CAHIERS DU SÉMINAIRE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

CHARLES DE LA VALLÉE POUSSIN

Lettres à René Baire

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1re série, tome 1 (1980), p. 37-50
<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1980__1__37_0>

LETTRES A RENE BAIRE[1]

LETTRES DE CHARLES DE LA VALLEE POUSSIN[2]

Paris (12e) 2 Av. Dorian
20 Octobre 1916

Monsieur et cher Collègue,

Je vous remercie beaucoup de la peine que vous avez prise de me remercier de l'envoi tout naturel de mon petit volume.[3]

Je suis désolé de ce que vous me dites de votre santé et je fais tous mes voeux pour que vous puissiez un jour continuer vos recherches, pour le plus grand profit de la science qui vous doit déjà de si belles découvertes.

Je suis loin de méconnaître la part de vérité qu'il y a dans vos réflexions sur les généralisations que M. Lebesgue a données de votre beau théorème sur les fonctions de classe 1.[4]

Je vous ferai cependant observer que je n'ai pas dit le contraire. Lisez attentivement les nos 131, 139 et 142 de mon exposé, vous y verrez très clairement dit que je ne considère pas le théorème de ce dernier numéro comme une véritable généralisation du votre.[5] Il n'y a généralisation que du procédé de raisonnement et non du résultat.

Je vous trouve cependant trop sévère dans votre appréciation sur ces recherches de Lebesgue. Elles partagent de la profondeur de vos propres recherches, dont elles dérivent et le mérite de cette profondeur vous revient en premier lieu.

Les recherches de Lebesgue, sur les relations entre les classes et les ensembles $E(f > \text{ou} < A)$, ont assurément une prétention plus modeste, mais elles conduisent à un résultat définitif et il serait injuste d'en méconnaître l'intérêt.

J'ai lu vos deux Mémoires des Acta et si j'avais disposé de quelques pages de plus, j'aurais exposé votre exemple d'une fonction de classe 3.[6]

Je ne prétends pas que rien n'ait pu m'échapper dans votre travail, mais je n'y ai point trouvé de résultats qui répondent aux desiderata exprimés dans votre lettre.

Veuillez agréer, cher Monsieur, avec l'expression de ma profonde admiration pour vos travaux, celle de mes sentiments les plus sympatiques.

C. de la Vallée Poussin

Louvain le 4 février 1922

Mon cher Collègue,

En lisant la lettre que vous venez de m'écrire à propos de ma conférence de Strasbourg[7], je songeais à une conférence de M. Denjoy à laquelle j'avais l'honneur d'assister à Bruxelles il y a quelques mois, et je me disais qu'il était vraiment dommage que vous n'y fussiez pas aussi. Elle eût écarté certaines craintes qui semblent percer dans votre lettre.

Après cette conférence, j'ai demandé la parole et j'ai dit à peu près ceci : Après l'exposé que nous venons d'entendre, je ne puis m'empêcher de dire l'admiration que j'éprouve pour l'oeuvre de M. Baire ; son théorème est le principal levier de toutes les découvertes de M. Denjoy et je crois qu'il n'existe pas, dans toute la théorie des fonctions de variables réelles, de théorème qui soit à la fois plus profond et plus important. M. Denjoy s'est immédiatement associé à cet hommage en insistant de son côté sur l'étendue des applications de ce même théorème qui caractérise les fonctions de la première classe. J'aurais pu ajouter, quitte à vous déplaire : personne plus que M. Denjoy n'a fait apparaître l'importance de ce théorème et n'en a dévoilé la fécondité.

J'arrive maintenant à votre lettre. Il me semble bien que la plupart des réclamations que vous me faites dérivent d'un malentendu.

J'ai dit dans ma conférence que c'est l'intégrale de Lebesgue qui a surtout dévoilé l'importance de la classification de Baire.[8] Vous protestez en contestant que l'intégrale de L. doive dominer la notion de fonction de B. Mais je suis entièrement d'accord avec vous et je n'ai ni dit ni pensé que l'intégrale de L. doive dominer la fonction de Baire. Cela n'empêche que c'est par l'intégrale de Lebesgue que la presque totalité des mathématiciens qui ont étudié la question ont aperçu l'importance de la classification. C'est là une question <u>de fait</u> qui est vraie pour moi en particulier et tous les mathématiciens que je connais personnellement.

Je n'ai jamais eu l'intention de classer par ordre d'importance les découvertes mathématiques considérées <u>en elles-mêmes</u> et à un point de vue purement philosophique. Je crois que c'est une oeuvre vaine, parce que chacun jugera différemment suivant sa tournure d'esprit. Mais il y a des découvertes qui intéressent tout de suite beaucoup de monde et d'autres qui n'intéressent qu'un cénacle. C'est là le grand avantage (je ne dis pas mérite) des premiers travaux de Lebesgue sur les vôtres et sur ceux de Borel. L'intégrale de L. est apparue immédiatement aux mathématiciens comme un instrument perfectionné, dont ils pouvaient immédiatement se servir dans une foule de questions courantes, et sa fécondité éclatait aux yeux.

Et ceci m'amène à votre autre protestation contre la Note où je dis "négligemment" que M. Baire avait trouvé une propriété se conservant à la limite, mais qui <u>paraissait</u> devoir rester <u>stérile</u>.[9]

Vous vous indignez contre ce mot <u>stérile</u> comme si j'avais dit que ce théorème est stérile, alors que la phrase dit au fond le contraire. J'ai voulu dire que votre théorème paraissait, aux mathématiciens contemporains de la thèse de Lebesgue, une sorte de curiosité métaphysique dont ils ne voyaient rien d'utile à tirer pour eux. En vous laissant de côté, je crois bien que c'est là l'expression stricte de la vérité.[10]

Vous vous étonnez que l'importance des conclusions que vous avez tirées dès alors de ce théorème n'ait pas été reconnue plus universellement, comme si un <u>complot</u> de demi-silence s'était fait autour de vos travaux. Soyez assuré qu'il n'y a pas de complot, mais il y a un fait : ce genre de recherches philosophiques est trop loin de la mathématique courante pour intéresser beaucoup de personnes et votre tournure d'esprit est une exception.[11] Il n'y a pas de médaille sans revers.

Les travaux de L. sur l'intégration ont renouvelé une théorie qui est l'une de celles ayant intéressé avant lui le plus grand nombre de mathématiciens, celle des séries de Fourier. Tous ceux-là en particulier ont attaché tout naturellement beaucoup d'importance à son intégrale. Combien de mathématiciens, pensez-vous, ont lu ses travaux sur les fonctions d'ordre α avec attention ?[12] Croyez-vous qu'il soit plus heureux que vous sur ce point-là ?

Qu'y voulez-vous faire ? Les gens s'intéressent aux choses qu'ils pensent pouvoir <u>utiliser</u> ; ils ne s'intéressent guère à celles dont ils ne voient pas le moyen de se servir, ou qui les dépassent.

Les théories de l'intégration de L. sont devenues classiques avant les vôtres. Ce n'est ni une preuve de supériorité ni une injustice. Cela prouve peut-être uniquement que vos travaux anticipent plus que les siens sur l'évolution de la science mathématique. Lorsque vous affirmez à la fin de votre lettre que vous n'êtes pas inférieur comme novateur à L. et B[[orel]], je pense que vous avez parfaitement raison et la thèse que vous les surpassez tous les deux est soutenable. Mais cette affirmation prend, dans votre lettre, les apparences d'une protestation et ici je crois qu'il y a complète erreur de votre part.

J'ai été mêlé, contre mon gré, à la querelle L-B. [[Lebesgue-Borel]] que j'aurais voulu empêcher. C'est à peine un débat scientifique, c'est surtout le conflit de deux caractères.[13] Cela ne nous intéresse pas. Vous vous méprenez entièrement quand vous pensez que l'éloge que L. fait de vous tend à vous représenter comme son précurseur honorable.[14] L. n'a d'autre but que de vexer B[[orel]] et je connais assez L. pour savoir que l'idée que vous lui prêtez lui paraîtrait saugrenue. Vous n'êtes à aucun titre le <u>précurseur</u> de L. D'abord parce que les travaux de L. sur l'intégration ne dérivent point des vôtres, et parce que, dans ses travaux sur les fonctions de classe α, il n'est que votre disciple.

Vous n'acceptez pas qu'on dise que <u>ce qui importe dans votre oeuvre, c'est ce qui a servi à d'autres</u>. Cher Monsieur, prenez garde que la solitude dans laquelle vous vivez ne soit mauvaise conseillère. Que voilà donc une parole vaine ! Il faudrait bien changer l'humanité pour que les gens n'estiment pas surtout dans votre oeuvre ce qui leur profite. Il n'est pas légitime de s'isoler dans la science, c'est une oeuvre humaine et partant collective. Vous prétendez que l'on doive juger votre oeuvre sans en sortir. Jugez-la donc vous même alors et soyez logique jusqu'au bout ; fichez vous du jugement des autres.

Laissez donc cette boutade et ayez confiance dans l'avenir. Vous avez peut être terminé votre oeuvre scientifique.Soyez bien tranquille, les germes que vous avez plantés n'ont pas encore porté tous leurs fruits. Lentement mais sûrement les mathématiques s'assimilent votre oeuvre et je vois le moment où elle entrera dans la grande circulation. C'est d'ailleurs à Denjoy que vous le devrez. Par ses recherches sur la détermination des coefficients des séries trigonométriques dans le cas général,il fait descendre sur la terre (où se meut la troupe des mathématiciens ordinaires) vos théorèmes généraux, qui permettent précisément de reprendre la théorie de l'intégration au moment où les méthodes de L. deviennent stériles.[15]

J'aurais peut-être alors l'occasion de parler de la fécondité de votre théorème. Je m'efforcerai de le faire de manière à vous contrarier le moins possible.

Voilà une bien longue lettre. Elle vous prouvera combien je suis sensible au reproche que vous me faites de vous avoir peiné. J'ai touché malheureusement chez vous une place sensible. Je crains bien que vous n'ayez été blessé d'avance. Vous avez cherché dans ma conférence ce qui n'y était pas, un jugement sur votre oeuvre, alors qu'il n'y en a pas et qu'il ne pouvait pas y en avoir, puisqu'il s'agit des fonctions à variation bornée (dont vous ne vous êtes pas occupé) et que je m'adressais à un public de deux cents personnes parmi lesquelles il n'y en avait pas cinq capables de comprendre les énoncés de vos théorèmes.

Veuillez agréer, cher Monsieur et Collègue, l'expression très cordiale de ma vive sympathie et de ma très grande estime.

C. de la Vallée Poussin

Cher Collègue,

Je crains que ma lettre ne vous ait beaucoup impatienté. Je le regrette et ce n'était assurément pas mon intention. Je crains de m'être mal exprimé. Je n'ai jamais eu l'impertinence de vous donner des conseils sur la manière de vous conduire. Je n'ai jamais parlé que de votre oeuvre que je refuse à isoler du mouvement général de la science et à juger à un autre point de vue que celui de son influence sur celui-ci. Je prétends d'ailleurs que c'est mon droit.

Je me refuse à vous suivre dans les questions de personnes. Je déplore amèrement votre état de santé, qui a causé un grand détriment à la science ; et vous pouvez être assuré de toute ma sympathie et de mes voeux les plus sincères pour votre rétablissement. Mais cela ne peut rien changer à mon opinion sur votre oeuvre.

Je retiens de votre lettre deux griefs :

1° avoir taxé, en note, un de vos théorèmes de stérilité ;

2° avoir trop tiré la couverture du côté de Lebesgue.

Je n'admets ni le premier ni le second.

Le contexte et la grammaire sont d'accord pour fixer le sens de la note. Elle affirme deux choses : que vous avez la priorité dans la découverte d'une propriété se conservant à la limite, puis qu'au moment de la découverte de L. la vôtre paraissait devoir rester stérile. A ce moment, vos mémoires des Acta mathematica n'existaient point et ils ne sont pas en cause. Il vous plaît de dire que le lecteur lira : est stérile. Il m'est impossible de me rendre à cet argument.

Je reconnais cependant que vos mémoires des Acta ne sont pas ceux des vôtres dont je fasse le plus de cas et que je trouve jusqu'ici le théorème de L. plus fécond que le vôtre. Mais ce n'est pas ce que j'ai dit.

Je ne crois pas avoir tiré la couverture du côté de Lebesgue. Je me sens parfaitement incapable de poursuivre les voies dans lesquelles vous êtes entré. Les travaux de L. ont inspiré une grande partie de mon activité scientifique . J'ai donc beaucoup plus parlé de L. que de vous. J'ai eu beaucoup plus souvent l'occasion de faire son éloge. Je suis persuadé que L. a exercé jusqu'ici une influence plus profonde que vous sur le mouvement scientifique, ce qui lui donne jusqu'ici plus d'importance à mon point de vue. Mais je ne présage pas l'avenir et je défie bien n'importe qui de trouver une seule phrase de moi permettant de supposer que je place L. au-dessus de vous pour la profondeur ou l'originalité des découvertes, pour l'excellente raison que je ne le pense pas.

Veuillez agréer, cher Collègue, l'expression de mes meilleurs sentiments.

C. de la Vallée Poussin
Louvain le 15 fév. 23

LETTRE D'EMILE BOREL

Paris, le 6 mars 1922

Mon cher ami,

Je suis heureux de t'annoncer une nouvelle qui, je l'espère, te fera plaisir : la section de géométrie a décidé, à l'unanimité, de te présenter en première ligne comme correspondant, en remplacement de Noether.[16] Bien qu'il soit d'usage de remplacer les étrangers par des étrangers et les nationaux par des nationaux, nous avons jugé que la grande valeur de tes travaux justifiait une exception à cet usage.

L'élection aura lieu probablement dans un mois.

Bien cordialement à toi.

Emile Borel

LETTRE DE VITO VOLTERRA[17]

Via in Lucina, 17, Roma
12 mai 1922

Cher Monsieur,

Ayant appris votre élection à l'Académie, je désirais vous écrire pour vous exprimer toutes mes félicitations. Mais je ne connaissais pas votre adresse et j'attendais que Monsieur Borel, qui est venu en Italie, me la donnât. Le jour même de l'arrivée de Monsieur Borel votre lettre aussi m'est arrivée.[18] Je me suis empressé de parler à Monsieur Bigourdan qui est président de la Commission du Calendrier de la question qui vous intéresse. Monsieur Bigourdan a reçu ici votre article et il m'a assuré que la Commission s'en serait occupée. En effet votre proposition a été prise en considération. Mais je crois que la Commission a renvoyé toute délibération au sujet de changements à introduire dans le calendrier. Je crois qu'on pense que la question n'est pas encore mûre. Toutefois je sais qu'un certain nombre d'hommes d'affaires et de Chambres de commerce seraient intéressés à des changements. Le Congrès maintenant est fini. Les assemblées d'Astronomie et de Géodésie et Géophysique se sont réunies en même temps, c'est pourquoi beaucoup de savants étaient réunis à Rome.

Je pense bien souvent à vous et vos travaux ne s'oublient pas. Ils ont laissé une trace profonde dans la science et ils sont cités bien souvent. J'ai l'occasion souvent d'aller à Paris et je parle toujours de vous spécialement avec Monsieur Borel. Je puis vous assurer que vous êtes aimé et estimé et qu'on apprécie ce que vous avez fait dans les mathématiques.

Je serais heureux de vous revoir. Depuis que la guerre a éclaté et après la paix je n'ai plus fait de séjour en Suisse.[19] Je suis de jour en jour plus occupé à Rome et mes voyages m'ont toujours amené de l'autre côté. Mais je n'ai pas renoncé à faire un jour un tour en Suisse pour me reposer.

Si vous m'écrivez et vous me donnez de vos nouvelles vous me ferez beaucoup de plaisir. Je me rappelle du temps que nous avons passé ensemble et je garde de ces jours le meilleur souvenir.

Veuillez accepter, cher Monsieur, l'expression de ma plus haute estime et de ma sincère affection.

Vito Volterra

LETTRE D'ARNAUD DENJOY[20]

Utrecht, le 15 Mai 1922

Cher Monsieur et ami,

Je me sens vraiment coupable envers vous de ne pas avoir répondu depuis déjà longtemps à votre lettre d'Octobre. Votre récente élection en qualité de Correspondant de l'Académie (sur l'initiative de B[[orel]] à ce que je crois), dont je tenais à vous féliciter, m'a rappelé mon inexactitude et m'a pressé d'y mettre un terme.

Mes loisirs sont d'ailleurs restreints depuis deux mois et demi. J'ai commencé au début de Mars mes cours à Paris, sans abandonner mon service à Utrecht. Je fais hebdomadairement le trajet aller et retour, ce qui ne vas pas sans grande fatigue et sans difficulté à donner ordre à mes obligations.

La mélancolie de votre lettre ne me surprend pas. J'ai toujours pensé que l'histoire des mathématiques vous réservera une place à part, très enviable. Mais pour réussir auprès de ses contemporains, surtout en France, il faut savoir leur moduler un air mille fois ressassé, qu'ils ont la satisfaction de reconnaître dès les premières notes. Ou alors il faut produire un effort dix fois plus étendu qu'un autre, tenir inlassablement des discours éloquants à des sourds, jusqu'à ce que leurs oreilles finissent par devenir sensibles à ces nouvelles sonorités, à force d'être frappées par elles. Personne ne lit, personne n'écoute. Pour arriver à se faire connaître et entendre, dans un délai inférieur à vingt ans, il faut submerger le public sous la variété des résultats. Il faut disposer d'une santé de chêne pour tenir tête à une tâche accablante.

Sinon, il ne reste qu'à faire crédit au temps pour dispenser la justice tardive aux déshérités du prompt succès. Cette réparation vient pour vous, son espoir doit vous consoler de quelques déceptions de carrière, surtout si vous songez combien la réussite de votre candidature à une chaire parisienne, entre autres, aurait entraîné d'obligations pour votre santé chancelante.

Je vous complimente de votre projet de calendrier mensuel fixe, et je vous souhaite de faire fortune avec ce moyen.

Vous me demandiez si je sais le néerlandais. Très mal, à peine assez pour lire superficiellement les quotidiens et les thèses de mathématiques.

Croyez, je vous prie, cher Monsieur, à mes meilleurs souvenirs dévoués.

A. Denjoy

Je vous renvoie la lettre de de la V[[allée]] P[[oussin]].[21]

LETTRE DE NICOLAS LUSIN

27 mars 1927

25, rue Arbat, log. 8, Moscou

Très honoré Monsieur et cher Maître,

Je vous demande la permission de vous présenter mon travail Sur les ensembles analytiques en vous témoignant tous mes respects.[22]

C'est en 1914 que M. Montel m'avait conseillé d'étudier vos deux memoires Sur la représentation des fonctions discontinues,si mémorables, dans les Acta mathematica (t.30 et t.32), et j'ai eu l'audace de vouloir continuer vos recherches si profondes et si importantes pour la Science.

Vous avez découvert la propriété caractéristique des fonctions de classe 1 et avez donné dans votre premier mémoire (Acta math. t.30) le premier exemple d'une fonction de classe 3 construite sans application sur le continu.[23] Dans votre second mémoire (Acta math. t.32), vous avez trouvé une famille d'ensembles de classe 3 et démontré que chacun de ces ensembles est l'ensemble des valeurs d'une fonction continue dans votre espace de dimension nulle.[24]

J'ai considéré pendant longtemps comme chose évidente la proposition inverse que toute fonction continue dans votre espace de dimension nulle est un ensemble de classe 3. Mais les études que nous avons entreprises, Souslin et moi, en 1916 à propos du mémoire de M. Lebesgue Sur les fonctions représentables analytiquement (Journal des Math. 1905) ont montré que ces ensembles peuvent être même non mesurables B ! [25]

C'est à l'esquisse d'une théorie de ces ensembles, dits analytiques, qu'est consacré mon travail que j'ai l'honneur, cher Maître, de vous envoyer, mais ce travail n'est qu'une esquisse préliminaire et on n'y trouve qu'un contact avec le seul mémoire de M. Lebesgue.

Je veux exposer d'une manière détaillée la théorie des ensembles analytiques [[sousliniens]] intimement liée à vos profondes idées, cher Maître, dans un livre de la série de M. Borel qui paraîtra sous le même titre.[26]

Veuillez agréer, cher Maître, l'expression de mon respect le plus haut.

Nicolas Lusin

NOTES DE LA REDACTION

1 Tout récemment, Marguerite Baire, nièce de René Baire, vient de retrouver dans sa maison à Boulogne sur Mer, enveloppées dans un vieux journal, plusieurs lettres adressées à son oncle. Elle a bien voulu nous les confier et nous la remercions de son aide aussi précieuse que constante. Nous publions ici les plus importantes de ces

lettres qui complètent très utilement notre travail sur Baire ([8]). Nous avons confié les trois lettres de L.E.J. Brouwer à Baire à Hélène Gispert qui les publie dans son article sur Fréchet et la notion de dimension.

Grâce aux lettres que nous a confiées Marguerite Baire nous pouvons donner les précisions suivantes concernant la sépulture de René Baire ([8],314) : La tombe de Baire se trouvait dans le Nouveau Cimetière, dit de Charrière-Neuve, de Chambéry, dans le Carré G, Ligne 4, N° 2. Cette concession fut reprise en novembre 1964 et le maire-adjoint de Chambéry écrivait le 7 mars 1974 à Marguerite Baire :

"La dalle déposée sur la concession fut transportée dans un entrepôt spécialement destiné à cet effet, le long de la rivière d'Hyères.

En ce qui concerne les restes de Monsieur Baire, ils ont été recueillis et descendus au fond même de sa propre concession, à plus grande profondeur."

2 R.F. Ballieu nous a écrit le 7 juillet 1975 :

"J'ai contacté une fille et un fils de Charles J. de La Vallée-Poussin. La conclusion est nette : la correspondance reçue par La Vallée-Poussin est perdue, à l'exception de quelques rares fragments, retrouvés en classant les tirés-à-part reçus par La Vallée-Poussin. Rien dans ces fragments n'a trait à René Baire."

3 Il s'agit de [4].

4 Voir à ce propos la lettre de Baire à Denjoy du 26 octobre 1921 ([8],370-371), ainsi que la note 8.

5 Dans le paragraphe 131 ([4],132) de la Vallée Poussin écrit :

"Nous connaissons la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f soit de calsse 1. Nous connaissons même deux expressions très différentes de cette condition,l'une qui constitue le théorème de Lebesgue (n° 113) [[([4],116) : "La condition nécessaire et suffisante pour que f, supposée discontinue, soit de classe 1 sur P, est que les ensembles de points de P, $E(f > A)$ [[ensemble des points x tels que $f(x) > A$]], $E(f < A)$ soient des sommes [[réunions]] d'ensembles fermés quel que soit A."]], l'autre que constitue le théorème de Baire (n° 122) [[([4],124) : "La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction discontinue finie, f, soit de classe 1, sur P borné et parfait, est qu'elle soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait $Q < P$ [[$Q \subset P$]]."]]. Il s'agit maintenant de savoir si l'on peut généraliser ces théorèmes et obtenir des caractères distinctifs pour les fonctions de classe α. Cette question a été étudiée par M. Lebesgue dans le mémoire cité (1905) [[([10])]]. La conclusion est que l'énoncé de Baire ne se généralise qu'imparfaitement, et nous y reviendrons dans le paragraphe suivant. Par contre on peut obtenir une généralisation adéquate de l'énoncé de Lebesgue."

Dans le paragraphe 139 ([4],142) de son livre de la Vallée Poussin donne une nouvelle définition :

"Une fonction f, finie sur P, est à ε près de classe α sur un ensemble $E < P$ en un point M de E, si le point M est le centre d'un domaine [[disque]] Δ de rayon assez petit pour que f soit à ε près de classe α sur l'ensemble E Δ [[E $\cap\Delta$]].

Cette définition permet d'énoncer les théorèmes suivants, voisins de ceux qu'on trouve dans le mémoire de M. Lebesgue, et qui conduisent à la généralisation du théorème de Baire dans la mesure où celle-ci est possible."

Dans le paragraphe 142 ([4],144-145), de la Vallée Poussin donne une "condition généralisée de Baire" qui n'est pas équivalente "au théorème complet", car elle "ne prouve pas que la condition est nécessaire". Toutefois, précise de la Vallée Poussin, "cette lacune est facile à combler et l'on obtient par cette voie, pour le théorème de Baire, une démonstration simple indiquée par M. Lebesgue". De plus, "on trouvera, dans le mémoire de M. Lebesgue, un autre théorème, plus compliqué que le précédent, donnant une généralisation plus complète à certains égards du théorème de Baire."

6 Il s'agit des parties I et II du mémoire [2].

7 C'est l'article [9].

8 C. de la Vallée Poussin écrit ([5],272) :

"Pour faire apprécier à sa valeur l'importance et la portée de l'intégrale de Lebesgue, il convient de la mettre en rapport avec la <u>classification des fonctions</u> qui a été proposée quelques années auparavant par M. Baire, et que voici :

Les fonctions continues sont de classe 0 ;

Les fonctions limites de fonctions continues et qui ne sont pas de classe 0, sont de classe 1 ;

Les fonctions qui sont limites de fonctions de classe 1 et qui ne sont ni de classe 0, ni de classe 1, sont de classe 2, et ainsi de suite.

En même temps qu'une classification nous apercevons ici un <u>procédé de construction</u> successive de fonctions de plus en plus compliquées, et l'on admettra volontiers que ce sont les seules auxquelles conduisent naturellement les calculs de l'analyse. Nous appellerons ces fonctions les <u>fonctions de Baire</u>. C'est l'étude des propriétés de ces fonctions qui constitue ce que nous avons appelé tout à l'heure la <u>théorie générale des fonctions de variables réelles</u>. L'importance de ces fonctions a été surtout mise en lumière par les travaux de M. Lebesgue.

Les fonctions continues et bornées sont intégrables par les méthodes ordinaires. Mais les fonctions des classes suivantes ne le sont plus, en général, même avec la définition de Riemann. Au contraire, toutes les fonctions de Baire deviennent intégrables, quelle qu'en soit la classe, avec la définition de Lebesgue."

9 C. de la Vallée Poussin se pose la question de "la puissance" de l'intégrale de Lebesgue et de sa "supériorité", et il écrit ([5],272-273) :

"Ce qui fait la généralité de la définition nouvelle , c'est qu'elle repose sur une propriété des fonctions, qui se conserve dans le passage à la limite (leur <u>mesurabilité</u>). Le théorème qui manifeste clairement cette supériorité, c'est celui de l'<u>intégration terme à terme</u> (ou du passage à la limite sous le signe d'intégration). Ce théorème est le suivant :

<u>Si une suite de fonctions</u> $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, <u>bornées dans leur ensemble, converge vers une limite</u> f, <u>on a</u>

$$\lim_{n=\infty} \int f_n \, dx = \int f \, dx .$$

On peut considérer ce théorème fondamental comme la conclusion et le couronnement de la théorie telle que M. Lebesgue l'a exposée dans sa thèse (1902).

Avant Lebesgue, personne n'avait encore énoncé une propriété métrique des fonctions se conservant à la limite. (Seul M. Baire avait énoncé une propriété descriptive jouissant de ce privilège et elle paraissait devoir rester stérile.)"

La propriété de Baire a été énoncée dans sa thèse ([1],70) : Soit E l'ensemble de toutes les fonctions de Baire. Alors, si une suite de fonctions de E a une limite, cette fonction limite appartient à E.

10 Le jugement de C. de la Vallée Poussin est intéressant. Il ne faut pas oublier que de la Vallée Poussin, né en 1866, était, au moment de la parution de la thèse de Baire en 1899, un mathématicien déjà formé, bien au courant du développement des mathématiques de son temps. D'ailleurs, son livre, paru en 1916, <u>Intégrales de Lebesgue, Fonctions d'ensemble, Classes de Baire</u>, et qui a eu une grande influence, montre qu'il avait assimilé et développé les théories les plus avancées de son époque. Son jugement sur l'oeuvre de Baire est à ce titre important.D'autre part, son opinion était en partie partagée par le jury de la thèse de Baire ([8], p.341, le rapport sur la thèse de Baire par E. Picard).

Mais il faut aussi considérer l'influence que Baire exerça ensuite, en particulier sur les travaux de Denjoy et de Lusin.

11 Il ne nous semble pas sans intérêt de citer une lettre de J. Dieudonné du 15 février 1976, où il donne, comme de la Vallée Poussin, son opinion sur le théorème de Baire sur les fonctions "ponctuellement discontinues", théorème caractérisant les fonctions de la classe 1 des fonctions de Baire, ainsi que sur cette époque :

"Toute l'histoire de cette période est bien intéressante, et illustre à merveille la façon dont l'optique peut changer en moins d'un siècle. Il était certainement nécessaire d'explorer en profondeur les propriétés topologiques des fonctions de variable réelle, et on ne peut qu'admirer l'ingéniosité et l'originalité dont ont fait preuve Baire, Borel, Lebesgue et Denjoy pour défricher ce domaine alors totalement inexploré. Mais avec le recul du temps il est bien clair aujourd'hui que la plus grande partie de ces travaux n'a abouti qu'à une impasse ; il en reste essentiellement le "théorème de Baire" [[Dans un espace métrique complet E, l'intersection d'ensembles ouverts partout denses U_n, $n \in \underline{N}$, est partout dense dans E.]] et l'intégrale de Lebesgue, deux outils fondamentaux de toute l'analyse ; mais tout le reste, pour le moment tout au moins, est à ranger dans les pièces de musée ; je n'ai jamais vu de problème (non fabriqué ad hoc) où le fameux théorème sur les fonctions "ponctuellement discontinues" intervienne quelque part."

12 En particulier le mémoire [10] qui a joué un rôle décisif dans la naissance des ensembles sousliniens ([9],200-201).

13 Les deux pièces essentielles du dossier de ce conflit sont les mémoires [3] et [11], où Borel et Lebesgue tentent d'établir leurs priorités dans le développement de la notion d'intégrale.

14 Sur la réaction de Baire à l'éloge que fait Lebesgue de ses travaux dans [11], il faut lire la lettre de Baire à Denjoy du 26 octobre 1921 ([8],370). Il est à noter que dans les papiers laissés par Baire, et que vient de retrouver Marguerite Baire, il existe une copie manuscrite des passages de l'article de Lebesgue où il porte un jugement sur l'oeuvre de Baire ([11] : n° 24, p.230-231 ; n° 25, p.231-232 jusqu'au début de l'alinéa 2 de la page 232). Lebesgue écrit, en particulier ([11],230-231) :

"Je vais rechercher les conceptions qui ont joué le rôle essentiel dans les travaux récents sur les fonctions de variable réelle. Je n'entends pas faire un historique complet et reconstituer les pensées des auteurs, je veux seulement mettre en lumière quelques idées, inconscientes, non exprimées à l'origine, qui, peu à peu, se sont dégagées et autour desquelles se groupent les principaux travaux.

A l'origine du mouvement on rencontre le nom de Baire (les premières Notes de M. Baire, qui orientent nettement ses recherches, sont antérieures au Livre de M. Borel sur la Théorie des fonctions; la Thèse de M. Baire est postérieure à ce Livre, mais il est évident que M. Baire en a peu subi l'influence) ; sa Thèse est restée justement célèbre. Elle donnait le plus beau démenti à cette opinion alors si répendue qu'il n'était possible de faire aucun travail sur les fonctions de variable réelle et qu'au reste cela ne servirait à rien (on citait alors comme un tour de force unique la définition de Darboux pour les intégrales par défaut et par excès ; définition que l'on n'utilisait jamais d'ailleurs) ; et en ce sens elle eut une première influence, en quelque sorte morale.

Il faut noter ensuite l'importance du résultat principal de cette Thèse et surtout l'originalité des moyens mis en oeuvre pour y parvenir. Beaucoup de qualités diverses des ensembles avaient été distinguées ; l'emploi constant de la théorie des ensembles joint à une analyse minutieuse, à une dissection de la notion de continuité, permit à M. Baire de distinguer beaucoup de qualités des fonctions et de délimiter des classes de fonctions ayant des propriétés communes précises. Je fais allusion ici aux fonctions semi-continues, aux fonctions ponctuellement discontinues, aux fonctions continues quand on néglige les ensembles dénombrables, etc. (Bien entendu, il ne serait pas difficile de trouver des précurseurs, et cette observation s'appliquera à tout ce qui suit ; mais ce que je veux dire, c'est que M. Baire a utilisé ces procédés avec plus de continuité et avec plus de bonheur que nul ne l'avait fait avant lui. Il a ainsi appelé l'attention sur ces procédés qui, avec lui, ont commencé à devenir conscients, à constituer par suite un instrument en quelques sorte catalogué auquel on sait qu'on pourra avoir recours dans telle ou telle circonstance. Au sujet des travaux de M. Baire et de toutes les questions traitées dans ce chapitre, on consultera avec fruit l'ouvrage récent de M. de la Vallée Poussin : Intégrales de Lebesgue, Fonctions d'ensembles, Classes de Baire, Paris, Gauthier-Villars, 1916.)

Mais l'apport principal de M. Baire est la conception de cet ensemble de fonctions qui contient les polynômes et qui est fermé par rapport aux opérations addition, multiplication, passage à la limite.

C'est l'ensemble des fonctions représentables analytiquement ou fonction de Baire. Sans qu'on puisse affirmer que cet ensemble de fonctions suffira à tout, il est bien certain qu'il est très vaste et que la plupart des questions d'analyse ne nous en feront pas sortir. La théorie des fonctions de variable réelle peut donc prendre provisoirement comme but l'étude des fonctions de Baire. Provisoirement, parce que cette classe sera peut-être insuffisante et aussi parce qu'elle sera peut-être trop vaste pour que nous réussissions à l'étudier."

15 Les travaux de Denjoy sur ce sujet sont [6] et, surtout, [7].

16 Sur la nomination de Baire comme Correspondant de la Section de géométrie de l'Académie des Sciences de Paris voir [8], p.311-312, ainsi que le rapport d'Emile Picard sur les travaux de Baire ([8],366-368).

17 Dans la correspondance retrouvée de Baire il y a deux lettres de Vito Volterra. La première, du 16 avril 1899, a été déjà publiée dans [8], p.350-351 (il s'agit du brouillon de sa lettre conservé par Volterra). Nous publions ici la seconde, dont il semble qu'il n'existe pas de brouillon dans les papiers laissés par Volterra.

18 La lettre de Baire à Volterra du 24 avril 1922, publiée dans [8], p.358, et dans laquelle il lui expose son projet de réforme du calendrier, avait pour but d'inciter Volterra à intervenir en faveur du projet de Baire à l'occasion du Congrès astronomique qui allait se tenir à Rome.

19 R. Baire écrit à Volterra de Lausanne où il habite à cette époque.

20 Denjoy répond à la lettre de Baire du 26 octobre 1921 ([8],370).

21 R. Baire avait envoyé à Denjoy, dans sa lettre du 26 octobre 1921, la lettre de C. de la Vallée Poussin du 20 octobre 1916 (voir ici p.37), et il avait ajouté :

"Je ne sais si vous avez occasion de correspondre avec M. de la Vallée Poussin, qui est presque votre voisin. S'il vous convenait de lui faire remarquer que mes conditions ne sont pas du tout "stériles" vis-à-vis de celles de Lebesgue, je vous en serais reconnaissant."

22 Il s'agit du mémoire [12].

Comme nous l'avons déjà signalé ([8],338), ce mémoire de Lusin a été conservé par Baire, avec la dédicace de son auteur : "en témoignage du respect le plus profond".

23 Dans [2], p.43-47.

24 Voir [2], p.168-175. Il s'agit des ensembles qui ne sont pas nécessairement boréliens.
25 Voir [9], p.200-201, note 19.
26 Il s'agit de [13].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAIRE R., Sur les fonctions de variables réelles (Annali Mat. pura ed appl., (3), 3(1899), 1-123)

[2] BAIRE R., Sur la représentation des fonctions discontinues (Acta math., 30(1906), 1-48 ; 32(1909), 97-176)

[3] BOREL E., Le calcul des intégrales définies (Journal Math. pures et appl., (6), 8(1912), 159-210)

[4] DE LA VALLEE POUSSIN C., Intégrales de Lebesgue, Fonctions d'ensemble, Classes de Baire, Paris(Gauthier-Villars), 1916

[5] DE LA VALLEE POUSSIN C., Sur les fonctions à variation bornée et les questions qui s'y rattachent, Comtes rendus Congrès intern. math., Strasbourg 1920, Toulouse (Privat), 1921, p.57-80 = (Bull. Sci. math., (2), 44(1920), 1^{e} partie, 267-296)

[6] DENJOY A., Calcul des coefficients d'une série trigonométrique convergente quelconque dont la somme est donnée (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 172(1921), 1218-1221)

[7] DENJOY A., Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique, Paris(Gauthier-Villars), 1941-1949

[8] DUGAC P., Notes et documents sur la vie et l'oeuvre de René Baire (Archive Hist. Exact Sci., 15(1976), 297-383)

[9] DUGAC P., Nicolas Lusin : Lettres à Arnaud Denjoy (Archives intern. Hist. Sci., 27(1977), 179-206)

[10] LEBESGUE H., Sur les fonctions représentables analytiquement (Journal Math. pures et appl., (6), 1(1905), 139-216) = Oeuvres sci., t.III, p.130-180, Genève (Enseign. math.), 1972

[11] LEBESGUE H., Remarques sur les théories de la mesure et de l'intégration (Annales Sci. Ecole Norm. Sup., (3), 35(1918), 191-250) = Oeuvres sci., t.II, p.291-350, Genève(Enseign. math.), 1972

[12] LUSIN N., Sur les ensembles analytiques (Fund. math., 10(1927), 1-95)

[13] LUSIN N., Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications, Paris (Gauthier-Villars), 1930