CAHIERS DU SÉMINAIRE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

GEORGES DE RHAM

Quelques souvenirs des années 1925-1950

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1re série, tome 1 (1980), p. 19-36
<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1980__1__19_0>

QUELQUES SOUVENIRS DES ANNEES 1925-1950

par Georges de RHAM

Arrivé à la fin de ma carrière, je pense à son début. C'est dans ma 21ième année[1], en 1924, que j'ai décidé de me lancer dans les mathématiques. En 1921, ayant le bachot classique, avec latin et grec, attiré par la philosophie, j'hésitais d'entrer à la Faculté des Lettres. Mais finalement je me décidai pour la Faculté des Sciences, avec à mon programme l'étude de la Chimie, de la Physique et surtout, pour finir, la Biologie. Je ne songeais pas aux Mathématiques, qui me semblaient un domaine fermé où je ne pourrais rien faire.

Pourtant, pour comprendre des questions de Physique, je suis amené à ouvrir des livres de Mathématiques supérieures. J'entrevois qu'il y a là un domaine immense, qui excite ma curiosité et m'intéresse à tel point qu'après cinq semestres à l'Université, j'abandonne la Biologie pour aborder résolument les Mathématiques.

A l'Université de Lausanne, j'ai eu deux bons maîtres. Gustave Dumas[2], un homme alors dans la cinquantaine, s'est tout de suite intéressé à moi et m'a toujours encouragé. Il avait suivi à Berlin, à côté de Caratheodory et de Fejer, le Séminaire dirigé par H.A. Schwarz.[3] Puis il avait fait une thèse de doctorat à Paris et publié un beau travail sur des questions algébriques, utilisant les nombres p-adiques de Hensel.[4] Dmitry Mirimanoff[5], alors dans la soixantaine, était un mathématicien de premier ordre et un professeur tout à fait remarquable. Son cours sur les fonctions analytiques et les fonctions elliptiques était un modèle de clarté, de finesse et d'élégance, d'une rigueur parfaite sans jamais trace de pédanterie.

En automne 1925, ayant obtenu la Licence ès sciences, j'ai eu la chance que Dumas me prenne comme assistant, poste qui me laissait du temps pour lire. Suivant les conseils de Mirimanoff, j'ai lu des livres sur la théorie des fonctions, de Bieberbach et Hurwitz-Courant, la Théorie des ensembles de Fraenkel, la Topologie de Kerekjarto (en allemand : à cette époque, l'allemand était nécessaire, et non l'anglais).[6] J'ai lu aussi plusieurs livres de la Collection Borel, l'Algèbre de Serret avec la Théorie de Galois, et sur le conseil de Dumas, les Leçons sur les invariants intégraux, d'Elie Cartan, qui venaient de paraître, et certains Mémoires de Poincaré.[7]

Dumas me dit alors : vous devez absolument faire une thèse, cherchez vous-même un sujet. C'était le début des grandes difficultés.

J'entrepris alors l'étude des premiers travaux de Poincaré sur les courbes définies par une équation différentielle (1881-1882).[8] Bien que ce fut un échec, je vais en dire quelques mots.

Poincaré considère, dans le domaine réel, une équation de la forme

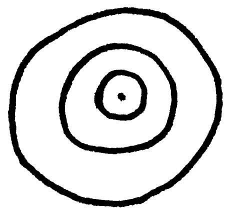
(E) $$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X} \ ,$$

où X et Y sont des polynômes en x et y. En introduisant un paramètre t, on peut écrire

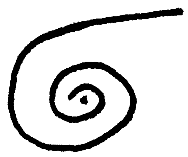
$$\frac{dx}{dt} = X \ , \ \frac{dy}{dt} = Y \ .$$

Les points où $X = Y = 0$ sont les points singuliers. Poincaré se borne au cas où les courbes $X = 0$ et $Y = 0$ n'ont que des points d'intersection simples, il les appelle points singuliers de première espèce. Il y en a quatre types : les centres, les foyers, les noeuds et les cols. Il appelle caractéristique toute courbe intégrale de l'équation. Voici des exemples très simples d'équations présentant à l'origine ces divers types de points singuliers.

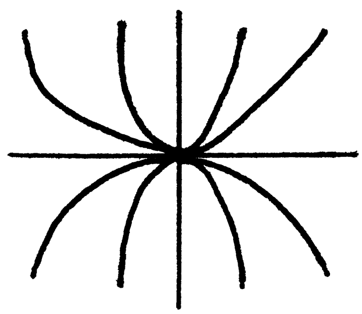
(1) Centre. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, les caractéristiques sont des cercles de centre 0.



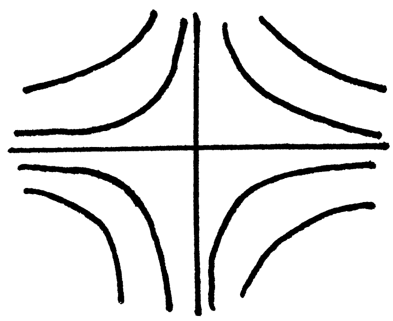
(2) Foyer. $\frac{dy}{dx} = \frac{-x + \lambda y}{y + \lambda x}$, les caractéristiques sont des spirales logarithmiques qui coupent les cercles de centre 0 sous l'angle $\operatorname{arctg} \lambda$.



(3) Noeud. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$, les caractéristiques sont des paraboles tangentes à 0x en 0.

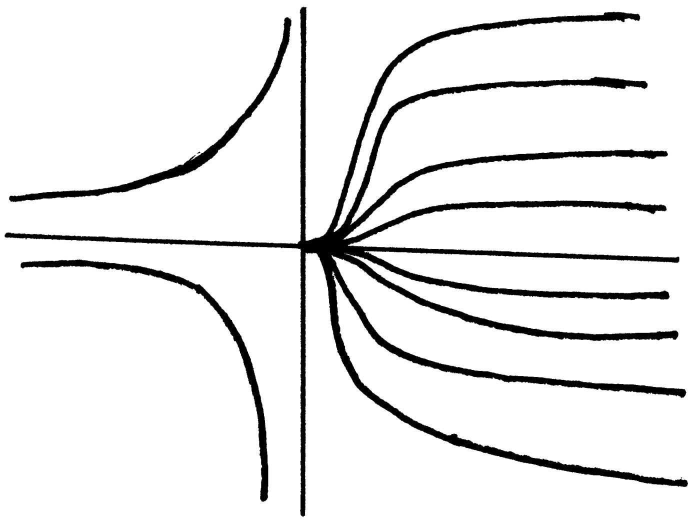


(4) Col. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$, les caractéristiques sont les hyperboles $x.y = C^{te}$.

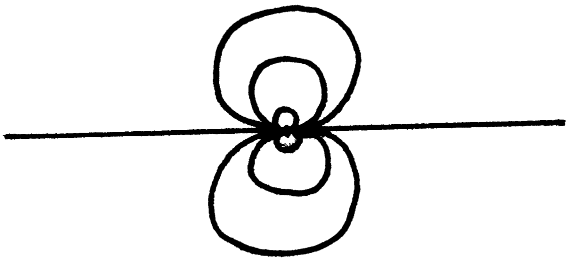


L'étude des points singuliers a été complétée par <u>Bendixson</u>, dans un très important travail paru dans les Acta mathematica en 1901.[9] Il a étudié les points singuliers dans les cas les plus généraux. En voici deux exemples très simples qui ne sont pas du type de ceux considérés par Poincaré.

(5) $x^2 \frac{dy}{dx} = y$ ou $y = C\, e^{-(1/x)}$.



(6) $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2-y^2}$. Faisceau de cercles tangents en O.



Pour l'étude globale des caractéristiques, Poincaré projette le plan sur une sphère depuis le centre de celle-ci, ce qui revient à considérer le revêtement à deux feuillets du plan projectif, tandis que Bendixson utilise la projection stéréographique, qui conserve les angles et complète le plan par un point à l'infini.

Etant donné un point non singulier P_0, l'équation (E) avec le paramètre t admet une solution P(t) qui se réduit à P_0 pour t=0 et définit une caractéristique, divisée en deux demi-caractéristiques[10] correspondant à $t > 0$ et $t < 0$. Si, pour $t \to \infty$, P(t) tend vers un point limite $P(\infty)$, ce point est nécessairement un point singulier. Si, de plus, toutes les demi-caractéristiques partant d'un point suffisamment voisin de P_0 tendent aussi vers $P(\infty)$ pour $t \to \infty$, on convient de considérer ce point $P(\infty)$ comme un <u>point d'arrêt</u> de la demi-caractéristique correspondant à $t > 0$.

Ainsi, un foyer (2) et un noeud (3) sont des points d'arrêt. Dans l'exemple (6), le point O est un point d'arrêt pour toutes les demi-caractéristiques. Dans l'exemple (5), O est un point d'arrêt pour les caractéristiques situées dans le demi-plan $x > 0$.

Mais si les demi-caractéristiques partant d'un point P_s assez voisin de P_o, d'un côté au moins de la caractéristique C passant par P_o, n'aboutissent pas à $P(\infty)$, mais s'en éloignent après s'en être rapprochées, elles ont pour limite lorsque P_s tend vers P_o, en restant du même côté de C, une courbe qui se compose de C et d'un prolongement de C ; on convient alors de compléter C avec ce prolongement, et l'on a une caractéristique qui traverse le point singulier $P(\infty)$.

Il peut arriver, c'est le cas pour un col, que C ait deux prolongements, un de chaque côté. Il peut arriver aussi qu'il n'y ait qu'un seul prolongement, comme dans l'exemple (5) pour l'axe des $y > 0$.

Ainsi, dans certains cas, une caractéristique peut traverser un ou plusieurs points singuliers et se composer de plusieurs solutions de l'équation (E) avec le paramètre t.

Comme Poincaré l'a montré, si une demi-caractéristique n'aboutit pas à un point d'arrêt, ou bien c'est une courbe fermée, ou bien c'est une spirale qui s'enroule autour d'une caractéristique fermée. Cette dernière est alors appelée un <u>cycle limite</u>.

Poincaré a montré que le nombre des cycles limites est fini lorsqu'aucun d'eux ne passe par un col. Dulac, dans un travail paru dans le Bulletin de la Soc. math. de France, année 1923, a démontré que ce nombre est toujours fini.[11]

Voici un exemple très simple qui montre que le nombre des cycles limites peut être aussi grand qu'on veut. Soit $P(x)$ un polynôme ayant m racines positives distinctes. Dans l'équation (2) des spirales logarithmiques, remplaçons λ par $P(r^2)$, où $r^2=x^2+y^2$. On obtient l'équation

$$(7) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-x + P(r^2)\,y}{y + P(r^2)\,x} \quad .$$

Les m cercles $x^2+y^2=r^2$ dont le rayon r satisfait à $P(r^2)=0$ sont des caractéristiques et sont tous des cercles limites, car les caractéristiques de (7) coupent le cercle $x^2+y^2=r^2$ sous un angle égal à $\operatorname{arctg} P(r^2)$.

Si les degrés des polynômes X et Y de l'équation (E) sont donnés, on peut conjecturer que le nombre des cycles limites doit être borné. Au Congrès de Paris en 1900, Hilbert a signalé ce problème.[12] A ma connaissance, il est toujours ouvert.[33]

J'ai cherché si, pour l'équation (E), on ne pouvait pas trouver une famille de courbes fermées, telle qu'il en passe une et une seule par chaque point non singulier et dont chacune coupe les caractéristiques de (E) sous un angle constant. Pour l'équation (7), ce sont les cercles de centre O.

Les courbes qui coupent les caractéristiques de (E) sous l'angle constant arctg λ sont les caractéristiques de l'équation

$(E_\lambda) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{Y + \lambda X}{X - \lambda Y}$.

Pour chaque point non singulier (x,y), il y a au plus une valeur de λ telle que la caractéristique C de (E_λ) passant par ce point soit fermée, car si $\lambda' \neq \lambda$, une caractéristique de $E_{\lambda'}$ ne pouvant traverser C que dans un sens ne peut être fermée en même temps que C. Ici il ne faut pas considérer comme fermée une caractéristique formée de deux demi-caractéristiques ayant le même point d'arrêt, comme le montre l'exemple (6) : tous les cercles passant par O coupent ses caractéristiques sous un angle constant, mais O est un point d'arrêt pour chaque demi-caractéristique.

Je pense que, au moins dans le cas où il n'y a que des points singuliers de première espèce, en utilisant les cycles sans contact de Poincaré, on peut prouver l'existence d'une telle valeur de λ. Ce serait alors une fonction $\lambda = \lambda(x,y)$ et les cycles limites seraient donnés par l'équation $\lambda(x,y) = 0$. Mais j'ai abandonné ce problème, pensant que la seule démonstration de l'existence de cette fonction $\lambda(x,y)$ n'aiderait pas à trouver les cycles limites.

Alors je me suis tourné vers l'Analysis situs ou Topologie.[13] J'ai essayé de comprendre les Mémoires de Poincaré sur ce sujet[14] et j'ai lu le premier chapitre du livre de Lefschetz "L'analysis situs et la Géométrie algébrique", qui contient un exposé clair sans démonstrations, et le livre de Kerekjarto.[15] En 1926, il n'y avait encore que peu de publications sur ce sujet, alors que sur la théorie des fonctions, de variables réelles ou complexes, il y en avait tant qu'un débutant isolé s'y perdait. Sur le conseil de Dumas, me signalant que Lebesgue donnait au Collège de France un cours sur l'Analysis situs, je me suis rendu à Paris en novembre 1926. J'y suis resté jusqu'en mai 1927 et j'ai pu y retourner l'hiver suivant. J'ai suivi plusieurs cours à la Sorbonne, le Séminaire Hadamard au Collège de France, où j'ai appris beaucoup de choses. Mais sur l'Analysis situs, il n'y avait rien. Lebesgue avait changé le sujet de son cours et parlait des fonctions eulériennes et des formules sommatoires d'Euler-Maclaurin.

A la Bibliothèque de la Sorbonne, je lisais tout ce que je trouvais sur l'Analysis situs, travaux de Poincaré, de Brouwer, Lebesgue, la Thèse de L. Antoine.[16] Le problème fondamental de la Topologie étant résolu pour les surfaces, il était naturel d'aborder les variétés à trois dimensions. A la fin du 2^ième^ Complément à l'Analysis situs, Poincaré écrit[17] : "Pour ne pas allonger davantage, je me borne à énoncer le théorème suivant ...", énoncé se réduisant à ceci : une sphère d'homologie est la sphère ordinaire ! Mais dans le 5^ième^ Complément, il montre que c'est faux en construisant une sphère d'homologie à trois dimensions dont le groupe fondamental n'est pas trivial.[18] Il pose alors le problème appelé aujourd'hui "Hypothèse de Poincaré" : la sphère S^3 est-elle topologiquement caractérisée, parmi les variétés closes à trois dimensions, par le fait que son groupe se réduit à l'identité ?

Plus généralement, on pouvait se demander si la connaissance du groupe fondamental suffisait pour caractériser topologiquement une variété close à trois dimensions. Or, Kerekjarto, dans l'Introduction à son livre, mentionnait une Note d'Alexander intitulée "Two Manifolds with the same group", que je n'avais pas trouvé à Lausanne et que je pus obtenir à la Bibliothèque de la Sorbonne.[19] Les deux variétés d'Alexander sont les deux espaces lenticulaires dont le groupe est cyclique d'ordre cinq. En étudiant cet exemple, j'ai vu que la théorie des enlacements et des intersections allait plus loin que l'homologie et donnait d'autres résultats, qui me semblaient nouveaux.

J'ai alors écrit à Lebesgue en lui demandant un entretien. Il a tout de suite accepté et m'a appelé à la fin de son cours au Collège de France. Comme la conversation se prolongeait et que l'appariteur semblait s'impatienter, Lebesgue m'a proposé de le raccompagner à pied jusqu'à la rue Saint Sabin, en me disant qu'on devait avoir des égards pour ce viel appariteur qui avait introduit Liouville.

Lebesgue, tout en étant très encourageant, m'a signalé d'autres travaux d'Alexander que j'ignorais, parus en 1924 et 1925 dans les Proceedings of the Nat. Ac. of Sc., que j'ai trouvé à la Bibliothèque de la Sorbonne.[20] Ma déception a été grande d'y voir beaucoup de ce que j'avais fait et que je croyais nouveau.

Changeant de problème, j'ai alors essayé de démontrer l'hypothèse de Poincaré. Espérant pouvoir y arriver, j'ai montré à Lebesgue une esquisse de mon projet de démonstration. Il m'a dit tout de suite que, pour une chose aussi importante, il fallait faire une rédaction complète, avec tous les détails, avant de rien annoncer. Je m'y suis acharné pendant des semaines, couvrant des dizaines et des dizaines de pages, jusqu'à ce que je me trouve devant une difficulté imprévue qui s'est révélée insurmontable. Découragé, je suis retourné voir Lebesgue. Il m'a conseillé de revenir à l'étude des invariants d'intersection et d'enlacement, en donnant un exposé clair et rigoureux avec des exemples. Il m'a prêté un tiré à part de l'exposé de H. Weyl sur l'Analysis situs combinatoire qui m'a été très utile [H. Weyl, Analysis situs cominatorio, Rev. Mat. Hisp. Amer., t.5, 1923].[21]

Avant la fin de mon séjour à Paris, Lebesgue me conseilla de rédiger une Note qu'il fit publier dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences [Sur la dualité en Analysis situs, C.R. t.186, 1928, p.670]. J'avais alors un plan bien établi pour une thèse. Il s'agissait d'en achever la rédaction, ce qui était un gros travail et me prit beaucoup de temps, d'autant plus que j'avais dès septembre 1928 une lourde charge d'enseignement secondaire à Lausanne.

A côté du Collège où j'enseignais, se trouvait la petite Bibliothèque de l'Ecole d'ingénieurs, où je pouvais jeter un coup d'oeil sur les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Un jour, <u>ce fut la chance de ma vie</u>, je tombai sur la Note d'Elie Cartan, intitulée "Sur les nombres de Betti des espaces de groupes clos", signalant quelques problèmes d'Analysis situs, dont il montrait la grande importance, mais qui n'étaient pas résolus (C.R., t.187, 1928, p.196-198). Cette Note mit mon cerveau en ébullition et le lendemain j'étais sûr d'avoir la solution. Il s'agissait de démontrer deux théorèmes qui permettent de définir les nombres de Betti à l'aide des formes différentielles. Peu après, j'écrivis à Lebesgue en lui indiquant l'esquisse de ma démonstration. Il me répondit qu'avant de publier, il fallait être bien sûr de ma démonstration, ajoutant : "...or vous vous basez sur des théorèmes de Poincaré mal démontrés ou pas démontrés du tout, comme : toute variété admet une subdivision polyèdrale".

En fait, j'admettais l'existence d'une subdivision polyèdrale, sans laquelle (à cette époque) on ne savait démontrer le théorème de dualité de Poincaré. Je lui répondis que j'allais encore tout rédiger complètement pour en faire un nouveau chapitre de ma thèse. Quelques mois plus tard, je lui ai envoyé la Note "Intégrales multiples et Analysis situs" qui fut, grâce à lui, publiée dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences [C.R., t.188(1929), p.1651].

Mais il me fallut encore plusieurs mois pour achever la rédaction de ma thèse. Enfin, aux vacances de Pâques 1930 je lui apportais mon manuscrit, écrit à la main de ma plus belle écriture ! A sa demande, Elie Cartan, avec qui je n'avais pas encore eu de contact personnel, me convoqua chez lui à Versailles. Il voulut bien accepter d'examiner mon travail et fut ensuite à la fois rapporteur et président du jury de ma thèse. Après qu'elle ait été publiée dans le Journal de mathématiques pures et appliquées [t.10(1931), p.115-200 : Sur l'Analysis situs des variétés à n dimensions], la soutenance eut lieu en juin 1931.

Aux yeux de Lebesgue, les théorèmes énoncés par E. Cartan dans sa Note de 1928 sur les nombres de Betti présentaient à peu près le même degré d'évidence que le théorème de Jordan sur les courbes fermées planes, mais tout autant que ce dernier, ils exigeaient une démonstration. En généralisant le théorème de Jordan pour les dimensions supérieures, Lebesgue avait introduit la notion de variétés enlacées [22] et démontré un cas particulier du théorème de dualité d'Alexander, tandis que les théorèmes énoncés par E. Cartan, comme je l'ai montré, sont liés au théorème de dualité de Poincaré.

L'idée qui m'a guidé dans ce travail, c'est que, dans une variété à n dimensions, un champ d'intégration à p dimensions (ou, pour abréger, un p-champ) et une forme différentielle extérieure de degré n-p ((n-p)-forme) sont deux aspects d'une même notion plus générale, que j'ai appelé un <u>courant</u>[23], le bord d'un p-champ correspondant à la différentielle extérieure d'une (n-p)-forme, et l'intersection de deux champs au produit de deux formes. Aussi ai-je appelé <u>fermée</u> toute forme ω telle que $d\omega = 0$, et <u>homologue à zéro</u> la différentielle $\omega = d\alpha$ d'une forme α.

La formule générale de Stokes montre immédiatement que les périodes (intégrales sur un cycle) d'une forme homologue à zéro sont nulles. Le premier théorème énoncé par E. Cartan affirme que, réciproquement, <u>une forme fermée dont toutes les périodes sont nulles est homologue à zéro</u>. Le second théorème affirme <u>l'existence d'une forme fermée ayant</u>, relativement à des cycles entre lesquels n'existe aucune homologie, <u>des périodes</u>

<u>arbitrairement assignées</u>. Pour l'établir, en tenant compte du théorème de dualité de Poincaré, il suffisait de montrer que pour tout (n-p)-cycle C^{n-p}, il existe une p-forme fermée ω telle que, pour tout p-cycle C^p, l'on ait :

$$\int_{C^p} \omega = I(C^p, C^{n-p})$$ (indice de Kronecker : c'est-à-dire nombre algébrique de points d'intersection de C^p avec C^{n-p}).

La démonstration donnée par Poincaré de son théorème de dualité, à l'aide du polyèdre réciproque, m'a servi de guide pour construire cette p-forme ω associée au cycle C^{n-p}. J'ai établi en même temps un troisième théorème : si les formes ω_1 et ω_2 sont associés aux cycles C_1 et C_2, la forme produit $\omega_1 \wedge \omega_2$ est associée au cycle intersection $C_2.C_1$. Ce dernier théorème, que j'ai eu tort de ne pas mentionner dans ma Note de 1929, est, m'a-t-il semblé, ce qui a le plus intéressé E. Cartan dans ma thèse, car il n'y avait pas pensé et en a aussitôt fait de belles applications [E. Cartan : Sur les propriétés topologiques des quadriques complexes, Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, 1932].[24]

Après avoir terminé la rédaction de ma thèse, j'ai vu que l'on pouvait déduire des deux théorèmes dont j'annonçais la démonstration dans ma Note de 1929 la réponse à un problème posé par Severi et Lefschetz : une intégrale double de première espèce, attachée à une surface algébrique, peut-elle être sans périodes ? [S. Lefschetz : Géométrie sur les surfaces et les variétés algébriques, Mémorial des Sciences mathématiques, Fasc. XL, 1929, p.28]. La réponse, négative, était presque immédiate. En effet, une surface algébrique, sans singularités, est une variété V à quatre dimensions réelles ayant une structure analytique complexe. A l'aide de coordonnées complexes locales z_1, z_2, la forme élément d'une intégrale double de première espèce s'écrit

$$\omega = f(z_1,z_2)\, dz_1 \wedge dz_2 ,$$

f étant holomorphe, la forme ω étant par suite fermée ainsi que la forme imaginaire conjuguée $\overline{\omega}$. Si les périodes de ω étaient toutes nulles, d'après le premier théorème ci-dessus, ω serait homologue à zéro, $\omega = d\alpha$ et $\omega \wedge \overline{\omega} = d(\alpha \wedge \overline{\omega})$ aussi, donc l'intégrale de $\omega \wedge \overline{\omega}$ étendue à la variété fermée V serait nulle. Mais comme $\omega \wedge \overline{\omega} = |f(z_1,z_2)|^2\, dz_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2$, cela n'est possible que si $\omega = 0$, car $dz_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2$ est, à un facteur près de signe constant, un élément de volume.

Le raisonnement s'étend aux intégrales n-uples de $1^{ère}$ espèce attachées à une variété algébrique à n dimensions et le troisième théorème ci-dessus fournit la généralisation des relations de Riemann entre les périodes des intégrales de première espèce attachées à une courbe algébrique.

J'allais publier cela lorsque j'appris que Hodge venait de résoudre le problème de Severi, par une autre méthode [W.V.D. Hodge, On multiple integrals attached to an algebraic variety, Journal of the London Mathematical Society, Vol. 5, 1930, Part 4, p.283-290]. J'ai néanmoins publié ultérieurement ma démonstration [Sur les périodes des intégrales de première espèce attachées à une variété algébrique, Commentarii Mathematici Helvetici, vol.III, 1931, p.151-153].

A ce propos, la belle biographie de Sir William Vallance Douglas Hodge [Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society, Volume 22, November 1976, p.169-192] écrite par M.F. Atiyah, contient des détails très intéressants. Il y a deux circonstances que Hodge, dit Atiyah, a toujours considérées comme deux coups de chance (Stroke of Luck[25]). En 1926, Hodge fut nommé "assistant lecturer" à Bristol. Il y trouva un collègue, Peter Fraser, qui ne publiait rien, mais qui connaissait fort bien la littérature mathématique. Ils font ensemble de grands efforts pour dominer l'oeuvre des géomètres italiens, Castelnuovo, Enriques, Severi. Ils rencontrent le problème ci-dessus de Severi. Alors, premier coup de chance, Hodge voit un travail de Lefschetz dans les Annals of Mathematics où sont redémontrées les relations de Riemann entre les périodes des intégrales abéliennes de première espèce attachées à une courbe algébrique, et il voit tout de suite que la méthode s'étend aux variétés à plusieurs dimensions. Il lui parut incroyable que cela ait échappé à Lefschetz, et il publie aussitôt son article cité ci-dessus.

Ayant lu cet article, Lefschetz écrit aussitôt à Hodge : primo, je l'ai déjà fait ; secondo, c'est faux (je tiens ce détail de Hodge lui-même qui me l'a raconté à Princeton en 1950). Et il l'enjoint de reconnaître son erreur. Atiyah nous apprend qu'il y eut en mai 1931 une entrevue entre Hodge et Lefschetz dans le bureau de Max Newman à Cambridge où chacun resta sur ses positions mais d'où résulta que Hodge fut invité à passer l'année académique 1931-32 à Princeton. Lefschetz finit par reconnaître qu'il avait tort et Atiyah ajoute que cet article ouvrit à Hodge de nombreuses portes et eut une heureuse influence sur sa carrière.

Le second coup de chance, d'après Hodge lui-même dit Atiyah[26], c'est le fait qu'avant de partir pour Princeton, son collègue Fraser lui signala ma thèse qui venait d'arriver à Bristol. Il en exposa la partie analytique au Séminaire de Lefschetz, comme je l'ai appris par une lettre de ce dernier demandant à Lebesgue de me suggérer l'envoi de quelques exemplaires de ma thèse à Princeton.

A propos du théorème assurant l'existence, sur une variété close à n dimensions, d'une p-forme fermée ayant des périodes assignées, Hodge s'est demandé si l'on ne pouvait pas imposer à cette p-forme des conditions qui, pour p=1, sur une surface de Riemann close, se réduisent à la condition que la 1-forme soit harmonique, plus précisément, qu'elle soit localement la différentielle d'une fonction harmonique. Il était en effet bien connu que, sur une telle surface, il existe une 1-forme et une seule, ayant les périodes assignées, qui est localement la différentielle d'une fonction harmonique ; elle est la partie réelle d'une différentielle abélienne de première espèce.

Pour pouvoir formuler de telles conditions, sur une variété à $n > 2$ dimensions, il fallait introduire une structure plus précise que la structure de variété différentielle. Guidé par les travaux de Volterra sur les fonctionnelles harmoniques[27], Hodge a vu qu'il convenait simplement de munir la variété d'une métrique riemannienne. Celle-ci permet de définir l'opérateur $\star$ qui associe à toute p-forme ω la (n-p)-forme $\star\omega$, dite adjointe à ω , dont la valeur sur un (n-p)-vecteur est égale à la valeur de ω sur le p-vecteur orthogonal de même norme.

Sur une surface de Riemann, la structure analytique complexe détermine une métrique riemannienne seulement à un facteur près, $ds^2 = \lambda |dz|^2$, $z = x + iy$ étant une coordonnée complexe locale. Mais l'adjointe à une 1-forme $\alpha = a\, dx + b\, dy$, qui est $\star\alpha = a\, dy - b\, dx$, ne dépend pas de ce facteur λ et l'on voit que α est localement la différentielle d'une fonction harmonique si et seulement si α et $\star\alpha$ sont fermées.

Aussi Hodge, toujours inspiré par les travaux de Volterra, pose la définition suivante : dans un espace de Riemann, <u>une p-forme ω est dite harmonique si ω et $\star\omega$ sont fermées</u>.

Le produit scalaire (α,β) de deux p-formes, dans une variété close, défini par l'intégrale

$$(\alpha,\beta) = \int \alpha \wedge \star \beta$$

étendue à toute la variété, fait de l'espace de toutes les p-formes un espace préhilbertien. L'opérateur

$$\delta = (-1)^{np+n+1} \star d \star$$

change la p-forme α en une (p-1)-forme $\delta\alpha$ et l'on a, pour toute (p-1)-forme γ ,

$$(\alpha, d\gamma) = (\delta\alpha, \gamma).$$

Cette formule montre que $\delta\alpha = 0$ est une condition suffisante pour que α soit orthogonale à toutes les formes homologues à zéro (les forme $d\gamma$), et aussi nécessaire car si $\delta\alpha \neq 0$, $((\alpha, d\delta\alpha) = (\delta\alpha, \delta\alpha) > 0$.

C'est aussi la condition nécessaire et suffisante pour que α, parmi toutes les formes qui lui sont homologues (les formes $\alpha + d\gamma$), réalise le minimum de l'intégrale (α,α), comme cela résulte de la formule

$$(\alpha + td\gamma, \alpha + td\gamma) = (\alpha,\alpha) + 2t(\alpha, d\gamma) + t^2(\gamma,\gamma)$$

où t est un paramètre réel.

Cela étant, l'existence d'une p-forme fermée harmonique ayant des périodes assignées équivaut à l'existence, parmi toutes les p-formes fermées ayant ces mêmes périodes, d'une forme réalisant le minimum de l'intégrale (α,α).

Les premiers travaux où Hodge tente de prouver l'existence de cette forme s'inspirent de l'ouvrage de H. Weyl, Die Idee der Riemanschen Fläche.[28] Mais pour le cas $n > 2$, il subsiste des difficultés qui ne se présentaient pas pour $n=2$. Suivant une suggestion de H. Kneser, Hodge a ensuite utilisé la méthode de la paramétrix.[29] Il restait cependant une lacune qui fut comblée par H. Weyl.

Très intéressé par les idées de Hodge, je me suis efforcé de clarifier sa théorie.[30] Tout d'abord, sa définition même des formes harmoniques ne m'a pas paru tout à fait satisfaisante, car si on l'applique aux fonctions, pour $p=0$, seules les constantes seraient des fonctions harmoniques. Aussi ai-je introduit ce qui me paraît la bonne généralisation du laplacien, à savoir $\Delta = d\delta + \delta d$, à laquelle Hodge n'avait pas pensé. Pour les fonctions, $p=0$, Δ se réduit à δd, ce qui est l'opérateur de Laplace-Beltrami. Il était alors naturel de définir les formes harmoniques par l'équation $\Delta\varphi = 0$, définition à laquelle Hodge s'est ensuite rallié.

Pour une forme α sans singularités sur un espace clos, on a

$$(\alpha, \Delta\alpha) = (\alpha, d\delta\alpha) + (\alpha, \delta d\alpha) = (\delta\alpha, \delta\alpha) + (d\alpha, d\alpha).$$

Il en résulte que $\Delta\alpha = 0$ entraîne $d\alpha = 0$ et $\delta\alpha = 0$, c'est-à-dire que α et $\ast\,\alpha$ sont fermées et α est harmonique au sens de Hodge. Cela généralise le fait bien connu qu'une fonction harmonique partout régulière sur un espace clos se réduit à une constante.

Mais l'intérêt de cet opérateur Δ tient surtout à ce que, avec la méthode de la paramétrix, il permet de simplifier considérablement la démonstration du théorème d'existence. Comme je l'ai montré dans mon article "Sur la théorie des formes différentielles harmoniques" dans les Annales de l'Université de Grenoble (tome XXII, année 1946, p.135-152), on prouve très facilement que l'équation $\Delta\mu = \beta$, où β est une p-forme donnée et μ la p-forme inconnue, est possible si et seulement si β est orthogonale à toutes les p-formes harmoniques. On obtient deux opérateurs intégraux, G et H, permutables entre eux ainsi qu'avec d, δ et $\ast$, tels que, pour toute forme β, $H\beta$ soit harmonique, $\beta - H\beta$ orthogonale aux formes harmoniques et $\beta = \Delta G\beta + H\beta$. Et l'on obtient une démonstration directe de l'existence d'une forme harmonique ayant des périodes assignées sans utiliser le théorème de ma thèse assurant l'existence d'une forme fermée ayant des périodes assignées.

Les opérateurs Δ, G et H ont été ensuite utilisés par Hodge et A. Weil dans l'étude des variétés kähleriennes.[31]

D'une manière indépendante et très différente, le même opérateur avait déjà été utilisé par Kodaira dans ses travaux sur le même sujet [Harmonic fields in Riemannian manifolds (generalized potential theory), Annals of Mathematics, 50(1949), 587-665].

La notion de distribution de Laurent Schwartz a conduit à une définition précise et générale des courants. Les opérateurs Δ , G, $\ast$ s'appliquent alors aux courants. En particulier, si c est un cycle à n-p dimensions, Hc est la forme harmonique associée à c, que l'on doit considérer comme homologue à c, car $Hc-c = \Delta Gc = d(\delta Gc)$. J'ai eu la chance de pouvoir élaborer ces idées en 1950 à l'Institut de Princeton, où j'ai rencontré Kodaira dans un Séminaire dirigé par H. Weyl et C.L. Siegel, auquel participaient J.W. Alexander, Reidemeister et bien d'autres mathématiciens. C'est ensuite que j'ai publié mon livre "Variétés différentiables, Formes, Courants, Formes harmoniques", qui en donne un exposé systématique.[32]

NOTES DE LA REDACTION

1 G. de Rham est né le 10 septembre 1903 à Roche, dans le canton de Vaud, en Suisse. Un intéressant interview de G. de Rham par J.-P. Chenaux a été publié dans le Journal de Genève du 14 septembre 1978 : Un mathématicien suisse élu à l'Académie des Sciences de Paris. Georges de Rham ou la passion de la simplicité, interview accordé après l'élection de G. de Rham comme Membre associé étranger de l'Académie des Sciences de Paris. Cet interview est suivi d'un Témoignage d'un élève d'André Delessert.

2 G. Dumas (1872-1955), né à Etivaz, dans le canton de Vaud, en Suisse, élève de K. Hensel, professeur depuis 1913 à l'Université de Lausanne, a soutenu en 1904 sa thèse de doctorat ès sciences mathématiques à l'Université de Paris : Sur les fonctions à caractère algébrique dans le voisinage d'un point donné.

L'article que mentionne G. de Rham est : Sur quelques cas d'irréductibilité des polynômes à coefficients rationnels (Journal de Mathématiques pures et appliquées, (6), 2(1906), 191-258). G. Dumas écrit dans son introduction (p.191-192) :

"Les polygones de Newton occupent une place importante dans la théorie des fonctions algébriques d'une variable. Par leur intermédiaire, les résultats prennent une forme concise et élégante qu'il serait difficile d'obtenir autrement.

Dans le présent travail je me propose de montrer comment l'introduction de ces polygones dans l'étude des polynômes à coefficients rationnels met en évidence plusieurs faits nouveaux et permet, sous une forme tout à fait générale et intuitive, d'énoncer certains théorèmes qui se rattachent au critère d'irréductibilité découvert par Eisenstein.

Les suites ordonnées suivant les puissances croissantes d'un nombre premier p, introduites récemment dans la science par M. Hensel, m'ont rendu la tâche facile. C'est dans celles-ci, en effet, que semble résider la raison profonde de l'analogie complète entre la théorie des fonctions algébriques et l'analyse supérieure des nombres."

G. Dumas publie ensuite le mémoire Elementare Herleitung des Weierstrass'schen "Vorbereitungssatzes" (Sitzungsberichete K. Bayer. Akad. Wissenschaften, mat.-phys. Klasse, 1909, 18. Abhandlung), sur le théorème fondamental, dit "théorème de préparation de Weierstrass", de la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables.

Notons encore le mémoire de G. Dumas, écrit avec J. Chuard, Sur les homologies de Poincaré (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 171(1920), 1113-1116). Ils écrivent au début de leur Note (p.1113) :

"Les homologies interviennent dès le début des recherches de Poincaré sur l'Analysis situs. Qu'est-ce qu'une homologie? Pourquoi les homologies se combinent-elles comme des équations ? Que correspond-il à une homologie déduite d'une autre par division ? Telles sont les questions, dont on s'est déjà beaucoup préoccupé, et que les auteurs de cette Note cherchent à élucider."

Ce travail est poursuivi par G. Dumas dans ses Notes : Sur les contours d'encadrement (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 172(1921), 1221-1223,1627) et Sur un tableau normal relatif aux surfaces unilatérales (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 174(1922), 93-95).

G. de Rham écrit dans son article sur Gustave Dumas (Revue de mathématiques élémentaires, 10(1955), 121-122) que Dumas ne s'arrêtait "jamais à l'aspect purement formel des questions, il cherchait toujours l'idée profonde et générale qui éclaire les choses de l'intérieur, du centre".

3 H. Boerner, dans sa biographie de C. Caratheodory (1873-1950) (Dictionary of Scientific Biography, vol.III, New York(Scribner), 1971, p.62-63), écrit que lors de ses études à Berlin, entre 1900 et 1902, Caratheodory "fut stimulé par les étudiants de Hermann Amandus Schwarz".

M. Mikolas, dans sa biographie de L. Fejer (1880-1959) (Dictionary of Scientific Biography, vol.IV, 1971, p.561-562), note que "durant l'année scolaire 1899-1900 H.A. Schwarz avait attiré son attention, grâce à une suggestion de C. Neumann concernant le problème de Dirichlet, vers la théorie des séries de Fourier".

H. Boerner, dans sa biographie de H.A. Schwarz (1843-1921) (Dictionary of Scientific Biography, vol.XII,1975, p.245-247), remarque que Schwarz avait succédé à Weierstrass à l'Université de Berlin, où il avait enseigné de 1892 à 1917, et, "durant cette longue période, les obligations d'enseignements et son intérêt pour ses nombreux étudiants prirent tellement de son temps qu'il ne publia plus que très peu de choses".

4 H. Hasse, dans sa biographie de K. Hensel (1861-1941) (Dictionary of Scientific Biography, vol.VI, 1972, p.286-287), écrit :

"La méthode de Weierstrass du développement en séries entières des fonctions algébriques conduisit Hensel, vers 1899, à la conception d'un analogue pour la théorie des nombres algébriques : nombres p-adiques. Les nombres p-adiques doivent être considérés comme sa découverte la plus importante. Pour l'évaluer, on doit avoir présent à l'esprit que sa base conceptuelle n'existait pas alors ; au contraire, la découverte de Hensel fut le stimulant décisif pour le développement des notions algébriques abstraites requises pour la base : la théorie des corps valués."

5 G. de Rham a bien voulu nous envoyer la Brève Notice sur Dmitry Mirimanoff suivante :

"Né le 13 septembre 1861 en Russie, à Péréinslav-Zaleski dans le gouvernement Vladimir où se passa son enfance.

Il vint en France à l'âge de 19 ans et fit ses premières études universitaires à Montpellier d'abord, puis à Paris où il suivit l'enseignement des grands Maîtres Bouquet, Emile Picard, Appell , Charles Hermite, Henri Poincaré.

Ensuite il alla s'établir à Genève, se fit naturaliser suisse et prit en 1900 le grade de Docteur ès Sciences mathématiques.

Dès 1901, il enseigna à l'Université de Genève, d'abord comme privat-docent, puis comme professeur, jusqu'en 1936. Il enseigna aussi, temporairement, aux Universités de Fribourg et de Lausanne.

Docteur honoris causa des Universités de Lausanne (1936) et de Lyon (1942).

Décédé le 5 janvier 1945.

Les travaux de Dmitry Mirimanoff concernent la Géométrie élémentaire, la Théorie des nombres (en particulier le "dernier théorème de Fermat"), l'Algèbre, le Calcul des Probabilités et l'Analyse. La liste complète, qui comporte 60 titres, a été publiée dans la revue L'Enseignement mathématique, à la suite d'une analyse de ses travaux consacrés à la Théorie des nombres par H.S. Vandiver (L'Enseignement mathématique, 39 (1942-1950), 169-179). Il faut encore mentionner d'importants travaux sur la Théorie des ensembles et les antinomies cantoriennes, qui figurent dans la liste ci-dessus."

6 A. Hurwitz und R. Courant, Allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, Berlin(Springer), 1922.

A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre, Berlin(Springer), 1. Auflage 1919, 2. Auflage 1923.

B. v. Kerekjarto, Vorlesungen über Topologie, Berlin(Springer), 1923.

7 La collection de Borel a été publiée chez Gauthier-Villars à Paris.

J.-A. Serret, Cours d'algèbre supérieure, 4e édition, t.I 1877, t.II 1879, Paris (Gauthier-Villars). Les Recherches de Galois sont exposées p.637-677.

E. Cartan, Leçons sur les invariants intégraux, Paris(Hermann), 1922. E. Cartan écrit dans son Introduction (p.V) :

"La théorie des Invariants intégraux a été fondée par H. Poincaré et exposée par lui dans le tome III de ses "Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste"."

8 Poincaré a analysé lui-même ses recherches sur ce sujet dans le paragraphe V : Courbes définies par les équations différentielles, p.XXI-XXXI de son Analyse des travaux scientifiques, Oeuvres, t.I, Paris(Gauthier-Villars), 1928.

Il a développé d'abord sa théorie dans le Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle, Oeuvres, t.I, p.3-84 = Journal Math. pures et appliquées, (3), 7(1881), 375-422 ; 8(1882), 251-296. Poincaré y définit les "caractéristiques" (p.5), ainsi que les "points singuliers de première espèce" (p.18), qui sont les "centres" (p.17-18), les "foyers" (p.16-17), les "noeuds" (p.14-15) et les "cols" (p.15-16).

9 I. Bendixson, Sur les courbes définies par des équations différentielles (Acta math., 24(1901), 1-88).

10 Poincaré, Oeuvres, t.I, p.5.

11 H. Dulac, Sur les cycles limites (Bulletin Soc. math. France, 51(1923), 45-188).

Dulac avait également publié un article intitulé Recherches sur les points singuliers (Journal Ecole polytechnique, (2), 9(1904), 1-125), où il étend (p.116) le théorème obtenu dans le cas d'un centre par Poincaré et généralisé par Bendixson.

12 Il s'agit du XVI^{e} problème (p.96-97) de Hilbert (D. Hilbert, Sur les problèmes futurs des mathématiques, Compte rendu du deuxième Congrès international des mathématiciens, Paris, 1900, Gauthier-Villars, 1902, p.58-114).

Sur l'état actuel du XVI^{e} problème de Hilbert on peut lire les remarques de R. Thom et V. Arnold (p.57-58) dans Mathematical Developments arising from Hilbert Problems, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol.XXVII, Part 1, Providence(Amer.Math. Soc.), 1976.

Voir également, p.130-132, de l'article de J. Dieudonné L'analyse fonctionnelle, tome II, p.115-176, de l'Abrégé d'histoire des mathématiques, Paris(Hermann), 1978.

13 Pour toutes les notions mathématiques, nous renvoyons au remarquable Encyclopedic Dictionary of Mathematics edited by S. Iyanaga and Y. Kawada, Cambridge, Massachusetts (The MIT Press), 1977.

14 Poincaré a analysé lui-même ses travaux sur Analysis situs,p.100-103 de son Analyse des travaux scientifiques (Acta math.,38(1921), 3-135).

Ses travaux sur ces questions ont été publiés dans le tome VI de ses Oeuvres, Paris (Gauthier-Villars), 1953, p.181-538, avec une préface de J. Leray (p.183-184), un Lexique des notations et de terminologie (de Poincaré et de celles en usage en 1950, p.185) et un Sommaire, p.187-188, précisant les notions, les problèmes et les développements de cette théorie.

15 S. Lefschetz, L'Analysis situs et la Géométrie algébrique, Paris(Gauthier-Villars), 1924 ; chapitre I : Propriétés générales des variétés analytiques, p.1-16.

Quant au livre de Kerekjarto, il est déjà mentionné dans la note 6.

16 Les travaux de L.E.J. Brouwer ont été publiés et commentés par H. Freudenthal dans le volume II de ses Collected Works, Amsterdam(North-Holland), 1976.

Les travaux de H. Lebesgue sur Analysis situs ont été publiés dans le volume IV de ses Oeuvres scientifiques, Genève(L'Enseignement mathématique), 1973, p.167-249. Il existe un commentaire de Lebesgue lui-même de ces travaux dans sa Notice sur les travaux scientifiques (p.164-165), publiée dans le volume I de ses Oeuvres scientifiques, 1972, p.97-175.

L. Antoine, Sur l'homéomorphie de deux figures et de leurs voisinages (Journal Math. pures et appliquées, (8), 4(1921), 221-325).

17 P.370 du tome VI de ses Oeuvres.

18 P.436 du tome VI de ses Oeuvres.

19 J.W. Alexander, Note on two three-dimensional manifolds with the same group (Trans. Amer. Math. Soc., 20(1919), 339-342). Ce mémoire est daté de Paris : décembre 1918.

20 En particulier, J.W. Alexander, New topological invariants expressible as tensors (Proceedings Nat. Acad. Sci. USA, 10(1924), 99-101).

21 H. Weyl, Gesammelte Abhandlungen, Band II, Berlin(Springer), 1968, p.390-415.

22 P.842 du mémoire de Lebesgue, Sur l'invariance du nombre de dimensions d'un espace et sur le théorème de M. Jordan relatif aux variétés fermées (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 152(1911),841-843).

23 P.116-117 de la thèse de G. de Rham.

G. de Rham écrit, dans l'Introduction (p.V, 1e éd. ; p.X, 2e éd.) de son livre Variétés différenriables,Paris(Hermann), 1955, 2e éd. 1960, livre traduit en russe en 1956 :

"Le concept de courant, en tant que notion générale comprenant comme cas particulier les formes différentielles d'une part et les chaînes d'autre part, est la clé qui permet de comprendre comment les propriétés d'homologie d'une variété se manifestent à la fois dans l'étude des formes différentielles et dans celle des chaînes. Cette idée a guidé mes recherches dans ce domaine dès 1928. Mais c'est seulement la notion de distribution, introduite en 1945 par L. Schwartz, qui a fourni la définition précise adoptée ici. Dans notre terminologie, les distributions sont les courants de degré zéro, et un courant peut être considéré comme une forme différentielle dont les coefficients sont des distributions."

24 Voir aussi E. Cartan, Oeuvres complètes, partie I, vol.2, Paris(Gauthier-Villars), 1952, p.1227-1246). En particulier, p.1238-1245 : Applications des théorèmes de G. de Rham.

25 P.175 de l'article d'Atiyah.

26 Atiyah écrit dans sa biographie de Hodge (p.177) :

"One day Fraser pointed out de Rham's thesis which had just arrived in the Bristol library. In later years Hodge described this as a stroke of good fortune."

27 Voir p.257 du livre de G. de Rham : Variétés différentiables, Formes, Courants, Formes harmoniques, 2e éd.

28 Zweite Auflage, Leipzig(Teubner), 1923.

29 Voir p.483 du mémoire de W.V.D. Hodge, The existence theorem for harmonic integrals (Proceedings London Math. Soc., (2), 41(1936), 483-496).

30 Voir les Nos [7] et [8] de la Bibliographie de G. de Rham, dans son livre Variétés différentiables, dont la 3e édition a été publiée en 1973.

31 W.V.D. Hodge, Differential forms on a Kähler manifold (Proceedings Cambridge Philos. Soc., 47(1951), 504-517).

A. Weil, Introduction à l'étude des variétés kählériennes, Paris(Hermann), 1958.

32 Signalons le très bel article de Henri Cartan : Les travaux de Georges de Rham sur les variétés différentiables(p.1-11) dans le recueil Essays on Topology and Related Topics, Mémoires dédiés à Georges de Rham, Berlin(Springer), 1970, dont les paragraphes sont : 1. Le théorème de de Rham, et ses prolongements (p.4) dans les travaux de Serre, Dolbeault et Grothendick ; 2. La notion de "courant" ; 3. La théorie des formes harmoniques ; 4. Réductibilité d'un espace de Riemann. Dans sa conclusion (p.10), H. Cartan souligne "les caractères essentiels" de l'oeuvre mathématique de G. de Rham :

"S'attaquant à quelques problèmes bien choisis, de Rham les résout en utilisant le strict minimum d'outils nécessaires, et avec une rigueur qui ne laisse aucun point dans l'ombre. Puis l'on s'aperçoit, avec le recul du temps, que les notions introduites et les problèmes résolus occupent une position stratégique qui commande de nombreux et féconds développements."

Voir aussi, en particulier, l'article de J. Milnor, Torsion et type simple d'homotopie (p.12-17).

On trouve également dans ce livre (p.249-252) la Liste des publications scientifiques de G. de Rham. G. de Rham a bien voulu mettre à jour (29 octobre 1979) cette liste :

53. On the Area of Complex Manifolds. Global Analysis - Papers in honor of K. Kodaira, University of Tokyo Press and Princeton University Press 1969, p.143-157.
54. Sur les polygones générateurs de groupes fuchsiens. L'enseignement mathématique, t.XVII, 1971, p.49-61.
55. Sur certaines applications génériques d'une variété close à 3 dimensions dans le plan (en collaboration avec O. Burlet). L'Enseignement mathématique, t.XX, 1974, p.49-61.
56. L'oeuvre d'Elie Cartan et la Topologie. Hommage à Elie Cartan 1869-1951, p.11-20. Editura Academiei Republici Socialiste Romania, Bucarest, 1975.
57. Notice historique sur "L'enseignement mathématique- Revue internationale" et la Commission internationale de l'enseignement mathématique (CIEM), ICMI : Bulletin of the International Commission on mathematical instruction (Tokyo), N° 7 (April 1976), p.29-34.

33 Note au sujet des cycles limites par G. de Rham (20 décembre 1979).

Petrowsky et Landis ont cru démontrer que,lorsque le degré des polynômes X et Y est égal à deux, le nombre des cycles limites de l'équation $dy/dx = Y/X$ ne peut dépasser trois (Mat.Sb., 37(79) (1955), 209-250 ; Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 10(1958), 177-221). Mais des erreurs ont été remarquées dans leur démonstration et la validité du résultat a été mise en doute. C'est ce qu'indique W.A. Coppel dans l'article "A survey of quadratic systems" (Journal of Differential Equations, 2(1966), 293-304), où l'on trouvera encore d'autres références.

Mais A. Haefliger, qui était récemment à Péking, m'apprend que plusieurs mathématiciens y ont étudié ce problème. L'un d'eux a trouvé un exemple avec au moins quatre cycles limites : Shi Song Ling, Graduate School, The Bureau of Applied Mathematics, Academia Sinica, "A concrete example of four limite cycles for quadratic systems (Preprint of January 5, 1979). Citant notamment l'article de Petrowsky et Landis, l'auteur écrit :

"Our example, however, shows that the number of limite cycles for quadratic systems is far from being settled."