CAHIERS DU SÉMINAIRE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

JEAN-PIERRE KAHANE

Léopold Fejér et l'analyse mathématique au début du XXe siècle

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1re série, tome 2 (1981), p. 67-84
<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1981__2__67_0>

LEOPOLD FEJER ET L'ANALYSE MATHEMATIQUE AU DEBUT DU XX^{e} SIECLE

par Jean-Pierre KAHANE*

Lorsque j'ai été invité à parler de l'importance de l'oeuvre de Fejér, j'ai accepté d'enthousiasme, mais je ne savais pas encore qu'il avait été traité dans d'excellentes études ([1] à [11]). Ce que vous attendez de moi est sans doute un commentaire personnel : mon désir sera de montrer, par quelques indications et quelques exemples, comment la pensée de Fejér s'ancre dans les mathématiques du 19ème siècle et se reflète dans celles d'aujourd'hui. Mon point de départ sera le fameux théorème de Fejér.

Le 19 novembre 1900, l'Académie des Sciences de Paris signale ([12]) que Leopold Fejér lui a adressé, de Budapest, un mémoire intitulé *Démonstration du théorème qu'une fonction bornée et intégrable est, au sens d'Euler, analytique*. Le 10 décembre, les Comptes Rendus publient ([13]) la célèbre note *Sur les fonctions bornées et intégrables*, où se trouvent introduits ce que nous appelons les sommes de Fejér, le noyau de Fejér, le procédé de sommation de Fejér, et où se trouve démontré le célèbre théorème de Fejér : toute fonction continue est limite de ses sommes de Fejér.

Le théorème de Fejér allait être célèbre rapidement. Utilisé pour démontrer la complétion du système trigonométrique dans les travaux de A. Hurwitz sur les isopérimètres ([14]), étendu aux fonctions intégrables au sens de Lebesgue (théorème de Fejér-Lebesgue) ([15], [16]), généralisé à d'autres noyaux utiles en théorie de l'approximation (Ch. de la Vallée-Poussin) ([17]), employé pour une démonstration simple et tout à fait nouvelle du théorème de Dirichlet-Jordan (Hardy) ([57]), précisée à l'aide de la notion de sommabilité absolue (Hardy et Littlewood) ([19]), et surtout accessible, par sa simplicité, à tout étudiant de mathématiques, le théorème de Fejér apparaît comme classique dès les années 1910.

Il me faut compléter l'énumération qui précède sur deux points. Le premier concerne Fejér lui-même. Il est loin de n'être que l'homme de son théorème. Mais personne mieux que lui n'en a saisi l'importance, et il a travaillé durant toute sa vie sur ses applications et sur ses analogues. Dans l'un de ses derniers articles, il signale ([2], t.II,767-768) qu'il a été fortement inspiré par le théorème de Picard sur les fonctions entières et par la formule de quadrature mécanique de Gauss. Il n'y a pas de lien évident, je crois, entre le théorème de Picard et la quadrature de Gauss. Mais on peut en

---

* Conférence prononcée le 22 août 1980 à Budapest à l'occasion des cérémonies du centenaire de F. Riesz et de L. Fejér.

effet vérifier que, dans l'oeuvre de Fejér, le théorème de Fejér fait le joint : il s'applique aux zéros des polynômes harmoniques et permet par là de préciser le théorème de Picard-Landau ; les sommes de Fejér ont pour analogue les polynômes d'interpolation de Hermite-Fejér qui, dans le cas où les noeuds sont les zéros des polynômes de Legendre, interviennent da la façon la plus naturelle dans la quadrature de Gauss.

Le second concerne le cours d'analyse de Ch. de la Vallée-Poussin. Dans sa première édition (1903-1906), dans la tradition des grands cours d'analyse de l'époque, il consacre peu de place aux séries de Fourier, et il expose le théorème de convergence de Dirichlet comme Dirichlet lui-même l'exposait en 1829 ([20]). Dans sa seconde édition (1912) ([21],t.II,137-176), on trouve le théorème de Fejér, avec la méthode de Hardy pour en déduire le théorème de Dirichlet, et aussi l'exemple donné par Fejér d'une fonction continue dont la série de Fourier diverge en un point. La différence des deux éditions mesure l'importance de la révolution qui s'est opérée.

En quoi consiste cette révolution, et en quoi consiste l'originalité de Fejér ? Pour le voir, essayons de nous reporter à 1900.

Dans l'analyse mathématique, le 19ème siècle a fait progresser à pas de géant la théorie des fonctions d'une variable complexe - qui vient de montrer sa puissance en permettant à Hadamard ([22]) et de la Vallée-Poussin ([23]) d'établir le théorème des nombres premiers -. La théorie des fonctions de variables réelles s'est développée avec l'étude des équations aux dérivées partielles de la physique - en particulier la théorie du potentiel a amené des idées nouvelles - ; c'est donc, surtout, l'étude des fonctions de plusieurs variables qui s'est développée. Au contraire, l'étude des fonctions d'une variable réelle a produit des êtres étranges et inquiétants : des fonctions continues qui ne sont dérivables nulle part (Weierstrass) ([24]), des fonctions continues dont la série de Fourier diverge en un point (du Bois-Reymond) ([25]). C'est le moment où Hermite écrit à Stieltjes ([26],318) qu'il se *"détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivée"*. N'y aurait-il pas des fonctions continues dont la série diverge partout, comme il existe des fonctions continues partout non dérivables ? Fejér, au début de sa thèse ([2],t.I,95), estime que cette possibilité n'est nullement exclue. La série de Fourier ne peut-elle converger sans représenter la fonction, comme c'est le cas pour les séries de Taylor de certaines fonctions indéfiniment dérivables ? ([2],t.I,120) Minkowski, semble-t-il,a posé cette question. En tous cas, les séries de Fourier n'apparaissent plus, en 1900, comme un outil fiable et commode ; elles renferment trop de bizarreries.

Le traité d'analyse d'Emile Picard, qui date de 1891, me paraît instructif. Il traite du problème de Dirichlet pour la sphère *avant* de traiter du problème de Dirichlet pour le cercle. Ce n'est pas que les choses aillent moins rondement pour le cercle que pour la sphère. Mais, pour le cercle, la solution s'inscrit dans le cadre du chapitre "séries de Fourier", et ce n'est pas par un pareil sujet qu'il convient d'aborder un cours d'analyse !

Regardons de plus près quelques pages qu'Emile Picard consacre au problème de Dirichlet pour le cercle ([27],250-259) - ne fût-ce parce que Fejér les connaît bien, et les cite dans sa note ([2],t.I,40) -. Picard expose la méthode de Schwarz, fondée sur les propriétés du "noyau de Poisson"

$$\frac{1 - r^2}{1-2r \cos t + r^2} = 1 + 2 \sum_1^\infty r^n \cos nt .$$

Comme application, il montre qu'une fonction continue sur le cercle, ayant pour série de Fourier $\sum^\infty (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$, peut être exprimée comme limite uniforme de polynômes trigonométriques de la forme

$$\sum_{n \leqslant N(r)} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) r^n$$

ce qui donne une nouvelle démonstration du théorème d'approximation de Weierstrass.

Un peu plus tard, en 1893, Ch. de la Vallée-Poussin utilise ([28]) aussi le noyau de Poisson pour établir la formule

$$\int F(x) f(x) dx = \sum a_n b_n$$

essentiellement équivalente à la complétion du système trigonométrique. En 1901, c'est cette formule qu'Adolf Hurwitz énonce comme lemme en vue de sa solution du problème des isopérimètres à l'aide des séries de Fourier, dans le volume des Comptes Rendus qui suit immédiatement celui où Fejér publie sa note ([58], [29]).

Il y a donc, sur les séries de Fourier, quelques résultats intéressants. Mais les résultats et les problèmes ne sont pas coordonnés. La remarque de Picard résout le problème de Minkowski, mais Picard ignore le problème de Minkowski, et Minkowski ignore la remarque de Picard. La remarque de Picard fournit aussi la formule de Ch. de la Vallée-Poussin, mais de la Vallée-Poussin, apparemment, l'ignore. A coup sûr, le travail de Ch. de la Vallée-Poussin est ignoré de Hurwitz (Hurwitz le reconnaît ([14],576) dans son article de 1903). Ainsi, il s'agit de travaux morcelés, sur un sujet marginal.

D'autre part, l'idée d'attribuer une somme à une série divergente au moyen d'un procédé de sommation convenable est bien connue en 1900. Lebesgue la fait remonter à d'Alembert ([16],271), précisément pour la série

$$\frac{1}{2} + \sum_1^\infty \cos nt \quad (0 < t < 2\pi)$$

et pour le procédé de la moyenne arithmétique des sommes partielles.En tout cas, cela a été une préoccupation d'Abel, et à sa suite de Poisson, de Frobenius, de Hölder, de Cesàro, de Borel. Abel a démontré le fameux théorème ([30],223) :

$$\lim_{r \nearrow 1} \sum_0^\infty a_n r^n = \sum_0^\infty a_n$$

si l'on suppose que le second membre existe au sens ordinaire. Poisson a défini ([31]) le premier membre, lorsqu'il existe, comme somme généralisée de la série (qu'elle soit convergente ou divergente). Frobenius a généralisé ([32]) le théorème d'Abel en montrant que

$$\lim_{r \nearrow 1} \sum_0^\infty a_n r^n = \lim_{n\to\infty} \frac{S_o+\ldots+S_{n-1}}{n}$$

lorsque le second membre existe ; puis Hölder a généralisé ([33]) ce théorème de Frobenius en itérant le procédé de la moyenne arithmétique. Cesàro a généralisé ([34]) un autre théorème d'Abel, sur la multiplication des séries, et a introduit à cette fin les procédés que nous désignons par (C,k). En 1900, les recherches de Cesàro sont assez récentes (1890). Depuis 1895,Emile Borel a défini ([35]) de nouveaux procédés de sommation, avec des applications au prolongement analytique des séries de Taylor. Fejér est au courant des recherches de Borel. Il connaît le théorème de Frobenius ([59]).

L'idée de résoudre le problème de Dirichlet pour le cercle sous la forme

$$f(r \cos t\ ,\ r \sin t) = \frac{a_o}{2} + \sum_1^\infty (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\, r^n$$

lorsque la fonction donnée à la frontière a pour série de Fourier

$$\frac{a_o}{2} + \sum_1^\infty (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

est une idée ancienne. Il était tentant d'utiliser le théorème d'Abel. L'exemple de P. du Bois-Reymond interdit tout espoir de ce côté. Peut-on appliquer le théorème de Frobenius ? Tel semble avoir été le point de départ de Fejér.

Selon J. Horváth[1] , Fejér aurait eu connaissance du problème à Berlin.Il en aurait obtenu la solution et l'aurait rédigée en quelques jours, à la fin d'octobre 1900, à Budapest. Il aurait immédiatement observé que le moyen utilisé était plus important que la nouvelle solution du problème de Dirichlet. Dans sa note, la solution du problème de Dirichlet apparaît en effet comme une conséquence parmi d'autres du théorème

$$\frac{1}{2}\,[f(t+0) + f(t-0)] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(S_o+\ldots+S_{n-1})(t)\ .$$

La preuve du théorème, fondée sur le noyau

$$K_n(t) = \frac{1 - \cos nt}{1 - \cos t}$$

est très voisine de la solution de Schwarz ([36]) du problème de Dirichlet, à l'aide du noyau de Poisson

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2} \quad .$$

Ainsi Fejér *n'a pas* introduit un nouveau procédé de sommation des séries divergentes ; il a au contraire utilisé le plus évident, déjà bien étudié par Hölder, Frobenius et Cesàro. Il *n'a pas* introduit les noyaux positifs dans l'étude des séries de Fourier. Le noyau de Poisson était bien connu, et les applications qu'en faisait Picard aux séries de Fourier préfigurent celles de la note de 1900. Il n'a pas, par des moyens savants, résolu une conjecture difficile.

Ce qu'il a fait, dans sa note de 1900, est beaucoup plus que tout cela. Il a donné un énoncé simple, facile, efficace, là où le monde mathématique croyait voir régner l'étrangeté et la bizarrerie. En mariant procédés de sommation et séries de Fourier, il a donné aux deux théories le cadre qui leur convenait. Désormais, les travaux de Riemann ([37]) et de Cantor ([38],71-106) sur les séries trigonométriques, ceux de Poisson et de Schwarz sur le problème de Dirichlet, ceux de Weierstrass ([39]) sur l'équation de la chaleur, apparaissent comme relevant d'un même principe, que le théorème de Fejér traduisait da la façon la plus simple : régularisation de la fonction par un noyau positif d'un côté, procédé de sommation de la série de Fourier de l'autre côté. Fejér a ainsi restitué aux séries de Fourier, pour un bon demi-siècle, un rôle fondamental en Analyse, et il a été à l'origine du regain d'intérêt pour les fonctions d'*une* variable réelle. (*)

Quoiqu'il s'agisse de domaines bien différents et de conséquences qui ne sont pas de même ordre, Fejér en 1900 me semble avoir eu, pour l'analyse mathématique, un rôle analogue à celui d'Einstein en 1905 dans son mémoire sur l'électrodynamique des corps en mouvement, pour la physique théorique. Einstein, aussi, avait des précurseurs, et il a essentiellement mis sur ses pieds une théorie dont tous les éléments constitutifs étaient déjà rassemblés. Einstein, aussi, couronne la physique du 19ème siècle en replaçant en perspective ses acquis essentiels. On pourrait poursuivre le parallèle (à côté de la théorie de la relativité, qui conclut le 19ème siècle, les physiciens aiment à considérer la mécanique quantique comme le fondement de la physique du 20ème siècle ; n'y a-t-il pas un rôle analogue, pour l'Analyse mathématique, de la théorie de l'intégration ?).

A partir de 1900, la théorie des fonctions d'une variable réelle allait prendre

---

(*) Dans la décennie qui a précédé la note de Fejér, les séries de Fourier attiraient si peu l'attention des mathématiciens que chacun de ceux qui s'occupaient du sujet pouvait croire, de bonne foi, être le seul à s'en être soucié. J'ai rappelé comment de la Vallée-Poussin ignore Picard, et Hurwitz de la Vallée-Poussin. La note de Fejér polarise l'attention générale : par exemple, Hurwitz le reconnaît immédiatement comme l'outil le plus puissant pour obtenir sa formule et, du même coup, reconnaît la priorité de Ch. de la Vallée-Poussin.

un développement nouveau, en particulier avec la thèse de Lebesgue ([40]). Lebesgue, en s'intéressant aux séries trigonométriques comme champ d'application de sa théorie de l'intégration, a donné la version "presque partout" du théorème de Fejér. J'ai déjà dit l'écho profond que le théorème de Fejér allait avoir auprès de Hardy, Littlewood, de la Vallée-Poussin.

Il pourrait être intéressant de poursuivre cet exposé en étudiant, à travers la littérature mathématique depuis 1900, l'influence directe de ce premier travail de Fejér, et l'influence directe des travaux ultérieurs. Je n'ai pour cela ni la compétence, ni la force, ni le temps. J'ai déjà signalé les excellentes études où l'on peut trouver de nombreux éléments à ce sujet ; il y a une liste de références particulièrement riche dans l'article de J. Aczél (1961) ([1],20-24). D'autre part, sur chacun des grands sujets de l'analyse auxquels Fejér a contribué, il existe un ouvrage de référence où son oeuvre est exposée. Pour les séries trigonométriques, c'est le livre de A. Zygmund, *Trigonometric Series* - y compris les notes ; fort peu de théorèmes portent un nom dans le cours du livre ; le *Theorem of Fejér* est l'une des rares exceptions ([41],t.I,89). Pour les fonctions orthogonales, c'est le livre de G. Szegö, *Orthogonal Polynomials* (1939) ([42]). Pour les polynômes d'interpolation, c'est l'exposé de E. Feldheim (1939) dans le *Mémorial des Sciences Mathématiques* ([43]), qu'il faut compléter par les travaux ultérieurs d'Erdös ([44],t.I,522-525) et de Turán ([44],t.II,919-920).

Quoique Fejér n'ait pas publié de livre, il se trouve encore fréquemment cité dans la littérature mathématique. Entre 1969 et 1980, j'ai compté 92 articles où un travail de Fejér est cité en référence - un certain nombre de ces articles sont d'ailleurs dus à des ingénieurs ou des physiciens.

Si on lit encore Fejér, c'est qu'on a plaisir à le lire. Tout ce qu'il écrit est clair, avec les motivations bien en évidence, et sans un mot de trop. J'ai particulièrement apprécié ce qu'il écrit en français. Même s'il ne possède pas parfaitement la langue, il a des formules étonnantes, comme sa façon de dire qu'à première vue les noyaux de type positif se ressemblent tous - bien sûr, il n'en est pas de même quand on regarde plus avant - : à première vue, ils se ressemblent comme des pingouins ([2], t.II,750).

Il y a d'autre part, pour chaque mathématicien, des découvertes à faire dans l'oeuvre de Fejér. Il y a de merveilleux calculs, tel que celui qui mène à l'évaluation asymptotique ([2],t.I,502)

$$a_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi e}}\, n^{-\frac{3}{4}+\frac{\rho}{2}} \sin(2\sqrt{n} + (\tfrac{3}{4} - \tfrac{\rho}{2})\,\pi)$$

pour les coefficients de Taylor de la fonction $(1-z)^{-\rho}\exp(\frac{1}{z-1})$. Il y a des priorités imprévues. Par exemple, il me semble bien lire le "lemme de Van der Corput" dans le mémoire de 1909 où est établi la formule ci-dessus. Et à coup sûr, ce qu'on appelle "facteur de Blaschke" dans la théorie des fonctions analytiques dans le disque unité se trouve dans la note de Carathéodory et Fejér de 1907 sur le théorème de Jensen ([2],t.I,300-302).

Il est plus important de souligner l'influence indirecte de Fejér.

La liste de ses élèves est impressionnante, par son étendue et sa qualité ([1], 3). Si l'on regardait sa descendance mathématique, c'est-à-dire les élèves de ses élèves, etc., on trouverait sans doute la majorité des mathématiciens hongrois, et un nombre important de mathématiciens en Suède, aux Etats-Unis, en Israël, et dans tout le reste du monde. Dans certains sujets - je pense aux polynômes orthogonaux et aux polynômes d'interpolation, les mathématiciens hongrois jouent un rôle encore dominant. Dans l'ensemble des mathématiques mondiales, la place des mathématiciens hongrois - ceux de Hongrie ou ceux de la dispora - est éminente, et cela a toujours été un sujet d'émerveillement qu'un petit pays ait pu produire une école mathématique aussi éclatante. Les témoignages de Pólya, Szegö, Turán montrent le rôle qu'a eu Fejér dans le développement de cette école, par son rayonnement personnel, et aussi par son souci de s'adresser largement, dans des périodiques de langue hongroise, au public mathématique le plus vaste possible. Il nous donne là un exemple à méditer, dans tous les pays du monde[2].

Je me bornerai maintenant à évoquer, sur quelques exemples, comment la pensée de Fejér se prolonge dans des questions d'intérêt actuel.

Regardons le livre d'Y. Katznelson *An Introduction to Harmonic Analysis* (1968). Il débute par les séries de Fourier. Dès les premières pages, la formule

$$f(x) = \lim \frac{1}{2\pi} \int f(x-t)\, k_n(t)\, dt$$

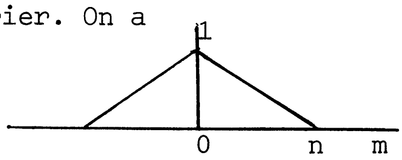
est interpétée comme une égalité dans un espace de Banach de fonctions définies sur le cercle, sous la condition que la norme soit invariante par translation, et que la translation soit un opérateur continu (Katznelson appelle "espace homogène" un tel espace ([45],14) ; on trouve essentiellement la même notion dans le livre de Bochner *Harmonic Analysis and the Theory of Probability* (1960), Berkeley(University of California Press)). Le noyau $k_n(t)$ peut être le noyau de Fejér $K_n(t)$, ou tout autre noyau ayant les propriétés voulues. Ainsi les sommes de Fejér σ_n convergent vers f dans tous les espaces L^p $(1 \leqslant p < \infty)$ et dans C , espace des fonctions continues sur le cercle.

Le noyau de Fejér, dans la formule ci-dessus, apparaît comme un convoluteur. Ses coefficients de Fourier apparaissent donc comme des multiplicateurs, c'est-à-dire qu'on a

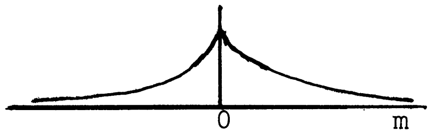
$$\hat{\sigma}_n(m) = \hat{K}_n(m)\, \hat{f}(m)$$

avec les notations usuelles pour les coefficients de Fourier. On a

$$\hat{K}_n(m) = \sup\left(1 - \frac{|m|}{n}, 0\right) ;$$



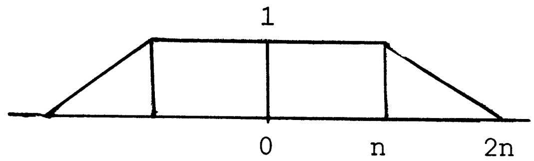
c'est la "fonction triangle" portée par $[-n,n]$.
En prenant des combinaisons convexes des fonctions triangles, on obtient les fonctions paires positives, convexes à droite de 0 et tendant vers 0 à l'infini.



Commes les K_n sont des fonctions positives d'intégrale 1, on obtient le théorème suivant : toute suite $\{c_m\}$ $(m \in Z)$ paire, positive, convexe pour $m \geqslant 0$ et tendant vers 0 est la suite des coefficients de Fourier d'une fonction positive $f \in L^1$. En particulier, les coefficients de Fourier des fonctions de L^1 peuvent tendre vers 0 aussi lentement qu'on veut. C'est là un résultat fondamental pour l'étude de L^1 comme algèbre de convolution ; il en résulte très simplement, par exemple, que toute fonction $f \in L^1$ se factorise sous la forme $f = g * h$, $g \in L^1$, $h \in L^1$ (Salem).

Un compagnon du noyau de Fejér est le "noyau de de la Vallée-Poussin"

$$V_n(t) = 2\,K_{2n}(t) - K_n(t)$$



dont les coefficients de Fourier $\hat{V}_n(m)$ forment un "trapèze" porté par $[-2n,2n]$. V_n n'est plus un noyau positif, mais il a deux avantages. Le premier est qu'il est très bien adapté à la théorie de l'approximation (il a d'ailleurs été introduit par de la Vallée-Poussin en 1919 dans ses *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle* ([46], 33-34)) : l'approximation par les sommes de de la Vallée-Poussin d'ordre $2n$ est à peu près la meilleure approximation par des polynômes trigonométriques d'ordre n.
Le second est que les différences $\hat{V}_{2^{j+1}} - \hat{V}_{2^j}$ constituent une partition de l'unité, dont les supports $\mp[2^j, 2^{j+2}]$ s'éloignent rapidement à l'infini. La décomposition suivant les sommes de de la Vallée-Poussin est donc très liée à la décomposition dyadique des séries de Fourier

$$\sum_{n\in Z} = \sum_j \sum_{2^j \leqslant |n| < 2^{j+1}} c_n e^{int} .$$

Une bonne partie de la théorie de l'approximation par polynômes trigonométriques consiste en théorèmes de la forme

$$\|(V_{2^{j+1}} - V_{2^j}) * f\|_E = O(\omega_j) \iff f \in F$$

où E et F désignent des espaces de Banch homogènes, et ω_j une suite tendant vers 0 . Par exemple

$$\|(V_{2^{j+1}} - V_{2^j}) * f\|_C = O(2^{-j\alpha}) \iff f \in \Lambda_\alpha$$

où Λ_α = Lip α pour $0 < \alpha < 1$, Λ_1 est la classe des fonctions lisses de Zygmund, et $f \in \Lambda_\alpha$ signifie $f' \in \Lambda_{\alpha-1}$ pour $\alpha > 1$. Si $E = L^2$ et $\omega_j = 2^{-j\alpha}$, l'espace F est un espace de Sobolev, la caractérisation se simplifie, et s'étend facilement à $\mathbf{T}^n$ sur R^n . C'est un outil très utile que cette décomposition dyadique des fonctions selon des bandes homothétiques de leurs spectres ; il a été très utilisé par Hardy, Littlewood, Paley. Appliquée aux séries de Fourier-Walsh ou aux séries de Fourier-Haar au lieu des séries de Fourier ordinaires, elle donne naissance à ce qu'on appelle aujourd'hui les martingales dyadiques.

En modifiant un peu le noyau V_n , à savoir en considérant $(N+1)K_{(N+1)n}-NK_{Nn}$, on obtient un résultat sur la convergence : si les coefficients c_n satisfont à la condition

$$\sum_{2^j}^{2^{j+1}} |c_n| = O(1) ,$$

les sommes partielles S_n convergent en tout point où les sommes de Fejér convergent, et uniformément sur tout ensemble où les sommes de Fejér convergent uniformément. Cette condition est réalisée si on a

$$\text{(H)} \qquad c_n = O\left(\frac{1}{|n|}\right)$$

et aussi si on a

$$\text{(F)} \qquad \sum |n\, c_n|^2 < \infty .$$

La condition (H) est celle de Hardy (1909). Elle est satisfaite si f est à variation bornée. On obtient ainsi, et c'est la voie la plus rapide, le théorème de Dirichlet-Jordan : la série converge vers f si f est à variation bornée, avec en tout point la condition $f(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$, et la convergence est uniforme sur tout intervalle fermé où f est continue.

La condition (F) est celle de Fejér. Fejér l'a utilisée ([2],t.I,715) pour montrer que, si $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$ est une fonction holomorphe dans le disque $|z| < 1$, continue sur $|z| \leqslant 1$, telle que l'image du disque soit d'aire bornée (sur la surface de Riemann convenable), la série de Taylor converge uniformément. C'est le cas, en particulier, si $f(z)$ donne la représentation conforme du disque $|z| < 1$ sur l'intérieur d'une courbe de Jordan simple. Ce théorème a servi à Pál ([47]), Bohr ([48]), puis Salem ([49]), à montrer que, pour toute fonction continue réelle g sur $\mathbf{T}$, il existe un homéomorphisme de $\mathbf{T}$, soit h , tel que la fonction composée $g[h(t)]$ ait sa série de Fourier uniformément convergente. Ce n'est que récemment qu'on a obtenu une démonstration de ce théorème ne reposant pas sur la représentation conforme, et permettant de traiter le cas de fonctions g à valeurs complexes ([60])[3]. Je rappelle que c'est un problème ouvert que l'existence, pour tout g, d'un h tel que la fonction composée $g[h(t)]$ ait sa série absolument convergente[4].

Fejér s'est beaucoup intéressé au comportement des sommes partielles des séries de Fourier et de Taylor. C'est un domaine où sa pensée a eu d'importants prolongements. Commençons par les séries de Taylor $\sum_0^\infty c_n z^n$, considérées sur le cercle unité ($z=e^{it}$), et leurs sommes partielles

$$S_n(t) = \sum_0^n c_m e^{imt} .$$

Un fameux exemple de Fejér ([2],t.I,680) montre que la fonction $f(z)$ peut être continue dans le disque fermé $|z| \leqslant 1$, et que les sommes partielles $S_n(t)$ peuvent diverger pour un ensemble dense de valeurs de t. On sait maintenant que les $S_n(t)$ peuvent diverger sur un ensemble de mesure nulle arbitraire (la preuve se trouve dans le livre de Katznelson ([45],58)),et on ne peut aller plus loin. En effet, dès que $\sum |c_n|^2 < \infty$, où même dès que $f(z) \in H^p$, la série converge presque partout à la frontière : c'est le célèbre théorème de Carleson (1966) ([51]), étendu par R. Hunt ([52]) aux L^p $(p > 1)$. Pour $p = 1$, l'exemple de Kolmogorov (1926) montre ([53]) qu'il existe des $f \in H^1$ telles que la série $\sum_0^\infty c_n z^n$ soit divergente pour tout z de module 1. Enfin, il existe des fonctions $f(z)$ très simples (par exemple $\frac{1}{1-z}$) telles que les S_n divergent partout à la frontière, mais les sommes de Fejér $\sigma_n = \frac{S_o+\ldots+S_{n-1}}{n}$ convergent p.p. . Il est intéressant d'étudier les S_n sous la seule condition que les σ_n convergent sur un ensemble E du cercle $|z| = 1$, de mesure > 0. Le seul résultat simple est celui de Marcinkiewicz et Zygmund (1941) ([54]) : presque partout sur E, les points d'accumulation de S_n ont la "structure circulaire", c'est-à-dire constituent une réunion de cercles centrés au point σ_n. Il serait intéressant de mieux connaître la distribution des S_n : par exemple, est-il vrai que, dans un sens à préciser, les projections des S_n sur l'ensemble de leurs points d'accumulation y sont équidistribuées ?

Venons-en aux sommes partielles des séries de Fourier

$$S_n(t) = \sum_{-n}^{n} c_m e^{imt} \quad , \quad c_m = \hat{f}(m) .$$

En dehors du théorème de Carleson, qui répond à la question posée par Fejér au début de sa thèse ([2],t.I,95), peut-on indiquer des résultats qui auraient pu intéresser Fejér ? Je me hasarderai à en présenter quelques-uns. Je me bornerai au cas de fonctions f continues sur T.

Il n'est pas possible que les modules $|S_n(t)|$ tendent vers l'infini en un point t indépendant de n. Cela résulte, dans le cas où f est réelle, du théorème de Fejér, et, dans le cas où f est complexe, du théorème de sommabilité absolue de Hardy et Littlewood, qui peut s'écrire

$$\text{(HL)} \qquad \frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1} |S_j(t)| \leqslant C\, \|f\|_\infty \qquad (\ C \text{ constante absolue}) .$$

Peut-on choisir f et une suite t_n telles que $S_n(t_n) \to \infty$? C'est en effet possible, et même de façon que $\frac{S_n(t_n)}{\log n}$ tende vers 0 aussi lentement que l'on veut (E. Busko, 1968) ([55]).

On peut poser le même problème pour une sous-suite S_{n_j} de la suite des sommes partielles. Pour $n_j = 2^j$, il existe des f continues telles que $S_{n_j}(0) \to \infty$, et même telles que $\frac{S_{n_j}(0)}{\sqrt{\log n_j}}$ tende vers 0 aussi lentement qu'on veut. En sens opposé, on a

$$\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} |S_{n_j}(t)| \leqslant C\, \|f\|_\infty \sqrt{\log n_k} \ ,$$

donc $\sqrt{\log n_j}$ joue là un rôle essentiel ([60])[5]. Quelles sont les suites n_j pour lesquelles on a l'analogue de (HL), c'est-à-dire

$$\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} |S_{n_j}(t)| \leqslant C\, \|f\|_\infty \ ?$$

Il est surprenant que, sous la simple condition de régularité que la suite n_j soit convexe, on puisse répondre complètement à la question : la condition nécessaire et suffisante est

$$\overline{\lim}\, \frac{\log n_j}{\sqrt{j}} < \infty \quad ([50])^{6} .$$

Je voudrais dire un mot de la synthèse harmonique. Historiquement, c'est par l'intermédiaire du théorème taubérien de Hardy, du théorème taubérien de Wiener, et de la structure des idéaux dans l'algèbre de convolution $L^1(R)$ que le théorème de Fejér est lié aux travaux de L. Schwartz, Malliavin, Varopoulos, etc. sur la synthèse harmonique. Dans un sens élémentaire, il est clair que le théorème de Fejér est un théorème de synthèse harmonique. L'analyse harmonique consiste à extraire d'une fonction les harmoniques qu'elle contient, en donnant à chacun le poids qui lui convient : ce programme est réalisé, pour les fonctions périodiques, par les formules de Fourier. La synthèse consiste à reproduire la fonction à partir de ses harmoniques : le théorème de Fejér est la première et la plus simple des réponses pour les fonctions continues, et il donne également la synthèse pour les espaces homogènes, comme nous l'avons vu, en particulier pour les $L^p(T)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, et pour $C(T)$. Tout au cours de sa vie, Fejér s'est préoccupé de la synthèse à l'aide de moyennes d'ordre 1, 2, 3, ... sous son aspect le plus concret : comment opérer la synthèse non seulement en assurant la convergence, mais aussi en reflétant le mieux possible les propriétés de la fonction dans les sommes qui l'approchent ?

Le procédé de Fejér est, comme nous l'avons vu, un procédé par multiplicateurs des coefficients de Fourier. On peut chercher des procédés de synthèse à l'aide de fonctions qui opèrent sur les coefficients de Fourier, c'est-à-dire au moyen de polynômes trigonométriques de la forme

$$\Sigma\, F_N(c_n)\, e^{int} .$$

Ainsi, lorsque $c_m = c_n$, on a $F_N(c_n) = F_N(c_m)$: tous les polynômes d'approximation contiennent les mêmes blocs $B_k(t)$ que les fonctions à approcher, si l'on convient d'écrire les développements sous la forme

$$\Sigma\, \gamma_k\, B_k(t) \qquad B_k(t) = e^{i\lambda_{k,1}(t)} + \dots + e^{i\lambda_{k,\nu(k)}(t)} .$$

La synthèse est possible dans L^2 avec cette condition : il suffit de choisir $F_N(z) = z$ pour $|z| \geqslant \frac{1}{N}$, et $F_N(z) = 0$ pour $|z| < \frac{1}{N}$. Par contre, elle n'est pas possible dans L^p , $p \neq 2$, ni dans C (Bachelis et Gilbert 1979). De façon plus savante, la question est celle de la structure des idéaux fermés, non plus dans les algèbres de convolution L^p $(1 \leqslant p < \infty)$ ou C , mais dans leurs sous-algèbres fermées. Comme on le voit, la question est très liée à celle des fonctions qui opèrent dans les algèbres des transformées de Fourier de ces algèbres de convolution.

Si Fejér était parmi nous, j'aurais plaisir à lui signaler deux travaux tout récents, sur des problèmes qu'il connaissait bien.

Fejér a donné en 1910 la première estimation précise des "constantes de Lebesgue"

$$L_N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{-N}^{N} e^{int} \right| dt \;=\; \frac{4}{\pi^2} \log N + O(1)$$

et c'est un sujet sur lequel lui-même et Szegö sont revenus. Il a été sûrement intéressé par la conjecture de Littlewood

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{1}^{N} e^{in_j t} \right| dt \;\geqslant\; c \log N \qquad (n_j \text{ entiers distincts})$$

ou à sa forme renforcée

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{-N}^{N} e^{in_j t} \right| dt \;\geqslant\; L_N .$$

Un grand pas en avant a été fait par S.Pichorides [7-] après les travaux sur le sujet par

P.J. Cohen, Davenport, Pichorides, Fournier - ; on en est à[5]

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{1}^{N} e^{in_j t}\right| dt \geqslant C_\varepsilon \frac{\log N}{(\log\log N)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} .$$

En 1908, en application d'un théorème sur la plus petite racine d'une équation algébrique, Fejér s'est intéressé aux séries de Taylor lacunaires de la forme

$$\text{(L)} \qquad \sum_{0}^{\infty} a_j z^{\nu_j} \qquad\qquad \left(\sum \frac{1}{\nu_j} < \infty\right)$$

et aux valeurs qu'elles prennent dans certains disques de centre 0 . Ça a été le point de départ de travaux sur les séries entières lacunaires, avec un très beau résultat de G. Pólya : si $\frac{\nu_j}{j} \to \infty$, la série entière (L) prend *toute* valeur complexe une infinité de fois. Pour les séries (L) admettant un rayon de convergence fini, par exemple $R = 1$, on a évidemment deux cas à considérer : $\Sigma\, |a_j| < \infty$ et $\Sigma\, |a_j| = \infty$. Paley a conjecturé que, pour des séries lacunaires à la Hadamard, c'est-à-dire telles que $\frac{\nu_{j+1}}{\nu_j} \geqslant q > 1$, telles que $\Sigma\, |a_j| = \infty$, chaque valeur complexe est atteinte une infinité de fois. Des solutions partielles ont été données, en particulier par G. et M. Weiss (pour q assez grand) et par W.S. Fuchs (pour $\overline{\lim}\, |a_j| > 0$). La solution complète vient d'être donnée par un jeune mathématicien japonais, Takafumi Muraī : la conjecture de Paley est bien correcte ([56]).

Je me suis étendu sur l'importance de la pensée de Fejér dans l'analyse de Fourier contemporaine. Il y aurait sans doute autant à dire sur son influence dans la théorie de l'interpolation, de la quadrature mécanique, des polynômes orthogonaux, dans la théorie de la représentation conforme, dans la théorie des opérateurs, etc.

Mais le mieux pour terminer est de recommander à tous les mathématiciens intéressés par ces sujets de se reporter aux Oeuvres de Fejér. L'édition des *Gesammelte Arbeiten* ([2]) a été un hommage éclatant à sa mémoire. Ça a été également un grand service rendu aux mathématiciens actuels et futurs. En conclusion de cet exposé, je voudrais dire notre reconnaissance à celui qui a été le principal artisan de cette édition, après avoir été l'un des continuateurs de Fejér, un mathématicien dont nous déplorons la disparition, Paul Turán[8].

BIBLIOGRAPHIE

[1] Aczél J., *Leopold Fejér. In memoriam* (Publ. mat. Debrecen, 8(1961), 1-24).

[2] Fejér L., *Gesammelte Arbeiten,* herausgegeben und mit Kommentaren versehen von Pál Turán, Basel(Birkhäuser), 1970 , p.21-27 : *Das Leben von Leopold Fejér (1880-1959).*

[3] Horváth J., *Fejér Leopold : Gesammelte Arbeiten* (Zentralblatt Math., 208(1971), 1-2).

[4] Mikolás M., *Fejér Lipót,* Dictionary of Scientific Biography, vol. IV, p.561-562, 1971 ; Index, vol.XVI, p.142, 1980, New York(Scribner).

[5] Pólya G., *Leopold Fejér* (Journal London Math. Soc., 36(1961), 501-506).

[6] Szász P., *Fejér Lipót* (Magyar Tud. Akad. mat. fiz. Oszt. Közleményei, 10(1960), 103-147).

[7] Szegö G., *Emlékezés Fejér Lipótra* (Mat. Lapok, 11(1960), 225-228).

[8] Szegö G., *Leopold Fejér : In memoriam* (Bull. Amer. Math. Soc., 66(1960), 346-352).

[9] Szegö G., *The Contributions of L. Fejér to the Constructive Function Theory,* Proceedings of the Conference on Constructive Theory of Functions, Budapest 1969, Budapest(Akad. Kiadó), 1972, p.19-26.

[10] Turán P., *Fejér Lipót matematikai munkássága* (Mat. Lipok, 1(1950), 160-169).

[11] Turán P., *Fejér Lipót* (Mat. Lapok, 11(1960), 8-18).

[12] *Mémoires présentés* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 131(1900), 825 , Commissaires Poincaré et Picard).

[13] Fejér L., *Sur les fonctions bornées et intégrables* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 131(1900), 984-987 ; Note présentée par E. Picard) = [2] ,t.I, p.37-41.

[14] Hurwitz A., *Über die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen* (Math. Ann., 57(1903), 425-446) = Math. Werke, Band I, S. 555-576, Basel(Birkhäuser), 1932.

[15] Lebesgue H., *Sur une condition de convergence des séries de Fourier* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 140(1905), 1378-1381) = Oeuvres sci., vol.III, p.95-98, Genève(Enseign. math.), 1972.

[16] Lebesgue H., *Recherches sur la convergence des séries de Fourier* (Math. Ann., 61(1905), 251-280) = Oeuvres sci., vol. III, p.181-210, Genève(Enseign. math.), 1972.

[17] de la Vallée Poussin C., *Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leurs dérivées par des polynômes et des suites limitées de Fourier* (Acad. Royale Belgique, Bull. Classe Sci., 1908, 193-254 ; en particulier p.245).

[18] Hardy G.H., *On the Summability of Fourier's Series* (Proceed. London Math. Soc., (2), 12(1913), 365-372) = Collected Papers, vol.III, p.118-125, Oxford (Clarendon Press), 1969.

[19] Hardy G.H. et Littlewood J.E., *Sur la série de Fourier d'une fonction à carré sommable* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 156(1913) 1307-1309) = Hardy G.H., Collected Papers, vol.III, p.126-128, Oxford(Clarendon Press), 1969.

[20] Dirichlet Lejeune P.G., *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données* (Journal reine angew. Math., 4(1829), 157-169) = Werke, Band I, p.117-132, Berlin(Reimer), 1889.

[21] de la Vallée Poussin C., *Cours d'analyse infinitésimale*, Louvain(Uystruyst-Dieudonné).

[22] Hadamard J., *Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 122(1896), 1470-1473) = Oeuvres, vol. I, p.183-186, Paris(CNRS), 1968.

[23] de la Vallée Poussin C., *Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers* (Ann. Soc. Sci. Bruxelles, 20(1896), A 100-101 , B 183-256, 281-397 ; 21(1897), A XXIII, 1-13 , 60-72, B 251-368).

[24] Weierstrass K., *Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen,* Math. Werke, Band II, S.71-74, Berlin(Mayer und Müller), 1895.

[25] du Bois-Reymond P., *Über die Fourier'schen Reihen* (Götting. Nachr., 1873, 571-582).

[26] Hermite C. et Stieltjes T.J., *Correspondance*, t.II, Paris(Gauthier-Villars), 1905.

[27] Picard E., *Traité d'analyse*, t.I , Paris(Gauthier-Villars), 1891.

[28] de la Vallée Poussin C., *Sur quelques applications de l'intégrale de Poisson* (Ann. Soc. Sci. Bruxelles, 17(1893), B 18-34).

[29] Hurwitz A., *Sur les séries de Fourier* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 132(1901), 1473-1475) = Math. Werke, Band I, p.506-508, Basel(Birkhäuser), 1932.

[30] Abel N.H., *Recherches sur la série* $1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^3 + \ldots$ (Journal reine angew. Math., 1(1826), 311-339) = Oeuvres complètes, éd. Sylow et Lie, t.I, 219-250, Kristiania(Grøndhal), 1881.

[31] Poisson S.D., *Mémoire sur les intégrales définies et sur la sommation des séries* (Journal Ecole roy. Polytechnique,12(1823), 19e Cahier, 404-509).

[32] Frobenius F.G., *Über die Leibnitzsche Reihe* (Journal reine angew. Math., 89(1880), 262-264) = Gesamm. Abhandl., Band II, S.8-10, Berlin(Springer), 1968.

[33] Hölder O., *Grenzwerthe von Reihen an der Convergenzgrenze* (Math. Ann., 20(1882), 535-549).

[34] Cesàro E., *Sur la multiplication des séries* (Bull. Sci. Math., (2), 9(1890), 114-120) = Opere scelte, vol.I, parte secunde, p.355-361, Roma(Ed.Cremonese), 1965.

[35] Borel E., *Sur la sommation des séries divergentes* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 121(1895), 1125-1127) = Oeuvres,t.I, p.407-409, Paris(CNRS), 1972.

[36] Schwarz H.A., *Zur Integration der partiellen Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (Journal reine angew. Math., 74(1872), 218-253) = Gesamm. math. Abhandl., Band II, S.175-210, Berlin(Springer), 1890.

[37] Riemann B., *Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* (Abh. K. Gesell. Wiss. Gött. Math. Classe, 13(1866-1867), 87-132) = Gesamm. math. Werke, S.227-271, New York(Dover), 1953 = trad. française : *Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique* (Bull. Soc. Math. France, 5(1873), 20-48, 79-96) = Oeuvres math., p.225-279, Paris(Blanchard), 1968.

[38] Cantor G., *Gesammelte Abhandlungen*, Berlin(Springer), 1932.

[39] Weierstrass K., *Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen reeller Argumente* (Sitzungsber. K. Pr. Akad. Wiss. Berlin, 1885, 633-639, 789-805) = Math. Werke, Band III, S.1-37, Berlin(Mayer und Müller), 1903 = trad. française : *Sur la possibilité d'une représentation analytique des fonctions arbitraires d'une variable réelle* (Journal math. pures appl., (4), 2(1886), 105-138).

[40] Lebesgue H., *Intégrale, longueur, aire* (Annali Mat. Pura Appl., (3), 7(1902), 231-359) = Oeuvres sci., vol.I, p.201-331, Genève(Enseign. math.), 1972.

[41] Zygmund A., *Trigonometric Series*, Cambridge(University Press), 1959.

[42] Szegö G., *Orthogonal Polynomials*, fourth edition, Providence(Amer. Math. Soc.), 1975.

[43] Feldheim E., *Théorie de la convergence des procédés d'interpolation et de quadrature mécanique*, Mémorial des Sciences mathématiques, fascicule XCV, Paris(Gauthier-Villars), 1939.

[44] *20-Volume Author Index of Mathematical Reviews 1940-1959*, Providence(Amer. Math. Soc.), 1961.

[45] Katznelson Y., *An Introduction to Harmonic Analysis*, New York(Wiley), 1968.

[46] de la Vallée Poussin C., *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle*, Paris(Gauthier-Villars), 1919.

[47] Pál J., *Sur des transformations de fonctions qui font converger leurs séries de Fourier* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 158(1914), 101-103).

[48] Bohr H., *Über einen Satz von J. Pál* (Acta Univ. Szeged, Sect. Sci. Math., 7(1934-1935), 129-135) = Collected Math. Works, vol.III, E.13, København (Dansk Mat. Forening), 1952.

[49] Salem R., *On a Theorem of Bohr and Pál* (Bull. Amer. Math. Soc., 50(1944), 579-580) = Oeuvres Math., p.334-335 , Références et errata, p.5 , Paris (Hermann), 1967.

[50] Long Jui-Lin, *Sommes partielles de Fourier des fonctions bornées* (Bull. Sci. Math.) (à paraître).

[51] Carleson L., *On Convergence and Growth of Partial Summs of Fourier Series* (Acta math., 116(1966), 135-157).

[52] Hunt R.A., *On the Convergence of Fourier Series*, Orthogonal Expansions and their Continuous Analogues, p.235-256, Southern(University Press), 1968.

[53] Kolmogorov A., *Une série de Fourier-Lebesgue divergente partout* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 183(1926), 1327-1328).

[54] Marcinkiewicz J. and Zygmund A., *On the Behavior of Trigonometric Series and Power Series* (Trans. Amer. Math. Soc., 50(1941), 407-453) = Marcinkiewicz J., Collected Papers, p.609-654, Warszawa(Panst. Wydaw. Naukowe), 1964.

[55] Busko E., *Sur le comportement dans* $L^{\infty}(T)$ *des sommes partielles de Fourier* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, A, 266(1968), 17-20).

[56] Muraî T., *The Value Distribution of Lacunary Series and a Conjecture of Paley* (Ann. Inst. Furier, 31(1981)).

[57] Hardy G.H., *Note on Divergent Fourier Series* (Messenger of Mathematics, 33(1904), 137-144) = Collected Papers, vol.III, p.110-117, Oxford (Clarendon Press), 1969.

[58] Hurwitz A., *Sur le problème des isopérimètres* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 132(1901), 401-403) = Math. Werke, Band I, p.490-491, Basel(Birkhäuser), 1932.

[59] Tucciarone J., *The Development of the Theory of Summable Divergent Series from 1880 to 1925* (Archive for History of Exact Sciences, 10(1973), 1-40).

[60] Kahane J.-P. et Katznelson Y., *Séries de Fourier des fonctions bornées*, à paraître dans *Studies in Pure Mathematics, to the Memory of Paul Turán*, Basel(Birkhäuser et Académie des Sciences de Hongrie). Prépublications du département de mathématiques d'Orsay n° 337, 4^{e} trimestre 1978.

NOTES

1 Communication orale.

2 La leçon me paraît particulièrement importante à méditer en France en ce moment. Si l'on veut développer - ou seulement maintenir - la production mathématique française, il faut publier en français, traduire en français, etc.

3 Saakian, à Moscou, a obtenu le même résultat.

4 Des solutions négatives viennent d'être apportées, indépendamment, par A.M. Olevskii (Doklady AN SSSR 256, n° 2, 284-287) et J.-P. Kahane et Y. Katznelson (C.R. Acad. Sci. Paris, 19 janvier 1981)[9] ; ces derniers trouvent un contre-exemple sous la forme d'une fonction g complexe, tandis qu'Olevskii trouve une fonction g réelle. La solution complète est donc celle d'Olevskii.

5 Voir aussi l' "appendice" de [60] par L. Carleson.

6 Fin 1980, on annonçait que Koniaguine, à Moscou, avait résolu le problème ; la méthode de Koniaguine utilise celle de Pichorides. Début 1981, une solution toute différente, très simple et élégante, a été donnée par C. Mc Gehee, L. Pigno et B. Smith.

7 S. Pichorides : *On the L^1-norm of Exponential Sums* (Ann. Inst. Fourier, 30(1980)).

8 *P. Turán (1910-1976) Memorial Volume* (Journal of Approximation Theory, 29(1980)).

9 J.-P. Kahane et Y. Katznelson, Homéomorphismes du cercle et séries de Fourier absolument convergentes (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 292(1981), série I, 271-273).