Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques

Hélène Gispert

Correspondance de Fréchet (1907-1926) et son apport à la théorie de la dimension (avec 3 lettres de Brouwer à Baire)

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1re série, tome 1 (1980), p. 69-120

<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1980__1__69_0>

CORRESPONDANCE DE FRECHET (1907-1926) ET SON APPORT A LA THEORIE DE LA DIMENSION*

(avec 3 lettres de Brouwer à Baire)

par Hélène GISPERT

L'étude que nous poursuivons[1] de la correspondance[2] entre Maurice Fréchet et un certain nombre de mathématiciens, dans les trente premières années de ce siècle, a permis de dégager des caractéristiques intéressantes. Loin d'être un échange décousu et éclectique, il apparaît dès les premières années une ligne de force qui ne peut étonner vu les travaux de Fréchet et qui justifie de cette publication : les questions de la dimension.

Nous avons donc trouvé nécessaire de regrouper ces lettres et de les publier, jugeant qu'elles aidaient à mieux comprendre l'évolution mathématique et historique du concept de la dimension.

Fréchet reçut[3] les lettres que nous publions entre 1907 et 1926, l'essentiel de cette correspondance ayant été écrit avant 1926. Le nombre et l'importance des correspondants de Fréchet, ainsi que la richesse du contenu de leurs lettres, permettent de suivre, et même souvent de retracer, l'histoire de la notion de dimension et le rôle de chacun.

Mais avant de passer à l'analyse de cette correspondance, de cette histoire, nous allons exposer l'état de la question au moment des premiers échanges, donc avant 1907, et jusqu'en 1926, année des dernières lettres.

Nous renvoyons, pour un exposé de la partie 1877-1900, aux études de Dauben ([23]), Dugac ([24]) et à la première partie de l'étude de Johnson ([50]), la seconde n'étant pas parue au moment de la rédaction de cet article.

C'est Cantor qui, en établissant en 1877 l'existence d'une correspondance bijective entre les points de la droite et ceux du plan ([20]), fit surgir la question de la dimension d'un espace et son invariance.

Comme le faisait remarquer Riemann en 1854 dans son article Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie, publié en 1867, "le concept général des grandeurs de dimensions multiples, comprenant comme cas particulier les grandeurs spatiales, n'a jamais été l'objet d'aucune étude".[4] Cette étude, qui fut donc lancée par Cantor, devait occuper régulièrement pendant cinquante ans un grand nombre de mathématiciens parmi les plus importants.

---

* Nous remercions particulièrement Monsieur Kahane qui nous suggéra de travailler sur l'histoire de la dimension et nous permit de commencer cette recherche. Nous tenons également à remercier M. Arboleda qui nous proposa de nous associer à son travail sur le fonds Fréchet de l'Académie des Sciences de Paris.

Riemann définissait une multiplicité n fois étendue par le fait que la localisation d'un point s'exprime par la détermination de n grandeurs. Cette définition, tout à fait naturelle, fut remise en question par la découverte de Cantor qui montra qu'on pouvait définir les points d'un carré à l'aide d'une seule coordonnée.[5] Il fallait donc préciser le concept de dimension.

Les mathématiciens pressentirent tout de suite que la continuité était la clef du problème. Riemann d'ailleurs dans sa définition considérait implicitement la continuité comme naturelle, utilisant un procédé continu pour le passage de n-1 à n, mais sans l'expliciter, ni le justifier. La découverte de Cantor provoqua une réelle surprise.[6]

Dedekind, avec qui Cantor correspond fréquemment en 1877, fut le premier à expliciter le rôle que joue la continuité et à formuler un premier énoncé d'un théorème d'invariance topologique de la dimension.[7]

Répondant à Cantor, il écrit dans une lettre du 27 Octobre 1877 :

"Je crois que le concept du nombre de dimensions reçoit réellement son caractère d'invariant par la condition de la correspondance continue."

Mais Dedekind, pris par d'autres travaux, ne cherchera pas à démontrer les idées qu'il expose dans ses lettres.

Par contre, dès la parution de l'article de Cantor de 1878 ([20]), plusieurs mathématiciens[8] s'attaquèrent au problème de l'invariance de la dimension, cherchant à montrer l'impossibilité d'un homéomorphisme entre $\underline{R}^n$ et $\underline{R}^p$ pour n différent de p, souvent pour des cas particuliers.

Ils cherchèrent en raisonnant par l'absurde à mettre en défaut soit la bijectivité, soit la continuité de l'application. Aucune de ces démonstrations n'est satisfaisante. Certaines sont fausses, mais beaucoup ont le défaut de considérer comme acquis et d'utiliser des propriétés non démontrées des applications ou des espaces. On ne disposait pas encore des outils topologiques indispensables à une démonstration rigoureuse.[9] Ce sont ces recherches qui ont contribué de façon décisive à la naissance de la topologie.

Cependant, pour les lecteurs de 1880, la question était résolue : l'invariance, c'est-à-dire la non-existence d'une application à la fois bijective et continue entre $\underline{R}^n$ et $\underline{R}^p$, était "démontrée" par au moins deux auteurs, Netto et Cantor.

Il est à remarquer que la plupart de ces mathématiciens ne se posent pas la question de la définition même de la dimension. C'est un trait général des recherches sur la dimension, ou plutôt sur l'invariance de la dimension. Il faudra attendre un article de Brouwer de 1913 ([17]) pour avoir une définition mathématique de la dimension explicitement formulée, qui reprendra des idées exprimées par Poincaré en 1903.

Dans son mémoire de 1878 ([71]), Netto propose cependant une caractérisation d'une "variété de degré ν " (<u>Mannigfaltigkeit ν^{ten} Grades</u>) et propose en quelque sorte une première définition topologique de la dimension ; il montre que dans une variété de degré ν tout domaine de degré ν est borné par un autre domaine de degré inférieur et, dans une variété de degré $\nu+1$, tout "domaine" (Gebilde) de degré ν est confondu avec sa frontière.[10]

L'étape suivante dans l'histoire de la démonstration de l'invariance de la dimension fut la publication en 1890 de la courbe de Peano ([73]) et en 1877 du théorème de Jordan ([51]) sur le partage du plan par une courbe continue, ici une courbe simple.

La courbe de Peano, "courbe qui remplit toute une aire plane", montrait l'existence d'une application continue surjective d'un intervalle sur un carré et contredisait une des premières idées de Cantor selon laquelle il ne pouvait exister d'application continue entre la droite et le plan. Les liens entre la dimension, la bijectivité et la continuité étaient plus complexes !

Camille Jordan démontrait, dans son théorème, que "toute courbe continue C divise le plan en deux régions, l'une extérieure et l'autre intérieure, cette dernière ne pouvant se réduire à zéro, car elle contient un cercle de rayon fini" ([51],593). Ce théorème, fondamental pour la démonstration de l'invariance de la dimension, est un des outils topologiques qui manquèrent aux auteurs des années 1878-1879.

Mais cette étape, malgré la notoriété de la courbe de Peano, ne provoqua pas de nouvelles publications et il fallut attendre 1899 pour que Jürgens ([53]), un des auteurs de 1878-1879, repose la question dans un article critiquant toutes les démonstrations antérieures et faisant une analyse très fine des difficultés mathématiques auxquelles se sont heurtés entre autres Cantor et Netto.

La même année, Schoenflies fut le premier à utiliser le théorème de Jordan pour démontrer l'invariance du domaine dans le plan et, de là, l'invariance de la dimension dans ce cas particulier ([79]).

Mais, au début du siècle, le problème général n'était toujours pas résolu et aucun pas décisif ne sera fait jusqu'en 1907, année où René Baire publie ses deux notes sous le même titre "Sur la non-applicabilité de deux continus à n et n+p dimensions", publiées respectivement dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris et dans le Bulletin des Sciences mathématiques ([6],[7]). C'est d'ailleurs sur l'annonce à Fréchet de cette publication que s'ouvre la correspondance présentée ici.

Avant René Baire, Lüroth en 1899, puis en 1906 ([64]), s'était de nouveau attaché à la démonstration, ne réussissant pas, selon son propre aveu, à généraliser la démonstration qu'il avait trouvé pour des cas particuliers.

Il faut également signaler, pendant cette période, deux contributions originales, dont une surtout aura une importance considérable. Il s'agit tout d'abord d'un article de Henri Poincaré paru en 1903 dans la Revue de Métaphysique et de Morale sous le titre "L'espace et ses trois dimensions" et repris dans son ouvrage "La valeur de la science" paru en 1905 ([74]).[11]

Dans ce texte, Poincaré élabore la première définition moderne de la dimension au moyen de la notion de coupure :

"Si le continu C peut être divisé par des coupures qui ne forment pas elles-mêmes un continu, ce continu n'a qu'une dimension ; dans le cas contraire, il en a plusieurs. Si, pour diviser C, il suffit d'une coupure formant un cotinu à 1 dimension, C aura 2 dimensions ; s'il suffit d'une coupure formant un continu à 2 dimensions C aura 3 dimensions, etc. ... "

Si Poincaré fut le premier à formaliser cette définition, d'autres avant lui avaient saisi l'importance de la notion de "coupure", liée très étroitement à celles de frontière et de connexité.

Dans toutes les tentatives de 1878-1879, où on suppose la continuité de l'application de $\underline{R}^n$ dans $\underline{R}^p$ pour aboutir à l'impossibilité de sa bijectivité, on retrouve cette notion.

Les démonstrations de Netto, des paragraphes 2 et 3 de son article de 1878 par exemple, montrent bien que,si un point "sépare" une droite, il ne "sépare" pas un plan et que ce qui "sépare" une surface ne "sépare" pas un volume.[12]

Mais c'est chez Thomae que les coupures sont explicitement utilisées, sans démonstration[13], pour caractériser une "variété M_n de dimension n continue et bien enchaînée" (<u>zusammenhängende continuirliche Mannigfaltigkeit M_n von n Dimensionen</u>).[14]

La définition de Poincaré sera critiquée par F. Riesz dans un article intitulé "La genèse du concept d'espace" (<u>Die Genesis des Raumbegriffs</u>) ([77]) qu'il présente à l'Académie des Science de Hongrie. Dans cet article, Riesz s'attache à définir le continu physique puis mathématique et à étudier l'espace tout d'abord comme continu physique, puis comme continu mathématique. Tout comme Poincaré, il établit un modèle théorique pour représenter notre espace (à l'aide des sensations qui nous permettent d'appréhender cet espace) et s'intéresse à sa dimension ; mais son artice, article de recherche mathématique écrit pour des scientifiques, a un tout autre caractère que celui de Poincaré.

Dans l'introduction, Riesz note les limites de la définition de Poincaré qui ne s'applique pas à n'importe quel espace :

"Mais si on tente de donner pour base à un nouvel examen du concept d'espace le concept de dimension de Poincaré, on se heurtera vite à de grosses difficultés. Tout d'abord Poincaré, avec l'introduction de son concept, ne prend pas en compte les caractéristiques qui sont déjà, également, propres à une conception naïve de la dimension, à savoir par exemple qu'un système d'une dimension donnée ne peut contenir aucun système de dimension supérieure. D'après la définition de Poincaré, un "cône double" [[<u>Doppelkegel</u>]] serait un continu physique à une dimension."[15]

Pour ce qui est de la définition mathématique de la dimension, Riesz signale une note qu'il a faite à l'Académie des Sciences de Paris en 1905 ([78]) dans laquelle il posait,pour les ensembles de points les plus généraux, la question de la définition d'un nombre d(E) qui satisfasse aux cinq conditions suivantes et appelé nombre de dimension :

1. si l'ensemble E fait partie de l'ensemble E', alors $d(E) \leq d(E')$;

2. l'ensemble (E_1, E_2) étant l'ensemble des points contenus au moins dans l'un des ensembles E_1, E_2, on n'a pas en même temps

$$d(E_1,E_2) > d(E_1) \quad \text{et} \quad d(E_1,E_2) > d(E_2) \ ;$$

3. l'ensemble complexe (produit) formé de deux ensembles de dimension m et n a la dimension m+n ;

4. la dimension d'une ensemble reste invariante si l'on y applique une transformation continue biunivoque de l'espace ;

5. la dimension du segment (0,1) est 1.

Riesz donne alors à ce problème une solution (E a le nombre de dimension n s'il contient des parties partout denses sur des ensembles simples à n dimensions et ne contient aucune partie partout dense sur un ensemble simple à n+1 dimensions[16]), mais signale que pour certains ensembles on ne sait pas démontrer que c'est la seule.

La quatrième condition est la seule mention que Riesz fait au problème de l'invariance de la dimension. On remarquera que là, comme dans tous les articles antérieurs, il y a ambiguïté sur la nature de l'invariance ; la bicontinuité de l'homéomorphisme, application biunivoque et bicontinue, n'est jamais explicité, même si, travaillant le plus souvent sur des ensembles compacts, l'homéomorphisme peut être remplacé par une application biunivoque et seulement continue.

René Baire dans les travaux sur la dimension sera le premier à utiliser explicitement une correspondance biunivoque et bicontinue.[17]

Riesz mentionne également un théorème d'invariance du domaine dans son article de 1906 ([77],345), le présentant comme une "généralisation d'un théorème de Netto, d'après lequel un segment ne peut être l'image réciproquement univoque et continue d'un carré", mais,d'une façon générale, ce travail de Riesz sur les questions de la dimension resta en marge des recherches contemporaines sur les théorèmes d'invariance et est d'ailleurs rarement signalé dans les bibliographies s'y rapportant.

C'est donc à partir de 1907 que les hommes dont nous publions les lettres jouent un rôle actif dans l'histoire de la dimension. L'énoncé seul des correspondants de Fréchet permet d'en tracer les étapes suivantes : Baire de 1907 à 1913, Mahlo en 1910, Brouwer en 1912 et 1913, Kerekjarto de 1924 à 1926, et d'autre part, Alexandroff et Urysohn de 1923 à 1927, Sierpinski de 1920 à 1927, Kuratowski de 1926 à 1934, dont les extraits sont publiés dans [3].

Comme nous l'avons déjà signalé, en 1907, René Baire, à son tour, s'attaque à la question de l'invariance. Contrairement à ses prédécesseurs, il pose directement le problème dans sa généralité, sans examiner des cas particuliers.Il peut, de ce fait, dégager avec force les lignes de la démonstration : la "non applicabilité" (i.e. ici le non homéomorphisme) de deux continus de dimensions différentes découle de l'invariance du domaine, elle-même conséquence de la généralisation du théorème de Jordan à n dimensions.[18]

Mais si Baire démontre que les propriétés énoncées sont des conséquences les unes des autres, il ne démontre pas la généralisation du théorème de Jordan sur laquelle tout repose. Il se propose de le faire dans un article ultérieur qu'il n'écrira jamais, ses recherches sur la question s'arrêtant définitivement cette même année.[19]

Maurice Fréchet, par contre, essayera pendant plusieurs années de démontrer ce théorème et de ce fait l'impossibilité de l'existence d'un homéomorphisme entre $\underline{R}^n$ et $\underline{R}^p$, comme le montrent les lettres de Baire du 1er Juin 1909 et du 2 Juillet 1909.

Cela est nouveau. En effet, aucun travail de Fréchet n'est signalé sur cette question, y compris dans la bibliographie très complète qui figure dans son livre "Les espaces abstraits" de 1928 ; il ne publia rien, ses tentatives restant vaines.

Jusque là, la seule participation de Fréchet aux recherches sur la dimension semblait être un article de 1910 paru dans <u>Mathematische Annalen</u>, "Les dimensions d'un ensemble abstrait", développant une note du 3 Mai 1909 à l'Académie des Sciences de Paris ([28],[30]).

Cet article se situe en marge des recherches d'alors, quoiqu'y faisant référence et n'a, au moment de sa parution, aucune influence sur le développement des questions d'invariance.

Dans cet article, Fréchet introduit une notion originale du nombre de dimensions qu'il justifie en la présentant comme un raffinement de la notion de puissance d'un ensemble.

En effet, vu les limites[20] de la notion de puissance qui fait intervenir les éléments des ensembles sans se préoccuper de leurs relations réciproques, il veut utiliser un procédé de comparaison "moins grossier" en faisant intervenir la continuité qui, elle, prend en compte ces relations.

Ainsi, dans sa note à l'Académie, il considère que, E_1 et E_2 faisant tous les deux partie d'une classe (L)[21], E_1 est de dimension supérieure ou égale à E_2 s'il existe une correspondance biunivoque et bicontinue de E_2 sur une partie de E_1. Il ajoute que si $d(E_1) \leq d(E_2)$ et $d(E_2) \leq d(E_1)$, alors E_1 et E_2 ont même dimension, et il définit également la somme des dimensions de deux ensembles.

Dans son article de 1910, Fréchet apporte quelques modifications de "vocabulaire" : tout d'abord, il nomme "type de dimension" le "nombre de dimensions" de la note de 1909 ; nous verrons (cf. lettre du 30 Octobre 1926 de Kerekjarto) que la dénomination employée sera l'objet de discussions entre Fréchet et les mathématiciens Kerekjarto et Kuratowski, celles-ci n'étant pas d'un intérêt négligeable. Elles portent en fait sur la signification et le rôle de cette notion.

Enfin, il donne à la correspondance son nom : l'homéomorphie.[22] C'est la première fois que ce terme est employé sans ambiguïté dans un article sur la dimension - Baire avait déjà utilisé une telle correspondance dans ses articles de 1907, mais le mot même n'y figurait pas.

Riesz par contre utilise le terme d'homéomorphisme dans son article "Die Genesis des Raumbegriffs", mais emploie celui-ci avec quelque ambiguïté concernant la continuité réciproque.

Appliquant ses définitions aux espaces géométriques, Fréchet obtient, $\underline{R}^n$ étant homéomorphe à une partie de $\underline{R}^{n+p}$, les relations

$$dR_1 \leq dR_2 \leq \dots \leq dR_n \leq \dots \; ; \; dR_{n+p} = dR_n + dR_p \; .$$

Citant les résultats de Lüroth montrant qu'il n'existe pas de correspondance biunivoque et continue de R_2 sur une partie de R_1 (ni de R_3 sur une partie de R_2), il en déduit que $dR_1 < dR_2 < dR_3$.

Sa théorie du type de dimension conduisant alors aux deux possibilités suivantes :

$$dR_1 < dR_2 < \dots < dR_n = dR_{n+1} = \dots = dR_{n+k} = \dots$$

ou

$$dR_1 < dR_2 < \dots < dR_n < dR_{n+1} < \dots < dR_{n+k} < \dots ,$$

il signale toute l'importance qu'il y a à prouver que, si $n < p$, $dR_n \neq dR_p$, c'est-à-dire, avec sa définition du type de dimension, que la dimension est invariante par homéomorphisme.

Faisant état des recherches sur les questions de l'invariance, Fréchet expose les travaux de Baire sur la non existence d'une telle correspondance entre $\underline{R}^n$ et $\underline{R}^p$, et écrit, traduisant un sentiment généralement partagé par les mathématiciens de l'époque, qu' "il est d'ores et déjà vraisemblable que seul le deuxième cas correspond à la réalité".

Avec la convention naturelle que le type de dimension de la droite est 1, Fréchet conclue donc que,"conformément aux dénominations ordinaires, l'espace à n coordonnées sera un espace à n dimensions" et cela pour tout n.

Mais Fréchet poursuit, dans la note des Comptes Rendus :

"Si mes définitions ne s'appliquaient qu'à ces espaces R_p, elles ne serviraient qu'à augmenter le vocabulaire mathématique."

Il entreprend alors l'étude des types de dimension des ensembles linéaires, étude qu'il reprendra 15 ans plus tard avec les mathématiciens des écoles soviétique et polonaise.

Procédant à une sorte de classification, il montre tout d'abord l'existence d'un plus petit type de dimension non nul, celui des ensembles constitués par une suite dénombrable qui converge vers l'un de ses éléments et il forme à partir de là "une première échelle de types de dimension de plus en plus grands, ces types tous distincts en infinité non dénombrable et tous inférieurs à 1 " ([28]).[23] Ce résultat, alors profondément original, introduit, pour la première fois, la notion de dimension non entière. En effet, mentionnant ([30],155) l'article de René Baire sur l'espace à 0 dimension que celui-ci introduit dans son article du tome 32 des <u>Acta mathematics</u> ([8],132), Fréchet remarque que, d'après sa propre définition, cet espace à 0 dimension a un type de dimension non nul, égal à celui de l'ensemble des irrationnels, qui est le plus grand des types strictement inférieurs à 1.

Poursuivant sa classification, il montre que l'on peut ainsi intercaler, entre les types de dimension R_1, R_2, ..., R_n, d'autres types de dimension.

Enfin, il montre qu' "on trouve encore parmi les classes qui font l'objet du calcul fonctionnel de nouveaux types de dimensions supérieurs à tout nombre fini, par exemple la classe des fonctions continues ou l'espace à une infinité de coordonnés dont Hilbert a signalé récemment l'importance pratique" ([28]).

Cet article, peut-être à cause de son caractère marginal par rapport aux recherches d'alors sur la dimension, eut très peu d'échos.

Le seul, parmi les grands mathématiciens, à souligner l'importance de son travail dans les années qui suivirent fut Hausdorff[24], et ce n'est sûrement pas une coïncidence si celui-ci fut à l'origine d'une branche tout à fait nouvelle des mathématiques de la dimension, en rupture avec les recherches antérieures dans ce domaine.

Cette ignorance, ou plutôt cette sous-estimation, devait cesser quelques années plus tard, grâce surtout aux mathématiciens étrangers, comme nous le verrons.

Une de seules critiques que nous avons retrouvée, grâce à la correspondance, est un article de Paul Mahlo paru dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Leipzig de la séance du 17 Juillet 1911 sous le titre "Sur le type de dimension de Monsieur Fréchet dans le domaine des ensembles linéaires" (Ueber die Dimensionentypen des Herrn Fréchet im Gebiete der linearen Mengen) ([65]).

Mahlo, dans cet article, relève et corrige une erreur de Fréchet ([65],328,note 1), qu'il lui avait signalée par lettre, dans la démonstration de l'existence d'une suite ordonnée croissante non dénombrable de types de dimensions d'ensembles linéaires dénombrables. Il développe à cette occasion une étude systématique des ensembles linaires clairsemés[25] et de leur classification au moyen d'un outil topologique dont il souligne l'importance, die Homöie, qui n'est autre que le type de dimension.

On peut remarquer que Mahlo ne se sert pas du terme de Fréchet, ni même d'un équivalent allemand, mais qu'il invente un mot personnel Homöie formé sur le mot homéomorphisme. La signification topologique n'est pas sans intérêt !

Le deuxième tome de l'année 1910 des Mathematische Annalen comportait également un article sur la dimension qui, à la différence de l'article de Fréchet paru dans le premier tome, se situait au coeur des recherches sur les théorèmes d'invariance.

Il s'agit du premier article que Brouwer consacre aux questions relatives à la dimension et où il propose une nouvelle démonstration du théorème de Jordan dans le plan ([10]).

De nombreux mathématiciens[26] ont exposé leur propre démonstration de ce théorème. Dans le chapitre 5 de son ouvrage de 1908 "Le développement de la théorie des multiplicités de points" (Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigflatigkeiten) ([80]), Schoenflies, traitant des "invariants géométriques", dresse l'historique des théorèmes d'invariance du domaine, de la dimension et du théorème de Jordan. Toutes les démonstrations de ce dernier utilisent des approximations polygonales de la courbe de Jordan, à l'exception de celle de Veblen ([88]) parue en 1905.[27] Citant O. Veblen ([10], 163), Brouwer signale qu'il est le premier à "donner une démonstration qui considère la courbe, non pas comme une limite de polygones, mais en elle-même et à obtenir les résultats à l'aide de ses propres propriétés".

Brouwer décompose le théorème de Jordan en trois parties :

1. la frontière d'un domaine déterminé par une courbe de Jordan est la courbe toute entière ;

2. une courbe de Jordan détermine au plus deux domaines ;

3. une courbe de Jordan détermine au moins deux domaines,

qu'il démontrera l'une après l'autre après avoir établi tout d'abord que, dans la composante non bornée du complémentaire de deux continus, n chemins ne se coupant pas, reliant les deux continus, déterminent n "sous-domaines" (<u>Teilgebiete</u>), puis qu'il existe un chemin joignant chaque point d'un domaine déterminé par une courbe de Jordan à une partie de sa frontière.

L'article suivant de Brouwer que publieront les <u>Mathematische Annalen</u> sera la célèbre "Démonstration de l'invariance du nombre de dimensions" (<u>Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl</u>) ([11]) de 1911, dans lequel, pour la première fois, l'invariance de la dimension est enfin prouvée.

Mais, comme l'a montré Freudenthal ([19]), l'ordre de parution des nombreux articles de Brouwer sur les questions de la dimension ne coïncide pas avec le développement de ses recherches.

Brouwer, au début de l'année 1910, s'attaque à la résolution de l'invariance de la dimension de deux façons. Tout d'abord, influencé par les idées de Poincaré, il essaye de mettre au point une démonstration basée sur la notion de "coupure". Tenu en échec, il se lance, avec succès cette fois, dans une deuxième voie, celle du "degré d'une application" (<u>Abbildungsgrad</u>) et publie pendant l'année 1911 cinq articles dans les <u>Mathematische Annalen</u> ([11],[12],[13],[14],[15]).

La démonstration que Brouwer développe dans [11] est en rupture totale avec toutes les tentatives précédentes. Les notions qu'il utilise sont entièrement exposés dans l'article "De l'image des variétés" (<u>Ueber Abbildung von Mannigfaltigkeiten</u>) ([12]), conçu avant [11] mais publié juste après.

Dans cet article, Brouwer définit les "éléments" de la topologie combinatoire : les simplexes, les variétés bilatères, les variétés unilatères (<u>zweiseitig oder einseitig Mannigfaltigkeit</u>), déjà introduits par Poincaré et exposés auparavant par exemple dans la note qu'Hadamard ajouta à l'édition du cours de Tannery paru en 1910 ([48]).

Mais il définit surtout les deux notions fondamentales d'approximation simpliciale d'une application et de degré d'une application (<u>Abbildungsgrad</u>) dont l'introduction consacre la naissance de la topologie algébrique.

Rendant hommage à Poincaré, à l'occasion du centenaire de sa naissance, lors du

Congrès international des mathématiciens de 1954 à Amsterdam ([1]), Alexandroff déclarait, montrant ainsi l'importance primordiale de Brouwer, mais en même temps ses limites dans le développement des concepts d'homologie dans la topologie algébrique :

"Poincaré s'intéressa à l'aspect combinatoire, introduisant le concept de décomposition simpliciale d'une variété, c'est-à-dire le concept de complexe simplicial, et créa ainsi la méthode fondamentale de la topologie combinatoire. Poincaré considérait probablement comme évident que la caractérisation homologique d'une variété,et, en général, d'un polyèdre[28] qu'il introduisit en topologie, ne dépendait pas du choix de la triangulation du polyèdre. En tout cas, nous savons qu'il s'agit d'un théorème profond et difficile de topologie. On a besoin pour sa démonstration,en plus du concept de subdivision arbitrairement petite d'une triangulation donnée que Poincaré possédait, du concept (basé sur celui de subdivision) d'approximation simpliciale (c'est-à-dire linéaire par morceaux) d'une application continue (qui est la généralisation de l'approximation d'une courbe continue par une ligne brisée circonscrite) et du concept de degré d'une application ou quelque chose d'équivalent (i.e. une application continue d'un simplexe X sur un simplexe Y ou d'une variété X sur une variété Y de la même dimension, étant donné le nombre de fois où Y est recouvert par l'image de X).

Ces deux concepts fondamentaux furent introduits par Brouwer en 1911, juste avant la mort de Poincaré ; cependant, Brouwer ne démontra pas les théorèmes d'invariance de caractérisation homologique du polyèdre, quoiqu'il eut tous les outils nécessaires pour le faire. Cela fut fait pour la première fois en 1915 par le célèbre topologue américain Alexander."

Longuement exposées dans l'article du tome 71 des Mathematische Annalen, ces notions rapidement définies, sont utilisées dans Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl où, grâce au degré d'une application, Brouwer démontre tout d'abord le lemme :

"Si,dans une variété q-dimensionnelle, le maximum du déplacement que subit un cube q-dimensionnel par une transformation univoque et continue est plus petit que la demi-longueur d'une arête, il existe un cube concentrique et homothétique qui est contenu entièrement dans l'image."

Utilisant ce lemme dans le cas d'un cube qui contient l'image biunivoque et continue d'un domaine m-dimensionnel, Brouwer démontre par l'absurde le théorème suivant, qui est en quelque sorte une forme affaiblie d'invariance du domaine :

"Dans une variété m-dimensionnelle, l'image biunivoque et continue d'un domaine m-dimensionnel contient dans tout voisinage de chacun de ses points un domaine."

L'invariance de la dimension se déduit alors facilement de ce théorème en montrant que, premièrement, une variété m-dimensionnelle ne peut contenir l'image biunivoque et continue d'un domaine de dimension supérieure, puis, que dans une variété m-dimensionnelle l'image biunivoque et continue d'un domaine de dimension inférieure est un ensemble de points nulle part dense.

Il nous faut noter que, malgré son caractère profondément différent dû à la nature des outils topologiques employés, la démonstration de Brouwer suit le même schéma que celles des auteurs qui le précèdent ; elle fait découler l'invariance de la dimension d'une forme affaiblie de l'invariance du domaine, actuellement équivalente à l'invariance même de la dimension.

C'est dans une série de trois articles publiés dans le même tome des Mathematische Annalen, que Brouwer résoud spécifiquement le problème de l'invariance du domaine, puis celui de la généralisation du théorème de Jordan ([13],[14],[15]).

Il s'agit d'améliorer le résultat donné dans [11] et de montrer tout d'abord que dans une variété n-dimensionnelle l'image biunivoque et continue d'un domaine n-dimensionnel contient pour tout point un voisinage de ce point et que deux points quelconques de l'image peuvent être liés par un arc inclus dans elle.

Pour démontrer cela, Brouwer introduit une notion distincte de celle de variété, la pseudovariété (Pseudomannigfaltigkeit), et développe celle de connexité.

Il déduit le résultat du lemme suivant : "Dans un espace cartésien de dimension n, une image biunivoque et continue d'une partie fermée d'une variété fermée à n-1 dimension (Jordansches Raumstück) détermine un seul domaine", démontré là encore en faisant usage du degré d'une application assez naturelle (invariant sur des composantes connexes et qui permet de comptabiliser celles-ci).

Brouwer présentera un an plus tard, en 1912 ([16]), une nouvelle démonstration de l'invariance des domaines dans laquelle il reprend uniquement "l'invariance des ouverts" qu'il démontre beaucoup plus directement, à partir de l'invariance du nombre de dimension par l'utilisation une nouvelle fois du degré d'une application.

Avant de passer à la démonstration que Brouwer fit de la généralisation du théorème de Jordan, il nous faut considérer les articles que Henri Lebesgue consacra aux questions de l'invariance de la dimension dans l'année 1910.

Informé par O. Blumenthal, rédacteur des Mathematische Annalen, de la démonstration de Brouwer, Lebesgue envoie, dès le mois d'octobre 1910, une lettre dont Blumenthal publiera un extrait dans le tome 70 (celui où paraît l'article de Brouwer sur l'invariance de la dimension) ([59]), dans laquelle il déclare avoir plusieurs preuves du théorème d'invariance et expose brièvement la plus simple.

Pour cela, il établit ce qui sera appelé le "lemme fondamental" :

"Si chaque point d'un domaine D à n dimensions appartient à l'un au moins des ensembles fermés E_1, E_2, ..., E_p en nombre fini et si ces ensembles sont suffisamment petits, il y a des points communs au moins à n+1 de ces ensembles."

Démontrant tout d'abord ce lemme pour des E_i réunion d'un nombre fini d'intervalles, il passe au cas général en considérant un "carrelage" de l'espace à l'aide d'intervalles de diamètre ε.

Nous reviendrons sur ce principe de pavage de l'espace dont l'importance est de tout premier ordre et dont Brouwer, dès 1911 (dans l'article publié en 1913 "Sur le concept naturel du nombre de dimension" (Ueber den natürlichen Dimensionbegriff)), et Menger et Urysohn, dans les années 1920, s'inspireront. En effet, comme Kerekjarto l'écrira à Fréchet dans sa lettre du 30 Octobre 1926, ce lemme sur le pavage de l'espace "décrit le nombre de dimension par une propriété absolue de l'ensemble, indépendante de l'espace qui le contient".

Le passage du lemme à l'impossibilité de l'application des espaces à n et n+p dimensions se fait alors en prouvant que l'on peut choisir des E_i de manière qu'il n'y ait pas de points communs à plus de n+1 des E_i.

Cet article est à l'origine d'une longue querelle entre Brouwer et Lebesgue.

En effet, Brouwer découvre immédiatement que la démonstration de Lebesgue est fausse, produit un contre-exemple qu'il publiera dans [17] et déclare avoir trouvé lui-même une démonstration qu'il se refuse à publier attendant celle promise par Lebesgue. Brouwer devra attendre dix ans.[29] Mais si la démonstration est fausse, l'idée est bonne et Brouwer reconnaît dans ce principe de pavage de Lebesgue ce qui lui avait échappé lors de ses premières tentatives (voir ([19],548) et [17],151)). Reprenant alors la première direction de ses recherches sur la dimension, il élabore une définition récurrente de la dimension basée sur les idées de Poincaré ([17]). Il formalise ainsi, pour la première fois, les idées que Poincaré avait émises dès 1903.

Reprenant les critiques de Riesz sur les insuffisances de la définition de Poincaré, il la modifie en explicitant la formule " π possède un degré de dimension général égal à n " de la façon suivante : "pour chaque choix de sous-ensembles ρ et ρ' de π , il existe un ensemble π_1 qui les sépare[30], possédant le degré de dimension général n-1, mais aucun ensemble π_1 qui les sépare avec un degré de dimension général inférieur à n-1 ".

Il donne alors une forme, non récurrente, de cette définition et montre que l'affirmation de Poincaré s'énonce théorème de la dimension :

Une variété n-dimensionnelle possède un degré de dimension homogène n (c'est-à-dire qu'elle possède en tout point un degré de dimension égal au degré de dimension général[31]).

Par cette seule définition, Brouwer propose ainsi une nouvelle preuve de l'invariance de la dimension. Le degré de dimension étant manifestement un invariant topologique, le théorème de la dimension contient l'invariance du nombre de dimension d'une variété.

C'est pour sa démonstration qu'il utilise le lemme de Lebesgue dont il donne une démonstration "évidente" à l'aide du concept de degré d'une application.

Brouwer utilisera un autre résultat de Lebesgue pour démontrer dans [17] la généralisation du théorème de Jordan pour un espace à n dimensions.

En effet, Lebesgue, qui, comme il l'avait annoncé à Blumenthal, possédait plusieurs principes de preuves de l'invariance de la dimension, expose une deuxième démonstration dans une note aux Comptes Rendus de Mars 1911 qui porte également sur le théorème de Jordan ([60]).

Lebesgue indique comment prouver que, "si dans un espace E_{n+p+1} on a une variété T_n, il existe une variété T_p enlacée avec T_n", en formulant la définition de deux variétés enlacées, généralisant ainsi celle de Jordan de points enlacés.

Quoiqu'il la revendiquera plus tard, Lebesgue n'a pas démontré dans [60] l'invariance du domaine ; la démonstration des Comptes Rendus prouve seulement qu'une courbe de Jordan détermine au moins deux domaines, i.e. une variété fermée de Jordan de dimension n-1 détermine dans un espace de dimension n au moins deux domaines.

C'est d'ailleurs ce résultat partiel que Brouwer utilise dans [14]. Comme pour la démonstration du théorème de Jordan dans le plan ([10]), Brouwer décompose le théorème en trois parties et ne démontre que la seconde ; la première étant une conséquence immédiate du résultat de [13] sur le Jordansches Raumstück, la troisième étant celle exposée par Lebesgue.

L'ensemble de ces articles de Brouwer et de Lebesgue est d'une importance considérable ; cela, comme nous venons de le voir, pour la notion de dimension tout comme pour la topologie algébrique, et leur rôle historique dépasse largement le cadre des recherches sur la dimension.

C'est la raison pour laquelle nous avons particulièrement insisté sur les publications de ces années 1911-1913 quoique nous n'ayons retrouvé aucune lettre de Lebesgue et de Brouwer à Fréchet de cette période, mais seulement une lettre que Fréchet destinait à Brouwer.

Les lettres au sujet de la dimension s'interrompent brutalement en 1913, année donc où la solution du problème de l'invariance est trouvée et où une définition de la dimension existe enfin, pour ne reprendre qu'à partir de 1923. La guerre en est, pour une part, certainement responsable, mais pour une part seulement, la recherche sur d'autres questions mathématiques ayant été poursuivie pendant les années de guerre et d'immédiate après-guerre.[32]

L'article de Brouwer de 1913, paru dans le Journal de Crelle et non dans Math. Annalen, passa inaperçu aux yeux de beaucoup, au point qu'en 1922 deux mathématiciens, Menger et Urysohn, redéfinissent, séparément et indépendamment des travaux de 1911-1913, le concept de dimension topologiquement invariante.[33]

Mais, également, les outils topologiques que Brouwer avait forgés étaient encore trop peu maniables, pour que les mathématiciens, au courant de ses recherches, reconnaissent, en dépit de leur nouveauté, leur importance et leur utilité dans leurs propres recherches en topologie.[34]

Il fallut donc attendre que d'autres, en l'occurence Menger et Urysohn, défrichent à nouveau ce domaine de mathématiques, avec toute l'expérience des années écoulées et leur génie propre, pour que, après une rupture de dix années, les recherches systématiques sur la dimension d'ensembles de points reprennent, comme le témoignent de très nombreux articles. La correspondance nous sera précieuse pour retrouver, dans le foisonnement des articles, un fil conducteur que tenait, comme nous le montrerons, Fréchet.

Il y eut donc les années de guerre, et ces années de "purgatoire". Mais, pour autant, l'histoire de la dimension ne s'est pas arrêtée, bien au contraire. En 1918, Hausdorff, dans un article paru dans les Mathematische Annalen ([47]), "Dimension et mesure extérieure" (Dimension und ausseres Mass), où il développe les recherches de Caratheodory sur les mesures p-dimensionnelles d'un ensemble de points dans des espaces de dimension q, généralise (ou particularise) la notion habituelle de dimension :

"Nous donnons une notion des mesures p-dimensionnelles qui s'étend directement à des valeurs non entières de p et qui permet d'envisager l'existence d'ensembles à dimensions fractionnaires, voire même certains dont les dimensions décrivent l'échelle des nombres positifs avec le raffinement de l'échelle logarithmique. La dimension devient ainsi une graduation de même nature que l'ordre des infiniment patits, la rapidite de la convergence ainsi que les concepts apparentés. Monsieur Fréchet, comme on sait, a défini, d'une manière essentiellement différente, des types de dimensions qui interpolent la suite des entiers naturels."

Ce concept de dimension, lié uniquement à la notion de mesure et indépendant des recherches topologiques sur l'invariance et la définition de la dimension, est appelé la dimension de Hausdorff. Son étude, ainsi que celle des dimensions fractionnaires forme une branche des mathématiques distincte de celles issues de la dimension topologique ; il existe cependant un lien direct, topologique, entre les deux notions de dimension, comme l'a montré Szpilrajn, en 1937 dans les Fundamenta Mathematicae ([82]), en se servant des travaux de Pontryaguin et Schnirelmann de 1932 ([76]).

En effet, pour qu'un ensemble soit de dimension n, il faut et il suffit qu'il soit homéomorphe à un ensemble de mesure (n+1)-dimensionnelles nulle, situé dans un cube à 2n+1 dimensions. De plus :

(i) Etant donné dans un espace métrique séparable un ensemble non vide E, la dimension de Hausdorff de E est supérieure ou égale à la dimension de E.

(ii) La borne inférieure des nombres $h(E^*)$ ($h(E^*)$ est la dimension de Hausdorff de E^*, où E^* parcourt tous les ensembles homéomorphes à E) est un entier naturel égal à la dimension de E.

Mais, dans notre histoire de la dimension, et nous devons préciser maintenant dimension topologique, cet important événement ne joue aucun rôle pendant la période que couvre la correspondance.[35]

Nous en revenons donc à cette année 1922 et aux articles de Menger et d'Urysohn qui ouvrent la dernière étape de l'étude que nous consacrons, dans le cadre de la correspondance, à l'histoire de la dimension.

C'est à partir des travaux d'Urysohn[36] que nous exposerons la nouvelle version de la définition de la dimension et les développements qui s'en suivirent, auxquels prirent part, outre Urysohn, son ami Alexandroff et, groupés autour de Sierpinski, un grand nombre de mathématiciens de l'école polonaise dont Kuratowski.

Nous pensons que cela se justifie, entre autres, par l'abondance des lettres qu'Urysohn et Alexandroff, d'une part, et Fréchet, d'autre part, échangèrent à partir d'octobre 1923 ([3]) (aucune lettre de Menger se rapportant à notre sujet n'ayant par contre été retrouvée dans les papiers de Fréchet que nous avons étudiés aux Archives de l'Académie des Sciences de Paris), et les renseignements qu'elles fournissent.

Les deux notes qu'Urysohn rédigea en 1922 ([86],[87]) sur les multiplicités cantoriennes (il fit également une communication pour la Société Mathématique de Moscou) ont pour but de répondre aux deux questions suivantes :

1. donner une définition des lignes cantoriennes valable pour un espace quelconque ;

2. définir les surfaces et, plus généralement, les multiplicités cantoriennes à n dimensions, "les définitions jusqu'à présent proposées (Zoretti, Janiszewski, Yoneyama) ne pouvant être regardées comme satisfaisantes" ([86],440).

Les recherches sur les courbes, les lignes cantoriennes ou jordaniennes[37] remontent aux années 1910 pendant lesquelles Brouwer, Zoretti, Janiszewski, puis Mazurkiewicz et Sierpinski publièrent de nombreux articles, quoiqu'en 1916 Sierpinski notait que "la notion de courbe n'est étudiée jusqu'à présent qu'insuffisamment ; le rôle que cette notion joue dans les mathématiques justifie les recherches ayant pour but de l'approfondir" ([81],t.II,108).

C'est donc en faisant ses recherches sur les multiplicités cantoriennes généralisant les courbes cantoriennes de la fin de 1921 à l'hiver 1922 qu'Urysohn redécouvrit la définition de la dimension et de son invariance[38] (Fund. Math., t.25, p.37) :

"Notons que les résultats obtenus permettent pour la première fois [[souligné par nous]] d'élucider quelque peu la question jusqu'à présent si obscure de ce qu'est le nombre de dimension. Il me semble en effet que la réponse que je propose est bien conforme aux souhaits de Henri Poincaré."[39]

D'après Urysohn lui-même (même mémoire, note 3, p.37), Brouwer, dont il n'a pris connaissance des travaux qu'une fois son mémoire achevé[40], "résoud cette question par une méthode qui paraît être (au premier abord, du moins) très voisine de la mienne".

Lorsque débute, fin 1923, la correspondance entre Fréchet et les deux mathématiciens soviétiques, Urysohn a donc établi sa définition de la dimension et la théorie des multiplicités ; Fréchet, quant à lui, a repris ses propres recherches sur le type de dimension. Il publie en 1924 deux notes dans les Comptes Rendus "Sur la notion de nombre de dimension" dans lesquelles il développe certains des résultats de [30], à savoir dans la première ([33]) l'étude des types de dimension d'ensembles dénombrables d'éléments appartenant à des classes D séparables[41], et dans la seconde ([34]) l'étude de types de dimension de certains champs fonctionnels, type de dimension infinie[42].

Son intervention au Congrès international des mathématiciens de 1924 à Toronto

([35]) regroupe tous ses résultats sur les types de dimension, ainsi qu'une amélioration de la définition même du type grâce à une nouvelle définition de l'homéomorphie[43].

Une autre question soulevée par Fréchet à cette époque est celle de la comparaison entre sa définition du type de dimension et celle de nombre de dimension de Menger et Urysohn ; Fréchet la prend très à coeur, sa propre définition ayant reçu un accueil beaucoup plus discret. Elle sera évoquée dans des lettres qu'échangèrent Fréchet et Alexandroff, et Fréchet publiera en 1927 dans les Fundamenta Mathematicae un article ([44]) où il prouve que la dimension au sens de Menger et Urysohn est la partie entière de son type de dimension[43].

Lors du cours qu'il enseigne à Strasbourg cette même année, Fréchet expose la théorie de la dimension des espaces abstraits; la première partie est consacrée aux théorèmes généraux d'invariance, la seconde à sa propre théorie des espaces abstraits et du type de dimension. Les notes du cours que nous avons étudiées aux Archives de l'Académie des Sciences de Paris peuvent être considérées comme une première rédaction du livre que Fréchet publiera quatre années plus tard, en 1928, sous le titre "Les espaces abstraits" ([38]).

Le travail entrepris par Fréchet pour la rédaction de son livre l'amena à poser un certain nombre de problèmes sur la théorie des types de dimension et les questions de topologie,s'y référant à plusieurs de ses correspondants. Ainsi Fréchet provoqua la réflexion de mathématiciens sur des points particuliers de cette théorie.

Cet aspect, semble-t-il caractéristique, de la façon de travailler de Fréchet, créant un véritable réseau entre de nombreux chercheurs de différents pays (la Pologne eut une importance particulière), est révélé à la fois par le style même de son livre et l'analyse de la correspondance.

Envoyant son manuscrit à plusieurs chercheurs dont Alexandroff, Sierpinski et Kerekjarto, il obtint ainsi des réponses à plusieurs des questions posées, essentiellement sur la classification et les propriétés des ensembles linéaires, plans et abstraits, reprenant des recherches engagées quinze ans plus tôt par Mahlo. L'analyse de la bibliographie des années 1925 à 1930 que nous donnons à la fin de cet article et des oeuvres complètes de Sierpinski pendant ces mêmes années montre que de nombreux articles furent écrits pour répondre aux questions posées par Fréchet. Cela est une preuve objective de l'importance du rôle de Fréchet dans ce domaine à cette époque.

Ainsi, contrairement à ce qui se passa en 1910, cet ouvrage sur les espaces abstraits et les types de dimension fut tout de suite reconnu comme fondamental par les grands topologues, soviétiques et polonais en premier lieu.

Fréchet, dans [37], situant l'intérêt de ses propres recherches, en donne clairement la raison, les mathématiciens de 1910 s'intéressant plus particulièrement à la "différence topologique entre la droite, le plan, ..., l'espace à un nombre entier de dimensions" :

"Un grand nombre de définitions abstraites du nombre de dimensions ont été déjà proposées.

Certaines d'entre elles ont pour but de définir ce nombre par voie de récurrence en passant de n à n+1. La première d'entre elles est probablement celle qui a été exposée par Henri Poincaré, reprise et complétée depuis par Brouwer.

D'autres définitions considèrent le nombre de dimensions comme une grandeur particulière qui n'a pas seulement des valeurs en correspondance avec une suite d'entiers. La première en date est sans doute celle que j'ai proposée à l'Académie.

La première sorte de définition sera sans doute plus intéressante pour ceux qui essaient de dégager une différence topologique entre la droite, le plan, ..., l'espace à un nombre entier de dimensions.

La seconde espèce de définition offre les avantages suivants : elle permet une classification topologique intéressante des ensembles linéaires ; une autre des ensembles plans, etc. L'étude que j'ai faite à cet égard pourrait être poursuivie et donner des résultats intéressants.

Mais l'avantage principal de cette seconde espèce de définition du nombre de dimensions réside dans son adaptabilité immédiate à l'étude topologique des champs fonctionnels, des espaces abstraits les plus généraux.

Elle permet non seulement de définir un nombre infini de dimensions, mais de classer par ordre de grandeur les nombres infinis de dimensions même différents de plus d'un nombre fini d'unités."

Le déroulement historique des recherches de ce début de siècle sur la dimension, que nous venons rapidement de retracer, avec ses deux temps forts séparés par une période creuse de dix années, se retrouve parfaitement dans la classification que l'on peut faire des lettres dont nous publions une partie ici.

Elles se répartissent en deux ensembles bien distincts ; le premier est composé de lettres de Baire et Mahlo à Fréchet, ainsi que d'une lettre de Fréchet à Brouwer, écrites de 1907 à 1913, et le second des lettres écrites à partir de 1923 par Urysohn et Alexandroff, Sierpinski et ses élèves et Kerekjarto.

On trouve également un parallèle certain entre la nature des lettres et l'évolution, ainsi que l'audience, du travail de Fréchet.

Les lettres de la deuxième période sont en effet plus nombreuses et plus riches au plan mathématique ; cela n'est pas étonnant si l'on considère le peu de réactions à la suite de l'article de Fréchet de 1910 qui contenait pourtant l'essentiel de ce qu'il reprendra par la suite. C'est seulement après 1923 que Fréchet jouera enfin un rôle à la mesure de l'importance de ses travaux. C'est ce qu'illustre la correspondance de la deuxième période.

Nous avons déjà mentionné le rôle que Fréchet joua auprès de ses correspondants, posant les mêmes questions à tous et faisant circuler les réponses de chacun, en intervenant lui-même très souvent de façon significative. Ce rôle s'accentue encore par l'envoi du manuscrit des "Espaces abstraits" et des questions qu'il contenait dès 1925.

L'étude des réponses que Fréchet reçut alors permet de saisir les approfondissements apportés au concept de dimension et aux notions de topologie qui s'y réfèrent, depuis son article de 1910.

Nous avons jugé qu'il était important de retracer ici, de façon précise, cette évolution en se référant particulièrement à certains de travaux de Fréchet.

NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE SUR FRECHET ET LA DIMENSION

Fréchet publia huit articles et son livre sur les espaces abstraits, de 1909 à 1928, consacrés à sa notion de nombre de dimension ou type de dimensions.

Le premier est la note du 3 Mai 1909 aux Comptes Rendus ([28]) dans laquelle il présente les idées principales, la définition et les propriétés du nombre de dimensions d'un ensemble abstrait qui seront développées dans l'article de 1910 des Mathematische Annalen ([30]). Il s'agit essentiellement d'une classification des espaces linéaires et de l'étude des types de dimension des espaces géométriques R_p.

Bien qu'il continue de publier pendant la guerre et l'après-guerre, ce n'est qu'en 1920 que Fréchet, redéfinissant l'homéomorphie, généralise la notion de type de dimension aux espaces séparables de classe D.[41]

En 1924, dans [33] et [34], Fréchet étend les résultats de [30] sur les ensembles dénombrables de points de R_n à des ensembles dénombrables appartenant à une classe D (ensemble où la limite est définie par l'intermédiaire d'une distance) séparable et développe considérablement l'étude des types de dimensions infinis de classes D séparables.

Tous les résultats seront systématisés dans l'intervention que Fréchet fera au Congrès international des mathématiciens de Toronto en 1924 ([35]).

Les mémoires [30] et [35] qui sont les plus complets et les plus originaux sont ceux qu'il faut particulièrement retenir.

Cette opinion fut d'ailleurs exprimée par Fréchet lui-même dans la notice de 1933 sur ses travaux scientifiques ([37]). Se référant à ces deux mémoires, il fit la remarque suivante :

"J'y attache une grande importance et j'estime qu'ils peuvent donner lieu à de nombreux travaux géométriques utiles."

Fréchet commence la rédaction de son livre "Les espaces abstraits" ([38]) en 1925 ; avant la publication de celui-ci en 1928, les Fundamenta Mathematicae en publient deux extraits ([44]), l'un sur la comparaison entre son type de dimension et le nombre de dimension de Menger et Urysohn, l'autre sur la définition locale de type de dimension.

Enfin, en 1928, il reprend ces travaux dans un article de la Revue de l'Académie des Sciences de Madrid ([36]). Il nous faut signaler également [32] et [41] qui contiennent des études particulières portant sur la théorie des types de dimension ou sur son encadrement historique.

Les publications de Fréchet sur la dimension s'arrêtent cette année-là. En effet, Fréchet, nommé professeur sans chaire à la Faculté des Sciences de Paris et participant à l'enseignement du calcul des probabilités au côté de Borel, va infléchir ses recherches dans d'autres directions. C'est à travers les thèses ou publications de ses élèves que l'on peut alors suivre l'intérêt persistant de Fréchet pour les questions de la dimension et repérer les directions de recherche qu'il propose, par exemple, à Bouligand, à Kunugi ou à Ky Fan.

NOTES

1 Voir l'article de L.C. Arboleda sur "Les débuts de l'Ecole Topologique Soviétique" ([3]).

2 Manuscrits du Fonds Fréchet conservés aux Archives de l'Académie des Sciences de Paris.

3 Nous n'avons, sauf exception, aucune copie ou brouillon des lettres que Fréchet écrivait.

4 B. Riemann, Sur les hypothèses qui servent de fondements à la géométrie, traduit par J. Houël, Oeuvres mathématiques, Paris(Blanchard), 1968, p.281-282.

5 Voir l'introduction de l'article [53] de Jürgens.

6 Cantor fut le premier surpris. Rappelons la célèbre phrase qu'il écrivit,en français, à Dedekind, dans sa lettre du 20 mai 1877 : "Je le vois, mais je ne le crois pas."

Mais il nous faut mentionner également une deuxième lettre dans laquelle nous trouvons l'opinion d'un grand mathématicien sur cette découverte de Cantor. Dans une lettre du 13 avril 1883, Charles Hermite écrit à Mittag-Leffler, directeur des Acta Mathematica : "L'impression que nous produisent les mémoires de M. Cantor est désolante ; leur lecture nous semble un véritable supplice et en rendant hommage à son mérite, en reconnaissant qu'il a ouvert comme un nouveau champ de recherches, personne de nous n'est tenté de le suivre. [[...]] La correspondance entre les points d'une ligne et d'une surface nous laisse absolument indifférents et nous pensons que cette remarque, tant qu'on n'en aura point déduit quelque chose, résulte de considérations tellement arbitraires, que l'auteur aurait mieux fait de la garder et d'attendre." (Cette lettre est tirée de l'article de P. Dugac "Des correspondances mathématiques des XIX^{e} et XX^{e} siècle", Revue de Synthèse, (3), 97(1976), N. 81-82, p.157-158.)

7 Voir l'ouvrage de P. Dugac sur Dedekind ([24]) et la correspondance,analysée et publiée par Cavaillès ([22]),entre Cantor et Dedekind.

8 Il s'agit de Cantor ([21]), de Lüroth ([63]), de Thomae ([83]), de Jürgens ([52]) et de Netto ([71]).

Nous devons noter qu'il s'agit exclusivement de chercheurs allemands. En effet, comme le montre la lettre précédemment citée d'Hermite (note 6), les mathématiciens français n'accueillirent pas les travaux de Cantor avec intérêt. Tirons, toujours de la correpondance entre Hermite et Mittag-Leffler, la phrase suivante d'Hermite :"M. Poincaré juge que les lecteurs français seront à peu près tous absolument réfractaires aux recherches à la fois philosophiques et mathématiques de M. Cantor, où l'arbitraire a trop de part, et je ne crois pas qu'il se trompe." (Lettre du 5 mars 1883.)

9 Les notions de variété, de domaine, de courbe, de connexité, celles de continuité et surtout de bicontinuité d'une application univoque ou multivoque n'étaient pas encore exprimées avec clarté et rigueur. Les mathématiciens ne disposaient pas du théorème de Jordan dont le rôle est fondamental, qui sera trouvé une dizaine d'années plus tard. La topologie algébrique, qui finalement permettra d'aboutir dans les démonstrations d'invariance, ses objets et ses méthodes n'étaient pas encore nés, les premières notions de triangulation et d'homologie étaient introduites par Poincaré à la fin du siècle. Le principal instrument de démonstration est alors le théorème des valeurs intermédiaires, largement utilisé et généralisé.

10 Cette "définition" peut être rapprochée de la définition de la dimension énoncée par Menger ([49],24).

11 L'article parut dans le tome II p.281-301 et p.407-429 de la revue. Dans "La valeur de la Science" ([74]), cela correspond aux pages 55 à 100. Poincaré reprendra ces idées et la définition dans un article de 1912 de la même revue qui le plus souvent sert de référence. Les mathématiciens de cette période eux-mêmes semblent ignorer cet article de Poincaré et mentionnent l'article de 1912 qui, pour ce qui est de la définition même da la dimension, n'apporte pas de changements notables.

12 Netto, comme nous l'avons déjà indiqué, explicite aussi le rôle des frontières dans la définition d'une "variété" (<u>Mannigfaltigkeit</u>) à n dimensions et annonce ainsi également la définition de Menger de la dimension.

13 Cela lui fut reproché immédiatement par Lüroth ([63]), puis par Jürgens ([53]).

14 "Une variété continue et connexe [[au sens bien enchaînée]] M_n de dimension n ne peut être décomposée en parties séparées [[disjointes]] (<u>getrennte Stücke</u>) par une ou plusieurs variétés de dimensions au plus n-2." ([83],467).

15 Il faut noter que la même critique sera faite par Brouwer dans [17] qui cite le même exemple. Est-ce une coïncidence ? Brouwer, en tout cas, ne mentionne pas la critique de Riesz.

16 "Un ensemble simple à n dimensions est un ensemble dont l'image par une application biunivoque et continue est un rectangle à n dimensions."

17 Cependant Baire ne l'appelle pas homéomorphie : "Entre deux ensembles fermés de points E, situé dans l'espace à n dimensions G_n, et F, situé dans G_m, il y a <u>application</u> s'il existe entre leurs points une correspondance biunivoque et réciproque telle que A étant un point variable de l'<u>un quelconque des ensembles</u>, tendant vers un point limite A_0,

le correspondant de A (image de A) tend vers le correspondant de A_o." ([6]).

18 P. Dugac nous a communiqué trois lettres que Brouwer écrivit à Baire pendant le dernier trimestre de l'année 1911 (voir la note 1, p.44-45) qui permettent de reconstituer entièrement les échanges qui eurent lieu entre ces deux mathématiciens à propos de la méthode et des théorèmes que Baire exposa dans ses deux articles, les lettres de Baire à Brouwer ayant été publiées par P. Dugac ([24]). L'opinion de Brouwer, que nous développerons à l'Annexe 2 dans les notes à ces trois lettres de 1911, est résumée par cet extrait de la lettre du 31 Octobre : "Les théorèmes importants que vous avez formulés en 1907 me semblent être d'un caractère beaucoup plus subtil que l'invariance qui est pour moi la propriété la plus fondamentale, mais aussi la plus grossière de l'*analysis situs* à n dimensions."

19 Atteint de neurasthénie, après les années de travail épuisant qu'il consacra à sa thèse, René Baire ne put poursuivre de recherches mathématiques. Voir les lettres de Baire publiées ici et l'article de Dugac ([25]) sur R. Baire. Bien que n'ayant pas démontré les théorèmes sur lesquels il appuie sa méthode, Baire a eu un rôle très important, comme le note Brouwer dans [13]. Il écrit en effet (p.305) que ce sont Baire et Hadamard qui les premiers ont montré que l'invariance du domaine découle de la généralisation du théorème de Jordan à n dimensions.

20 "Comme l'a remarqué M. Borel, les seuls types de puissances dont la considération ait une utilité dans les applications sont ceux des suites dénombrables du continu linéaire." ([28]).

21 "Une classe (L) est une collection d'éléments où l'on a donné une définition précise, mais quelconque, de la limite d'une suite. Je suppose seulement qu'une suite d'éléments identiques à A converge vers A et que toute suite extraite d'une suite qui converge vers A, converge vers A." ([28]).

22 Fréchet, dans [30], écrit que cette dénomination est due à Hadamard.

23 La démonstration comportera une erreur que lui signalera le mathématicien Paul Mahlo (voir les deux lettres qu'il écrit à Fréchet).

24 Dans [47] Hausdorff écrit : "Monsieur Fréchet a défini d'une façon sensiblement différente des types de dimension qui interpolent la suite des entiers naturels."

25 Voir à ce sujet la note sur P. Mahlo et les lettres envoyées à Fréchet.

Dans l'introduction de son article Mahlo annonce qu'il traitera "d'ensembles linéaires que M. Hausdorff appelle "dispersés" (*zerstreut*) dans son article des *Mathematische Annalen* (t.65,p.458)" dont la définition est "qu'ils ne contiennent aucun sous-ensemble dense". Il s'agit donc de la notion d'*ensemble clairsemé*, introduite par Hausdorff plusieurs années avant l'article de Denjoy de 1915 "Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues" (Journal de Mathématiques pures et appliquées, (7), 1(1915), 105-240), dans lequel ce dernier formule également la notion et le mot français. (Voir à ce sujet l'étude de P. Dugac sur la correspondance de Lusin et Denjoy dans le volume 27(1977), N° 101, des Archives Internationales d'Histoire des Sciences, p.197.)

26 Parmi ceux-ci, citons Osgood ([72]), Ames ([4]) et Veblen ([88]).

27 Schoenflies écrit dans [80], p. 169, note 3 : "Cf. également encore une démonstration de O. Veblen construite sur une permutation circulaire des points. Veblen en affirme la valeur sur le fait qu'il définit le point limite, non pas au moyen de la distance, mais de triangles qui le contiennent et nomme ainsi sa méthode non métrique." (Voir [88], p.97.)

28 Alexandroff note : "J'utilise ici le mot polyèdre dans son sens moderne, à savoir un ensemble pouvant être décomposé en simplexes. Poincaré, lui, utilise le mot polyèdre au sens où nous disons aujourd'hui complexe." C'est Brouwer qui introduisit ce mot de complexe.

29 C'est en effet en 1921 que Lebesgue reprend la démonstration du lemme dans un article intitulé "Sur les correspondances entre les points de deux espaces". Lebesgue indique dans cet article que Brouwer lui a fait observer la faiblesse de la caractérisation des I_i et que, après d'autres critiques de Brouwer à un nouvel essai de rédaction, il décide d'abandonner la forme géométrique de son exposé. Il arithmétise alors la démonstration en remplaçant la considération d'une séparation en régions par celle d'un nombre qui change de parité avec la région.

Dans ce même article, il déduit à nouveau du lemme l'invariance de la dimension, puis celle du domaine (il appelle ce théorème d'invariance théorème de Schoenflies).

Brouwer n'est satisfait ni par la démonstration ni par les "prétentions" de Lebesgue à une nouvelle preuve de l'invariance du domaine. Il écrit dans [18] : "Lebesgue a donné une preuve valable de son lemme mais qui, pour l'essentiel, est semblable à la mienne quoiqu'inutilement compliquée."

En fait, comme Fréchet le fait aussitôt remarquer à Lebesgue, la démonstration n'est pas bonne, Lebesgue se servant de ce qu'il veut démontrer dans le cours de son raisonnement.

Et ce n'est qu'en 1924 dans [62] que la démonstration définitive du lemme sera enfin publiée dans un article intitulé "Sur le théorème de Schoenflies", où Lebesgue une fois encore revendique une priorité sur le théorème d'invariance du domaine, priorité que Brouwer continuera à lui disputer, dans les articles qu'il publiera encore à cette période sur la dimension, relançant la querelle des années 1911-1913.

30 La définition des ensembles ρ et ρ' "séparés par π_1" (<u>durch</u> π_1 <u>getrennt</u>) de l'article de 1913 ([17],147) a été précisée par Brouwer dans [18]. Brouwer indique que cette rectification lui a été communiquée par Urysohn. Voir également [19], p.547, et l'extrait de la lettre d'Alexandroff et Urysohn à Fréchet du 28 Janvier 1924 publié dans [3], p.79.

31 π possède en M un degré de dimension égal à m s'il existe des voisinages de M qui possèdent le degré de dimension général m, mais s'il n'existe aucun voisinage qui possède un degré de dimension général inférieur à m ([17],148).

32 En effet Fréchet, ainsi que les autres mathématiciens, continuera de publier pendant

la guerre.

33 Menger publie son mémoire dans les tomes 33 et 34 (1923-1924) des Monatsch. f. Math. u. Phys. ([68]), Urysohn rédige deux notes à l'Académie parues dans les Comptes Rendus de 1922 (t.175, p.440 et p.481), développées dans son grand mémoire dont la première partie est publiée dans les volumes 7 et 8 (1925-1926) des Fundamenta Mathematicae et la deuxième partie, rédigée par Alexandroff et portant sur la théorie générale des courbes, dans les Actes de l'Académie d'Amsterdam de 1929.

34 Voir [19], p.436, ainsi que la note de H. Freudenthal dans Historia Mathematica, 2(1975), 495-502.

35 On peut cependant s'étonner de ne trouver aucune lettre de Hausdorff dans la correspondance de Fréchet que nous avons compulsée aux Archives de l'Académie des Sciences de Paris.

36 Voir la lettre du 28 Février 1924, où Alexandroff et Urysohn présentent à Fréchet le contenu du volume 7 des Fundamenta Mathematicae ([3],79-80).

37 - Une ligne jordanienne est un ensemble homéomorphe à un segment ;
- une ligne cantorienne est un continu de dimension 1 situé dans un espace quelconque ;
- une multiplicité jordanienne n-dimensionnelle est un ensemble homéomorphe à un cube n-dimensionnel ;
- une multiplicité cantorienne de dimension n est un continu K de dimension n, tel que l'ensemble des points de dimension n (par rapport à K) soit partout dense sur K.

38 Cf. [87], première partie, chapitre 1, définition,paragraphes 1 à 4, p.65-67, invariance topologique, paragraphe 5, p.68.

39 Dans [49], la définition de Menger et Urysohn est formulée ainsi (d'après Menger) :

a) l'ensemble vide a la dimension -1 ;

b) la dimension d'un espace est le plus petit entier n pour lequel chaque point a des voisinages arbitrairement petits dont les frontières ont une dimension inférieure à n.

40 Voir la lettre d'Alexandroff et Urysohn à Fréchet du 28 Janvier 1924 ([3],79).

41 "Une classe (D) est une classe où la limite est définie par l'intermédiaire d'une distance. Une classe est séparable s'il existe un ensemble dénombrable d'éléments de la classe tel que la classe soit formée de cet ensemble et de son ensemble dérivé. Les espaces d'un nombre entier de dimensions sont des classes D séparables. Mais il en est de même des espaces les plus importants à une infinité de dimensions." (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, t.178, p.1512).

42 Il cite entre autres comme champs fonctionnels en donnant pour chacun la définition de la limite :

champ C : fonctions continues d'une variable réelle - limite uniforme ;
champ Ω_1 : fonctions de carré sommables - convergence en moyenne ;
champ M : fonctions mesurables - convergence en mesure ;
champ S : surfaces continues - convergence uniforme ;
champ C' : fonctions à dérivées continues - voisinage d'ordre 1 ;

dont tous les types de dimension sont égaux.

43 Voir à ce sujet la thèse que L.C. Arboleda prépare sur Fréchet et qui doit être soutenue dans le courant de l'année 1980.

ANNEXE I : CORRESPONDANCE DE FRECHET (1907-1926)

1. LETTRES DE MAHLO (extraits)

Nous avons trouvé, dans le fonds Fréchet de l'Académie des Sciences de Paris, deux lettres de Paul Mahlo d'Avril 1910.

Paul Mahlo est un mathématicien allemand, né en 1883, qui soutint en 1908 une thèse ayant pour sujet une question de topologie : "Sur les décompositions en polygones plans et sphériques" et devint docteur en philosophie à Halle. Mathématicien de second plan, le seul article de lui qui soit mentionné dans la littérature mathématique est [65], dont il est question dans ces deux lettres.

A la suite de l'envoi par Fréchet de sa note et de son article sur les dimensions d'un espace abstrait ([29] et [30]), Mahlo écrit à Fréchet le 3 Avril pour lui signaler une erreur :

"[[...]]

Je vous remercie beaucoup pour l'amical envoi de vos deux mémoires : Math. Ann., 1910, p.145-168, et Rend. Circ. Mat. Palermo, 1910, p.1-26. J'ai lu avec beaucoup d'intérêt les deux et j'ai eu beaucoup de plaisir à la lecture des beaux développements de la théorie de Cantor. Par suite, je dois attirer votre attention sur une petite erreur, qui n'est pas essentielle quant à l'article entier, du premier ouvrage et pour laquelle j'ai trouvé sans difficulté un moyen de la corriger. Elle se trouve à partir de la page 149 jusqu'au milieu de la page 150, où la méthode donnée vaut seulement pour $\alpha < \omega^2$.

[[...]] "

(Für die freundliche Zusendung Ihrer beiden Abhandlungen : Math. Ann., 1910, S. 145-168 und Rend. Circ. Mat. Palermo, 1910, S. 1-26, sage ich Ihnen ergebensten Dank. Ich habe beide mit vielem Interesse gelesen und mich sehr über die schöne Fortbildung der Cantorschen Theorie gefreut. Im Folgenden möchte ich auf ein kleines und für das Ganze unwesentliches Versehen der ersteren Arbeit hinweisen, für dessen Beseitigung ich unschwer einen Weg fand. Es handelt sich um den Inhalt von S. 149 Mitte bis S. 150 Mitte, wo die angegebene Methode nur für $\alpha < \omega^2$ gilt.)

Nous n'insisterons donc pas sur cette erreur qui concerne la démonstration de la proposition suivante de Fréchet :

"Je vais maintenant faire correspondre à tout nombre fini ou transfini un type de dimension déterminé $\delta_\alpha < dR_1$, de sorte que si $\beta < \alpha$, on ait $\delta_\beta < \delta_\alpha$."

Il construit ainsi une suite ordonnée croissante non dénombrable de types de dimensions d'ensembles linéaires dénombrables, utilisant une décomposition de tout nombre α (indice de la suite) fini ou transfini qui n'est valable que pour les $\alpha < \omega^2$ (ω étant le premier nombre de la seconde classe).

Nous renvoyons les lecteurs intéressés par le détail de la correction à l'article de Mahlo ([65],328) et aux mentions que Fréchet fit du travail de Mahlo dans son livre <u>Les espaces abstraits</u> (voir ci-dessous).

L'article de Mahlo est en fait le texte d'une communication à l'Académie des Sciences de Leipzig du 17 Juillet 1911, dont le plan était le suivant :

1. type de dimension (<u>Homöie</u>) et dérivé ;

2. traits généraux d'une théorie d'ensembles clairsemés ;

3. théorie des types de dimensions (<u>Homöieen</u>) des ensembles clairsemés dénombrables ;

4. sur les types de dimensions (<u>Homöieen</u>) des ensembles clairsemés non dénombrables;

5. types de dimensions (<u>Homöieen</u>) de sous-ensembles du continu qui ont sa puissance.

Mahlo développe dans cet article la théorie de Fréchet pour les ensembles linéaires clairsemés et procède à une classification des ensembles linéaires homéomorphes que poursuivront Kuratowski et Sierpinski en 1926 et 1927. Nous avons déjà souligné dans la note 25 l'intérêt de la présence dans cet article de la notion d' "ensembles clairsemés" (<u>zerstreute Mengen</u>).

Fréchet se référera donc plusieurs fois à cet article dans le chapitre "Types de dimensions des ensembles linéaires" des <u>Espaces abstraits</u> :

- page 39, il mentionne la correction que Mahlo a apporté à l'erreur dont nous venons de parler ([65],328) ;

- page 41, Fréchet signale que Mahlo a fait remarquer que le type de dimension de n'importe quel ensemble linéaire parfait discontinu est égal à celui des nombres irrationnels ([65],344), puis que les ensembles linéaires, dont le type de dimension est inférieur à celui de l'ensemble des nombres irrationnels, sont ceux qui sont totalement imparfaits (c'est-à-dire ne contiennent aucun sous-ensemble parfait).

<u>2. LETTRES DE BAIRE</u>

Nous avons trouvé dans la correspondance conservée aux Archives de l'Académie des Sciences de Paris cinq lettres et une carte de René Baire datant des années 1907-1911. Il semble qu'au moment où commence cet échange de lettres, Baire et Fréchet ne se soient pas rencontrés. Baire écrit la première de ces lettres, qui contient l'annonce de la note de 1907 aux Comptes Rendus ([6]), à cause d'un article qu'il a à écrire pour l'Encyclopédie des Sciences mathématiques de Molk. Mais, par la suite, leurs échanges ont dû devenir plus fréquents, peut-être à cause des recherches de Fréchet sur l'invariance de la dimension. Fréchet semble être, en 1911, un interlocuteur privilégié de Baire qui se plaint dans chaque lettre de mauvais traitements de la part des autres mathématiciens.

Au-delà de l'intérêt mathématique non négligeable des lettres de Baire, il nous faut signaler leur intérêt humain. Elles sont un bouleversant témoignage du drame que Baire vécut constamment jusqu'à sa mort, et c'est à ce titre que la Rédaction des Cahiers nous a demandé de les publer *in extenso*.

Lettre de Baire à Fréchet du 15 Février 1907

Mon cher Collègue,

Vous êtes chargé, je crois, d'un article de l'Encyclopédie[1] qui doit paraître juste avant le mien. Il m'intéresserait de savoir où en sont les choses en ce qui vous concerne.

Ce bon M. Molk est bien gentil, mais je ne vous cacherai pas que bien des choses me passionnent pour l'instant plus que l'article en question ; l'imprimeur allemand m'en a envoyé une épreuve en placard ; mais l'article ne peut être considéré comme achevé, Molk me demande d'y ajouter différentes choses, en particulier il veut savoir mon opinion sur un certain mémoire de Hausdorff que je n'ai pas encore eu le loisir d'étudier en détail.

Il faudra aussi parler de vos travaux à vous ; bref, c'est presque un second article qu'il faudrait faire par-dessus le premier.[[...]]

Je vous enverrai,dans quelques jours, une note des C.R. communiquée lundi dernier[2]: j'ai eu la chance de trouver une méthode pour démontrer la non-applicabilité de 2 domaines à n et n+p dimensions. [[...]]

Bien cordialement.

René Baire

Lettre de Baire à Fréchet du 1er Juin 1909

Cher Monsieur,

C'est un malade qui vous répond[3] : j'ai en effet commis la maladresse, il y a déjà plus d'un an, juste après l'achèvement de mon livre d'analyse[4], de me laisser reprendre par la fâcheuse neurasthénie qui m'a déjà tenu longtemps autrefois et ne m'a jamais complètement quitté. Je commence seulement à entrer dans la voie de l'amélioration, mais je suis en congé, remplacé dans mon service par un professeur de lycée.

Pour toutes ces raisons, achèvement de mon livre, puis maladie, j'ai dû cesser le travail scientifique proprement dit. En particulier, je n'ai rien publié de ce que j'avais annoncé en avril 1907, et je ne puis pas songer à m'en occuper. Je suis très heureux que vous ayez en main la démonstration de mon théorème III[5] ou d'un équivalent et mon désir est que vous publiez le plus tôt possible votre démonstration. Au point de vue scientifique, l'intérêt en serait grand, et, quant à moi, je serai dégagé de la promesse faite dans cette Note et non encore tenue[6]. La méthode que je me proposais d'appliquer, mais que je n'ai pas mise au point, comme je viens de vous le dire, est indiquée en principe dans ma note antérieure des C. Rendus (février 1907) : on définit les points intérieurs et extérieurs par les moyenas de Guichard (Géométrie élémentaire)[7]. Mais il m'a semblé qu'on rencontrait dans l'application une foule de petites difficultés de détail dont on ne peut pas venir à bout que par un travail de jeu de patience, et c'est ce motif qui m'a arrêté dans mes essais de mise au point. Encore une fois, je serai très content de savoir que vous avez pu trouver mieux ; pour terminer définitivement la question des continus à n et n+p dimensions, vous pourriez,dans votre mémoire, dire en substance : En combinant le théorème actuel avec les méthodes de Baire (Bulletin ...), on a une démonstration complètement rigoureuse du fait que etc.

Schoenflies, dans son 2^{e} rapport (1908), considère mon paragraphe 6 comme une extension d'une méthode d'Osgood pour le cas de 2 dimensions[8]. C'est possible.

J'avoue qu'ayant consacré environ 12 ans à des travaux quelque peu fatigants, j'éprouve le besoin de respirer un peu. Même quand la santé me sera revenue, et je n'en suis pas encore là, je n'ai pas l'intention de reprendre mes recherches anciennes, au moins pendant un certain temps. C'est une épine du pied que vous me tirez si vous voulez bien acquitter pour moi la promesse faite au public dans ma Note en question.

J'ai posé, il y a quelques mois, ma candidature à la Sorbonne ; je n'ai d'ailleurs su la vacance que plusieurs mois après les autres ; c'est, paraît-il, Cartan [[Elie]] qui sera nommé, si ce n'est déjà fait. Mais vous êtes sans doute mieux au courant que moi.

Avec mes félicitations et mes remerciements, je vous adresse mes meilleurs voeux pour une chaire.

Votre bien dévoué.

René Baire

<u>Lettre de Baire à Fréchet du 2 Juillet 1909</u>

Cher Monsieur,

Je suis toujours assez peu brillant comme santé, ne m'améliorant qu'avec une extrême lenteur.

Je souhaite vivement que votre solution du th. III se complète ; je sais par expérience personnelle que les déceptions sont assez fréquentes dans cet ordre de questions, mais les vides se comblent aussi après coup, fort heureusement.

Je crois que la difficulté de la p.103 pourrait se tourner, peut-être, en introduisant entre les P_α les ensembles que je vais appeler Q_γ (γ de seconde espèce, et Q_γ pgcd de tous les précédents). La difficulté vient de ce qu'on peut avoir $Q_\gamma > P_\gamma$; on fera rentrer le $Q_\gamma - P_\gamma$ dans les $P_\alpha - P_{\alpha+1}$. Je vous remercie de me signaler ce point ; mais en ce moment, je ne puis me concentrer sur ces questions ; faites donc pour le mieux à votre point de vue[9]. J'évite pour mon compte en effet de penser à ces choses pour l'instant.

Je suis le professeur le moins informé de France sur les mouvements en préparation ; toutefois, Denjoy me dit qu'il va y avoir une place à Rennes. Lui préfère être candidat à la maîtrise d'Université de Montpellier.

Bien cordialement à vous.

René Baire

Carte postale du 2 Juillet 1909 ; P.S. à la lettre de Baire à Fréchet

Soient (p.103) $P_0 > P_1 > \dots > P_\alpha > \dots$.

Je définis les Q_α comme il suit :

1. Si α de 1e espèce $= \alpha'+1$, $Q_\alpha = P_{\alpha'}$.

2. Si α de 2e espèce, $Q_\alpha =$ pgcd des Q_α précédents. La démonstration s'applique à partir d'un β, avec $Q_\beta = Q_{\beta+1} = \dots = Q_\Omega$.

Chaque P_α est identique à $Q_{\alpha+1}$. Donc les P_α sont identiques à Q_Ω à partir de β au plus tard.

Lettre de Baire à Fréchet du 2 Mars 1911

Mon cher Ami[10],

Je viens vous demander un petit service.

Quoiqu'ayant repris mes fonctions professorales en 1909, je suis encore sujet à des périodes de fatigue accentuée ; en particulier, en ce moment même, je suis hors d'état de lire comme il convient des mémoires, en allemand surtout. Vous devez être très bien au courant des nouveautés dont je vois le titre dans les M[[athematische]] A[[nnalen]] de Brouwer et de Lebesgue. Je n'ai reçu directement ni l'un, ni l'autre.[11] Voulez-vous être assez aimable pour me dire votre opinion sur l'état de la question, sans entrer dans les détails ? En ce qui concerne mes propres travaux sur le même sujet, je n'ai toujours rien publié depuis 1907 ; mon opinion, en gros, est conforme à ce que dit Lebesgue à la fin de sa Note[12], mais je serais quand même content s'il y avait une nouvelle démonstration tout à fait complète et courte. Est-ce que Brouwer est dans ce cas ? (Pour achever ma méthode, il faudrait, ce qui serait l'affaire d'un peu de patience, mettre au point le passage de ma note des C. Rendus, 11.2.07, où je parle de la notion d'intérieur et d'extérieur de Guichard.)[13]

Comme vous le savez peut-être, je n'ai plus de relations depuis longtemps avec Lebesgue. Cependant j'ai jusqu'ici reçu la plupart de ses travaux, de même que je lui envoyais les miens.

Vous devez être également beaucoup plus au courant que moi des affaires de la Sorbonne : j'ai fait acte de candidature à trois reprises ; et quatre nominations ont été faites sans que, malgré mes demandes, on ait procédé à l'examen, indispensable selon moi, de mon Traité d'analyse, que je mettais en avant comme un de mes principaux titres. J'estime (la question santé n'étant certainement pas entrée en ligne) qu'il y a là procédés mesquins et déloyaux, dont je rends responsables tous les 11 titulaires de la Sorbonne, et dont je garde spécialement rancune à ceux d'entre eux qui m'ont le plus comblé d'éloges, tels le doyen Appell, Tannery, Borel.

Paroles et actes sont deux, paraît-il ; il y a environ 12 ans qu'on me le fait bien voir.

Ceci dit, et quoique Parisien de Paris, j'apprécie fort les avantages des petites Facultés comme les nôtres.

J'ai appris avec grand plaisir votre titularisation[14]. Faites aussi mes compliments à Boutroux. Donnez-moi aussi quelques renseignements sur la mort de Bernard.

Très isolé, n'allant plus à Paris, je ne sais rien que les choses officielles et encore bien après les autres. Par exemple, j'ignorais fin septembre qu'il y avait eu en juillet délibération pour la succession de Raffy. Et tout à l'avenant.

Vous me ferez bien plaisir si vous voulez bien me renseigner sur les points que je vous signale et sur tout ce qui pourra vous paraître intéressant. Mais je ne vous réponds pas d'être en mesure de discuter math et c'est précisément pour cela que je me permets d'avoir recours à vous.

Bien cordialement.

René Baire

<u>Lettre de Baire à Fréchet du 20 Mars 1911</u>[15]

Mon cher Collègue et Ami,

Je vous remercie vivement des renseignements contenus dans vos 2 lettres ; je ne suis malheureusement pas encore en état d'étudier à fond ces questions, et je ne puis songer d'ici longtemps à mettre au point les idées que j'ai lancées là-dessus en 1907 ; si par hasard cela vous agréait je n'y verrais que des avantages, et pour la science et pour moi.

Je prend bonne note aussi de votre avis sur mon traité d'analyse[16], mais la vente en est si lente (un vrai four !) que la question d'une nouvelle édition ne se posera peut-être jamais.

J'ai reçu le Zoretti de la collection Borel ; bien entendu, pour le motif susdit, je ne puis l'étudier en ce moment ; mais si le fascicule de l'Encycl. concernant les valeurs réelles est fait, je serais heureux de l'avoir ; comme je ne connais pas Z., si vous êtes en relation avec lui, vous m'obligeriez à lui demander à l'occasion de ne pas m'oublier. [[...]]

Je serais toujours très heureux, malgré mon fâcheux état, d'avoir des nouvelles scientifiques par votre côté.

Bien cordialement.

René Baire

Notes aux lettres de Baire

1 Il s'agit de la traduction française de la 1^e édition de l'Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées, publiée sous les auspices des Académies des Sciences de Göttingen, de Leipzig, de Munich et de Vienne ; cette édition française étant réalisée sous la direction de Jules Molk. 47 fascicules parurent entre 1904 et 1916, dont 10 fascicules d'analyse entre 1909 et 1916.

2 Il s'agit de [6]. Elle fut présentée à l'Académie le 11 Février 1909 par P. Appell.

3 Lorsque Baire écrit cette lettre, il est en congé pratiquement depuis le mois de janvier, atteint de troubles nerveux prononcés. C'est en 1900 que, pour la première fois, Baire ressent les attaques de ce mal, c'est-à-dire des "troubles neurasthéniques caractérisés par une très grande faiblesse musculaire, inaptitude à tout travail intellectuel et forte dépression nerveuse" ([25],307-309).

4 Il s'agit de ses "Leçons sur les théories générales de l'Analyse", dont le premier tome (Principes fondamentaux. Variables réelles) parut chez Gauthier-Villars en 1907 et le second (Variables complexes. Applications géométriques) en 1908. Sur ce livre voir [25], p.336-337. Quoique bien accueillies par les mathématiciens, ces leçons n'eurent pas le succès escompté par Baire. Dans la lettre du 20 Mars 1911, en réponse probablement à des remarques de Fréchet, Baire écrit : "la vente en est si lente (un vrai four) que la question d'une nouvelle édition ne se posera peut-être jamais".

5 Le théorème III que mentionne Baire est celui de [7], généralisation à n dimensions du théorème de Jordan sur laquelle reposent les deux autres théorèmes de l'article, que Baire ne démontre pas : Etant donnée une surface fermée simple Σ de G_n $(n \geq 2)$:

1. il y a pour Σ un intérieur I, un extérieur E. Tout point de I (de E) est centre d'un domaine sphérique dont les points appartiennent à I (à E) ;

2. la distance de deux points quelconques de I est moindre que la borne supérieure des distances de deux points de Σ ;

3. un chemin continu allant d'un point de I à un point de E contient au moins un point de Σ ;

4. si une surface fermée simple Σ varie d'une manière continue en fonction d'un paramètre t qui prend toutes les valeurs d'un intervalle (a,b), un point déterminé M

de G_n, qui ne se trouve sur Σ pour aucune valeur de t, est ou constamment à l'intérieur de Σ ou constamment à l'extérieur.

Comme nous l'avons noté, cette lettre est la seule indication connue jusqu'ici d'un travail de Fréchet pour prouver l'invariance de la dimension, de la notion classique de nombre de dimension. Les formulations de la lettre, y compris les indications sur une rédaction éventuelle, semblent prouver que Fréchet pensait y être arrivé. Or, ce ne fut pas le cas comme l'indique la lettre suivante. Découragé par cet échec, occupé par ses propres travaux sur les types de dimensions, Fréchet a-t-il arrêté ses tentatives, ou au contraire poursuivi ces recherches ? La lettre du 20 Mars 1911 (Brouwer et Lebesgue ont donc publié leurs articles) ferait plutôt opter pour la première solution.

6 Dans [7], Baire s'était en effet engagé à deux reprises vis-à-vis des lecteurs. Présentant son travail il écrit : "Ces dernières propositions étant très importantes en elles-mêmes [[...]], je les étudierai dans un Mémoire spécial que je publierai ultérieurement." D'autre part, en conclusion, il note : "Tout revient comme on voit à démontrer les différentes parties du th.III [[...]]; je me propose d'établir ces propositions pour le cas de n quelconque dans un prochain mémoire."

Il semble, vu le nombre de fois où Baire revient sur cette "promesse" dans les différentes lettres, que cela lui tenait particulièrement à coeur et qu'il fut réellement malheureux de ne pouvoir retravailler à sa démonstration. Mais, indépendamment de la maladie, Baire semble sous-estimer la nature des difficultés soulevées par celle-ci, tout comme le fait Lebesgue lorsqu'il exprime son opinion sur l'article de Baire (voir note 12) ou lorsqu'il indique la démonstration de son lemme sur le pavage de l'espace dans [59]. Les "petites difficultés" dont il est question sont en fait liées très directement aux objets et aux méthodes de la topologie combinatoire ou algébrique. Le travail que fit Brouwer sur les variétés simpliciales avec le recours systématique aux décompositions et aux approximations simpliciales ne peut être qualifié, même s'il est long et laborieux, de simple jeu de patience !

7 Il s'agit du traité de géométrie de Guichard (2 tomes) paru chez Vuibert.

8 Dans la bibliographie très complète de Johnson([50],187), les seules publications de Schoenflies mentionnées à l'année 1908 sont [80] et deux pages du tome 65 des <u>Mathematische Annalen</u> "Remarques sur ma deuxième contribution à la théorie des ensembles de points" (<u>Bemerkung zu meinen zweiten Beitrag zur Theorie des Punktmengen</u>).

Baire fait sans aucun doute référence à [80]. Or, il semble que Baire se trompe en exposant le jugement de Schoenflies. En effet, c'est aux paragraphes 6 et 7 du chapitre V que Schoenflies traite de l'invariance de la dimension, tout d'abord (paragraphe 6) de l'historique depuis 1877, puis (paragraphe 7) des méthodes de démonstration. C'est dans ce paragraphe 7 (p.168) que Baire est cité avec une référence à [6]. Schoenflies écrit : "Baire a fait connaître depuis peu une autre façon de conclure, qui se rattache à l'idée de base de la démonstration de Netto, et qui de toute façon s'étaye sur le théorème VII." Il note : "Baire fait également espérer une démonstration personnelle du théorème VII."

Baire est cité une deuxième et dernière fois dans une note p.169 sur le <u>Jordansche Kurvensatz</u> au sujet de l'approximation polygonale où sa note [7] est donnée.

Quant à Osgood, il n'est pas cité dans les paragraphes concernant directement la dimension, mais aux pages 156, 163 et 164 à propos de l'invariance du domaine. Baire n'est pas cité dans ces paragraphes.

Baire aurait donc confondu Osgood avec Netto ce qui semble pourtant bien surprenant.

9 Il s'agit de la page 103 des "Leçons sur les fonctions discontinues" (parues chez Gauthier-Villars en 1905) dans laquelle Fréchet décelle une "petite lacune" dans la démonstration du théorème de Cantor-Bendixson pour un espace de dimension n. Finalement, Fréchet la signalera dans [29], p.5-7 ; voir également [25], p.333.

10 Contrairement aux lettres de 1909 où Baire s'adressait à Fréchet comme "Monsieur et cher Collègue", les lettres de 1911 sont envoyées à "Mon cher Ami" ou à "Mon cher Ami et Collègue".

Il semble donc que Baire et Fréchet aient eu l'occasion de se connaître mieux et que, malgré la neurasthénie, l'isolement, les rancunes, Baire ait apprécié Fréchet. Nous ne pouvons savoir exactement à quelles occasions Fréchet et Baire ont pu se rencontrer, ni à quel sujet ils ont pu correspondre, car nous n'avons trouvé aucune lettre de Baire entre Juillet 1909 et Mars 1911 aux Archives de l'Académie des Sciences de Paris.

Cette lettre est également un témoignage de la gravité du mal dont souffrait Baire, ainsi que de ses conséquences intellectuelles et morales.

11 Il s'agit de [59] et de [11]. En fait, Baire recevra des tirés à part de Brouwer dont [11] dans le courant de l'année 1911. Une correspondance s'ensuit entre les deux mathématiciens, au sujet de leurs articles réciproques(voir Annexe II).

12 Il s'agit de [59] : "On pourrait présenter la démonstration précédente de façon moins artificielle, mais j'ai cherché surtout à être court, parce qu'une méthode de démonstration naturelle et qui a l'avantage d'élucider en même temps plusieurs autres questions d'Analysis Situs a été indiquée par M. Baire. Sans doute M. Baire n'a pas développé sa démonstration ; <u>mais il me semble que si on tient compte des indications données par M. Baire, il ne reste plus à trancher que des difficultés de détail peu sérieuses</u>."

13 Baire écrit dans [6], p.320 : "Si L est un contour polygonal plan fermé, ayant ou non des points de croisement, si M est un point du plan non situé sur L, une demi-droite variable passant par M coupe L en un nombre de points toujours pair ou toujours impair ; M est extérieur à L dans le premier cas, intérieur dans le second."

14 De 1910 à 1918, Maurice Fréchet a été successivement chargé du cours de mécanique puis professeur à Poitiers.

15 Il faut noter la rapidité et l'application avec laquelle Fréchet a répondu. En effet, la demande de Baire est du 2 Mars et Fréchet a envoyé deux lettres avant le 20 Mars.

Il est dommage que nous n'ayons pu retrouver de brouillons de ces réponses dans les papiers de Fréchet (Baire semble n'avoir conservé que peu de lettres qu'il a reçues) et que, de ce fait, nous ne puissions connaître son opinion et son analyse de ces deux articles fondamentaux. On peut cependant noter dans une lettre de Baire à Brouwer du 2 Novembre 1911 la phrase : "Je n'ai pas étudié à fond sa démonstration des M. Annalen [[[59], celle de Lebesgue]], dont l'exposition est, en tout cas, trop abrégée", qui traduit peut-être l'opinion de Fréchet.

16 Voir la note 4.

3. LETTRE DE FRECHET A BROUWER DU 28 AVRIL 1913

[[...]]

Je vous remercie des tirages à part que vous m'avez récemment fait envoyer. J'ai lu surtout avec intérêt naturellement votre article sur le nombre de dimension naturel[1]. Si je comprends bien, cela revient à définir ce qu'on pourrait appeler la partie entière du nombre de dimension[2]. Ne vous semble-t-il pas qu'il serait bon de démontrer en passant que, si E est une partie de F, la partie entière du nombre de dimension de E est $\leq$ à celle de F. Il me semble que cela n'est pas tout à fait évident.

Maintenant je voudrais vous demander ce que vous entendez par continuum. La définition que vous donnez zum Beispiel [[par exemple]] en haut de la page 147[3] est-elle celle que vous adoptez par la suite? Est-ce que Cantor n'adopte pas comme définition du continu eine zusammenhängende abgeschlossene Menge ?

Votre définition du haut de la page 147 est-elle réellement plus étroite que celle de Cantor[4] ?

Je vous signale la définition suivante qui - extension d'une extension par Janiszewski de la définition de Jordan - a l'avantage de s'appliquer à une classe quelconque où la limite est définie, ce que j'ai appelé une classe (L).

Un ensemble continu est un ensemble fermé et bien enchaîné. Un ensemble bien enchaîné E est un ensemble tel qu'en appelant E l'ensemble E+E : 1. E est fermé ; 2. E n'est pas la somme de 2 ensembles fermés sans éléments communs.

Quand la classe est (V) c.à.d. si la limite y est définie par un voisinage, sans que la classe soit nécessairement normale, tout ensemble bien enchaîné au sens actuel l'est au sens de Cantor.

La réciproque n'est pas tout à fait exacte - elle ne l'est que si l'ensemble est compact, c.à.d. si toute suite infinie d'éléments de l'ensemble donne lieu à au moins un élément limite.

Cette condition supplémentaire n'est pas artificielle, elle se retrouve par exemple si la classe est l'ensemble des points du plan et signifie que l'ensemble est borné.

[[...]]

Notes à la lettre de Fréchet

1 Nous n'avons retrouvé, à part la lettre du 17 Mai 1912 ([3]), que trois lettres de Brouwer de la période étudiée : une de 1914 (dont la fin est cordiale), et deux de 1925, mais aucune ne traite de problèmes mathématiques relatifs à la dimension ou non. (Freudenthal ne mentionne pas de correspondance entre Brouwer et Fréchet.)

2 Il s'agite de [17].

3 Fréchet énonce là une idée sur laquelle il reviendra avec insistance après 1923. Voir à ce sujet la thèse en préparation, déjà mentionnée, de L.C. Arboleda et l'article [44] de Fréchet, dans lequel Fréchet établit la correspondance entre le nombre de dimension de Menger et Urysohn et la partie entière du type de dimensions.

4 Brouwer écrit ([17],147) : "Par exemple, un ensemble normal (au sens de Fréchet) E s'appellera continu, si,pour deux de ses éléments w_1 et w_2 , il existe un ensemble fermé connexe qui est un sous-ensemble de E et qui contient w_1 et w_2 ".

La question de la définition du continu a été l'objet de discussions, comme nous l'avons signalé. Brouwer, dans cette page, montre que la définition de Poincaré du nombre de dimension ne s'applique pas à ce genre de continu et, reprenant le contre-exemple de Riesz de [77], il indique le cas du "double cône". D'où la nécessité de transformer la définition de Poincaré, ce qu'il s'attache à faire dans cet article.

4. LETTRES DE KEREKJARTO

Les lettres de Kerekjarto, au nombre de neuf, que nous avons retrouvées dans les papiers de Fréchet, ont été écrites entre 1924 et 1926 et traitent toutes de topologie.

Dans les premières lettres, Kerekjarto informe Fréchet de ses propres recherches en mathématiques en 1924-1925 : classification des variétés à 3 dimensions, problème de l'invariance des ensembles ouverts, définition récurrente liée aux groupes continus des variétés à n dimensions.

Par contre, les lettres de 1926 sont les commentaires de Kerekjarto sur les épreuves des "Espaces abstraits" que Fréchet lui avait envoyées. Dans la première de ces lettres, datant du 28 Septembre 1926, Kerekjarto fait part à Fréchet de son opinion extrêmement élogieuse. Les critiques des lettres suivantes ne la remettent pas en cause ; elles concernent un point particulier qui est à la fois de nature mathématique et historique, la "querelle" de priorité entre Lebesgue et Brouwer sur l'invariance du domaine. Quoique l'histoire de cette querelle ne soit plus à faire ([19]), il nous semble intéressant de publier ces lettres qui montrent le débat qu'il y avait alors entre mathématiciens. Nous y joignons deux lettres de Kerekjarto de 1924 où il mentionne également les rôles respectifs de Brouwer et de Lebesgue.

Lettre de Kerekjarto à Fréchet du 4 Mars 1924[1]

[[...]]

Je suis très reconnaissant que vous me communiquez la lacune qui existe dans la démonstration de M.Lebesgue et je suis curieux d'apprendre la façon comment il la comblera[2]. Aussi pour le deuxième volume de ma Topologie, ce mémoire de M. Lebesgue a un intérêt fondamental, et j'essaye de démontrer son lemme central qui sert à la fois pour une définition la plus naturelle de nombre de dimensions (il me paraît) par des raisonnements plus simples[3].

L'inexactitude dans le mémoire de M. Brouwer m'est connue dès une communication de M. Urysohn, mais je ne vois aucun moyen comment la corriger.[4]

[[...]]

Votre notion de type de dimension rendra vraiment plus claires les questions que je considère dans le chapitre I, concernant la structure des ensembles dénombrables et des ensembles fermés.

[[...]]

Lettre de Kerekjarto à Fréchet du 27 Mars 1924

Princeton

Monsieur et cher Collègue,

Vous m'avez bien voulu mentionner l'inexactitude qu'il y a dans le mémoire de M. Brouwer sur la notion intuitive de la dimension. Or, je voudrais attirer votre attention au mémoire de M. Brouwer qui vient de paraître dans les Procès-Verbaux de l'Académie d'Amsterdam (édition anglaise, volume XXVI, p.795, édition hollandaise, vol. 32(1923)) et qui contient déjà la correction de l'inexactitude en question (note à la page 796). Brouwer dit ensuite (note 19, p.799) que la démonstration du lemme fondamental de Lebesgue, donnée par Lebesgue dans les F.M., n'est en essence qu'une complication inutile de la démonstration de Brouwer[5] ; je vous avoue que je ne vois pas s'il a raison.

[[...]]

Lettre de Kerekjarto à Fréchet du 28 Septembre 1926

Monsieur et cher Collègue,

[[...]]

Mais voici que j'ai lu avec très grand intérêt le manuscrit de votre oeuvre que vous avez eu la bonté de m'envoyer ; je l'ai étudié en détail et j'ai quelques remarques que je vous communiquerai pendant les prochaines semaines où je relirai le manuscrit.

Mais permettez moi pour le moment une remarque générale : c'est que je suis bien étonné de cette oeuvre merveilleuse et sans pareil de son genre, qui réunit si spontanément les buts profondément scientifiques avec les points de vue didactiques. Je suis convaincu qu'après la publication de ce livre la théorie des ensembles abstraits sera aussi généralement connue et familière aux mathématiciens que par exemple la théorie des fonctions réelles l'est aujourd'hui.

[[...]]

Lettre de Kerekjarto à Fréchet du 30 Octobre 1926

[[...]]

La seule chose que j'ai trouvée telle qui doit être absolument changée[6] est le passage suivant (p.110[7] de votre manuscrit concernant le théorème de Schoenflies et Lebesgue). C'est M. Lebesgue qui a méconnu l'importance de sa démonstration pour l'invariance du nombre de dimension. En effet, son lemme que vous citez (p.110 du manuscrit, au lieu de $E_1, E_2, \ldots, E_n$ dans ce lemme chez vous il faut lire $E_1, E_2, \ldots, E_\nu$ $(\nu \geqq n+1)$) a l'importance de définir le nombre ordinaire de dimension par une propriété intrinsèque des ensembles. Da là, il déduit l'invariance du nombre de dimension et le théorème de Schoenflies. La précision que M. Lebesgue a joint au théorème de Schoenflies est triviale.[8] Supposons en effet que le théorème de S. soit déjà démontré : Soit F un ensemble fermé de R_n, I ensemble de ses points intérieurs ; d'après le th. de S. I et I' se correspondent ; de la continuité seule de la transformation de F en F', il s'ensuit que les points limites de I sont transformés en des points limites de I' ; de la bicontinuité de la transformation, il s'ensuit que les points limites de I et de I' se correspondent ; par suite aussi les points de F et de F', qui ne sont pas des points limites de I et de I', se correspondent. Alors la précision de M. Lebesgue n'est qu'une conséquence triviale du th. de S. et de la bicontinuité de la transformation de F en F'. Pour cette précision, il n'a pas besoin de son lemme. Au contraire, ce lemme a la grande importance de fournir une démonstration très élégante et intrinsèque pour le th. de S. Aussi, pour les recherches de généralisation, la notion du nombre de dimension, recherches de M. Poincaré, Brouwer et récemment Brouwer, Menger et Alexandroff, ce lemme de M. Lebesgue forme le point de départ et le fondement naturel. Il décrit le nombre de dimension par une propriété absolue de l'ensemble, indépendamment de l'espace qui le contient.

Aussi, il faudrait mentionner M. Lebesgue à la page 65[9] de votre manuscrit. Il me semble que ce passage de la page 110 dans votre manuscrit doit être changé ; en tout cas, c'est M. Lebesgue qui a tort et dont le travail dans les Fundamenta Mathematicae[10] vous a trompé ; il a attribué une importance à sa "généralisation" du théorème de

Schoenflies qui n'est qu'une généralisation triviale.

Excusez-moi que je donne une critique si brusque d'oeuvres de grands savants ; j'espère que vous ne me mal entendez pas ; je ne veux pas nier leur grande valeur, seulement j'insiste qu'un malentendu d'un grand savant tel que M. Lebesgue ne dois pas subsister dans la littérature.

Aussi, je ne suis pas tout à fait d'accord avec votre terminologie "nombre de dimension". C'est sûrement une idée de profonde importance ce que vous avez introduit par l'homéomorphisme d'un ensemble et d'un sous-ensemble de cet ensemble ; une notion qui est bien plus importante et précise que même dimensionalité au sens ordinaire ; mais cela n'est pas justement ce qu'on entend par dimensionalité. Ce n'est que l'expression "nombre de dimension" que je changerais et appellerais "type de dimension"[11] (ou type d'homéie) [[cette parenthèse est raturée dans la lettre]]. C'est sûrement un des problèmes fondamentaux de la topologie de saisir les types de dimension - pour cela un premier pas forme la connaissance du nombre de dimension au sens ordinaire - et la connaissance précise des types de dimension fournira une importante contribution pour la solution du problème d'homéomorphisme, c'est-à-dire de déterminer les conditions sous lesquelles 2 ensembles sont homéomorphes.

Il me semble intéressant de <u>localiser</u>[12] votre définition du type de dimension, c'est-à-dire de déterminer le type de dimension d'un ensemble M par les types de dimension des voisinages des points de M sur M.

Cela serait une meilleure approximation de la dimensionalité ordinaire. Par exemple le cercle et la ligne droite ont le même type local de dimension ; de même la courbe $\left\{ y = \sin \frac{1}{x} , 0 < x \leq 1 \right\}$ et la courbe $\left\{ y = \frac{x}{n} , 0 < x \leq 1 , n = 1,2,\ldots \right\}$.

[[...]]

<u>Lettre de Kerekjarto à Fréchet du 23 Novembre 1926</u>[13]

[[...]]

1. Concernant le théorème de Schoenflies, M. Schoenflies a démontré le théorème que par une transformation biunivoque et bicontinue d'un domaine plan en un ensemble plan, l'ensemble image est aussi un domaine. Ce théorème est appelé invariance du domaine dans la littérature allemande et théorème de Schoenflies dans la littérature française et anglaise. M. Schoenflies a démontré ce théorème (Göttingen, 1899) en se servant du théorème de Jordan.

- Si l'on avait une démonstration du théorème de Jordan généralisé pour n dimensions, la déduction de Schoenflies serait valable, avec l'énoncé, pour n dimensions. La 1^{e} démonstration complète pour l'invariance du domaine (n dimensions) a été donnée par Brouwer (M.A.) en 1911, une autre plus simple en 1912[14]. Ces mémoires de Brouwer ont pour base son mémoire sur l'<u>invariance du nombre de dimension</u> et la notion du <u>degré d'une transformation</u> univoque et continue introduite par M. Brouwer comme généralisation de l'indice de Kronecker.

- En 1911, Lebesgue a essayé de démontrer l'invariance du nombre de dimension. Bien que son travail a montré une lacune en un point très essentiel, il a deux grands mérites[15] :

1. par son lemme (lemme de Lebesgue dont je parlerai tout à l'heure) ;

2. par l'introduction de la notion de variété enlacée par laquelle il a démontré une partie du théorème de Jordan généralisé (pour n). En 1912, M. Brouwer a donné la 1^e^ démonstration irréprochable[16] du lemme de M. Lebesgue (Crelle). En 1922 dans les Fundamenta Matematicae, M. Lebesgue a démontré son lemme par une méthode qui n'est en somme qu'une modification de la méthode dont M. Brouwer s'est servi ; ensuite, il a déduit comme conséquence de son lemme non seulement l'invariance du nombre de dimension, mais aussi l'invariance du domaine. M. Lebesgue a donc donné une nouvelle démonstration du théorème démontré 11 ans avant par M. Brouver pour le cas général. Si vous voulez joindre un nom au théorème de l'invariance du domaine, il faudrait l'appeler théorème de Schoenflies-Brouwer[17]. Avec ce que vous proposez : "pour préciser ce résultat avec M. Lebesgue" etc., je suis tout à fait d'accord.

2. Concernant la vigueur du lemme de Lebesgue pour une définition intrinsèque du nombre de dimension, le lemme de Lebesgue définit un nombre entier n qui est caractéristique pour un ensemble dans le sens qu'il reste invariable par les homéomorphismes. Il a donné sans doute sa définition seulement pour les ensembles de points d'un espace à un nombre fini de dimensions, parce que dans ce temps-là (en 1911) vos résultats fondamentaux n'ont pas été suffisamment connus pour reconnaître leur signification fondamentale pour l'Analysis Situs. C'est M. Brouwer qui, en précisant les idées de Poincaré, se servait des classes normales (D) pour lesquelles il a donné une définition récurrente de dimension ; aussi lui, il a montré l'équivalence de sa définition récurrente avec la définition impliquée par le lemme de M. Lebesgue pour le cas des ensembles de points dans un espace à n dimensions[18]. Les récentes publications de MM. Urysohn, Menger et Alexandroff sur la théorie de la dimension ne sont que des précisions et continuations de ces recherches de MM. Brouwer et Lebesgue (cf. la note d'Urysohn, C.R. 1923).

Je ne peux pas dénier leur valeur, mais d'après mon opinion tous ces auteurs ont tort lorsqu'ils manquent de donner une citation des travaux de MM. Lebesgue et Brouwer comme l'origine naturelle de leurs recherches et résultats. (Aussi il y avait une discussion à Düsseldorf, l'automne de l'année courante, entre Alexandroff et Menger d'une part et Rado d'autre part, qui a mon avis sur ce sujet ; MM. Alexandroff et Menger ont reproché à Lebesgue qu'il n'a pas formulé son lemme pour des espaces abstraits !)

Il ne serait pas juste de citer mon nom dans cette connexion, parce que j'ai constaté simplement des faits qui vous ont échapés ; ce n'est pas votre tort que cela est ainsi, mais le tort des nouveaux auteurs qui évitent soigneusements de citer M. Lebesgue.

Je vous proposerais d'écrire ce passage à peu près dans la forme suivante (page

111) : "Le lemme de M. Lebesgue présente un intérêt considérable de la circonstance qu'il fait en outre entrevoir la possibilité d'une définition intrinsèque des nombres entiers de dimension. Ce sont MM. Brouwer et Urysohn qui ont mis cette définition en rapport avec la définition récurrente des nombres entiers de dimension."[19]

Il faudrait naturellement modifier le passage de votre manuscrit concernant les autres définitions géométriques des nombres de dimension , en disant que les définitions données par Poincaré, Brouwer, Urysohn, Menger et Alexandroff ont pour point de départ un procédé de récurrence, elles sont fondées d'autre part sur un lemme de M. Lebesgue qui donne une définition intrinsèque des nombres de dimension.

[[...]]

Notes aux lettres de Kerekjarto

1 En Octobre 1823, Fréchet écrit à Kerekjarto pour le remercier de l'envoi des épreuves de sa "Topologie" ([54]) et lui répond au sujet de ses classes (L) qui pour lui ont perdu de leur importance. Il expose également dans cette lettre l'évolution de la notion d'homéomorphie dans son travail.

2 Il s'agit d'une "lacune" dans [61] paru dans les Fundamenta Mathematicae en 1921 et corrigée dans [62] paru en 1926. Lebesgue y parle ainsi de son "erreur" : "Monsieur Fréchet vient de me faire observer que ma démonstration est insuffisante ; par une singulière étourderie, en effet, j'ai admis presque entièrement la propriété à démontrer a un moment de mon raisonnement. Pourtant, il suffit d'ajouter quelques lignes au paragraphe 12 pour le compléter."

3 Il s'agit du lemme fondamental sur le pavage de l'espace ; voir, au sujet de son importance, la lettre de Kerekjarto du 30 Octobre 1926.

4 Il s'agit d'une inexactitude dans la "définition de la séparation" (Trennungsdefinition) de deux ensembles dans [17] corrigée dans [18].

5 Cette opinion est formulée par Brouwer dans [18].

6 Dans cette lettre, Kerekjarto expose à Fréchet le contresens qu'à son avis celui-ci commet sur le travail que Lebesgue a consacré à la dimension. Le travail de Lebesgue peut se résumer de la façon suivante :

1. les deux notes de 1919, [59] et [60], dans lesquelles il expose sommairement le lemme fondamental sur le pavage de l'espace,et en déduit l'invariance de la dimension, et une généralisation du théorème de Jordan ;

2. la reprise de ses recherches,avec les publications [61] et [62] en 1921 et 1924, dans lesquelles il reprend et développe les idées de [59], pour en déduire surtout l'invariance du domaine ou théorème de Schoenflies.

Contrairement aux affirmations de Lebesgue et Fréchet, Kerekjarto défend le point de vue suivant : l'importance de ce "lemme fondamental" n'a rien à voir avec le rôle que lui fait jouer Lebesgue dans ses démonstrations de [59], [61] ou [62]. Lebesgue n'utilise pas ce lemme à bon escient et en détourne l'intérêt. Son utilisation dans sa démonstration de l'invariance du domaine et la généralisation de Schoenflies n'est pas intéressante et ne justifie aucunement l'appellation de celui-ci comme "théorème de Schoenflies-Lebesgue" (comme le fait Fréchet dans son manuscrit).

Par contre, en tant que tel ce lemme est fondamental. En effet le principe de pavage exposé dans ce lemme est à l'origine d'une définition de la dimension par une propriété intrinsèque des ensembles, définition qui sera introduite formellement par Urysohn et Menger. Cette définition directe de la dimension est d'ailleurs équivalente à la définition récursive de Poincaré et Brouwer, dans le cas fini, comme l'ont montré Urysohn et Menger. C'est donc en cela que réside l'importance du lemme, ainsi que la seule priorité de Lebesgue sur Brouwer, priorité indiscutable, l'article de Brouwer sur la "notion intuitive de dimension" ne datant que de 1913, Brouwer se servant d'ailleurs de l'idée de Lebesgue de pavage du plan. Mais cela met également en lumière le rôle de tout premier plan, et mal reconnu, que Lebesgue a joué dans l'histoire de l'évolution de la notion de dimension, son lemme formant le point de départ et le fondement des recherches d'Urysohn, Menger et Alexandroff (cf. cette lettre).

Nous avons voulu chercher quelle avait été l'influence sur Fréchet d'une opinion tout à la fois aussi catégorique et contraire à la sienne. Ne disposant pas du manuscrit des "Espaces abstraits", nous avons utilisé les notes du cours que Fréchet enseigna à Strasbourg en 1923-1924, notes que nous avons retrouvées dans le Fonds Fréchet.

Ce cours de topologie est composé de deux chapitres. Le premier expose les théorèmes fondamentaux sur le nombre de dimensions d'un espace et le second la topologie des classes abstraites. Ce cours, rédigé par ses étudiants, est manifestement une première rédaction des "Espaces abstraits", dont il envoie le manuscrit dès 1925 à différents mathématiciens.

C'est dans le premier chapitre de ce cours que se trouve probablement une copie fidèle de ce qu'était cette première rédaction des paragraphes des "Espaces abstraits" auxquels Kerekjarto fait référence.

Dans ce premire chapitre, au sujet de la démonstration du "théorème II" (étant donnés E et F, E espace à n coordonnées et F espace à m coordonnées, il ne peut exister une correspondance biunivoque et bicontinue entre E et F lorsque $n \neq m$, si E (par exemple si $n > m$) contient une sphère), il signale les essais de Baire et de Lebesgue, puis écrit que la première démonstration est celle de Brouwer, mais que Lebesgue l'a simplifiée, puis complétée, et il expose cette dernière. Puis il en vient, toujours dans ce chapitre I, à la démonstration du théorème de "Schoenflies-Lebesgue" sur l'invariance du domaine, en se référant à l'énoncé et à la démonstration des <u>Fundamenta Matematicae</u> de 1924. On retrouve donc les erreurs, le "contresens", reprochés à Fréchet dans cette lettre. Qu'en est-il maintenant de la rédaction définitive des "Esapces abstrats" ?

On retrouve bien dans la table des matières l'indication : p.59, théorème de Schoenflies-Lebesgue, mais,en se reportant à cette page, le titre du paragraphe est devenu :

"généralisation du théorème de Schoenflies".

Si Brouwer est cité dans ce paragraphe comme étant le premier à en avoir donné une démonstration complète, ce sont cependant encore les articles et les démonstrations de Lebesgue que Fréchet cite.

Dans la page suivante, dans une note se référant aux remarques de Kerekjarto contenues dans cette lettre, Fréchet souligne l'importance du lemme qui "fait entrevoir la possibilité de donner une définition absolue, intrinsèque et non récurrente, des nombres entiers de dimensions", et une autre note de la page 28, dans le paragraphe "Une première définition du nombre de dimension" ainsi que la page 29, tiennent également compte des remarques de Kerekjarto en mentionnant ce lemme.

L'influence de Kerekjarto fut donc réelle, mais toutefois limitée, la rédaction de la note de la page 59 en étant un exemple remarquable.

7 Il s'agit de la page 59 des "Espaces abstraits".

8 Kerekjarto rejoint donc l'avis que Brouwer lui-même formule dans [18]. Son opinion a évolué depuis la lettre du 27 Mars 1924.

9 Il s'agit de la page 28 de [38]. C'est dans ce paragraphe que Fréchet traite d'une "première définition du nombre de dimension" et qu'il tient compte, comme nous l'avons signalé, des remarques de Kerekjarto.

10 Il s'agit de [61] et de [62].

11 Cette remarque est due à l'attitude de Fréchet qui usait des deux termes : nombre de dimensions et type de dimensions, comme le montre la lecture de ses articles, cette "confusion" étant très certainement délibérée.

12 D'après cette remarque de Kerekjarto, Fréchet n'aurait pas abordé, dans le manuscrit de son livre, la question du type local de dimension, question présente dans son livre page 111.

Cela semble étonnant, le passage du livre faisant référence à une publication de Tietze de 1923 ([84]), publication dont Fréchet avait dû prendre connaissance bien avant la rédaction de son livre. Cependant, cela est confirmé par la lecture du cours de Strasbourg (1923-1924) où le type local de dimension n'est jamais mentionné.

Il semble donc que ce soit Kerekjarto qui ait signalé cette question à Fréchet et lui en ait montré l'importance. L'exemple, cité dans la lettre, du cercle et de la ligne droite, se retrouve dans le livre. On peut s'étonner que,dans ce paragraphe du livre, Fréchet ne mentionne aucunement Kerekjarto, et ne cite que Tietze, quoique Tietze fut le seul à avoir travaillé sur cette question avant la parution des "Espaces abstraits".

13 Moins d'un mois après la lettre précédente, Kerekjarto envoie à Fréchet de nouveaux arguments pour étayer son affirmation. Il faut croire que dans sa réponse, dont nous ne disposons pas, Fréchet défendait fermement son propre point de vue. Les modifications que l'on peut constater entre le cours de Strasbourg et le livre des "Espaces abstraits" montrent jusqu'à quel point Kerekjarto réussit à convaincre Fréchet.

14 Il s'agit des articles [13] et [16].

15 Il s'agit des articles [59] et [60].

16 Il s'agit en fait de [17] paru en 1913.

17 Cela, Fréchet ne le fera pas, comme nous l'avons vu. Il renoncera seulement à la dénomination "théorème de Schoenflies-Lebesgue".

18 Au sujet de cet article de Brouwer, voir [19], p.559.

19 En fait, si Fréchet reprend, page 60 des "Espaces abstraits", textuellement en note le début du paragraphe, on ne retrouve plus la phrase sur Brouwer et Urysohn !

ANNEXE II : TROIS LETTRES DE BROUWER A BAIRE (1911)

Ces trois lettres du dernier trimestre 1911 nous ont été communiquées, comme nous l'avons déjà signalé, par P. Dugac.

La découverte de ces lettres de Brouwer à Baire permet de reconstituer de façon définitive les échanges qu'il y eut entre Baire et Brouwer à propos de la dimension et des problèmes d'invariance topologique, et en même temps de préciser les opinions de Brouwer sur ces questions. Elle est non seulement intéressante à ce titre, mais exceptionnelle, Baire ayant détruit la plus grande part des lettres qu'il reçut.

Cette correspondance fut d'abord décrite par Freudenthal dans [19], p.441, à partir des seules réponses de Baire à Brouwer que P. Dugac a publiées et analysées dans [25], p.368, et d'un brouillon de la lettre du 5 Novembre de Brouwer à Baire. Avec les lettres publiées par P. Dugac et celles que nous publions ici, nous pouvons donc retracer exactement l'échange qu'il y eut entre Baire et Brouwer.

Brouwer envoya à Baire divers tirés à part, dont celui sur l'invariance du nombre de dimension, entre les mois de Mars et Octobre 1911.

Baire répond le 28 Octobre, en remerciant Brouwer et en lui adressant ses "vives félicitations pour les progrès qu'il réalise dans le domaine de l'analysis situs moderne", et signale encore une fois que sa maladie l'a empêché de continuer ses recherches.

Brouwer lui répond immédiatement (lettre du 31 Octobre) et mentionne brièvement les deux points qui seront développés dans leurs lettres suivantes, à savoir ses griefs contre Lebesgue et son analyse des articles de Baire de 1907 sur la non applicabilité de deux continus à n et n+p dimensions ([6],[7]).

Nous avons ici l'occasion de montrer un nouvel aspect de la querelle qui l'opposait à Lebesgue. Il s'agit de l'appréciation que Lebesgue fit des travaux de Baire à la fin de son article aux Mathematische Annalen ([59]) ; cette appréciation, quoique partagée par Baire qui se déclare convaincu qu'il n'y a pas de difficultés de principes dans la démonstration du non-homéomorphisme de $\underline{R}^n$ sur $\underline{R}^p$ si l'on suit sa méthode exposée dans [7], est fortement contestée par Brouwer qui accuse Lebesgue de ne l'avoir formulée que pour lui "souffler" la priorité de la démonstration de l'invariance (ces plaintes de

Brouwer trouvèrent, contre toute logique, un écho très favorable dans les réponses de Baire qu'une vieille concurrence opposait à Lebesgue).

L'opinion de Brouwer, non dépourvue d'ambiguïté à cause de cette querelle de priorité (lettre du 31 Octobre), est la suivante : les théorèmes de Baire, s'ils permettent d'éclaircir une question fondamentale de l'analysis situs, celle de l'invariance du domaine et de la généralisation du théorème de Jordan, ne réalisent aucun progrès dans le problème précis de l'invariance de la dimension. (Brouwer indique qu'il a d'ailleurs essayé de démontrer ce théorème III et que, s'il y réussit pour le cas n=3, il fut longtemps tenu en échec pour le cas général. Il s'inscrit ainsi en faux, et à notre avis avec raison, contre l'appréciation de Lebesgue et de Baire qui sous-estimèrent grandement les difficultés, baptisées "techniques", soulevées par la méthode exposée dans les notes de 1907 ; voir note 12 aux lettres de Baire à Fréchet).

Baire répond le 2 Novembre (il faut encore souligner le rythme étonnant de cette correpondance : six lettres entre le 28 Octobre et le 5 Décembre) en réaffirmant sa propre position sur ses articles et en avouant son incapacité d'étudier à fond les problèmes soulevés par Brouwer. Il précise sa réponse (lettre du 5 Décembre), après une deuxième lettre de Brouwer du 5 Novembre (lettre dans laquelle Brouwer développe ses arguments ; voir les notes), et souligne qu'à son avis ses "propositions forment un ensemble moins complet que les énoncés 1, 2, 3 de la p.314 " (de [11]).

En fait, étant donné l'état de Baire, les deux mathématiciens ne purent avoir une réelle discussion sur la portée et la nature des articles de 1907. Baire ne fit que réitérer la position déjà énoncée dans les lettres à Fréchet et ne put ni confirmer ni infirmer l'appréciation de Brouwer.

Dans la lettre du 4 Décembre, Brouwer signale qu'il a dû rectifier, dans ses articles, l'opinion de Lebesgue sur les notes de Baire et le rôle de ce dernier dans la démonstration du théorème d'invariance de la dimension. C'est sur cette lettre,dans laquelle Brouwer "demande franchement pardon de la nécessité de défense personnelle [[...]] dans laquelle il s'est trouvé", que s'achève la correspondance entre Baire et Brouwer. Sûrement déçu par l'absence de réflexion mathématique de Baire, Brouwer ne trouva plus d'intérêt à prolonger un échange au delà de sa demande "déontologique".

<u>1.</u>

Amsterdam, le 31.10.1911
Overtoom 565

Monsieur et cher Collègue,

J'ai été très heureux de recevoir votre lettre cordiale.[1] J'y suis d'autant plus sensible, que je crois avoir un peu à me plaindre de la conduite envers moi de deux mathématiciens français de votre génération, histoires dont j'ai été très peiné.[2]

Quant à vos publications de 1907, je suppose que vous n'êtes pas d'accord vous-même avec les lignes que M. Lebesgue vous a vouées en terminant sa fausse démonstration de l'invariance du nombre de dimensions (Mathem. Annalen 70, p.166-168)[3]. Les théorèmes importants que vous avez formulés en 1907 me semblent être d'un caractère beaucoup plus subtil que l'invariance, qui est pour moi la propriété la plus fondamentale, mais aussi la plus grossière de l'analysis situs à n dimensions.

Puisque l'affirmation de M. Lebesgue sur vos publications, si elle était juste, enlèverait à ma démonstration de l'invariance toute sa valeur, je suis bien obligé de la rectifier à la première occasion. Je vous serais reconnaissant si alors vous approuverez cette rectification, si désagréable pour moi, et ne la considérerez en aucune façon comme critique dirigée contre vous.

Cher Monsieur, en vous renouvelant mes remerciements de votre lettre et de vos bons voeux, je vous souhaite bien vivement un recouvrement prompt et complet de votre activité, d'autant plus que j'ai toujours suivi vos belles recherches avec le plus grand intérêt.

Croyez à mes sentiments les plus cordiaux.

L.E.J. Brouwer

<u>2.</u>

Amsterdam, 5.11.11
Overtoom 565

Mon cher Collègue,

C'est avec un vif plaisir que je continue notre correspondance.

Les mathématiciens dont je crois avoir à me plaindre sont Zoretti et Lebesgue.

Quant à vos études de 1907, elles visent la démonstration de l'<u>invariance de la région n-dimensionnelle</u>, c'est-à-dire du théorème que dans l'espace E_n l'image biunivoque et continue[4] d'un ensemble ne contenant que des "points non frontières" forme elle-même un ensemble ne contenant que des points non frontières.

Or, l'équivalent de l'invariance du nombre de dimensions est le théorème suivant, qui est beaucoup plus restreint :

"Dans l'image biunivoque et continue d'un ensemble ne contenant que des points non frontières, les points non frontières forment un ensemble partout dense." (Voir à ce sujet ma note du t.70 des Math. Annalen, et l'article de M. Fréchet du t.68 du même journal.)[5]

A mes yeux le grand mérite de vos études de 1907 consiste en ce qu'elles montrent qu'on peut déduire l'invariance de la région n-dimensionnelle du théorème suivant :

"Dans E_n l'image biunovoque et continue d'une variété fermée à n-1 dimensions détermine au moins deux régions."[6]

Cette remarque avançait la solution du problème de l'invariance de la région n-dimensionnelle , problème extrêmement important, puisque sa solution permet d'appliquer d'une manière parfaitement rigoureuse la méthode de continuité à l'uniformisation des fonctions algébriques (voir Poincaré, Acta Mathematica 4, p.276-278).

Or, pour l'invariance du nombre de dimensions, le théorème,auquel vous vous êtes arrêté, ne réalisait pas de progrès, puisqu'à mon avis ce théorème est beaucoup plus difficile que l'invariance du nombre de dimensions. Autant que je vois,les indications que vous donnez dans les Comptes Rendus laissent subsister la difficulté principale. Pendant longtemps j'avais cherché une démonstration ; pour n=3 elle est assez facile, pour n quelconque je n'y suis parvenu que l'été passé , moyennant un raisonnement que j'ai retrouvé ensuite dans la seconde partie de la Note de Lebesgue (C.R. 27 Mars 1911), où d'ailleurs il se trouve dans une forme à peu près illisible, et inexacte, si on la prend à la lettre.

Cette démonstration est bien autrement compliquée que celle de l'invariance du nombre de dimensions, et il ne semble pas vraisemblable qu'on parvienne à la simplifier.

Plus tôt j'avais réussi à démontrer l'invariance de la région n-dimensionnelle moyennant le lemme suivant :

"Dans E_n l'image biunivoque et continue d'une partie fermée d'une variété fermée à n-1 dimensions ne détermine qu'une seule région."[7]

Et après j'ai complété le résultat de Lebesgue en démontrant que dans E_n l'image biunivoque et continue d'une variété fermée à n-1 dimensions détermine précisément deux régions.[8]

Quant à la Note de Lebesgue occupant les pages 166-168 du t.70 des Mathem. Annalen, la caractérisation de la suite $I_1, I_2, \dots, I_n$ est tout à fait insuffisante, puisqu'il peut arriver qu'on est arrêté déjà à I_3. Et avec cette caractérisation toute la démonstration tombe.

C'est ce que Lebesgue a tout de suite reconnu, quand je lui en ai fait l'observation, et il m'a répondu en cherchant à compléter la caractérisation des I_p. Or, ces compléments se montrent encore insuffisants ; plus tard Lebesgue a composé une nouvelle démonstration de son lemme, où les I_p ne jouaient plus de rôle. Ni moi, ni M. Blumenthal (Rédacteur des Mathem. Annalen) n'ont pu comprendre cette démonstration (prise à la lettre elle était fausse, mais cela peut-être à cause d'une maladresse de rédaction); et bien, M. Lebesgue refuse non seulement de nous donner de nouvelles explications, mais encore de revenir à son sujet dans les Mathematische Annalen et d'y corriger les raisonnements dont il a reconnu la fausseté.

J'ai moi-même composé une démonstration du lemme de Lebesgue quelques jours après sa publication, mais je crois devoir ne pas la publier, et laisser à M. Lebesgue l'occasion de remplir lui-même sa tâche.[9]

Agréez, mon cher Collègue, l'expression de mes sentiments les plus dévoués.

L.E.J. Brouwer

3.

Amsterdam, 4.12.11
Overtoom 565

Mon cher Collègue,

Je vous envoie en même temps que cette lettre une petite série d'articles qui vient de paraître, et dans laquelle je me suis trouvé obligé de vous citer d'une façon qui ne peut manquer de vous être désagréable[10]. Laissez-moi vous dire qu'elle ne l'est pas moins à moi-même, et qu'après de longues hésitations je ne m'y suis décidé définitivement qu'à la dernière correction des épreuves, et après avoir vu attribuer la démonstration de l'invariance du nombre de dimensions à moi en troisième lieu seulement (c'est-à-dire après vous et après Lebesgue ; voir Bulletin de Darboux, Octobre 1911, p.287), où je reconnaissais l'énoncé explicite de ce que l'article des Mathem. Annalen de Lebesgue donne à sous-entendre.

J'espère d'ailleurs que, dans les articles que je vous envoie, j'ai réussi à faire ressortir l'importance incontestable de vos travaux de 1907.

Qunat aux motifs que Lebesgue peut avoir eus pour écrire les lignes qu'il vous a vouées, et dont lui-même a implicitement prouvé la fausseté en publiant sa Note des Comptes Rendus du 27 Mars, j'avoue ne pas y comprendre grand-chose. J'ai commencé par croire à une grande amitié pour vous, et voici d'ailleurs ce que Lebesgue m'écrivit le 3 Mars 1911, pour se justifier : "C'est surtout parce que je sais Baire très neurasthénique, et que j'ai d'autant plus pitié de lui que je me sens moi-même atteint, que j'ai écrit cette fin, qui, peut-être, lui sera agréable."

Figurez-vous mon étonnement, lorsque vous m'écriviez que vous n'êtes avec Lebesgue en aucune relation personnelle. Dès lors le procédé de Lebesgue, tout en restant obscur, me sembla inexcusable, puisqu'en somme il revient à un antidatement indémontrable de sa publication.

Laissez-moi terminer, mon cher Collègue, en vous demandant franchement pardon de la nécessité de défense personnelle, si désagréable pour vous, dans laquelle je me suis trouvé, et en exprimant l'espoir que vous voudrez bien m'accorder ce pardon loyalement.

Bien cordialement à vous.
L.B.J. Brouwer

Notes aux lettres de Brouwer

1 Il s'agit de la lettre du 28 Octobre 1911, réponse à l'envoi des publications [10] et [11] ([25],368). Baire reçut ces envois après le mois de Mars 1911, mois où il écrit à Fréchet en se plaignant de n'avoir pas reçu les articles et de ne pouvoir les comprendre ni même les lire.

2 Il s'agit, comme Brouwer le précise dans la lettre suivante, de Lebesgue et de Zoretti. Pour ce qui est du premier, il lui reproche donc, en plus de tout ce qui les opposait déjà (p.80, note 29), les lignes vouées aux articles de Baire : "une méthode naturelle [[souligné par nous, car il faut se souvenir des critiques de Lebesgue sur la démonstration de l'invariance de Brouwer]] de démonstration [[pour la non applicabilité]],pour laquelle il ne reste plus à trancher que des difficultés de détail peu sérieuses", a été indiquée par Baire.

Sous-estimant, comme il a été dit (note 6 aux lettres de Baire à Fréchet),les difficultés soulevées par les théorèmes de Baire, Lebesgue sous-estime, en même temps, l'importance de l'article de Brouwer et donne à Baire, de fait, la priorité à laquelle, à juste titre d'ailleurs, Brouwer tient tant. Et Brouwer ne peut admettre cela, d'autant plus qu'au même moment Zoretti, rendant compte du livre de Schoenflies de 1908 ([80]) dans le Bulletin des Sciences mathématiques d'Octobre 1911, écrit, page 287, à propos du chapitre V que nous avons déjà mentionné (note 8 aux lettres de Baire à Fréchet) : "des travaux tout récents de MM. Baire, Lebesgue et Brouwer ont fait faire à la question [[de l'invariance de la dimension]] un pas décisif".

Brouwer lui reproche, avec raison, de l'avoir nommé en dernière position et sur le même plan que Baire et Lebesgue, alors que lui seul fit effectivement le pas décisif qui le mena à l'unique démonstration complète et rigoureuse de l'invariance de la dimension, à son époque.

3 Contrairement à ce que suggère Brouwer, Baire écrit dans la lettre du 2 Mars 1911 adressée à Fréchet que son "opinion en gros est conforme à ce que dit Lebesgue à la fin de sa note".

Mais il est probable que Baire n'ait pas pu mesurer la portée réelle de son travail (voir lettre de Baire du 5 Décembre ([25],370)) et l'éclairage nouveau et fondamental qu'il apportait aux questions de la dimension et des invariants topologiques, en formulant explicitement pour la première fois les questions de l'invariance topologique du domaine et de la généralisation du théorème de Jordan.

Sans revenir sur l'outrance des propos de Brouwer, car il s'est quand même servi des idées exprimées dans cet article de Lebesgue, il nous faut noter que l'appréciation qu'il porte sur l'article de Baire (développée de façon intéressante dans la deuxième lettre) n'est pas dépourvue d'ambiguïté, comme le montre la phrase suivante tirée de cette lettre : "Puisque l'affirmation de M. Lebesgue [[...]], si elle était juste, enlèverait à ma démonstration de l'invariance toute sa valeur."

Mais, fondamentalement, Brouwer reproche à Lebesgue de limiter le travail de Baire à l'exposé d'une "simple méthode de démonstration naturelle qui a l'avantage d'élucider en même temps plusieurs autres questions fondamentales d'analysis situs".

4 Nous avons déjà signalé que Baire était le premier à utiliser explicitement un homéomorphisme appelé par lui application et à travailler avec des images biunivoques et bicontinues.

5 Brouwer développera cette distinction dans son article sur l'invariance du domaine n-dimensionnel ([13]). Les deux articles mentionnés ici sont [11] et [30]. Voir en particulier dans l'article de Fréchet les pages 166-168.

6 Il s'agit du 1. du théorème III. Ce paragraphe de la lettre donne toute sa valeur à ce théorème III et aux conclusions que Baire en tire dans son article.

7 Il s'agit du théorème énoncé à la fin du paragraphe 6 de [13], p.312, sur l'invariance d'un domaine n-dimensionnel.

8 Il s'agit de [14] sur le théorème de Jordan pour un espace n-dimensionnel. C'est dans cet article que Brouwer publie en note (p.314) la démonstration du cas particulier n=3.

9 Nous disposons avec cette lettre d'une version supplémentaire de l' "affaire" Lebesgue-Brouwer que H. Freudental a longuement analysée ([19],442) et qui n'apporte aucun élément nouveau.

10 Il s'agit des deux articles [13] et [14]. Dans [13], Brouwer écrit : "Baire et Hadamard ont montré que l'invariance du domaine découle du théorème de Jordan. En ce qui concerne les développements de M. Baire mentionnés par M. Lebesgue, il s'y trouve des théorèmes qui font remonter à un problème plus profond que celui de l'invariance du nombre de dimension." Quant à [14], concernant le résultat de Lebesgue sur la 3^e partie du théorème de Jordan (il existe au moins deux domaines), on y trouve la note suivante :

"La méthode de Lebesgue combinée avec les idées de Baire donnerait une nouvelle démonstration de l'invariance du domaine."

Cette dernière note explique l'accusation que porte Brouwer quelques phrases plus loin contre Lebesgue. En masquant la portée des notes de Baire, Lebesgue peut à la fois, d'après Brouwer, ignorer cette première idée de démonstration de l'invariance d'un domaine et s'en accorder la priorité, et en même temps faire croire à une première démonstration de l'invariance de la dimension, antérieure à celle de Brouwer.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALEXANDROV P., Poincaré and Topology (Russian Math. Surv., 27(1972), N° 1, 157-168)
[2] ALEXANDROV P. und HOPF H., Topologie, Berlin(Springer), 1935

[3] ARBOLEDA L.C., Les débuts de l'Ecole topologique soviétique : Notes sur les lettres de Paul S. Alexandrov et Paul S. Urysohn à Maurice Fréchet (Archive Hist. Exact Sci., 20(1979), 73-89)

[4] AMES L.D., On the theorem of analysis situs relating to the division of the plane or of space by a closed curve or surface (Bull. Amer. Math. Soc., 2(1904), 301-305)

[5] BAIRE R., Leçons sur les fonctions discontinues, Paris(Gauthier-Villars), 1905

[6] BAIRE R., Sur la non applicabilité de deux continus à n et n+p dimensions (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 144(1907), 318-321)

[7] BAIRE R., Sur la non applicabilité de deux continus à n et n+p dimensions (Bull. Sci. math.,(2), 31(1907), 94-99)

[8] BAIRE R., Sur la représentation des fonctions discontinues (Acta Math., 32(1909), 97-176)

[9] BOREL E., Les ensembles de mesure nulle (Bull. Soc. math. France, 41(1913), 1-19)

[10] BROUWER L.E.J., Beweis des Jordanschen Kurvensatzes (Math.Annalen, 69(1910), 169-175)

[11] BROUWER L.E.J., Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl (Math. Annalen, 70(1911), 161-165)

[12] BROUWER L.E.J., Ueber Abbildung von Mannigfaltigkeiten (Math. Annalen, 71(1911), 87-115)

[13] BOROWER L.E.J., Beweis der Invarianz des n-dimensionalen Gebiets (Math. Annalen, 71(1911), 305-313)

[14] BROUWER L.E.J., Beweis des Jordanschen Satzes für den n-dimensionalen Raum (Math. Annalen, 71(1911), 314-319)

[15] BROUWER L.E.J., Ueber Jordansche Mannigfaltigkeiten(Math. Annalen, 71(1911), 320-327)

[16] BROUWER L.E.J., Zur Invarianz des n-dimensionalen Gebiets (Math. Annalen, 72(1912), 55-56)

[17] BROUWER L.E.J., Ueber den natürlichen Dimensionsbegriff(Journal reine angew. Math., 142(1913), 146-152)

[18] BROUWER L.E.J., Ueber den natürlichen Dimensionsbegriff (éd. corrigée de [17]) (K. Akad. Amsterdam, 26(1923), 795-800)

[19] BROUWER L.E.J., Collected Works,t.2, éd. par H. Freudenthal, Amsterdam(North-Holland), 1976

[20] CANTOR G., Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre (Journal reine angew. Math., 84(1878), 242-258)

[21] CANTOR G., Ueber einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten (Nachrichten K. Gesellschaft Wissen. Göttingen, 1879 , 127-133)

[22] CAVAILLES J., Philosophie mathématique, Paris(Hermann), 1962

[23] DAUBEN J.W., The invariance of dimension : problems on the early development of set theory and topology (Hist. Math., 2(1975), 273-288)

[24] DUGAC P., Richard Dedekind et les fondements des mathématiques, Paris(Vrin), 1976

[25] DUGAC P., Notes et documents sur la vie et l'oeuvre de René Baire (Archive Hist. Exact Sci., 15(1976), 297-383)

[26] FAN K., Sur quelques notions fondamentales de l'analyse générale, Paris(Gauthier-Villars), 1941

[27] FELIX L., Message d'un mathématicien : Henri Lebesgue, Paris(Blanchard), 1974

[28] FRECHET M., Une définition du nombre de dimensions d'un ensemble abstrait (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 148(1909), 1152-1154)

[29] FRECHET M., Les ensembles abstraits et le calcul fonctionnel (Rendic. circ. mat. Palermo, 30(1910), 1-26)

[30] FRECHET M., Les dimensions d'un ensemble abstrait (Math. Annalen, 68(1910), 145-168)

[31] FRECHET M., Les singularités des espaces à un très grand nombre de dimensions (C.R. Cong. AFAS, Le Havre, 1914, 146-147)

[32] FRECHET M., Sur l'homéomorphie des ensembles dénombrables (Bull. Acad. polonaise Sci. Lettres, A, 1920, 107-108)

[33] FRECHET M., La notion de dimension dans les champs fonctionnels (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 178(1924), 1511-1513)

[34] FRECHET M., Sur la notion du nombre de dimensions (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 178(1924), 1782)

[35] FRECHET M., Numbers of dimensions of an abstrac set, Proc. int. math. Congress, Toronto, t.2, 1924, p.399-412

[36] FRECHET M., Sobre una definicion del numero de dimensiones (Rev. Acad. Madrid, 33 (1927), 564-587)

[37] FRECHET M., Notice sur les travaux scientifiques, Paris(Hermann), 1933

[38] FRECHET M., Les espaces abstraits, Paris(Gauthier-Villars), 1928

[39] FRECHET M., Pages choisies de l'analyse générale, Paris(Gauthier-Villars), 1953

[40] FRECHET M., Sur deux problèmes d'analyse non résolus (Coloquium Math., 6(1958), 33-40)

[41] FRECHET M., Rapport sur la thèse de Kunugui sur la théorie du nombre de dimensions, manuscrit inédit, 1930, Fonds Fréchet, Archives Acad. Sci. Paris

[42] FRECHET M., Topologie des ensembles abstraits, rédigé par Schott, manuscrit inédit du cours à l'Univ. Strasbourg, 1923-1924, Fonds Fréchet, Archives Acad. Sci. Paris

[43] FRECHET M., L'arithmétique de l'infini, Paris(Hermann), 1934

[44] FRECHET M., Quelques propriétés des ensembles abstraits (Fund. Math., 10(1927), 328-355 ; 12(1928), 298-310)

[45] FRECHET M., Sur quelques points du calcul fonctionnel (Rend. circ. mat. Palermo, 22(1906), 1-74)

[46] FRECHET M., Sur la notion de voisinage dans les ensembles abstraits (Bull. Sci. math., 42(1918), 138-156)

[47] HAUSDORFF F., Dimension und aüsserer Mass (Math. Annalen, 79(1918), 157-179)

[48] HADAMARD J., Sur quelques applications de l'indice de Kronecker, in : Tannery J., Introduction à la théorie des fonctions d'une variable, t.II, 2e éd., Paris(Hermann), 1910, p.437-477

[49] HUREWICZ W. and WALLMAN H., Dimension theory, Princeton(University Press), 1948

[50] JOHNSON D.M., The problem of the invariance of dimension in the growth of modern topology, I (Archive Hist. Exact Sci., 20(1979), 97-188)

[51] JORDAN C., Cours d'analyse, t.III, 1e éd. 1887, 2e éd. 1896, Paris(Gauthier-Villars)

[52] JUERGENS E., Ueber eindeutige und stetige Abbildung von Mannigfaltigkeiten (Tageblatt 51.Versammlung Deutsche Naturforsch. und Aerzte in Cassel, 1878, 137-140)

[53] JUERGENS E., Der Begriff der n-fachen stetigen Mannigfaltifkeit (Jahresber.D.M.V., 7(1899), 50-55)

[54] KEREKJARTO B. de, Vorlesungen über Topologie, t.I, Berlin(Springer), 1923

[55] KUNUGUI K., Sur la théorie du nombre de dimensions, Paris(Gauthier-Villars), 1930

[56] KURATOWSKI C. et SIERPINSKI W., Sur un problème de M. Fréchet concernant les dimensions des ensembles linéaires (Fund. Math., 8(1926), 193-200)

[57] KURATOWSKI C., Sur la puissance de l'ensemble des 'nombres de dimensions' au sens de M. Fréchet (Fund. Math., 8(1926), 201-208)

[58] KURATOWSKI C., Topolgy, I, New York(Academic Press), 1966

[59] LEBESGUE H., Sur la non applicabilité de deux domaines appartenant respectivement à des espaces à n et n+p dimensions (Math. Annalen, 70(1911), 166-168)

[60] LEBESGUE H., Sur l'invariance du nombre de dimensions d'un espace et sur le théorème de Jordan relatif aux variétés fermées (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 152 (1911), 841-843)

[61] LEBESGUE H., Sur les correspondances entre les points de deux espaces (Fund. Math. 2(1921), 256-285)

[62] LEBESGUE H., Sur le théorème de Schoenflies (Fund. Math., 6(1924), 96-99)

[63] LÜROTH J., Ueber gegenseitgig eindeutige und stetige Abbildung von Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimensionen aufeinander (Sitzungsberichte phys.med. Socität Erlangen, 10(1878), 190-195)

[64] LÜROTH J., Ueber Abbildung von Mannigfaltigkeiten (Math. Annalen, 63(1906), 222-238)

[65] MAHLO P., Ueber die Dimensionentypen des Herrn Fréchet im Gebiete der linearen Mengen (Ber.math.phys.Klasse K. Saechs. Gesell. Wiss. Leipzig, 63(1911), 319-347)

[66] MAZURKIEWICZ S. et SAKS S., Sur les projections d'un ensemble fermé (Fund. Math., 8(1926), 109-113)

[67] MAZURKIEWICZ S., Sur une classification des points situés sur un continu arbitraire (Bull. Acad. Cracovie, 1916, 490-494)

[68] MENGER K., Ueber die Dimensionalität von Punktmengen (Monatsch. Math. Phys., 33 (1923), 148-160 ; 34(1924), 137-161)

[69] MENGER K., Zur algemeinen Kurventheorie (Fund.Math., 10(1927), 96-115)

[70] MOORE R.L. and KLINE R., On the most general plane closed point set through which it is possible to pass a simple continuous arc (Annals Math.,20(1919), 218-223)

[71] NETTO E.E., Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre (Journal reine angew. Math., 86 (1878), 263-268)

[72] OSGOOD W.F., On a gap in the ordinary presentation of Weierstrass' theory of functions (Bull. Amer. Math. Soc., 10(1904), 294-301)

[73] PEANO G., Sur une courbe qui remplit une aire plane(Math. Annalen, 36(1890),157-160)

[74] POINCARE H., La valeur de la Science, Paris(Flammarion), 1905 = 1970

[75] POINCARE H., Pourquoi l'espace à trois dimensions (Revue Métaph. et Morale, 4(1912), 483-504) = Dernières pensées, Paris(Flammarion), 1963

[76] PONTRIYAGUIN L. et SCHNIRELMANN L., Sur une propriété métrique de la dimension (Annals Math., 33(1932), 156-162)

[77] RIESZ F., Die Genesis des Raumbegriffs (Math. u. Naturwiss. Berichte Ungarn, 24 (1907), 309-353) = Oeuvres complètes, I, p.110-154, Paris(Gauthier-Villars), 1960

[78] RIESZ F., Sur les ensembles discontinus (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 141(1905), 650-652)

[79] SCHOENFLIES A., Ueber einen Satz der Analysis Situs (Nachrichten K. Gesellschaft Wissen. Göttingen, 1899, 282-290)

[80] SCHOENFLIES A., Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, Bericht erst. der Deutschen Math. Verein., zweiter Teil, Leipzig, 1908

[81] SIERPINSKI W., Oeuvres choisies, Warszawa(PWN), 1974

[82] SZPILRAJN E. = MARSZEWSKI E., La dimension et la mesure (Fund.Math.,28(1937),81-89)

[83] THOMAE J., Sätze aus der Funktionentheorie (Nachrichten K. Gesellschaft Wissen. Göttingen, 1878, 466-468)

[84] TIETZE H., Ueber Analysis situs (Abhand. Math. Sem. Hamburg.Univ., 2(1923), 37-68)

[85] URYSOHN P., Les multiplicités cantoriennes (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 175 (1922), 440)

[86] URYSOHN P., Sur les ramifications des lignes cantoriennes (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 175(1922), 481)

[87] URYSOHN P., Mémoire sur les multiplicités cantoriennes (Fund.Math. 7(1925), 30-140 ; 8(1926), 225-359 ; Verhand. K. Akad. Amsterdam, 13(1928), 1-172)

[88] VEBLEN O., Theory on plane curves in non metrical analysis situs (Trans. Amer. Math. Soc., 6(1905), 83-98)