d'Emmy Noether, à Göttingen, à la fin du printemps 1931. Peu après, il trouvait la mort dans un accident de montagne.

Une collection à sa mémoire fut publiée chez Hermann, en 1935-1936. Dans la ligne que nous avons suivie, elle comprend un article d'André Weil : *Arithmétique et géométrie sur la variétés algébriques*, un de Chevalley : *L'arithmétique dans les algèbres de matrices* et mon travail *Quelques propriétés des variétés algébriques* sur l'intersection d'une variété et d'une hypersurface, avec utilisation du théorème de Macaulay-Sperner sur la fonction caractéristique de Hilbert.

NOTES

1 Vers 1930, les algébristes allemands (Artin, E. Noether, ...) consacreront d'importants travaux à ce qu'ils appellent, maintenant, les "systèmes hypercomplexes", c'est-à-dire, dans la terminologie actuelle, aux "algèbres associatives". On peut remarquer que, sous le nom de "sous-systèmes invariants", Cartan fait entrer en scène les idéaux bilatères.

2 Dans la ligne qui nous intéresse, il n'y eut, à ce Congrès, que les communications de :

Drach, Sur quelques applications de l'intégration logique des équations différentielles ;

L.E. Dickson, Homogeneous polynomials with a multiplication theorem ;

du Pasquier (Neuchâtel, Suisse), Sur les nombres complexes généraux (avec citation de l'article d'Elie Cartan dans l'Encyclopédie) ;

Takagi, Sur quelques théorèmes généraux de la théorie des nombres algébriques.

3 Idealtheorie in Ringbereichen (Math. Ann., 83, 1921, p.24-66) dont nous avons parlé à propos d'Albert Châtelet, et Abstrakten Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern (ibid., 96, 1927, p.26-61).

4 Ein neuer Beweis für die Hauptsätze der allgemeinen Idealtheorie (Math. Ann., 90, p.55-64).