

PAUL DUBREIL

**Apparition et premiers développements de la théorie
des demi-groupes en France**

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1^{re} série, tome 2 (1981), p. 59-65

http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1981__2_59_0

© Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

APPARITION ET PREMIERS DEVELOPPEMENTS DE LA THEORIE DES
DEMI-GROUPES EN FRANCE

par Paul DUBREIL¹

1. 1904 : un précurseur, J.A. de SEGUIER.

Comme le signalent A.H. CLIFFORD et G.B. PRESTON dans les premières lignes de leur *Algebraic Theory of Semigroups* (Providence(American Mathematical Society), 1961), c'est J.A. de SEGUIER qui, en 1904, dans ses *Eléments de la Théorie des Groupes abstraits* (p.6 à 9), prononce pour la première fois le mot de semi-groupe². Il entend par là un ensemble muni d'une loi de composition associative et vérifiant la règle de simplification : $ax = bx$ entraîne $a = b$, et de même $ya = yb$ entraîne $a = b$. Il montre de plus qu'un *semi-groupe fini est un groupe*.

Notons que de SEGUIER a voulu aussi donner un nom à un ensemble muni d'une loi associative, sans plus. Mais il propose celui de *corps* qui devait être utilisé dans un autre sens, en 1910, par STEINITZ dans sa célèbre *Algebraische Theorie der Körper* (Journal de Crelle, t.137)³. En 1940, dans mon premier travail⁴, j'ai employé le terme de demi-groupe pour laisser à celui de semi-groupe le sens que de SEGUIER lui avait attribué et que MALCEV devait adopter à son tour⁵.

Ces questions de terminologie mises à part - elles n'ont d'ailleurs qu'un intérêt secondaire - ce qui inspire de SEGUIER au début de son livre, ce sont les travaux que viennent de publier (1902) quelques mathématiciens américains, en particulier HUNTINGTON et MOORE⁶, sur l'axiomatique des groupes. Ces travaux ont un double intérêt : d'abord celui de manifester le souci d'établir la non-contradiction et l'indépendance des axiomes, puis celui de mettre en pleine lumière, dans le cas des groupes, le rôle de l'associativité. Car, si environ soixante-dix ans se sont écoulés, à ce moment, depuis la découverte de la notion de groupe par Galois, celui-ci et ses successeurs (au début fort espacés dans le temps) ont travaillé avec des groupes de "substitutions" ou de "transformations" dont la composition est, *ipso facto*, associative : aussi l'associativité était-elle passée sous silence.

Finalement, c'est seulement en 1928 qu'apparaît vraiment, en U.R.S.S., la théorie des demi-groupes, avec un premier travail de A. SUSCHKEWITSCH intitulé : *Ueber die endlichen Gruppen ohne das Gesetz der eindeutigen Umkehrbarkeit* (Math. Ann., t.99, pp.30-50).

2. 1940 : le terme d'un long cheminement.

Pour répondre à votre attente, je voudrais expliquer maintenant comment j'ai été

amené à m'intéresser aux demi-groupes.

A la fin de 1927, après l'agrégation et le service militaire, je reviens à l'Ecole Normale comme "agrégé-préparateur". Mes fonctions ne sont pas lourdes : séances de problèmes aux élèves et surveillance de la bibliothèque des Sciences. Le gros travail est personnel : préparation d'une thèse. Il est admis, à cette époque, qu'on ne va pas trouver un "patron" pour lui demander un sujet. Les jeunes éprouvent d'ailleurs le besoin de changer d'air et s'intéressent volontiers à ce qu'on fait à l'étranger. Un de mes amis, Marcel LEGAUT, mon ancien de quelques années, venait de soutenir une thèse de Géométrie algébrique "à l'italienne" : *Sur les systèmes de points du plan. Application aux courbes gauches algébriques* (Annales Fac. Sci. Univ. Toulouse sci. math. et phy., (3), 16(1924), 29-133). Chargé du cours Peccot au Collège de France, - série de leçons attribuée chaque année à un jeune docteur de mathématiques - il avait exposé son travail devant un auditoire composé principalement de normaliens, dont j'étais. Auparavant, j'avais suivi, avec un intérêt très vif, un cours d'Emile PICARD sur les fonctions algébriques et les intégrales abéliennes et j'avais été frappé par les théorèmes de NOETHER sur la réduction des singularités des courbes algébriques planes. Pour ces raisons, je pris la décision de faire de la Géométrie algébrique et j'entrepris de lire un livre d'ENRIQUES et CHISINI, traduit en français par LEGAUT : *Courbes et fonctions algébriques d'une variable* (Paris(Gauthier-Villars), 1926). Mais cette lecture me donnait beaucoup de mal. Il m'arrivait trop souvent de ne pas être vraiment convaincu par les démonstrations et je finissais par être las de consacrer de grands efforts à de petites mises au point. J'avais commencé d'autre part à chercher une méthode efficace pour mieux déterminer la multiplicité de NOETHER, pour l'intersection de deux courbes algébriques planes ("théorème $Af+B\varphi$ "). A ce moment, André WEIL, revenant d'Allemagne, me parla d'Emmy NOETHER et de son élève van der WAERDEN et celui-ci m'envoya ses travaux récents, en particulier *Nullstellentheorie der Polynomideale* (Math. Ann., t.96, 1927, pp.183-208). Je lus ce mémoire avec enthousiasme et, dans l'année qui suivit, je pus achever une thèse, soutenue en octobre 1930 et publiée au Journal de Mathématiques pures et appliquées qui était alors dirigé par Henri VILLAT⁷.

Une bourse de la Fondation Rockefeller me permit de passer à l'étranger les quatre semestres des années 1929-30 et 1930-31 : le premier à Hambourg où je fus l'élève d'Emil ARTIN, le deuxième à Francfort-sur-le Main avec Emmy NOETHER, le troisième avec ENRIQUES et, d'une façon plus lointaine mais très efficace, avec SEVERI, le quatrième à Göttingen, de nouveau avec Emmy NOETHER. Je pus constater que les Géomètres italiens avaient une aussi grande admiration pour Emmy NOETHER que pour son père Max, et, avec beaucoup d'à propos, ils me poussèrent à m'intéresser à des problèmes que les méthodes algébriques, en particulier la théorie des idéaux, avaient quelques chances de maîtriser.

Revenu en France et chargé à mon tour du cours Peccot, ce furent naturellement ces

méthodes algébriques et ces résultats géométriques que je m'efforçai d'exposer, devant quelques camarades normaliens un peu plus jeunes, parmi lesquels se trouvait Jean LERAY. Celui-ci eut l'occasion d'en parler à notre maître commun Gaston JULIA qui eût vite fait de me demander de rédiger un fascicule pour sa collection des "Cahiers scientifiques"⁸.

Moderne Algebra de van der WAERDEN, paru quelques années auparavant, était pour moi un modèle et une précieuse source de renseignements. C'est précisément ce livre qui a attiré mon attention sur les semi-groupes à propos de l'immersion d'un domaine d'intégrité dans un corps. Dans sa première édition, van der WAERDEN ajoute au texte cette petite note⁹ : "La possibilité de plonger des anneaux non commutatifs sans diviseurs de zéro dans un corps les contenant est un problème non résolu, sauf dans des cas tout à fait particuliers." Dans la deuxième édition (1937), je pus remarquer que la note précédente était remplacée par¹⁰ : "Pour des anneaux commutatifs sans diviseurs de zéro, ce théorème n'est pas valable, voir A. MALCEV, Math. Ann. 113(1936)."

Ce travail de MALCEV, intitulé *On the immersion of an algebraic Ring into a Field*, est effectivement présenté comme une réponse à la question soulevée par van der WAERDEN dans sa première note : *In this way*, écrit MALCEV (p.687), *a problem mentioned by van der WAERDEN finds its solution*. Chez MALCEV, le point de vue multiplicatif est absolument dominant : il commence en effet par constater qu'un semi-groupe^{*} ne peut être plongé dans un groupe que s'il vérifie la "condition Z" suivante :

$$\begin{aligned} \text{les égalités } ax = a'x', \quad bx = b'x', \quad ay = a'y' \\ \text{entraînent : } by = b'y'. \end{aligned}$$

Puis il construit un semi-groupe H ne vérifiant pas cette condition. L'algèbre de H sur le corps des rationnels est alors un anneau sans diviseurs de zéro qui ne peut pas être plongé dans un corps. En passant, MALCEV signale (p.686) que SUSCHKEWITSCH a publié en 1935, à la Société mathématique de Kharkov, un résultat sur l'immersion d'un semi-groupe dans un groupe et que, d'après ce que lui-même vient de montrer : *Professor SUSCHKEWITSCH result fails to be true*.

Notons enfin que MALCEV annonce qu'il a obtenu un système de conditions nécessaire et suffisant pour qu'un semi-groupe puisse être plongé dans un groupe : il les publiera en 1939 et 1940 au Math. Sbornik de Moscou¹¹. A cause de la guerre, je ne les connus que plus tard.

Mais la double empreinte laissée dans mon esprit par les leçons d'ARTIN (théorie d'ARTIN-PRUFER) et par celles d'Emmy NOETHER (utilisation systématique des homomorphismes) m'a suggéré qu'un autre procédé pour obtenir un groupe à partir d'un demi-groupe (quelconque cette fois) était la recherche de ce groupe comme image homomorphe. J'entrepris donc de définir par les congruences associées les homomorphismes envoyant un

* Au sens de demi-groupe vérifiant la règle de simplification (ou loi de cancellation).

demi-groupe donné D sur un groupe. Le problème est facile quand D est abélien, classique et élémentaire quand D est lui-même un groupe, et, dans tous les cas, il admet la solution triviale dans laquelle l'image est d'ordre 1 : la question paraissait abordable. Mes réflexions en étaient là le premier septembre 1939 ...

N'ayant pas été fait prisonnier et ayant pu, non sans peine, regrouper ma famille, je me retrouvai à Paris en septembre 1940, avec un grand désir de me remettre au travail. M'inspirant des quotients d'idéaux efficacement utilisés par KRULL en 1923 (*Ein neuer Beweis für die Hauptsätze der allgemeinen Idealtheorie*, Math. Ann., t.90, pp.55-64) je pus définir les équivalences principales. Je commençais à obtenir quelques résultats quand Henri VILLAT et Gaston JULIA me demandèrent, d'une façon pressante, de rédiger quelque chose, et même quelque chose d'aussi long que possible (!) pour une publication immédiate (!). C'est qu'avec la guerre et la défaite, la production scientifique française était brutalement tombée à zéro et le personnel de l'imprimerie GAUTHIER-VILLARS, formé de typographes expérimentées qui, par leur âge, avaient échappé à la mobilisation et à la captivité, se trouvait sans travail. En décembre 1940, après deux mois d'efforts soutenus, mon manuscrit pouvait être envoyé aux Mémoires de l'Académie des Sciences. Il sortit au début de 1941¹². Grâce aux stocks de GAUTHIER-VILLARS, le papier était encore d'une qualité magnifique ... Tout récemment, à la fin d'une conférence qu'il donnait à l'Institut Henri Poincaré, notre ami Mario PETRICH s'étonnait qu'en des circonstances catastrophiques "il y ait pu ainsi y avoir des gens qui faisaient tranquillement des mathématiques". Tranquillité plutôt relative, on vient de le voir, et, sans des réserves biologiques qui devaient fondre rapidement, les ruitabagas de l'hiver 1940-41 ne m'auraient certainement pas permis cet effort !

3. Après 1941.

Les années qui suivirent furent difficiles, les conditions de vie étaient dures et, beaucoup de collègues étant prisonniers, les tâches d'enseignement devenaient de plus en plus lourdes à mesure que les générations nouvelles arrivaient. En 1943, alors que j'avais repris mes fonctions de professeur à Nancy, on me demanda d'assurer en outre un service de maître de conférences à Polytechnique et un enseignement de Calcul différentiel et intégral à l'Ecole Normale Supérieure de Saint-Cloud. J'eus raison d'accepter puisque parmi mes élèves de Saint-Cloud se trouvaient CROISOT et LEFEBVRE. Après l'agrégation, tous deux partirent dans l'enseignement secondaire mais CROISOT eut très vite le désir de préparer une thèse et prit un poste d'assistant à l'Université de Poitiers où le département de mathématiques était dirigé par M.L. DUBREIL-JACOTIN. C'est après avoir fait une thèse sur les treillis semi-modulaires qu'il s'intéressa aux demi-groupes¹³.

Déjà, au Séminaire d'Algèbre et de Théorie des Nombres fondé en 1947 par Albert CHATELET, une première conférence sur les demi-groupes avait été faite, en 1951, par Marianne TEISSIER¹⁴. En 1953-54, un groupe d'études sur les demi-groupes fut annexé au Séminaire. Les participants étaient CROISOT, RIGUET, Marianne TEISSIER, THIBAUT et THIERRIN¹⁵. Plus tard, LEFEBVRE fit à son tour une thèse sur les demi-groupes¹⁶, il est maintenant professeur à l'Université de Lyon tandis que CROISOT, professeur à l'Université de Besançon, fut victime d'un tragique accident de montagne au moment où il était en pleine production scientifique.

Mais la vie m'apporte aujourd'hui la grande joie de retrouver ici deux autres anciens élèves qui m'ont donné aussi de grandes satisfactions : GRILLET et LALLEMENT, professeurs le premier à Tulane, le deuxième à l'Université de Pennsylvanie.

On trouvera dans les recueils du Séminaire beaucoup d'autres renseignements concernant l'activité scientifique, mes autres élèves et nos visiteurs étrangers : c'est ainsi qu'au printemps 1962 le professeur CLIFFORD nous donna deux conférences sur "La décomposition d'un demi-groupe commutatif en ses composantes archimédiennes" et "Les caractères d'un demi-groupe commutatif"¹⁷.

NOTES DE LA REDACTION

- 1 Conférence donnée en septembre 1978 à l'Université de Tulane, à l'occasion du colloque organisé pour les 70 ans de A.H. Clifford. P. Dubreil fera le 13 mai 1981 au Séminaire d'Histoire des mathématiques un exposé sur *L'algèbre en France de 1900 à 1935*.
- 2 Sur J.A. de Séguier (1862-1937) voir Poggendorff, *Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften*, t. IV, p.1381, t.V, p.1420 et t.VI, p.2407.

Il a passé sa thèse le 27 juin 1894, et C. Hermite écrit dans son rapport du 24 janvier 1894 (Archives Nationales A J ¹⁶ 5535) :

"La thèse présentée à la Faculté par M^r de Ségier, qui a pour titre "Sur deux formules fondamentales dans la théorie des formes quadratiques et de la multiplication complexe d'après Kronecker", est un travail considérable où sont exposés les principes nouveaux, fondés sur la théorie des fonctions elliptiques que Kronecker a introduit dans la théorie des nombres, et les découvertes qui en ont été la conséquence. Ces découvertes comptent parmi les plus belles et les plus intéressantes de l'analyse de notre époque.

[[...]]

La thèse présentée à la Faculté s'étend beaucoup au-delà de son titre, elle témoigne de connaissances approfondies en analyse et dans la théorie des nombres, elle rendra un service signalé en faisant connaître des travaux restés presque ignorés en

France, malgré leur grand mérite, elle contribuera à donner aux études arithmétiques l'impulsion dont elles ont besoin."

3 Notion définie par de Séguier p.7 de son livre.

E. Steinitz écrit (p.167) dans son article (Journal für die reine und angewandte Mathematik, 137(1910), 167-309) qu'il utilise le mot "corps" (*Körper*) dans le même sens que H. Weber dans son article *Die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie* (Mathematische Annalen, 43(1893), 521-549), c'est-à-dire au sens actuel de ce mot. C'est Dedekind qui a introduit pour la première fois cette notion et ce mot, en 1871, dans le X^e supplément de la deuxième édition des *Vorlesungen über Zahlentheorie* (§ 159) de P.G. Lejeune Dirichlet, comme le note d'ailleurs Weber dans le tome I, p.491, de son *Lehrbuch der Algebra*, 2^e éd., Braunschweig(Vieweg), 1898 (p.523 de la traduction française, *Traité d'algèbre supérieure*, Paris(Gauthier-Villars), 1898).

4 P. Dubreil, *Contribution à la théorie des demi-groupes* (Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France, (2), 63(1941), 1-33).

5 A. Malcev, *On the Immersion of Algebraic Ring into a Field* (Mathematische Annalen, 113(1937), 686-691). Malcev donne p.686 la définition d'un *semigroup*, en renvoyant à "O. Schmidt, The Abstract Theory of Groups (in russian), Kiev, 1916, p.58".

6 Cités par de Séguier p.8 de son livre :

E.V. Huntington, *Simplified Definition of a Group* (Bulletin of the American Math. Society, 8(1902), 296-300) ;

E.H. Moore, *A Definition of Abstract Groups* (Transactions of the Amer. Math. Soc., 3(1902), 485-492).

7 P. Dubreil, *Recherches sur la valeur des exposants des composants primaires des idéaux de polynomes* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, (9), 9(1930), 231-309).

8 P. Dubreil, *Algèbre, tome I : Equivalences, opérations. Groupes, anneaux, corps*, 1^e éd., Paris(Gauthier-Villars), 1946, 2^e éd., 1954.

9 B.L. van der Waerden, *Moderne Algebra*, t.I, p.49, Berlin(Springer), 1930.

10 2^e éd., traduction anglaise, t.I, p.40, New York(Ungar), 1949.

11 A. Мальцев, О включении ассоциативных систем в группы (Матем. сборник, 6(48) (1939), 331-336 ; 8(50) (1940), 251-264).

12 Voir la note 4.

13 Voir *20-Volume Author Index of Mathematical Reviews 1940-1959, Part I*, p.394, Providence(Amer. Math. Society), 1961.

14 M. Teissier, *Application des méthodes de la théorie des anneaux à l'étude des demi-groupes*, Séminaire d'Algèbre, Albert Châtelet et Paul Dubreil, 5(1951-1952), Secrétariat mathématique, Paris.

15 Volume 7(1953-1954) du Séminaire d'Algèbre.

- 16 P. Lefebvre, *Sur certaines conditions minimales en théorie des demi-groupes* (Annali di Matematica pura ed applicata, (4), 59(1962), 77-163).
- 17 Séminaire P. Dubreil, M.-L. Dubreil-Jacotin et C. Pisot, 15(1961-1962), Algèbre et Théorie des nombres, fascicule 2, Paris(Secrétariat mathématique), 1963.