Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques

Antoine Appert

Sur le meilleur terme primitif en topologie

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1re série, tome 3 (1982), p. 63-67
<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1982__3__63_0>

"SUR LE MEILLEUR TERME PRIMITIF EN TOPOLOGIE"

par Antoine APPERT *

Résumé. Plaidoyer pour la construction de la topologie à partir du terme primitif "point adhérent à un ensemble".

Nous prenons ici les termes de topologie et d'espace topologique au sens de Bourbaki([3]), sens qui est équivalent à celui de notre manuscrit inédit dit M.S.([1]) dont la terminologie est conforme à celle de la présente Note.

Définition 1. Nous appelons terme primitif de la classe des espaces topologiques toute notion dont la donnée détermine complètement la topologie d'un espace quelconque de cette classe. Un tel terme primitif sera dit strict s'il est complètement déterminé par cette topologie.

Le problème se pose de savoir quel est le terme primitif le plus avantageux à adopter pour construire à partir de lui la topologie. Parmi ces termes primitifs envisageons les notions suivantes([3]): ensemble ouvert, ensemble fermé, adhérence ou fermeture d'un ensemble, point adhérent à un ensemble(c'est-à-dire point $\in$ adhérence de cet ensemble), dérivé d'un ensemble, point d'accumulation d'un ensemble(c'est-à-dire point $\in$ dérivé de cet ensemble), intérieur d'un ensemble, voisinage d'un point(c'est-à-dire ensemble tel que ce point $\in$ intérieur de cet ensemble), famille des voisinages distingués d'un point(c'est-à-dire famille de voisinages d'un point au sens de Fréchet([2]), c'est-à-dire système fondamental de voisinages d'un point au sens de Bourbaki), base de l'espace. Tous ces termes primitifs sont stricts à l'exception des deux derniers.

Pour voir quel est le plus avantageux de ces termes primitifs il y a lieu de les examiner par rapport à l'opération de relativisation et à la notion de propriété topologiquement intrinsèque.

([1]) Antoine APPERT, "Recherches sur la théorie de la mesure et sur la topologie généralisée", Manuscrit déposé aux Archives de l'Acad. des Sc. de Paris dans le Fonds Fréchet en 1979.

([2]) M. FRECHET, Les espaces abstraits..., Paris, Gauthier-Villars, 1928, pp. 172 - 173.

([3]) Les notions ci-après d'ouvert, de fermé, d'adhérence, d'adhérent à, d'intérieur, de voisinage, de base de l'espace sont prises au sens de Bourbaki (Topologie Générale, Chap. I). De plus, un point a est dit point d'accumulation d'un ensemble E si a est adhérent à $E - \{a\}$.

Définition 2. Pour tout espace topologique P et pour tout ensemble Q, on dira que Q se déduit de P par relativisation ou que Q est un sous-espace topologique de P si $Q \subset P$ et si, pour tout point $a \in Q$ et tout ensemble $E \subset Q$, on a:

a est adhérent à E dans Q $\Leftrightarrow$ a est adhérent à E dans P.

Alors Q est un espace topologique.

Cette définition équivaut[4] aux définitions usuelles d'un sous-espace topologique.

Définition 3. Nous disons qu'une propriété $\mathcal{P}$ concernant des points ou sous-ensembles d'un espace topologique P est topologiquement intrinsèque si toutes les fois que ces points appartiennent à et que ces sous-ensembles sont contenus dans un même sous-espace topologique Q de P, et quel que soit ce sous-espace, alors on a:

$\mathcal{P}$ est vraie dans P $\Leftrightarrow$ $\mathcal{P}$ est vraie dans Q .

On constate que les seuls termes primitifs en topologie énoncés plus haut qui soient toujours topologiquement intrinsèques sont les deux suivants: "point adhérent à un ensemble" et "point d'accumulation d'un ensemble". Le premier de ~~ces~~ deux termes primitifs est celui des deux qui donne les constructions les plus simples des diverses notions utilisées en topologie.

Nous pensons qu'il y a intérêt à utiliser en topologie un terme primitif topologiquement intrinsèque, et à y formuler les définitions aussi directement que possible à partir de ce terme primitif; en effet alors celles des propriétés considérées qui sont topologiquement intrinsèques seront souvent reconnues comme telles au premier coup d'oeil. Le terme primitif "point adhérent à un ensemble" a donc notre préférence; il est de plus très intuitif(5).

Nous disions autrefois "contigu"[6] au lieu d'"adhérent", ce qui inciterait à dire "contiguité" à la place d'"adhérence".

---

(4) En particulier elle équivaut à la définition de Bourbaki (loc.cit.).

(5) Plus intuitif que celui d'ensemble ouvert, comme traduisant la notion de proximité.

(6) Antoine APPERT, Sur les topologies transitives, Bull. Acad. roy. Belgique (Classe des Sciences), XXIII, 1937, 2, pp. 135 - 142.— Antoine APPERT et KY FAN, Espaces topologiques intermédiaires ... , Paris, Hermann, 1951.

Les considérations ci-dessus ont été développées, et étendues à des espaces plus généraux, par nous dans M.S., Chapitre III, §IV et §V.

Bien des définitions et propriétés formulées de façon à apparaître au premier coup d'oeil comme topologiquement intrinsèques ont été énoncées par nous dans le Chapitre III de M.S. . L'emploi systématique du terme primitif "point adhérent à un ensemble" s'est montré très avantageux et simplifiant dans les espaces uniformes et uniformes-généralisés, les espaces majorés, écartés, distanciés, etc.(voir M.S., Chapitre III, et Chapitre I, §III; voir aussi ([6])).

Exemples. Soit P un espace topologique, E un sous-ensemble de P, et Q un sous-espace topologique de P tel que $E \subset Q$.

La définition usuelle([7]) d'un ensemble connexe équivaut à la suivante:

E est connexe $\underset{d}{=}$ Pour tous ensembles G et H non vides tels que $E = G \cup H$, il existe un point de G qui est adhérent à H ou un point de H qui est adhérent à G.

Alors (Définition 2) on a:

E est connexe dans P $\Leftrightarrow$ E est connexe dans Q.

Donc (Définition 3) la propriété pour un ensemble d'être connexe est topologiquement intrinsèque.

Par contre la propriété pour un ensemble d'être ouvert (resp. fermé) n'est pas topologiquement intrinsèque. En effet, si $E = Q$, alors E est à la fois ouvert et fermé dans Q sans être nécessairement ouvert dans P ni fermé dans P.

La propriété pour un ensemble d'être compact([8]) (au sens de M.S. plus général que celui de Bourbaki puisque ne supposant pas l'axiome de séparation de Hausdorff) est topologiquement intrinsèque en vertu de la forme p_4 (voir M.S., Chapitre III, §I, p. 67 et Théorème 1, p. 68)que l'on peut donner à sa définition.

La propriété d'une application d'une partie E d'un espace topologique P sur une partie F de P d'être continue, est topologiquement intrinsèque en vertu de la définition d'une application continue donnée dans M.S., Chapitre I, §III, pp. 15 - 16. Ici, dans l'application de la Définition 3, il faut que $E \cup F \subset Q$.

([7]) Bourbaki (loc. cit.).

([8]) compact au sens de M.S. = quasi-compact au sens de Bourbaki(loc.cit.)

Il serait facile de généraliser un peu la Définition 3 pour étendre ceci au cas d'une application continue d'une partie d'un espace topologique P sur une partie d'un deuxième espace topologique P_1.

p_4 s'énonce comme suit:

p_4 (<u>propriété cantorienne généralisée</u>[6] <u>d'un ensemble</u> E). Pour toute famille monotone non vide $\mathcal{F}$ de parties non vides de E il existe un point de E adhérent à tout ensemble de $\mathcal{F}$.

Notons que nous disons qu'une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles est <u>monotone</u> si, étant donné deux ensembles quelconques de $\mathcal{F}$, il y en a toujours un qui est une partie de l'autre.

La définition[9] d'une application continue, donnée dans M.S., s'énonce comme suit dans le cas particulier des espaces topologiques:

Une application f d'une partie E d'un espace topologique sur une partie d'un espace topologique distinct ou non du premier est dite <u>continue</u> si elle vérifie la condition suivante:

(o). Pour tout ensemble $A \subset E$ et pour tout point $x \in E$ on a:

x est adhérent à $A \Rightarrow f(x)$ est adhérent à $f(A)$.

<u>Axiomatique généralisée</u>. Nous reproduisons très partiellement ici notre manuscrit M.S., Nous appelons <u>espace topologique-généralisé</u>, plus brièvement <u>espace topgen</u>, tout ensemble P d'éléments appelés <u>points</u> où on a défini une relation quelconque "a adhérent à E" qui a lieu ou non pour tout point $a \in P$ et tout ensemble $E \subset P$. On appelle <u>adhérence de</u> E l'ensemble des points adhérents à E.

Soient les axiomes suivants que l'on peut admettre on non dans un espace topgen:

axi_1. Tout point adhérent à une partie d'un ensemble est adhérent à cet ensemble.

axi_2. Tout point d'un ensemble est adhérent à cet ensemble.

axi_3. Aucun point n'est adhérent à l'ensemble vide.

axi_4. (L'adhérence de l'adhérence d'un ensemble quelconque) = l'adhérence de cet ensemble.

axi_5. Tout point adhérent à la réunion de deux ensembles est adhérent à l'un au moins d'entre eux.

---

[9] Définition équivalente, dans les espaces topologiques, à celle de Bourbaki (loc. cit.).

Alors on a:

espace topologique = espace topgen vérifiant les cinq axiomes ci-dessus.

En supprimant axi_5, on obtient nos espaces $(\mathcal{V}_\alpha)$ ou espaces à topologie-transitive(6) introduits par nous en juin 1932 (Comptes rendus Acad. des Sc., Paris, 194, p. 2277); l'axiome axi_4 était alors appelé par nous α. En supprimant axi_5 et axi_4 on obtient les espaces $(\mathcal{V})$ de Fréchet(2).

Nous avons introduit l'axiome suivant(6):

$axi_{4,1}$ (axiome de transitivité). Tout point adhérent à un ensemble de points chacun adhérent à un ensemble E, est adhérent à E.

On a dans tout espace topgen(6):

$axi_2 \Rightarrow (axi_{4,1} \Leftrightarrow axi_1 \wedge axi_4)$.

Ce qui permet d'écrire:

espace $(\mathcal{V}_\alpha)$ = espace $(\mathcal{V})$ vérifiant $axi_{4,1}$ = espace topgen vérifiant axi_2, axi_3 et $axi_{4,1}$.

espace topologique = espace topgen vérifiant axi_2, axi_3, $axi_{4,1}$ et axi_5.

Dans tout espace topgen nous posons (M.S., p.97):

base de l'espace = famille $\mathcal{B}$ d'ensembles telle que, pour tout point a et tout ensemble E, on ait:

a est adhérent à E $\Leftrightarrow$ tout ensemble de $\mathcal{B}$ comprenant a comprend un point de E.

Nous avons démontré (M.S., p. 111 bis) que dans tout espace topgen P:

$$axi_2 \wedge axi_{4,1} \Leftrightarrow \text{P possède une base},$$

et que les espaces topgens possédant une base sont un peu plus généraux que les espaces $(\mathcal{V}_\alpha)$.

Pour les notions de base de voisinages et de voisinage distingué dans les espaces topgens, voir M.S., pp. 71 - 76. Les espaces $(\mathcal{V}_\alpha)$ sont désignés dans M.S. par le terme d'espaces $(\mathcal{V}_4)$, car ce sont les espaces $(\mathcal{V})$ vérifiant axi_4.

---

* (Note de la rédaction.) C'est G. Choquet qui a bien voulu nous communiquer le présent article. Il nous écrivait, le 4 avril 1981, à propos de cette Note de A. Appert :
"Venant d'un disciple direct de Fréchet, qui a beaucoup réfléchi sur les fondements de la topologie, sa Note est un témoignage sur les préoccupations qui ont été celles des fondateurs de la topologie. A ce titre il m'a semblé qu'elle pourrait intéresser des historiens des sciences et les mathématiciens ou philosophes qui réfléchissent à la naissance des concepts."