**ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations** November 2000, Vol. 5, 591–622
URL: http://www.emath.fr/cocv/

# STABILISATION FRONTIÈRE DE PROBLÈMES DE VENTCEL *

Amar Heminna [1]

**Abstract**. The problem of boundary stabilization for the isotropic linear elastodynamic system and the wave equation with Ventcel's conditions are considered (see [12]). The boundary observability and the exact controllability were etablished in [11]. We prove here the enegy decay to zero for the elastodynamic system with stationary Ventcel's conditions by introducing a nonlinear boundary feedback. We also give a boundary feedback leading to arbitrarily large energy decay rates for the elastodynamic system with evolutive Ventcel's conditions. A spectral study proves, finally, that the *natural* feedback is not sufficient to assure the exponential decay in the case of the wave equation with Ventcel's conditions.

**Résumé**. On considère le problème de la stabilisation frontière de problèmes de Ventcel pour le système linéaire isotrope de l'élasticité et pour l'équation des ondes (*cf.* [12]). L'observabilité et la contrôlabilité ont été établies dans [11]. On montre ici la décroissance vers zéro de l'énergie pour le système de l'élasticité avec conditions de Ventcel stationnaires par un feedback non linéaire ; on montre aussi la décroissance exponentielle arbitrairement grande de l'énergie de la solution du système de l'élasticité par des feedbacks frontières. On montre enfin, par une étude spectrale, que le feedback *naturel* est insuffisant pour assurer la décroissance exponentielle de l'énergie dans le cas de l'équation des ondes.

**AMS Subject Classification.** 93B03, 93B05, 93D15.

Reçu le 29 novembre 1999. Révisé le 9 juin, le 17 juillet, le 29 août et le 25 septembre 2000.

## 1. Introduction

La stabilisation frontière du système de l'élasticité avec des conditions aux limites de Neumann ou de Dirichlet a été étudiée par plusieurs auteurs : Lagnese [18, 19], Komornik [17], Alabau et Komornik [1], Guesmia [8] etc. Horn démontre dans [13], par des techniques d'analyse micro-locale, la stabilisation du système isotrope de l'élasticité avec des conditions aux limites de Neumann, par le feedback *naturel* et sans conditions géométriques fortes sur la partie du bord sur laquelle porte le contrôle : l'auteur n'impose pas au domaine d'être étoilé. Une autre approche est proposée dans [3].

Pour ce qui concerne le cas anisotrope ou le cas d'un feedback non linéaire, Guesmia a montré dans [8] la stabilisation lorsque la partie du bord sur laquelle porte le contrôle est une sphère.

Dans ce travail on se propose d'étudier la stabilisation frontière par feedback de problèmes dits de Ventcel pour l'équation des ondes et le système linéaire isotrope de l'élasticité.

*Mots-clés et phrases:* Élasticité, ondes, problème de Ventcel, contrôlabilité, stabilisation.

* Ce travail a été réalisé lors d'un séjour au D.M.I. de l'École Centrale de Lyon et au Laboratoire de Calcul Scientifique de l'Université de Besançon.

[1] Institut de Mathématiques, USTHB, BP. 32, EL-Alia, 16111 Alger, Algérie ; e-mail: hemina@usa.net

Les problèmes de Ventcel sont caractérisés par la présence d'opérateurs différentiels tangentiels de même ordre que l'opérateur principal. Ces problèmes interviennent dans la modélisation de nombreux phénomènes : mécaniques comme l'élasticité (*cf.* [23,24]) ou physiques comme les processus de diffusion (*cf.* [22,27,30]) ou la propagation d'ondes (*cf.* [2]).

Les conditions de Ventcel sont obtenues par des méthodes asymptotiques pour divers problèmes d'origine physique ou mécanique.

Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ de frontière $\Gamma$ de classe $C^2$ ; on considère $\{\Gamma_0,\Gamma_1\}$ une partition de $\Gamma$ telle que $\overline{\Gamma_0}\cap\overline{\Gamma_1}=\emptyset$, et $\mathrm{mes}(\Gamma_1)>0$. On note $\nu$ la normale unitaire sortante. Soit $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$ un champ vectoreil régulier défini dans $\Omega$ ; on pose $\epsilon_{ij}(\mathbf{u})=\frac{1}{2}(\partial_j u_i+\partial_i u_j)$ et $\sigma(\mathbf{u})=2\mu\epsilon(\mathbf{u})+\lambda(\mathrm{div}(\mathbf{u}))i_3$ ($\lambda$ et $\mu$ sont les coefficents de Lamé et $i_3$ est l'application identité de $\mathbb{R}^3$). Soit $m\in\Gamma$ ; on désigne par $T_m(\Gamma)$ le plan tangent en $m$ à $\Gamma$, $\pi(m)$ la projection orthogonale sur $T_m(\Gamma)$. Soit $\mathbf{v}\in C^1(\bar{\Omega},\mathbb{R}^3)$ ; on pose $\mathbf{v}(m)=\mathbf{v}_T(m)+v_\nu(m).\nu(m)$ où $\mathbf{v}_T(m)=\pi(m)\mathbf{v}(m)$. On note $\partial_m$ et $\partial_\nu$ les dérivations tangentielle et normale $(\partial_m\nu)$ l'opérateur de courbure sur $\Gamma$ et $\pi\partial_m\mathbf{v}_T\pi$ la dérivée covariante du champ $\mathbf{v}_T$. On a alors sur $\Gamma$ (*cf.* [23,29]) :

$$\epsilon(\mathbf{v})=\epsilon_T(\mathbf{v})+\nu\overline{\epsilon_S}(\mathbf{v})+\epsilon_S(\mathbf{v})\bar{\nu}+\epsilon_\nu(\mathbf{v})\nu\bar{\nu} \tag{1.1}$$

avec

$$\begin{aligned}&2\epsilon_T(\mathbf{v})=\pi\partial_m\mathbf{v}_T\pi+\overline{\pi\partial_m\mathbf{v}_T\pi}+2v_\nu\partial_m\nu,\\&2\epsilon_S(\mathbf{v})=\partial_\nu\mathbf{v}_T+\overline{\partial_m v_\nu}-(\partial_m\nu)\mathbf{v}_T,\qquad \epsilon_\nu(\mathbf{v})=\partial_\nu v_\nu\end{aligned} \tag{1.2}$$

et

$$\sigma(\mathbf{v})=\sigma_T(\mathbf{v})+\nu\overline{\sigma_S}(\mathbf{v})+\sigma_S(\mathbf{v})\bar{\nu}+\sigma_\nu(\mathbf{v})\nu\bar{\nu} \tag{1.3}$$

avec

$$\begin{aligned}&\sigma_T(\mathbf{v})=2\mu\epsilon_T(\mathbf{v})+\lambda(tr(\epsilon_T(\mathbf{v}))+\epsilon_\nu(\mathbf{v}))i_2,\qquad \sigma_S(\mathbf{v})=2\mu\epsilon_S(\mathbf{v}),\\&\sigma_\nu(\mathbf{v})\;=2\mu\epsilon_\nu(\mathbf{v})+\lambda(tr(\epsilon_T(\mathbf{v}))+\epsilon_\nu(\mathbf{v}))\end{aligned} \tag{1.4}$$

où la barre désigne le transposé d'un vecteur, d'un endomorphisme etc., $i_2$ est l'identité du plan tangent et "tr" symbolise la trace.

On pose :

$$\sigma_T^0(\mathbf{v})=2\mu\epsilon_T^0(\mathbf{v})+\lambda^*\mathrm{tr}(\epsilon_T^0(\mathbf{v}))i_2 \text{ avec } \lambda^*=(2\lambda\mu)(\lambda+2\mu)^{-1} \text{ et } \epsilon_T^0(\mathbf{v})=\epsilon_T(\mathbf{v}).$$

On désignera par $\Delta_T$ le laplacien tangentiel.

Nous allons examiner chacun des problèmes étudiés.

**Stabilisation forte par un feedback non linéaire**

On considère deux fonctions non négatives $a,l\in C^1(\Gamma_1)$ avec $a>0$ sur $\Gamma_1$ lorsque $\mathrm{mes}(\Gamma_0)=0$ et trois fonctions continues non décroissantes $g_1,g_2,g_3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ nulles en zéro ; on pose $\mathbf{g}(x_1,x_2,x_3)=g_1(x_1),g_2(x_2),$ $g_3(x_3))$ et on suppose que $|\mathbf{g}(\mathbf{x})|\le 1+\alpha|\mathbf{x}|^3$, pour tout $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$, avec $\alpha>0$. Le premier problème étudié est un problème avec conditions de Ventcel stationnaires :

$$\left\{\begin{array}{lll}\mathbf{u}''-\mathrm{div}\,\sigma(\mathbf{u})=0 & \text{dans} & \Omega\times\mathbb{R}^+,\\ \mathbf{u}=0 & \text{sur} & \Gamma_0\times\mathbb{R}^+,\\ \sigma_S(\mathbf{u})-\overline{\mathrm{div}_T\sigma_T^0(\mathbf{u})}+a\mathbf{u}_T+l\mathbf{g}_T(\mathbf{u}')=0 & \text{sur} & \Gamma_1\times\mathbb{R}^+,\\ \sigma_\nu(\mathbf{u})+\sigma_T^0(\mathbf{u})\;:\partial_m\nu+au_\nu+lg_\nu(\mathbf{u}')=0 & \text{sur} & \Gamma_1\times\mathbb{R}^+,\\ \mathbf{u}(0)=\mathbf{u}^0,\quad \mathbf{u}'(0)=\mathbf{u}^1 & \text{dans} & \Omega\end{array}\right. \tag{1.5}$$

où $\mathrm{div}_T$ désigne la divergence tangentielle, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_T(\mathbf{x}) + g_\nu(\mathbf{x})\nu$ et les deux points ( : ), symbolisent la trace du produit.

Les conditions de Ventcel stationnaires sont obtenues de la manière suivante : on désigne par $\Omega^\epsilon$ l'ouvert formé de la jonction d'un ouvert $\Omega$ et d'une coque mince $\Omega^\epsilon_-$ d'épaisseur $\epsilon$ posée sur une partie $\Gamma_1$ du bord de $\Omega$, l'autre partie $\Gamma_0$ étant encastrée. Le bord $\partial\Omega^\epsilon_-$ de $\Omega^\epsilon_-$ est égal à $\Gamma_1 \cup \Gamma^\epsilon_- \cup \Gamma^\epsilon$ où $\Gamma^\epsilon_-$ est le bord latéral de $\Omega^\epsilon_-$ ($\Gamma^\epsilon_- = \partial\Gamma_1 \times ]0,\epsilon[$). On suppose que les coefficients de Lamé sont égaux à $\lambda$ et $\mu$ dans $\Omega$ et à $\lambda_\epsilon$ et $\mu_\epsilon$ dans la coque $\Omega^\epsilon_-$ avec $(\epsilon\lambda_\epsilon, \epsilon\mu_\epsilon) \to (\lambda,\mu)$ lorsque $\epsilon$ tend vers 0. On dit que les coefficients de Lamé sont raides en $\frac{1}{\epsilon}$ dans la coque $\Omega^\epsilon_-$ qui s'appelle alors un raidisseur.

On suppose que le domaine $\Omega^\epsilon$ a une densité homogène égale à 1.

Considérons le problème de transmission pour le système isotrope et évolutif de l'élasticité suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{\epsilon''} - \mathrm{div}\,\sigma(\mathbf{u}^\epsilon) = \mathbf{f}^\epsilon & \text{dans} & \Omega^\epsilon \times (0,T), \\ \mathbf{u}^\epsilon = 0 & \text{sur} & (\Gamma_0 \cup \Gamma^\epsilon_-) \times (0,T), \\ \sigma(\mathbf{u}^\epsilon).\nu = 0 & \text{sur} & \Gamma^\epsilon \times (0,T), \\ [\mathbf{u}^\epsilon] = [\sigma(\mathbf{u}^\epsilon).\nu] = 0 & \text{sur} & \Gamma_1 \times (0,T), \\ \mathbf{u}^\epsilon(0) = \mathbf{u}^{\epsilon 0}, \quad \mathbf{u}^{\epsilon'}(0) = \mathbf{u}^{\epsilon 1} & \text{dans} & \Omega^\epsilon \end{cases} \qquad (\mathcal{P}_\epsilon)$$

([.] désigne le saut).

Un passage à la limite dans ($\mathcal{P}_\epsilon$ ) lorsque $\epsilon$ tend vers 0 conduit, sous des hypothèses convenables sur les données $\mathbf{f}^\epsilon$, $\mathbf{u}^{\epsilon 0}$ et $\mathbf{u}^{\epsilon 1}$, au problème évolutif de l'élasticité suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{u}'' - \mathrm{div}\,\sigma(\mathbf{u}) = \mathbf{f} & \text{dans} & \Omega \times (0,T), \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur} & \Gamma_0 \times (0,T), \\ \sigma_S(\mathbf{u}) - \overline{\mathrm{div}_T \sigma^0_T(\mathbf{u})} = 0 & \text{sur} & \Gamma_1 \times (0,T), \\ \sigma_\nu(\mathbf{u}) + \sigma^0_T(\mathbf{u}) \,:\, \partial_m \nu = 0 & \text{sur} & \Gamma_1 \times (0,T), \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \mathbf{u}'(0) = \mathbf{u}^1 & \text{dans} & \Omega. \end{cases} \qquad (\mathcal{P})$$

Les conditions sur $\Gamma_1 \times (0,T)$ sont les conditions de Ventcel *stationnaires*. Elles modélisent l'effet asymptotique du raidisseur $\Omega^\epsilon_-$ .

Soient $L^2(\Gamma_1, T(\Gamma_1))$ (resp. $H^1(\Gamma_1, T(\Gamma_1))$), l'espace des champs tangents $\mathbf{v}_T$ dont les composantes dans une base du plan tangent sont dans $L^2(\Gamma_1)$ (resp. $H^1(\Gamma_1)$) et

$$\mathbb{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{H}^1(\Omega) : \mathbf{v}_{|\Gamma_0} = 0, \mathbf{v}_{T|\Gamma_1} \in H^1(\Gamma_1, T(\Gamma_1))\}$$

muni de la norme : $\|\mathbf{v}\|_{\mathbb{V}} = \left(\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)} + \|\mathbf{v}_T\|^2_{H^1(\Gamma_1,T(\Gamma_1))}\right)^{\frac{1}{2}}$ ; cette norme est équivalente à la norme $\|.\|$ définie par (*cf.* Prop. 2.4) :

$$\|\mathbf{v}\| = \left(\int_\Omega \sigma(\mathbf{v}) \,:\, \epsilon(\mathbf{v})dx + \int_{\Gamma_1} (\sigma^0_T(\mathbf{v}) \,:\, \epsilon^0_T(\mathbf{v}) + a|\mathbf{v}|^2) d\Gamma\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On montre que si $(\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1) \in \mathbb{V} \times \mathbb{L}^2(\Omega)$, alors le problème (1.5) admet une solution (faible) unique $\mathbf{u} \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{V}) \cap C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{L}^2(\Omega))$ et que si $\mathbf{g}$ est globalement lipschitzienne alors pour des données initiales régulières et compatibles la solution est régulière. L'énergie de la solution $\mathbf{u}$ est définie par :

$$E(\mathbf{u},t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\sigma(\mathbf{u}) \,:\, \epsilon(\mathbf{u}) + |\mathbf{u}'|^2\right) dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} \left(\sigma^0_T(\mathbf{u}) \,:\, \epsilon^0_T(\mathbf{u}) + a|\mathbf{u}|^2\right) d\Gamma.$$

Le principe d'invariance de LaSalle [10, 21], et le théorème d'unicité de Holmgren ([15], p. 129, Th. 5.3.3) permettent de montrer le :

**Théorème 1.1.** *Si $l > 0$ sur $\Gamma_1$, $\mathbf{g}$ est globalement lipschitzienne et $\mathbf{g}(\mathbf{x}).\mathbf{x} > 0$ pour $\mathbf{x} \neq 0$ alors pour toute solution faible du problème (1.5), l'énergie décroit vers zéro lorsque $t$ tend vers $+\infty$.*

La décroissance exponentielle de l'énergie pour le problème (1.5) reste un problème ouvert.

**Décroissance exponentielle de l'énergie**

On suppose ici que $\Gamma$ est de classe $C^3$ (pour donner un sens au tenseur de courbure sur $\Gamma$ (*cf.* [14])) et mes$(\Gamma_0)> 0$. On considère le problème avec des conditions de type Ventcel évolutives suivant :

$$\left\{\begin{array}{lll} \mathbf{y}_1'' - \operatorname{div}\sigma(\mathbf{y}_1) = 0 & \text{dans} & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \mathbf{y}_1 = -\mathbf{u}_1 & \text{sur} & \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \mathbf{y}_{2T}'' + \sigma_S(\mathbf{y}_1) - \overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{y}_2)} = \mathbf{u}_{2T} & \text{sur} & \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ y_{2\nu}'' + \sigma_\nu(\mathbf{y}_1) + \sigma_T^0(\mathbf{y}_2)\ : \partial_m \nu - \Delta_T y_{2\nu} = u_{2\nu} & \text{sur} & \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ \mathbf{y}_1(0) = \mathbf{y}_1^0, \qquad \mathbf{y}_1'(0) = \mathbf{y}_1^1 & \text{dans} & \Omega, \\ \mathbf{y}_2(0) = \mathbf{y}_2^0, \qquad \mathbf{y}_2'(0) = \mathbf{y}_2^1 & \text{sur} & \Gamma_1. \end{array}\right. \tag{1.6}$$

On considère le problème de transmission $(\mathcal{P}_\epsilon)$ défini au point précédent avec cette fois un domaine $\Omega^\epsilon$ qui a une densité non homogène égale à 1 dans $\Omega$ et à $\frac{1}{\epsilon}$ dans $\Omega_-^\epsilon$. Le passage à la limite lorsque $\epsilon$ tend vers 0 conduit à un problème analogue au problème $(\mathcal{P})$ avec les conditions sur $\Gamma_1 \times (0,T)$ suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lll} \mathbf{u}_{2T}'' + \sigma_S(\mathbf{u}_1) - \overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{u}_2)} = \mathbf{g}_T & \text{sur} & \Gamma_1 \times (0,T), \\ u_{2\nu}'' + \sigma_\nu(\mathbf{u}_1) + \sigma_T^0(\mathbf{u}_2)\ : \partial_m \nu = g_\nu & \text{sur} & \Gamma_1 \times (0,T) \end{array}\right.$$

dites conditions de Ventcel évolutives ($\mathbf{u}_1$ est le déplacement et $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_{1|\Gamma_1}$). Ces conditions modélisent l'effet asymptotique du raidisseur $\Omega_-^\epsilon$ lorsque ce dernier est très dense.

On considère les espaces : $\mathbb{H} = \mathbb{L}^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_1; T(\Gamma_1)) \times L^2(\Gamma_1)$ et

$$\mathcal{W} = \{\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) : \quad \mathbf{v}_1 \in \mathbb{H}^1(\Omega), \quad \mathbf{v}_{1|\Gamma_0} = 0,\ \mathbf{v}_2 \in \mathbb{H}^1(\Gamma_1), \quad \mathbf{v}_{1|\Gamma_1} = \mathbf{v}_2\}$$

muni de la norme : $\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{W}} = \left(\|\mathbf{v}_1\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)} + \|\mathbf{v}_2\|^2_{\mathbb{H}^1(\Gamma_1)}\right)^{\frac{1}{2}}$, qui est équivalente à la norme :

$$|||\mathbf{v}|||_{\mathcal{W}} = \left(\int_\Omega \sigma(\mathbf{v}_1)\ : \epsilon(\mathbf{v}_1) dx + \int_{\Gamma_1} (\sigma_T^0(\mathbf{v}_2)\ : \epsilon_T^0(\mathbf{v}_2) + |\nabla_T v_{2\nu}|^2) d\Gamma\right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'énergie $E(\mathbf{y},t)$ associée à la solution $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$ est définie par :

$$E(\mathbf{y},t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\sigma(\mathbf{y}_1)\ : \epsilon(\mathbf{y}_1) + |\mathbf{y}_1'|^2\right) dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} \left(\sigma_T^0(\mathbf{y}_2)\ : \epsilon_T^0(\mathbf{y}_2) + |\nabla_T y_{2\nu}|^2 + |\mathbf{y}_2'|^2\right) d\Gamma$$

où $\nabla_T$ est le gradient tangentiel.

La méthode générale de stabilisation développée dans [17] permet de trouver un feedback frontière qui assure la décroissance exponentielle arbitrairement grande de l'énergie. De façon plus précise on montre, sous des conditions qui seront précisées plus loin, le résultat suivant :

**Théorème 1.2.** *Soit $\omega > 0$. Il existe deux opérateurs bornés :*

$$P : \mathcal{W}' \to \mathcal{W}, \quad \mathbf{v} \to (P_1\mathbf{v}, P_2\mathbf{v}), \qquad Q : \mathbb{H} \to \mathcal{W}, \quad \mathbf{w} \to (Q_1\mathbf{w}, Q_2\mathbf{w})$$

*et une constante $M > 0$ tels que si on pose :*

$$\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2), \quad \mathbf{y}^0 = (\mathbf{y}_1^0, \mathbf{y}_2^0), \quad \mathbf{y}^1 = (\mathbf{y}_1^1, \mathbf{y}_2^1), \qquad \mathbf{u}_2 = (P_2\mathbf{y}' + Q_2\mathbf{y})_{|\Gamma_1}$$
$$\mathbf{u}_1 = \mu(\partial_\nu(P_1\mathbf{y}' + Q_1\mathbf{y})_T)_{|\Gamma_0} + (2\mu+\lambda)(\partial_\nu(P_1\mathbf{y}' + Q_1\mathbf{y})_\nu)_{|\Gamma_0}\nu$$

*alors le problème (1.6) est bien posé dans $\mathbb{H} \times \mathcal{W}'$ et on a*

$$\|(\mathbf{y}, \mathbf{y}')\|_{\mathbb{H}\times\mathcal{W}'} \leq M\|(\mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1)\|_{\mathbb{H}\times\mathcal{W}'} e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall (\mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1) \in \mathbb{H} \times \mathcal{W}'. \tag{1.7}$$

La forme explicite du feedback $u = (u_1, u_2)$ est donnée en (4.47). Notons que Bourquin *et al.* ont développé une approximation numérique du feedback issu de la méthode générale développée par Komornik dans [17] (*cf.* [4]).

**Insuffisance du feedback naturel**

On montre au paragraphe 5, sur un cas particulier du problème (1.5), que le feedback *naturel* n'assure pas une dissipation suffisante de l'énergie pour permettre sa décroissance exponentielle.

On se place dans $\mathbb{R}^2$ avec $\Omega = (0,\pi)^2$, $\Gamma_0 = (\{0\}\times(0,\pi))\cup((0,\pi)\times\{0\})$ et $\Gamma_1 = (\{\pi\}\times(0,\pi))\cup((0,\pi)\times\{\pi\})$. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \partial_\nu u - \Delta_T u + u' = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1 & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{1.8}$$

On désigne par $\Omega^\epsilon$ l'ouvert formé d'un corps $\Omega$ de conductibilité thermique égale à 1 et d'une fine pellicule $\Omega_-^\epsilon$ d'épaisseur $\epsilon$ et de conductibilité thermique égale à $\frac{1}{\epsilon}$ posée sur son bord $\Gamma$. On considère un problème d'échange thermique entre $\Omega$ et la pellicule $\Omega_-^\epsilon$. Le passage à la limite lorsque $\epsilon$ tend vers 0 conduit à un problème de propagation de la chaleur posé dans $\Omega$ avec la condition :

$$\partial_\nu u - \Delta_T u = g \quad \text{sur} \quad \Gamma \tag{1.9}$$

dite condition de Ventcel (*cf.* [23]). En effet la condition (1.9) a été introduite par Ventcel pour des processus de diffusion (*cf.* [30]).

On note par $u^\epsilon$ la solution du problème de propagation de la chaleur posé dans $\Omega^\epsilon$. On écrit le développement asymptotique de $u^\epsilon$ sous la forme $u^\epsilon = u^0 + \epsilon u^1 + \epsilon^2 u^2 + \ldots$ ; on montre que $u^0$ est solution d'un problème de propagation de la chaleur posé dans $\Omega$ avec la condition de Ventcel (1.9) au bord de $\Omega$ (*cf.* [23]). La condition (1.9) modélise ainsi l'échange de chaleur entre le corps $\Omega$ et le milieu ambiant quand la frontière de $\Omega$ est recouverte d'une couche fine et très bonne conductrice.

Soit $V = \{v \in H^1(\Omega) : v_{|\Gamma_0} = 0, \ v_{|\Gamma_1} \in H^1(\Gamma_1)\}$ muni de la norme : $\|v\|_V = (\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \int_{\Gamma_1} |\nabla_T v|^2 d\Gamma)^{\frac{1}{2}}$ et $\tilde{\mathcal{A}}$ l'opérateur non borné de domaine :

$$\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{A}}) = \{(v,z) \in V \times V : \Delta v \in L^2(\Omega), \ \partial_\nu v - \Delta_T v + z = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$$

défini sur $V \times L^2(\Omega)$ par $\tilde{\mathcal{A}}(v,z) = (z, \Delta v)$ ; l'étude du spectre de $\tilde{\mathcal{A}}$ conduit au

**Théorème 1.3.** *Le sous-groupe engendré par $\tilde{\mathcal{A}}$ sur $V \times L^2(\Omega)$ n'est pas exponentiellement stable.*

Dans ce travail on adopte le plan suivant :

Au paragraphe 2 on donne quelques notations et quelques résultats préliminaires de géométrie intrinsèque pour les surfaces. Le paragraphe 3 est consacré à la démonstration du théorème 1.1. Au pragraphe 4 on établit une identité qui permet de montrer le théorème 1.2. Au paragraphe 5 on démontre le théorème 1.3.

Dans toute la suite la lettre $C$ désignera une constante positive assez grande.

## 2. Notations et résultats préliminaires

On reprend les définitions et les notations données en introduction. La convention de l'indice répété est adoptée :

$$\mathrm{tr}(\tau) = \tau_{11} + \tau_{22} + ... = \tau_{ii},\ \mathbf{v}.\mathbf{w} = v_i w_i,\ \sigma(\mathbf{v})\ : \epsilon(\mathbf{v}) = \sigma_{ij}(\mathbf{v})\epsilon_{ij}(\mathbf{v}).$$

Comme $\Gamma$ est de classe $C^2$, pour tout point $m$ de $\Gamma$ on peut trouver un $C^2$-difféomorphisme $\chi$ d'un ouvert $\hat{\Gamma}$ de $\mathbb{R}^2$ sur un voisinage ouvert de $m$ dans $\Gamma$. Les vecteurs $\mathbf{a}_\alpha = \partial\chi/\partial\xi^\alpha(\chi^{-1}(m))$, $\alpha \in \{1,2\}$ engendrent le plan $\mathrm{T}_m(\Gamma)$ tangent en $m$ à $\Gamma$. On note par $\mathrm{T}(\Gamma)$ le fibré tangent (*cf.* [23,29]). Soit $\mathcal{G}$ le tenseur métrique associé à $\chi$ de composantes : $g_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha.\mathbf{a}_\beta$, $\forall(\alpha,\beta) \in \{1,2\}^2$ et $(g^{\alpha\beta})_{1\leq\alpha,\beta\leq 2}$ son inverse. La base duale de $\{\mathbf{a}_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ est définie par : $\mathbf{a}^\alpha(m).\mathbf{a}_\beta(m) = \delta^\alpha_\beta$ (symbole de Kreonecker).

À un champ tangent $\mathbf{v}_T = v^\alpha\mathbf{a}_\alpha$ on associe, par le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$, la forme linéaire : $\overline{\mathbf{v}}_T = v_\alpha\mathbf{a}^\alpha$ avec $v_\alpha = g_{\alpha\beta}v^\beta$ ; comme $\partial_m\mathbf{v}_T = \frac{\partial\mathbf{v}_T}{\partial\chi^\alpha}\mathbf{a}^\alpha$ on obtient :

$$\pi\partial_m\mathbf{v}_T\pi = (v^\beta_{,\alpha} + \Gamma^\beta_{\alpha\lambda}v^\lambda)\mathbf{a}_\beta\mathbf{a}^\alpha$$

où $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ est le symbole de Cristoffel défini par : $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \mathbf{a}^\lambda\pi\mathbf{a}_{\alpha,\beta}$ $(,\alpha = \partial/\partial\xi^\alpha)$.

À un champ scalaire régulier $v$ défini sur $\overline{\Omega}$ on associe le champ de formes linéaires défini par :

$$(\partial_m v)(m) = v_{,\alpha}(m)\mathbf{a}^\alpha(m).$$

Le vecteur transposé de la forme $(\partial_m v)(m)$ est le gradient tangentiel noté :

$$(\nabla_T v)(m).$$

Au champ normal $\nu(m)$ on associe le champ d'endomorphismes du plan tangent $\partial_m\nu$ défini par : $\partial_m\nu = \nu_{,\alpha}\mathbf{a}^\alpha$.

### 2.1. Déformations et contraintes

Si $\mathbf{v} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ est un champ assez régulier on désigne par $\nabla$ son gradient ; on a sur $\Gamma$ (*cf.* [23,29]) :

$$\overline{\nabla\mathbf{v}} = \pi(\partial_m\mathbf{v}_T)\pi + v_\nu(\partial_m\nu) + (\partial_\nu\mathbf{v}_T)\bar{\nu} + \nu\left((\partial_m v_\nu) - \overline{\mathbf{v}_T}(\partial_m\nu) + (\partial_\nu v_\nu)\bar{\nu}\right). \tag{2.1}$$

Les relations (1.1–1.4) sont une conséquente directe de (2.1).

**Remarque 2.1.** Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ ; des formules (1.1–1.4) on obtient :

$$\begin{aligned}
&\epsilon(\mathbf{v}) : \epsilon(\mathbf{v}) = \epsilon_T(\mathbf{v}) : \epsilon_T(\mathbf{v}) + 2|\epsilon_S(\mathbf{v})|^2 + |\epsilon_\nu(\mathbf{v})|^2;\\
&\sigma(\mathbf{v}) : \epsilon(\mathbf{v}) = 2\mu\left(\epsilon_T(\mathbf{v}) : \epsilon_T(\mathbf{v}) + |\epsilon_\nu(\mathbf{v})|^2\right) + 4\mu|\epsilon_S(\mathbf{v})|^2 + \lambda\left(\mathrm{tr}(\epsilon_T(\mathbf{v})) + \epsilon_\nu(\mathbf{v})\right)^2.
\end{aligned}$$

On aura à considérer les espaces :

$\mathcal{L}_S(T_m(\Gamma))$ est l'espace des endomorphismes symétriques de $T_m(\Gamma)$.

$\mathcal{L}_S(T(\Gamma))$ est l'espace des opérateurs symétriques de $T(\Gamma)$ ; Un champ $\tau\ : \Gamma \to T(\Gamma)$ appartient à $\mathcal{L}_S(T(\Gamma))$ si $\tau(m)$ appartient à $\mathcal{L}_S(T_m(\Gamma))$ pour tout $m \in \Gamma$.

**Remarque 2.2.** L'endomorphisme $(\partial_m\nu)$ est un élément de $\mathcal{L}_S(T_m(\Gamma))$ ; ses valeurs propres sont les courbures principales de $\Gamma$ en $m$.

### 2.2. Quelques espaces fonctionnels

Soit $\mathbf{v}_T : \Gamma \to T(\Gamma)$, $\mathbf{v}_T(m) = v^\alpha(m)\mathbf{a}_\alpha(m)$ un champ tangent ; on munit $L^2(\Gamma, T(\Gamma))$ de la norme : $\|\mathbf{v}_T\|_{L^2(\Gamma,T(\Gamma))} = \left(\int_\Gamma |\mathbf{v}_T|^2 d\Gamma\right)^{\frac{1}{2}}$ qui est équivalente à la norme : $\mathbf{v}_T \to \left(\|v^1\|^2_{L^2(\Gamma)} + \|v^2\|^2_{L^2(\Gamma)}\right)^{\frac{1}{2}}$. On munit

$H^1(\Gamma, T(\Gamma))$ de la norme :

$$\|\mathbf{v}_T\|_{H^1(\Gamma,T(\Gamma))} = \left(\|v^1\|^2_{H^1(\Gamma)} + \|v^2\|^2_{H^1(\Gamma)}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.2}$$

Un champ $\tau_T : \Gamma \to \mathcal{L}_S(T(\Gamma))$ appartient à $L^2(\Gamma, \mathcal{L}_S(T(\Gamma)))$ si $(\tau_T : \tau_T)^{\frac{1}{2}} : \Gamma \to \mathbb{R}$ appartient à $L^2(\Gamma)$ ; on pose :

$$\|\tau_T\|_{L^2(\Gamma,\mathcal{L}_S(T(\Gamma)))} = \|\,(\tau_T : \tau_T)^{\frac{1}{2}}\,\|_{L^2(\Gamma)}.$$

**Remarque 2.3.** Si $\mathbf{v}_T \in H^1(\Gamma, T(\Gamma))$, alors : $\epsilon_T(\mathbf{v}_T) \in L^2(\Gamma, \mathcal{L}_S(T(\Gamma)))$.

**Proposition 2.1.** *L'expression suivante définit une norme sur $H^1(\Gamma, T(\Gamma))$ équivalente à la norme définie en (2.2) :*

$$\|\mathbf{v}_T\|^1_{H^1(\Gamma,T(\Gamma))} = \left(\int_\Gamma \left(|\mathbf{v}_T|^2 + \epsilon_T(\mathbf{v}_T) : \epsilon_T(\mathbf{v}_T)\right) d\Gamma\right)^{\frac{1}{2}}.$$

*Preuve.* Il suffit de prouver l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$\|\ \mathbf{v}_T\ \|_{H^1(\Gamma,T(\Gamma))} \leq C\|\mathbf{v}_T\|^1_{H^1(\Gamma,T(\Gamma))}, \quad \forall \mathbf{v}_T \in H^1(\Gamma, T(\Gamma)).$$

S'il n'en était pas ainsi, il existerait une suite $\{\mathbf{v}_T^k\} \subset H^1(\Gamma, T(\Gamma))$ vérifiant :

$$\begin{aligned} &\|\ \mathbf{v}_T^k\ \|_{H^1(\Gamma,T(\Gamma))} = 1,\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{v}_T^k \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(\Gamma, T(\Gamma)),\\ &\epsilon_T(\mathbf{v}_T^k) \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(\Gamma, L_S(T(\Gamma))).\end{aligned}$$

On pose : $\mathbf{v}_T^k = v_T^{k1}\mathbf{a}_1 + v_T^{k2}\mathbf{a}_2$ ; les expressions de $\pi\partial_m \mathbf{v}_T\pi$ et du conjugué d'un vecteur donnés au début de ce paragraphe montrent que : $\overline{\pi\partial_m \mathbf{v}_T\pi} = \left(v^{k\mu}_{,\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda r} v^{kr}\right) g^{\lambda\alpha} g_{\mu\beta}\mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}^\beta$, d'où : $\left(v^{k\alpha}_{,\beta} + g^{\lambda\alpha} g_{\beta\mu} v^{k\mu}_{,\lambda}\right) \to 0$ dans $L^2(\Gamma)$. En prenant $\alpha = \beta$, on obtient : $v^{k1}_{,1} + v^{k2}_{,2} \to 0$ dans $L^2(\Gamma)$.

On a : $g_{\alpha\eta}\left(v^{k\alpha}_{,\beta} + g^{\lambda\alpha} g_{\beta\mu} v^{k\mu}_{,\lambda}\right) = g_{\alpha\eta} v^{k\alpha}_{,\beta} + g_{\beta\mu} v^{k\mu}_{,\eta} \to 0$ dans $L^2(\Gamma)$.

En prenant $(\beta, \eta) = (1, 1)$, $(\beta, \eta) = (2, 2)$ et $(\beta, \eta) = (1, 2)$ on obtient les limites suivantes dans $L^2(\Gamma)$ : $(g_{11}v^{k1}_{,1} + g_{21}v^{k2}_{,1}), \to 0$, $(g_{22}v^{k2}_{,2} + g_{21}v^{k1}_{,2}) \to 0$, $(g_{11}v^{k1}_{,2} + g_{22}v^{k2}_{,1} \to 0$. Posons : $\mathbf{w}_T^k = \mathcal{G}\mathbf{v}_T^k = w^{k1}\mathbf{a}_1 + w^{k2}\mathbf{a}_2$. De $\mathbf{v}_T^k \to 0$ dans $L^2(\Gamma, T(\Gamma))$ et des limites précédentes on déduit que les suites $(w^{k1})$, $(w^{k2})$, $(w^{k1}_{,1})$, $(w^{k2}_{,2})$, $(w^{k2}_{,1} + w^{k1}_{,2})$ tendent vers 0 dans $L^2(\Gamma)$. L'inégalitée de Korn dans l'ouvert $\hat{\Gamma}$ montre alors que $(w^{k1}, w^{k2}) \to 0$ dans $H^1(\Gamma) \times H^1(\Gamma)$. D'où $(v^{k1}, v^{k2}) \to 0$ dans $H^1(\Gamma) \times H^1(\Gamma)$ ce qui contredit la définition de la suite $\{\mathbf{v}_T^k\}$.

**Proposition 2.2.** *L'application : $\mathbf{v}_T \hookrightarrow \mathbf{v}_T - \overline{\mathrm{div}_T\sigma^0_T(\mathbf{v}_T)}$ est un isomorphisme de $H^1(\Gamma_1, T(\Gamma_1))$ sur $H^{-1}(\Gamma_1, T(\Gamma_1))$ ; de plus si $\mathbf{v}_T - \overline{\mathrm{div}_T\sigma^0_T(\mathbf{v}_T)} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1, T(\Gamma_1))$ alors $\mathbf{v}_T \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1, T(\Gamma_1))$ et :*

$$\|\mathbf{v}_T\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1,T(\Gamma_1))} \leq C\|\mathbf{v}_T - \overline{\mathrm{div}_T\sigma^0_T(\mathbf{v}_T)}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1,T(\Gamma_1))}.$$

*Preuve.* La forme bilinéaire :

$$\mathcal{B}\ : (\mathbf{v}_T, \mathbf{w}_T) \hookrightarrow \int_{\Gamma_1} \left(\mathbf{v}_T.\mathbf{w}_T + \sigma^0_T(\mathbf{v}_T)\ : \epsilon^0_T(\mathbf{w}_T)\right) d\Gamma$$

est continue et coercive sur $H^1(\Gamma_1, T(\Gamma_1)) = (H^1_0(\Gamma_1, T(\Gamma_1)))$ d'après la proposition 2.1 ; alors pour tout $f \in H^{-1}(\Gamma_1, T(\Gamma_1))$ il existe $\mathbf{v}_T \in H^1(\Gamma_1, T(\Gamma_1))$ unique tel que : $\mathcal{B}(\mathbf{v}_T, \mathbf{w}_T) = (f, \mathbf{w}_T)$, $\quad \forall \mathbf{w}_T \in H^1(\Gamma_1, T(\Gamma_1))$ avec :

$$C_2\|f\|_{H^{-1}(\Gamma_1,T(\Gamma_1))} \leq \|\mathbf{v}_T\|_{H^1(\Gamma_1,T(\Gamma_1))} \leq C_1\|f\|_{H^{-1}(\Gamma_1,T(\Gamma_1))}$$

ce qui démontre la première partie de la proposition. Pour la seconde partie nous avons : $\mathbf{v}_T \hookrightarrow \mathbf{v}_T - \overline{\mathrm{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{v}_T)}$ est un isomorphisme de $H^1(\Gamma_1, T(\Gamma_1))$ sur $H^{-1}(\Gamma_1, T(\Gamma_1))$. L'opérateur $\mathbf{v}_T \hookrightarrow \overline{\mathrm{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{v}_T)}$ étant elliptique, cette application est aussi un isomorphisme de $H^2(\Gamma_1, T(\Gamma_1))$ sur $L^2(\Gamma_1, T(\Gamma_1))$ et par interpollation on obtient un isomorphisme de $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1, T(\Gamma_1))$ sur $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1, T(\Gamma_1))$.

**Remarque 2.4.** Soit $\mathbb{H}^1(\mathrm{div}\sigma, \Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{H}^1(\Omega) : \mathrm{div}\,\sigma(\mathbf{v}) \in \mathbb{L}^2(\Omega)\}$ muni de la norme :

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbb{H}^1(\mathrm{div}\sigma,\Omega)} = \left(\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)} + \|\,\mathrm{div}\,\sigma(\mathbf{v})\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On peut définir une application continue :

$$\mathbb{H}^1(\mathrm{div}\sigma, \Omega) \to \mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad \mathbf{v} \to (\sigma(\mathbf{v}).\nu)_{|\Gamma})$$

et pour tout élément $\mathbf{w} \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ et tout élément $\mathbf{v} \in \mathbb{H}^1(\mathrm{div}\sigma, \Omega)$ on a :

$$(\sigma(\mathbf{v}).\nu, \mathbf{w})_{\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \int_\Omega (\mathbf{w}\mathrm{div}\sigma(\mathbf{v}) + \sigma(\mathbf{v})\ : \epsilon(\mathbf{w}))\,dx.$$

Soit $\mathbb{L}^2(\mathrm{div}\sigma, \Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{L}^2(\Omega) : \mathrm{div}\,\sigma(\mathbf{v}) \in \mathbb{L}^2(\Omega)\}$ muni de la norme :

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbb{L}^2(\mathrm{div}\sigma,\Omega)} = \left(\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\,\mathrm{div}\,\sigma(\mathbf{v})\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On peut définir une application continue :

$$\mathbb{L}^2(\mathrm{div}\sigma, \Omega) \to \mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \mathbb{H}^{-\frac{3}{2}}(\Gamma), \quad \mathbf{v} \to (\mathbf{v}_{|\Gamma}, (\sigma(\mathbf{v}).\nu)_{|\Gamma})$$

et pour tout élément $\mathbf{w} \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ et tout élément $\mathbf{v} \in \mathbb{L}^2(\mathrm{div}\sigma, \Omega)$ on a

$$(\mathbf{v}, \sigma(\mathbf{w}).\nu)_{\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} - (\sigma(\mathbf{v}).\nu, \mathbf{w})_{\mathbb{H}^{-\frac{3}{2}}(\Gamma),\mathbb{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma)} = \int_\Omega (\mathbf{v}\mathrm{div}\sigma(\mathbf{w}) - \mathbf{w}\mathrm{div}\sigma(\mathbf{v}))\,dx.$$

**Proposition 2.3.** *L'expression* $|||\ .\ |||_{\mathbb{V}}$ *définie par :*

$$|||\ \mathbf{v}\ |||_{\mathbb{V}} = \left(\int_\Omega (\sigma(\mathbf{v}) : \epsilon(\mathbf{v}) + |\ \mathbf{v}\ |^2)dx + \int_{\Gamma_1} \sigma_T^0(\mathbf{v}) : \epsilon_T^0(\mathbf{v})d\Gamma\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.3}$$

*est une norme sur* $\mathbb{V}$ *équivalente à* $\|\ .\ \|_{\mathbb{V}}$ *définie par :*

$$\|\ \mathbf{v}\ \|_{\mathbb{V}} = \left(\|\ \mathbf{v}\ \|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)} + \|\ \mathbf{v}_T\ \|^2_{H^1(\Gamma_1,T(\Gamma_1))}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

*Preuve.* On montre qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$\|\ \mathbf{v}\ \|_{\mathbb{V}} \leq C\ |||\ \mathbf{v}\ |||_{\mathbb{V}}, \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}.$$

Dans le cas contraire on aurait une suite $\{\mathbf{v}^k\} \subset \mathbb{V}$ qui vérifie :

$$\|\ \mathbf{v}^k\ \|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} + \|\ \mathbf{v}_T^k\ \|_{H^1(\Gamma_1,T(\Gamma_1))} = 1, \quad \text{et} \quad |||\ \mathbf{v}^k\ |||_{\mathbb{V}} \to 0.$$

De l'inégalité de Korn il vient : $\mathbf{v}^k \to 0$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$. Alors $\mathbf{v}_T^k \to 0$ dans $L^2(\Gamma_1, T(\Gamma_1))$ et $v_\nu^k \to 0$ dans $L^2(\Gamma_1)$ ce qui conjugué à : $\int_{\Gamma_1} \sigma_T^0(\mathbf{v}^k) : \epsilon_T^0(\mathbf{v}^k)d\Gamma \to 0$ donne : $\epsilon_T^0(\mathbf{v}_T^k) \to 0$ dans $L^2(\Gamma_1, L_S(T(\Gamma_1)))$. La proposition 2.1 montre que : $\mathbf{v}_T^k \to 0$ dans $H^1(\Gamma_1, T(\Gamma_1))$ ce qui joint à $\mathbf{v}^k \to 0$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$ donne une contradiction.

**Proposition 2.4.** *L'expression* $\|\,.\,\|$ *définie par :*

$$\| \mathbf{v} \| = \left( \int_\Omega \sigma(\mathbf{v}) : \epsilon(\mathbf{v}) dx + \int_{\Gamma_1} (\sigma_T^0(\mathbf{v}) \ : \epsilon_T^0(\mathbf{v}) + a|\mathbf{v}|^2) d\Gamma \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.4}$$

*est une norme sur* $\mathbb{V}$ *équivalente à* $\|.\|_{\mathbb{V}}$.

*Preuve.* Nous avons $\sigma_T^0(\mathbf{v}) = 2\mu\epsilon_T^0(\mathbf{v}) + \lambda^* \operatorname{tr}(\epsilon_T^0(\mathbf{v}))i_2$ et $\epsilon_T^0(\mathbf{v}) = \epsilon_T^0(\mathbf{v}_T) + v_\nu \partial_m \nu$ ; la proposition 2.1 donne : $\|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{v}\|_{\mathbb{V}}$ pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$.

L'équivalence se montre par l'absurde en utilisant les inégalités de Korn et de Poincaré si $a \equiv 0$.

Si $a \not\equiv 0$ on sait de [25] qu'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\int_\Omega |\ \nabla \mathbf{v}\ |^2\ dx\ \leq\ \delta \left( \int_\Omega \sigma(\mathbf{v}) : \epsilon(\mathbf{v}) dx + \int_\Gamma |\ \mathbf{v}\ |^2\ d\Gamma \right), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{H}^1(\Omega)$$

qui donne dans notre cas

$$\int_\Omega |\ \nabla \mathbf{v}\ |^2\ dx \leq \delta' \left( \int_\Omega \sigma(\mathbf{v}) \ : \epsilon(\mathbf{v}) dx + \int_{\Gamma_1} a\ |\ \mathbf{v}\ |^2\ d\Gamma \right), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}.$$

Ce qui montre que $\|.\|$ est bien une norme sur $\mathbb{V}$ ; l'équivalence se montre comme dans le cas $a \equiv 0$, en tenant compte de la compacité de l'injection de $\mathbb{H}^1(\Omega)$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

**Proposition 2.5.** *Soit* $\mathbf{u} \in \mathbb{H}^1(\Omega) \cap \mathbb{V}$ *avec* $\operatorname{div}\sigma(\mathbf{u}) \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, $\mathbf{u}_T \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1, T(\Gamma_1))$ *et* $\sigma_\nu(\mathbf{u}) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$. *Alors :* $\mathbf{u} \in \mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbb{V}$ *et :*

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} \leq C \left( \|\mathbf{u} - \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u})\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\mathbf{u}_T\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1, T(\Gamma_1))} + \|\sigma_\nu(\mathbf{u})\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \right).$$

*Preuve.* Il existe $\mathbf{v} \in \mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbb{V}$ tel que $\mathbf{v}_T = \mathbf{u}_T$, $\sigma_\nu(\mathbf{v}) = \sigma_\nu(\mathbf{u})$ et $\|\mathbf{v}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} \leq \|\mathbf{u}_T\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1, T(\Gamma_1))}$ $+ \|\sigma_\nu(\mathbf{u})\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}$ ; on pose : $\mathbf{u} = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \mathbf{v}$.

Soit $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ ; on a : $\mathbf{w}_T = 0, \sigma_\nu(\mathbf{w}))_{|\Gamma_1} = 0$ et $\operatorname{div}\sigma(\mathbf{w}) \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ ; alors : $\mathbf{w} \in \mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbb{V}$, et $\|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} \leq C\|\mathbf{w} - \operatorname{div} \sigma(\mathbf{w})\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ (*cf.* [28]), ce qui donne :

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} \leq \|\mathbf{v}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} + \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} \leq C \left( \|\mathbf{u} - \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u})\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\mathbf{u}_T\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1, T(\Gamma_1))} + \|\sigma_\nu(\mathbf{u})\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \right).$$

**Proposition 2.6.** *Soit* $\mathcal{Z} = \Big\{ \mathbf{u} \in \mathbb{V} \ : \operatorname{div}\sigma(\mathbf{u}) \in \mathbb{L}^2(\Omega), \sigma_S(\mathbf{u}) - \overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0}(\mathbf{u}) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1, T(\Gamma_1), \sigma_\nu(\mathbf{u})$ $+ \sigma_T^0(\mathbf{u}) : \partial_m \nu \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \Big\}$.

*On a :* $\mathcal{Z} \subset \mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbb{V}$ *et :*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} \leq C &\left( \|\mathbf{u} - \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u})\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\sigma_S(\mathbf{u}) - \overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0}(\mathbf{u})\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1, T(\Gamma_1))} \right) \\ &+ C\|\sigma_\nu(\mathbf{u}) + \sigma_T^0(\mathbf{u}) : \partial_m \nu\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{Z}. \end{aligned}$$

*Preuve.* Soit $\mathbf{u} \in \mathcal{Z}$ ; d'après la remarque 2.4, on a $\sigma_S(\mathbf{u}) \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1, T(\Gamma_1))$ ; de $\sigma_T^0(\mathbf{u}) = \sigma_T^0(\mathbf{u}_T) + 2\mu u_\nu \partial_m \nu$ $+ \lambda^* u_\nu \operatorname{tr}(\partial_m \nu) i_2$ il vient $\operatorname{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{u}) \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1, T(\Gamma_1))$ et donc $\mathbf{u}_T \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1, T(\Gamma_1))$ d'après la proposition 2.2 ; on a alors $\sigma_\nu(\mathbf{u}) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ et donc $\mathbf{u} \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ et (*cf.* Prop. 2.5) :

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} \leq C \left( \|\mathbf{u} - \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u})\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\mathbf{u}_T\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1, T(\Gamma_1))} + \|\sigma_\nu(\mathbf{u})\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \right).$$

Pour l'estimation, on suppose qu'elle n'est pas vérifiée ; nous aurons alors une suite $\{\mathbf{u}^k\} \subset \mathcal{Z}$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{lll} \|\mathbf{u}^k\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} = 1, \quad \mathbf{u}^k - \overline{\operatorname{div}\sigma}(\mathbf{u}^k) \longrightarrow 0 & \text{dans} & \mathbb{L}^2(\Omega), \\ \sigma_S(\mathbf{u}^k) - \overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0}(\mathbf{u}^k) \longrightarrow 0 & \text{dans} & H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1, T(\Gamma_1)), \\ \sigma_\nu(\mathbf{u}^k) + \sigma_T^0(\mathbf{u}^k) \ : \partial_m \nu \longrightarrow 0 & \text{dans} & H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1). \end{array}\right. \tag{2.5}$$

En posant : $\mathbf{f}_k = \mathbf{u}^k - \operatorname{div}\sigma(\mathbf{u}^k)$, $\mathbf{g}_T^k = \sigma_S(\mathbf{u}^k) - \overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0}(\mathbf{u}^k)$, $g_\nu^k = \sigma_\nu(\mathbf{u}^k) + \sigma_T^0(\mathbf{u}^k) \ : \partial_m \nu$ et $\mathbf{g}^k = \mathbf{g}_T^k + g_\nu^k \nu$ on obtient :

$$(\mathbf{u}^k, \mathbf{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \int_\Omega \sigma(\mathbf{u}^k) \ : \epsilon(\mathbf{v}) dx + \int_{\Gamma_1} \sigma_T^0(\mathbf{u}^k) \ : \epsilon_T^0(\mathbf{v}) d\Gamma = \int_\Omega \mathbf{f}_k \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_1} \mathbf{g}^k \mathbf{v} d\Gamma, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}. \tag{2.6}$$

Comme $\{\mathbf{u}^k\}$ est bornée dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$ on a : $\mathbf{u}^k \to \mathbf{u} \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ dans $\mathbb{H}^{2-s}(\Omega)$ fort, avec $0 < s < \frac{1}{2}$. On peut alors passer à la limite dans (2.6) ; on obtient :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \int_\Omega \sigma(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) dx + \int_{\Gamma_1} \sigma_T^0(\mathbf{u}) : \epsilon_T^0(\mathbf{v}) d\Gamma = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}. \tag{2.7}$$

En prenant $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ dans (2.7) on obtient $\mathbf{u} = 0$ ; il vient alors de (2.5) $\operatorname{div}\sigma(\mathbf{u}^k) \to 0$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$. De $\mathbf{u}^k \to 0$ et $\operatorname{div}\sigma(\mathbf{u}^k) \to 0$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ la remarque 2.4 donne : $\sigma(\mathbf{u}^k).\nu = \sigma_S(\mathbf{u}^k) + \sigma_\nu(\mathbf{u}^k)\nu \to 0$ dans $\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ ; de (2.5) on obtient alors $\overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0}(\mathbf{u}^k) \to 0$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1, T(\Gamma_1))$. Comme $\mathbf{u}^k_{|\Gamma_1} \to 0$ dans $\mathbb{H}^{\frac{3}{2}-s}(\Gamma_1)$, $(0 < s < \frac{1}{2})$, et $\sigma_T^0(\mathbf{u}^k) = \sigma_T^0(\mathbf{u}_T^k) + \sigma_T^0(u_\nu^k \nu) = \sigma_T^0(\mathbf{u}_T^k) + 2\mu u_\nu \partial_m \nu + \lambda^* u_\nu \operatorname{tr}(\partial_m \nu) i_2$ on obtient $\overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0}(\mathbf{u}_T^k) \to 0$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1, T(\Gamma_1))$ d'où $\mathbf{u}_T^k \to 0$ dans $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1, T(\Gamma_1))$ d'après la proposition 2.2.

De la dernière limite de (2.5) on obtient alors $\sigma_\nu(\mathbf{u}^k) \to 0$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$. La proposition 2.5 montre que $\mathbf{u}^k \to 0$ dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$ ce qui contredit la première relation de (2.5) et termine la démonstration.

## 3. Démonstration du théorème 1.1

On montre, par une application du principe de LaSalle (*cf.* [10, 21]) la stabilisation forte du problème (1.5). Notre démarche suit de près celle de [16]. Le problème (1.5) sécrit :

$$\left\{\begin{array}{l} (\mathbf{u}'', \mathbf{v}) + (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \int_{\Gamma_1} l\mathbf{g}(\mathbf{u}').\mathbf{v} d\Gamma = 0, \ \ \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V} \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \mathbf{u}'(0) = \mathbf{u}^1 \end{array}\right. \tag{3.1}$$

où $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ désigne le produit scalaire associé à la norme $\|.\|$ définie à la proposition 2.4. Soit $\mathcal{A} : \ \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ l'opérateur linéaire, borné, défini par

$$(\mathcal{A}\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbb{V}', \mathbb{V}} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}), \ \ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}.$$

On pose :

$$(\mathcal{B}\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbb{V}', \mathbb{V}} = \int_{\Gamma_1} l\mathbf{g}(\mathbf{u}).\mathbf{v} d\Gamma, \ \ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}. \tag{3.2}$$

Les propriétés de $\mathbf{g}$ permettent de montrer, comme dans [16], le

**Lemme 3.1.** *La relation (3.2) définit un opérateur continu $\mathcal{B} : \ \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ et il existe une constante positive $\beta$ telle que :*

$$\|\mathcal{B}\mathbf{u}\|_{\mathbb{V}'} \leq \beta(1 + \|\mathbf{u}\|^3), \ \ \forall \mathbf{u} \in \mathbb{V}. \tag{3.3}$$

On pose : $\mathcal{C}\mathbf{U} = (-\mathbf{u}_2, \mathcal{A}\mathbf{u}_1 + \mathcal{B}\mathbf{u}_2)$ avec $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ et

$$D(\mathcal{C}) = \left\{ \mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \mathbb{V} \times \mathbb{V} : \ \mathcal{A}\mathbf{u}_1 + \mathcal{B}\mathbf{u}_2 \in \mathbb{L}^2(\Omega) \right\} \cdot \tag{3.4}$$

Le problème (3.1) s'écrit : $\mathbf{U}' + \mathcal{C}\mathbf{U} = 0$ dans $\mathbb{R}^+, \mathbf{U}(0) = \mathbf{U}^0 = (\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1)$.

**Proposition 3.1.** *$\mathcal{C}$ est maximal monotone sur $\mathbb{V} \times \mathbb{L}^2(\Omega)$.*

*Preuve.* On vérifie aisément que $\mathcal{C}$ est monotone. Il suffit alors de montrer que l'opérateur : $I + \mathcal{A} + \mathcal{B} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ est surjectif ($I$ = identité).

Soit $f \in \mathbb{V}'$ ; on pose : $G(t_1, t_2, t_3) = \int_0^{t_1} lg_1(s)ds + \int_0^{t_2} lg_2(s)ds + \int_0^{t_3} lg_3(s)ds$ puis on considère l'application $F : \ \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$F(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\mathbf{u}\|^2) + \int_{\Gamma_1} G(\mathbf{u})d\Gamma \ - (f, \mathbf{u})_{\mathbb{V}'.\mathbb{V}}.$$

*F est bien définie.* On montre que si $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ alors $G(\mathbf{u}) \in L^1(\Gamma_1)$ ; soit $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ; on a $G(\mathbf{u}) = \Sigma_{j=1}^{j=3} \int_0^{u_j} lg_j(s)ds$ ; comme $l \in C^1(\Gamma_1)$ on déduit des propriétés de $\mathbf{g}$ l'exitence de $\delta > 0$ tel que $|G(\mathbf{u})| \leq \delta \Sigma_{j=1}^{j=3}(|u_j| + |u_j|^4)$. De $u_{j|\Gamma_1} \in L^2(\Gamma_1) \subset L^1(\Gamma_1)$ et $u_{j|\Gamma_1} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \subset L^4(\Gamma_1)$ il vient $G(u) \in L^1(\Gamma_1)$.

La continuité de $\mathbf{g}$ montre que $F$ est continument différentiable et

$$F'(\mathbf{u}).\mathbf{v} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \int_{\Gamma_1} l\mathbf{g}(\mathbf{u}).\mathbf{v} d\Gamma \ - (f, \mathbf{u})_{\mathbb{V}',\mathbb{V}} = ((I + \mathcal{A} + \mathcal{B})\mathbf{u} - f, \mathbf{v})_{\mathbb{V}',\mathbb{V}}. \tag{3.5}$$

La convexité de $F$ découle de la monotonie de $\mathbf{g}$. La coercivité étant immédiate, il s'ensuit que $F$ possède un minimum en un point $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ ; alors $F'(\mathbf{u}) = 0$ et (3.5) donne $(I + \mathcal{A} + \mathcal{B})\mathbf{u} = f$.

**Proposition 3.2.** *On a*

$$\begin{aligned} D(\mathcal{C}) = \Big\{ &(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \mathbb{V} \times \mathbb{V} : \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}_1) \in \mathbb{L}^2(\Omega) \\ &\sigma_S(\mathbf{u}_1) - \overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{u}_1)} + a\mathbf{u}_{1T} + l\mathbf{g}_T(\mathbf{u}_2) = 0, \ \ sur \ \Gamma_1, \\ &\sigma_\nu(\mathbf{u}_1) + \sigma_T^0(\mathbf{u}_1) : \partial_m \nu + a\mathbf{u}_{1\nu} + lg_\nu(\mathbf{u}_2) = 0, \ \ sur \ \Gamma_1 \Big\} \cdot \end{aligned} \tag{3.6}$$

*Preuve.* Soit $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in D(\mathcal{C})$ ; on a $\mathcal{A}\mathbf{u}_1 + \mathcal{B}\mathbf{u}_2 \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ ; or

$$(\mathcal{A}\mathbf{u}_1 + \mathcal{B}\mathbf{u}_2, \mathbf{v})_{\mathbb{V}',\mathbb{V}} = \int_\Omega \sigma(\mathbf{u}_1) : \epsilon(\mathbf{v})dx + \int_{\Gamma_1} \sigma_T^0(\mathbf{u}_1) \ : \epsilon_T^0(\mathbf{v})d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (a\mathbf{u}_1.\mathbf{v} + l\mathbf{g}(\mathbf{u}_2).\mathbf{v})\, d\Gamma.$$

Si on prend $\mathbf{v}$ dans $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ on obtient $-\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}_1) = \mathcal{A}\mathbf{u}_1 + \mathcal{B}\mathbf{u}_2 \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, $(\sigma_S(\mathbf{u}_1), \sigma_\nu(\mathbf{u}_1))$, est alors défini comme élément de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1, T(\Gamma_1)) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$. Pour $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ on a :

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}\mathbf{u}_1 + \mathcal{B}\mathbf{u}_2, \mathbf{v})_{\mathbb{V}',\mathbb{V}} = &- \int_\Omega \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}_1).\mathbf{v}dx + (\sigma(\mathbf{u}_1).\nu, \mathbf{v})_{\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1),\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \\ &- (\overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{u}_1)}, \mathbf{v}_T)_{H^{-1}(\Gamma_1,T(\Gamma_1)),H^1(\Gamma_1,T(\Gamma_1))} \\ &+ \int_{\Gamma_1} \big((\sigma_T^0(\mathbf{u}_1) : \partial_m \nu)v_\nu + a\mathbf{u}_1.\mathbf{v} + l\mathbf{g}(\mathbf{u}_2).\mathbf{v}\big)\, d\Gamma. \end{aligned}$$

Comme $-\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}_1) = \mathcal{A}\mathbf{u}_1 + \mathcal{B}\mathbf{u}_2$, on obtient le résultat voulu.

On montre, comme dans [16], les deux propositions suivantes :

**Proposition 3.3.** *$D(\mathcal{C})$ est dense dans $\mathcal{H} = \mathbb{V} \times \mathbb{L}^2(\Omega)$.*

**Proposition 3.4.** *Si $\mathbf{g}$ est continue, globalement lipschitzienne alors*

$$D(\mathcal{C}) = \Big\{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \mathbb{V} \times \mathbb{V} : \mathbf{u}_1 \in \mathbb{H}^2(\Omega),$$
$$\sigma_S(\mathbf{u}_1) - \overline{\mathrm{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{u}_1)} + a\mathbf{u}_{1T} + l\mathbf{g}_T(\mathbf{u}_2) = 0, \ \ sur \ \Gamma_1,$$
$$\sigma_\nu(\mathbf{u}_1) + \sigma_T^0(\mathbf{u}_1) : \partial_m \nu + au_{1\nu} + lg_\nu(\mathbf{u}_2) = 0, \ \ sur \ \Gamma_1\Big\}$$

*et la norme $|||.|||_{D(\mathcal{C})}$ définie sur $D(\mathcal{C})$ par :*

$$|||(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)|||_{D(\mathcal{C})} = \left(\|\mathbf{u}_1\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)} + \|\mathbf{u}_2\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

*est équivalente à la norme $\|.\|_{D(\mathcal{C})}$ définie par :*

$$\|(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)\|_{D(\mathcal{C})} = \left(\|\mathbf{u}_1\|^2 + \|\mathbf{u}_2\|^2 + \|\operatorname{div}\sigma(\mathbf{u}_1)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On pose :

$$E(\mathbf{u}, t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\sigma(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{u}) + |\mathbf{u}'|^2\right) dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} \left(\sigma_T^0(\mathbf{u}) : \epsilon_T^0(\mathbf{u}) + a|\mathbf{u}|^2\right) d\Gamma.$$

Des propositions 3.1, 3.3 et 3.4 on déduit le théorème suivant (*cf.* [5,16]) :

**Théorème 3.1.** *(i) Soit $(\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1) \in \mathbb{V} \times \mathbb{L}^2(\Omega)$ ; alors le problème (1.5) admet une solution unique $\mathbf{u}$ vérifiant :*

$$\mathbf{u} \in C(\mathbb{R}^+; \mathbb{V}) \cap C^1(\mathbb{R}^+; \mathbb{L}^2(\Omega)).$$

*Si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont deux solutions du problème (1.5) alors la fonction $t \to E(\mathbf{u} - \mathbf{v}, t)$ est non décroissante ; en particulier on a :*

$$\|E(\mathbf{u} - \mathbf{v}, .)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \le E(\mathbf{u} - \mathbf{v})(0).$$

*(ii) Si $\mathbf{g}$ est globalement lipschitzienne et $(\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1) \in D(\mathcal{C})$ alors la solution $\mathbf{u}$ du problème (1.5) vérifie :*

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{u}'') \in L^\infty\left(\mathbb{R}^+, \mathbb{H}^2(\Omega) \times \mathbb{V} \times \mathbb{L}^2(\Omega)\right).$$

*De plus la fonction : $t \to \|\mathbf{u}'(t)\|^2_{\mathbb{V}} + \|\operatorname{div}\sigma(\mathbf{u})\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ est définie p.p. et est non croissante sur $\mathbb{R}^+$.*

**Démonstration du théorème 1.1**

On montre, par un calcul classique, que l'énergie est décroissante et que l'on a :

$$E(S) - E(T) = \int_S^T \int_{\Gamma_1} l\mathbf{g}(\mathbf{u}')\mathbf{u}' d\Gamma, \quad 0 \le S < T < +\infty.$$

Comme $D(\mathcal{C})$ est dense dans $\mathcal{H} = \mathbb{V} \times \mathbb{L}^2(\Omega)$ et l'énergie continue par rapport aux données initiales, on peut supposer que $(\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1) \in D(\mathcal{C})$.

D'après la proposition 3.4 et le point (ii) du théorème 3.1 l'ensemble $\{(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}'(t));\ t \in \mathbb{R}^+\}$ est borné dans $(\mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbb{V}) \times \mathbb{V}$ ; la compacité de l'injection $(\mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbb{V}) \times \mathbb{V} \to \mathcal{H}$ montre que cet ensemble est précompact dans $\mathcal{H}$. Pour montrer que $E(\mathbf{u}, t) \longrightarrow 0$ il suffit de prouver, d'après le principe d'invariance de LaSalle (*cf.* [10, 21]), que si pour une suite $(t_k)$ croissante vers $\infty$, $(\mathbf{u}(t_k), \mathbf{u}'(t_k))$ converge dans $\mathcal{H}$ vers un élément $(z^0, z^1)$ alors $z^0 = z^1 = 0$.

Soit $(t_k)$ une suite de nombres réels croissante vers $+\infty$ et telle que $\mathbf{U}(t_k) = (\mathbf{u}(t_k), \mathbf{u}'(t_k))$ converge dans $\mathcal{H}$ vers un élément $(z^0, z^1)$.

On pose : $z_k(t) = \mathbf{u}(t_k + t)$ ; $z_k$ est solution du problème (1.5) avec la donnée de Cauchy $(\mathbf{u}(t_k), \mathbf{u}'(t_k))$ ; d'après le point (i) du thórème 3.1 la suite $(z_k, z_k')$ est précompacte dans $L^\infty(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$ ; soit alors une sous-suite notée encore $(z_k, z_k')$ qui converge dans $L^\infty(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$ vers un élément $(z, z')$ où $z$ est la solution du problème (1.5) avec la donnée de Cauchy $(z^0, z^1)$ ; on montre que $z \equiv 0$ dans $\Omega \times \mathbb{R}^+$. $E(z,t)$ est constante en effet :

$$E(z,t) = \lim_{k\to+\infty} E(z_k, t) = \lim_{k\to+\infty} E(\mathbf{u}, t_k + t) = \lim_{s\to+\infty} E(\mathbf{u}, s).$$

La dernière limite existe car l'énergie est non croissante ; on a alors :

$$\int_S^T \int_{\Gamma_1} l z'(t)\mathbf{g}(z'(t))d\Gamma dt = 0, \quad 0 \leq S < T < +\infty.$$

En tenant compte des hypothèses faites sur $l$ et $\mathbf{g}$ on obtient $z' \equiv 0$ sur $\Gamma_1 \times \mathbb{R}^+$.

Posons $\mathbf{w} = z'$ ; comme $\mathbf{w} = 0$ sur $\Gamma_1$ alors $\sigma_T^0(\mathbf{w}) = 0$ sur $\Gamma_1$ ; comme $\sigma(\mathbf{w}).\nu = \sigma_S(\mathbf{w}) + \sigma_\nu(\mathbf{w})\nu$, $\mathbf{w}$ est solution du problème :

$$\left\{\begin{array}{lll} \mathbf{w}'' - \operatorname{div}\sigma(\mathbf{w}) = 0 & \text{dans} & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \mathbf{w} = 0, & \text{sur} & \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \sigma(\mathbf{w}).\nu = 0 & \text{sur} & \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ \mathbf{w} = 0, & \text{sur} & \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+. \end{array}\right. \tag{3.7}$$

D'après le théorème de Holmgren ([15], p. 129, Th. 5.3.3)) $\mathbf{w}$ est nulle dans $\Omega \times \mathbb{R}^+$ ; $z$ est alors une constante du temps : $z(t,x) = z(x) = z^0(x)$ avec $z^0$ solution de :

$$\left\{\begin{array}{ll} -\operatorname{div}\sigma(z^0) = 0 & \text{dans } \ \Omega, \\ z^0 = 0 & \text{sur } \ \Gamma_0, \\ \sigma_S(z^0) - \overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(z^0)} + a z_T^0 = 0 & \text{sur } \ \Gamma_1, \\ \sigma_\nu(z^0) + \sigma_T^0(z^0) : \partial_m \nu + a z_\nu^0 = 0 & \text{sur } \ \Gamma_1. \end{array}\right. \tag{3.8}$$

On multiplie la première équation de (3.8) par $z^0$ puis on intègre dans $\Omega$ ; on obtient :

$$\int_\Omega \sigma(z^0) \ : \epsilon(z^0)dx + \int_{\Gamma_1} \left(\sigma_T^0(z^0) \ : \epsilon_T^0(z^0) + a|z^0|^2\right) d\Gamma = 0$$

d'où $z^0 \equiv 0$, et $\lim_{t\to+\infty} E(\mathbf{u}, t) = 0$.

## 4. Démonstration du théorème 1.2

### 4.1. **Le problème de Ventcel**

#### 4.1.1. *Densité et régularité*

L'inégalité de Korn et la proposition 2.1 permettent de montrer que les normes $\|.\|_{\mathcal{W}}$ et $|||.|||_{\mathcal{W}}$ définies dans l'introduction sur $\mathcal{W}$ sont équivalentes. Dans ce paragraphe $\mathcal{W}$ sera muni de la norme $|||.|||_{\mathcal{W}}$ et du produit scalaire associé : $(.,.)_{\mathcal{W}}$. On considère le système de l'élasticité linéaire avec des conditions de type Ventcel évolutives sur une partie du bord, l'autre partie étant fixe :

$$\begin{cases} \varphi_1'' - \operatorname{div}\sigma(\varphi_1) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \varphi_1 = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \varphi_{2T}'' + \sigma_S(\varphi_1) - \overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(\varphi_2)} = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ \varphi_{2\nu}'' + \sigma_\nu(\varphi_1) + \sigma_T^0(\varphi_2) : \partial_m \nu - \Delta_T \varphi_{2\nu} = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ \varphi_1(0) = \varphi_1^0, \qquad \varphi_1'(0) = \varphi_1^1 & \text{dans} \quad \Omega, \\ \varphi_2(0) = \varphi_2^0, \qquad \varphi_2'(0) = \varphi_2^1 & \text{sur} \quad \Gamma_1. \end{cases} \tag{4.1}$$

On pose : $\varphi^0 = (\varphi_1^0, \varphi_2^0)$, $\varphi^1 = (\varphi_1^1, \varphi_2^1)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$. La formulation variationnelle du problème (4.1) est :

$$\begin{cases} (\varphi'', \mathbf{v}) + (\varphi, \mathbf{v})_{\mathcal{W}} = 0, \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{W} \\ \varphi(0) = \varphi^0, \quad \varphi'(0) = \varphi^1. \end{cases} \tag{4.2}$$

Soit $\tilde{\mathcal{A}} : \mathcal{W} \to \mathcal{W}'$ l'opérateur borné associé à la forme $(.,.)_{\mathcal{W}}$ et $\mathcal{A} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ l'opérateur non borné de domaine $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{\mathbf{v} \in \mathcal{W} : \tilde{\mathcal{A}}\mathbf{v} \in \mathbb{H}\}$ défini par :

$$\mathcal{A}\mathbf{u} = \tilde{\mathcal{A}}\mathbf{u} \; ; \quad \text{on a} \quad (\mathcal{A}\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbb{H}} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathcal{W}}, \quad \forall \mathbf{u} \in D(\mathcal{A}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{W}. \tag{4.3}$$

Soit $\mathcal{K} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{H}^1(\Omega) : \mathbf{v}_{|\Gamma_0} = 0 \; ; \; \mathbf{v}_{|\Gamma_1} \in \mathbb{H}^1(\Gamma_1)\}$ muni de la norme :

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{K}} = \left( \int_\Omega \sigma(\mathbf{v}) : \epsilon(\mathbf{v}) dx + \int_{\Gamma_1} \left( \sigma_T^0(\mathbf{v}) : \epsilon_T^0(\mathbf{v}) + |\nabla_T v_\nu|^2 \right) d\Gamma \right)^{\frac{1}{2}}.$$

La densité de $\mathcal{D}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ conduit aisément au

**Lemme 4.1.** $\big(\mathcal{D}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}(\Gamma_1, \mathbb{R}^3)\big) \cap \mathcal{W}$ *est dense dans* $\mathcal{W}$.

**Proposition 4.1.** *On a*

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \Big\{ \mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathcal{W} : \operatorname{div}\sigma(\mathbf{v}_1) \in \mathbb{L}^2(\Omega), \sigma_S(\mathbf{v}_1) - \overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{v}_2)} \in \mathbb{L}^2(\Gamma_1),$$

$$\sigma_\nu(\mathbf{v}_1) + \sigma_T^0(\mathbf{v}_2) : \partial_m \nu - \Delta_T v_{2\nu} \in L^2(\Gamma_1) \Big\}.$$

*Preuve.* Soit $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ ; on pose $\mathcal{A}\mathbf{u} = (\mathcal{A}_1\mathbf{u}, \mathcal{A}_2\mathbf{u})$ avec $\mathcal{A}_1\mathbf{u} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ et $\mathcal{A}_2\mathbf{u} \in \mathbb{L}^2(\Gamma_1)$.

En prenant $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, 0)$ avec $\mathbf{v}_1 \in \mathcal{D}(\Omega)$ dans (4.3) on obtient : $\mathcal{A}_1\mathbf{u} = -\operatorname{div}\sigma(\mathbf{u}_1)$. Comme $\mathbf{u}_1 \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ et $\operatorname{div}\sigma(\mathbf{u}_1) \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ alors, d'après la remarque 2.4, $\sigma(\mathbf{u}_1).\nu = (\sigma_S(\mathbf{u}_1), \sigma_\nu(\mathbf{u}_1))$ est défini comme élément de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1, T(\Gamma_1)) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ et on a :

$$(\sigma(\mathbf{u}_1).\nu, \mathbf{v}_1) = \int_\Omega (\mathbf{v}_1 \operatorname{div}\sigma(\mathbf{u}_1) + \sigma(\mathbf{u}_1) \; : \epsilon(\mathbf{v}_1))\, dx, \quad \forall \mathbf{v}_1 \in \mathbb{H}^1(\Omega).$$

D'autre part $(\mathcal{A}\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbb{H}} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathcal{W}}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mathbf{v}_1 \mathcal{A}_1 \mathbf{u}\, dx + \int_{\Gamma_1} \mathbf{v}_2 \mathcal{A}_2 \mathbf{u}\, d\Gamma \quad = \quad & -\int_\Omega \mathbf{v}_1 \operatorname{div}\sigma(\mathbf{u}_1) dx + (\sigma(\mathbf{u}_1).\nu, \mathbf{v}_2) \\ & -(\overline{\operatorname{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{u}_2)}, \mathbf{v}_{2T})_{H^{-1}(\Gamma_1, T(\Gamma_1)), H^1(\Gamma_1, T(\Gamma_1))} \\ & + \int_{\Gamma_1} \mathbf{v}_{2\nu} (\sigma_T^0(\mathbf{u}_2) : \partial_m \nu) d\Gamma - (\Delta_T u_{2\nu}, \mathbf{v}_{2\nu})_{H^{-1}(\Gamma_1), H^1(\Gamma_1)}. \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{2T}\mathbf{u} = \sigma_S(\mathbf{u}_1) - \overline{\mathrm{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{u}_2)} \in L^2(\Gamma_1; T(\Gamma_1)) \\ \mathcal{A}_{2\nu}\mathbf{u} = \sigma_\nu(\mathbf{u}_1) + \sigma_T^0(\mathbf{u}_2) : \partial_m \nu - \Delta_T \mathbf{u}_{2\nu} \in L^2(\Gamma_1) \end{cases}$$

ce qui achève la démonstration.

On munit $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ de la norme :

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} \quad = \quad & \Big( \|\mathbf{v}_1\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)} + \|\mathbf{v}_2\|^2_{\mathbb{H}^1(\Gamma_1))} + \|\operatorname{div} \sigma(\mathbf{v}_1)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\sigma_S(\mathbf{v}_1) - \overline{\mathrm{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{v}_2)}\|^2_{L^2(\Gamma_1, T(\Gamma_1))} \\ & + \|\sigma_\nu(\mathbf{v}_1) + \sigma_T^0(\mathbf{v}_2) : \partial_m \nu - \Delta_T v_{2\nu}\|^2_{L^2(\Gamma_1)} \Big)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

**Proposition 4.2.** *On a : $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = (\mathbb{H}^2(\Omega) \times \mathbb{H}^2(\Gamma_1)) \cap \mathcal{W}$ et sur $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ la norme $\|(.,.)\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}$ est équivalente à la norme $\mathbb{H}^2$.*

*Preuve.* Soit $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ ; on a $\mathrm{div}\sigma(\mathbf{u}_1) \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ $\overline{\mathrm{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{u}_{2T})} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1, T(\Gamma_1))$ d'où $\mathbf{u}_{2T} \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1, T(\Gamma_1))$, (d'après la Prop. 2.2), et $\Delta_T u_{2\nu} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ d'où $u_{2\nu} \in H^{\frac{3}{2}}$ et donc $\mathbf{u}_2 \in \mathbb{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)$. De tout cela on obtient : $\mathbf{u}_1 \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ et

$$\|\mathbf{u}_1\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} \le C \left( \|\mathbf{u}_1 - \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}_1)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\mathbf{u}_1\|_{\mathbb{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma)} \right). \tag{4.4}$$

Il s'ensuit alors que $\overline{\mathrm{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{u}_{2T})} \in L^2(\Gamma_1, T(\Gamma_1))$ et $\Delta_T u_{2\nu} \in L^2(\Gamma_1)$ et donc $\mathbf{u}_2 \in \mathbb{H}^2(\Gamma_1)$ et (*cf.* Prop. 2.2) :

$$\begin{cases} \|\mathbf{u}_{2T}\|_{H^2(\Gamma_1, T(\Gamma_1))} \le C\|\mathbf{u}_{2T} - \overline{\mathrm{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{u}_{2T})}\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_1, T(\Gamma_1))}, \\ \|u_{2\nu}\|_{H^2(\Gamma_1)} \le C(\|u_{2\nu} - \Delta_T u_{2\nu}\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_1)} \end{cases}$$

donc

$$\|\mathbf{u}_2\|_{\mathbb{H}^2(\Gamma_1))} \le C \left( \|\mathbf{u}_{2T} - \overline{\mathrm{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{u}_{2T})}\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_1, T(\Gamma_1))} + \|u_{2\nu} - \Delta_T u_{2\nu}\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_1)} \right). \tag{4.5}$$

Pour montrer l'équivalence des normes il suffit de montrer l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$\|\mathbf{v}_1\|_{\mathbb{H}^2(\Omega))} + \|\mathbf{v}_2\|_{\mathbb{H}^2(\Gamma_1))} \le C\|(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}, \quad \forall (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Dans le cas contraire il existerait une suite $\{(\mathbf{v}_{1k}, \mathbf{v}_{2k})\} \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$ telle que

$$\|\mathbf{v}_{1k}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega))} + \|\mathbf{v}_{2k}\|_{\mathbb{H}^2(\Gamma_1))} = 1 \quad \text{et} \quad \|(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)\|_{D(\mathcal{A})} \to 0.$$

Alors

$$\mathbf{v}_{1k} \to 0 \text{ dans } \mathbb{H}^1(\Omega), \mathbf{v}_{2k} \to 0, \text{ dans } \mathbb{H}^1(\Gamma_1), \operatorname{div} \sigma(\mathbf{v}_{1k}) \to 0 \text{ dans } \mathbb{L}^2(\Omega)) \tag{4.6}$$

et

$$\begin{cases} \sigma_S(\mathbf{v}_1) - \overline{\mathrm{div}_T \sigma_T^0(\mathbf{v}_2)} \longrightarrow 0 & \text{dans} \quad L^2(\Gamma_1; T(\Gamma_1)), \\ \sigma_\nu(\mathbf{v}_1) + \sigma_T^0(\mathbf{v}_2) \ : \partial_m \nu - \Delta_T v_{2\nu} \longrightarrow 0 & \text{dans} \quad L^2(\Gamma_1). \end{cases} \tag{4.7}$$

La remarque 2.4 et (4.6) donnent : $\sigma(\mathbf{v}_1).\nu \to 0$ dans $\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$. La proposition 2.2 et (4.7) donnent : $\mathbf{v}_{2k} \to 0$ dans $\mathbb{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)$. De (4.6) et (4.4) il vient : $\mathbf{v}_{1k} \to 0$ dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$. De (4.7) et (4.5) il vient : $\mathbf{v}_{2k} \to 0$ dans $\mathbb{H}^2(\Gamma_1)$. Cela contredit les propriétés de la suite $(\mathbf{v}_{1k}, \mathbf{v}_{2k})$.

### 4.2. **Une identité**

Les méthodes classiques permettent de montrer (*cf.* [16, 25, 26]), la

**Proposition 4.3.** *(i) Si* $(\varphi^0, \varphi^1) \in \mathcal{W} \times \mathbb{H}$ *alors le problème (4.1) admet une solution (faible) unique* $\varphi \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathcal{W}) \cap C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{H})$ *avec :*

$$\|\varphi\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{W})} + \|\varphi'\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{H})} \leq C_T \left(\|\varphi^0\|_{\mathcal{W}} + \|\varphi^1\|_{\mathbb{H}}\right), \quad \forall T > 0. \tag{4.8}$$

*(ii) Si* $(\varphi^0, \varphi^1) \in D(\mathcal{A}) \times \mathcal{W}$ *alors la solution (forte)* $\varphi$ *du problème (4.1) est dans* $C^0(\mathbb{R}, D(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}, \mathcal{W})$ *avec :*

$$\|\varphi\|_{L^\infty(0,T;D(\mathcal{A}))} + \|\varphi'\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{W})} \leq C'_T \left(\|\varphi^0\|_{D(\mathcal{A})} + \|\varphi^1\|_{\mathbb{H}}\right), \quad \forall T > 0. \tag{4.9}$$

L'énergie $E(\varphi, t)$ associée à la solution $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ du problème (4.1) est définie par :

$$E(\varphi, t) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\sigma(\varphi_1) : \epsilon(\varphi_1) + |\varphi_1'|^2\right) dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} \left(\sigma_T^0(\varphi_2) : \epsilon_T^0(\varphi_2) + |\nabla_T \varphi_{2\nu}|^2 + |\varphi_2'|^2\right) d\Gamma. \tag{4.10}$$

C'est une constante qui sera notée $E_0$. On pose :

$$Q_T = \Omega \times (0,T), \quad \Sigma_{0T} = \Gamma_0 \times (0,T), \quad \Sigma_{1T} = \Gamma_1 \times (0,T) \quad \text{et} \quad \Sigma_T = \Gamma \times (0,T).$$

**Proposition 4.4.** *Soient* $\mathbf{q} \in \mathbb{W}^{1,\infty}(\bar{\Omega})$, $(\varphi^0, \varphi^1) \in D(A) \times \mathcal{W}$ *; alors la solution* $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ *du problème (4.1) correspondant vérifie la relation :*

$$\begin{aligned}
(\varphi_1', (\mathbf{q}\nabla)\varphi_1)_\Omega\big|_0^T \quad &+ \quad (\varphi_{2T}', (\pi\partial_m\varphi_{1T}\pi + \varphi_{1\nu}(\partial_m\nu))\mathbf{q}_T)_{\Gamma_1}\big|_0^T + (\varphi_{2\nu}', (\partial_m\varphi_{1\nu} + \overline{\varphi_{1T}}(\partial_m\nu))\mathbf{q}_T)_{\Gamma_1}\big|_0^T \\
&+ \quad \int_{Q_T} \sigma(\varphi_1) : \nabla\mathbf{q}\nabla\varphi_1 \, dx\, dt + \int_{Q_T} \frac{\operatorname{div}\mathbf{q}}{2}(|\varphi_1'|^2 - \sigma(\varphi_1) : \epsilon(\varphi_1))dxdt \\
&- \quad \int_{\Sigma_T} \frac{q_\nu}{2}\Big(\mu|\partial_\nu\varphi_{1T}|^2 + (2\mu+\lambda)|\partial_\nu\varphi_{1\nu}|^2\Big)d\Sigma + \int_{\Sigma_{1T}} \frac{q_\nu}{2}\Big(2\mu\epsilon_T^0(\varphi_1) + \lambda tr(\epsilon_T^0(\varphi_1))i_2 : \epsilon_T^0(\varphi_1) \\
&+ \quad \mu|\overline{\partial_m\varphi_{1\nu}} - (\partial_m\nu)\varphi_{1T}|^2 - |\varphi_1'|^2\Big)d\Sigma + \int_{\Sigma_{1T}} \frac{\operatorname{div}_T\mathbf{q}_T}{2}\Big(|\varphi_2'|^2 \\
&- \quad \sigma_T^0(\varphi_1) : \epsilon_T^0(\varphi_1) - |\nabla_T\varphi_{2\nu}|^2)\Big)d\Sigma - \int_{\Sigma_{1T}} (\sigma_T^0(\varphi_2) : \partial_m\nu)\overline{\varphi_{1T}}(\partial_m\nu)\mathbf{q}_T d\Sigma \qquad (4.11) \\
&+ \quad \int_{\Sigma_{1T}} \sigma_T^0(\varphi_2) : (\pi\partial_m\varphi_{2T}\pi + \varphi_{2\nu}\partial_m\nu)\pi\partial_m\mathbf{q}_T\pi)\, d\Sigma \\
&+ \quad \int_{\Sigma_{1T}} \Big(\partial_m\varphi_{1\nu}\pi\partial_m\mathbf{q}_T\pi\overline{\partial_m\varphi_{1\nu}} - \overline{(\nabla_T\varphi_{1\nu})}\nabla_T(\overline{\varphi_{1T}}(\partial_m\nu)\mathbf{q}_T)\Big)\, d\Sigma \\
&+ \quad \int_{\Sigma_{1T}} \partial_m\varphi_{2\nu}\left(\sigma_T^0(\varphi_2)(\partial_m\nu)\mathbf{q}_T\right) d\Sigma + \int_{\Sigma_{1T}} (\mathcal{R} : \sigma_T^0(\varphi_1)) : \Big(\varphi_{1T} \bigotimes \mathbf{q}_T\Big)\, d\Sigma = 0
\end{aligned}$$

où $\mathcal{R}$ est le tenseur de courbure de $\Gamma$ (*cf.* [14]) ; c'est un tenseur une fois contravariant et trois fois covariant de composantes :

$$\mathcal{R}^\lambda_{\nu\mu\alpha} = \Gamma^\lambda_{\alpha\nu,\mu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu,\alpha} + \Gamma^\lambda_{\mu r}\Gamma^r_{\alpha\nu} - \Gamma^\lambda_{\alpha r}\Gamma^r_{\mu\nu}$$

avec : $1 \leq \alpha, \mu, \nu, \lambda \leq 2$ ; les $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ sont les symboles de Cristoffel (*cf.* [14, 23, 29]).

*Preuve.* On multiplie :
La première équation de (4.1) par $(\mathbf{q}\nabla)\varphi_1$ et on intègre sur $Q_T$ ; on obtient :

$$\begin{aligned}(\varphi_1', (\mathbf{q}\nabla)\varphi_1)_\Omega|_0^T \quad &+ \quad \int_{Q_T} \frac{\operatorname{div}\mathbf{q}}{2}\left(|\varphi_1'|^2 - \sigma(\varphi_1) : \epsilon(\varphi_1)\right) dx\,dt + \int_{Q_T} (\sigma(\varphi_1) : \nabla\mathbf{q}\nabla\varphi_1)\, d\Sigma \\ &+ \quad \int_{\Sigma_T} \frac{q_\nu}{2}\left(\sigma(\varphi_1) : \epsilon(\varphi_1) - |\varphi_1'|^2\right) d\Sigma - \int_{\Sigma_T} (\sigma(\varphi_1).\nu)(\mathbf{q}\nabla)\varphi_1 dxdt = 0.\end{aligned}$$

La troisième équation de (4.1) par $(\pi\partial_m\varphi_{1T}\pi + \varphi_{1\nu}\partial_m\nu)\mathbf{q}_T$ et on intègre sur $\Sigma_{1T}$ ; on obtient :

$$\begin{aligned}(\varphi_{2T}', (\pi\partial_m\varphi_{1T}\pi + \varphi_{1\nu}\partial_m\nu)\mathbf{q}_T)_{\Gamma_1}|_0^T \quad &- \quad \int_{\Sigma_{1T}} \varphi_{2T}'\left(\pi\partial_m\varphi_{1T}'\pi + \varphi_{1\nu}'\partial_m\nu\right)\mathbf{q}_T\, d\Sigma \\ &+ \quad \int_{\Sigma_{1T}} \sigma_T^0(\varphi_2) : \pi\partial_m\left(\pi\partial_m\varphi_{1T}\pi + \varphi_{1\nu}\partial_m\nu)\mathbf{q}_T\right) d\Sigma \\ &+ \quad \int_{\Sigma_{1T}} \overline{\sigma_S(\varphi_1)}\left(\pi\partial_m\varphi_{1T}\pi + \varphi_{1\nu}\partial_m\nu\right)\mathbf{q}_T d\Sigma = 0.\end{aligned}$$

La quatrième équation de (4.1) par $(\partial_m\varphi_{1\nu} - \overline{\varphi_{1T}}\partial_m\nu)\mathbf{q}_T$ et on intègre sur $\Sigma_{1T}$ ; on obtient :

$$\begin{aligned}(\varphi_{2\nu}', (\partial_m\varphi_{1\nu} \quad &- \quad \overline{\varphi_{1T}}\partial_m\nu)\mathbf{q}_T)_{\Gamma_1}|_0^T - \int_{\Sigma_{1T}} \varphi_{2\nu}'\left(\partial_m\varphi_{1\nu}' - \overline{\varphi_{1T}'}\partial_m\nu\right)\mathbf{q}_T d\Sigma \\ &+ \quad \int_{\Sigma_{1T}} \left(\sigma_T^0(\varphi_2) : \partial_m\nu\right)\left(\partial_m\varphi_{1\nu} - \overline{\varphi_{1T}}\partial_m\nu\right)\mathbf{q}_T d\Sigma \\ &- \quad \int_{\Sigma_{1T}} \Delta_T\varphi_{2\nu}\left(\partial_m\varphi_{1\nu} - \overline{\varphi_{1T}}\partial_m\nu\right)\mathbf{q}_T d\Sigma \\ &+ \quad \int_{\Sigma_{1T}} \sigma_\nu(\varphi_1)\left(\partial_m\varphi_{1\nu} - \overline{\varphi_{1T}}\partial_m\nu\right)\mathbf{q}_T d\Sigma = 0.\end{aligned}$$

La somme des trois égalités précédentes donne :

$$\begin{aligned}(\varphi_1', (\mathbf{q}\nabla)\varphi_1)_\Omega|_0^T \quad &+ \quad (\varphi_{2T}', (\pi\partial_m\varphi_{1T}\pi + \varphi_{1\nu}\partial_m\nu)\mathbf{q}_T)_{\Gamma_1}|_0^T + (\varphi_{2\nu}', (\partial_m\varphi_{1\nu} - \overline{\varphi_{1T}}\partial_m\nu)\mathbf{q}_T)_{\Gamma_1}|_0^T \\ &+ \quad \int_{Q_T} \frac{\operatorname{div}\mathbf{q}}{2}(|\varphi_1'|^2 - \sigma(\varphi_1) : \epsilon(\varphi_1))\, dx\,dt + \int_{Q_T} \sigma(\varphi_1) : \nabla\mathbf{q}\nabla\varphi_1\, dx\,dt \\ &+ \quad \int_{\Sigma_T} \frac{q_\nu}{2}\left(\sigma(\varphi_1) : \epsilon(\varphi_1) - |\varphi_1'|^2\right) d\Sigma - \int_{\Sigma_T} (\sigma(\varphi_1).\nu)(\mathbf{q}\nabla)\varphi_1 d\Sigma \\ &- \quad \int_{\Sigma_{1T}} \varphi_{2T}'(\pi\partial_m\varphi_{1T}'\pi + \varphi_{1\nu}'\partial_m\nu)\mathbf{q}_T d\Sigma - \int_{\Sigma_{1T}} \varphi_{2\nu}'(\partial_m\varphi_{1\nu}' - \overline{\varphi_{1T}'}\partial_m\nu)\mathbf{q}_T d\Sigma \\ &+ \quad \int_{\Sigma_{1T}} \Delta_T\varphi_{2\nu}(\partial_m\varphi_{1\nu} - \overline{\varphi_{1T}}\partial_m\nu)\mathbf{q}_T d\Sigma + \int_{\Sigma_{1T}} \overline{\sigma_S(\varphi_1)}(\pi\partial_m\varphi_{1T}\pi + \varphi_{1\nu}\partial_m\nu)\mathbf{q}_T d\Sigma \\ &+ \quad \int_{\Sigma_{1T}} \sigma_\nu(\varphi_1)(\partial_m\varphi_{1\nu} - \overline{\varphi_{1T}}\partial_m\nu)\mathbf{q}_T d\Sigma + \int_{\Sigma_{1T}} (\sigma_T^0(\varphi_2) : \partial_m\nu)(\partial_m\varphi_{1\nu} - \overline{\varphi_{1T}}\partial_m\nu)\mathbf{q}_T d\Sigma \\ &- \quad \int_{\Sigma_{1T}} \sigma_T^0(\varphi_2) : \pi\partial_m\left(\pi\partial_m\varphi_{1T}\pi + \varphi_{1\nu}\partial_m\nu)\mathbf{q}_T\right) d\Sigma = 0.\end{aligned}$$

On calcule ensuite les différents termes.

$$\int_{\Sigma_{1T}} (\overline{\varphi_{2T}'}\pi\partial_m\varphi_{2T}'\pi + \varphi_{2\nu}'\partial_m\varphi_{1\nu}')\mathbf{q}_T d\Sigma = \frac{1}{2}\int_{\Sigma_{1T}} \partial_m(|\varphi_2'|^2)\mathbf{q}_T d\Sigma = -\int_{\Sigma_{1T}} \frac{\operatorname{div}_T\mathbf{q}_T}{2}|\varphi_2'|^2\, d\Sigma.$$

Sachant que $(\mathbf{q}\nabla)\varphi_1 = \overline{\nabla\varphi_1}.\mathbf{q}$ , on obtient de (2.1) :

$$(\sigma(\varphi_1).\nu)(\mathbf{q}\nabla)\varphi_1 = \overline{\sigma_S(\varphi_1)}(\pi\partial_m\varphi_{1T}\pi + \varphi_{1\nu}\partial_m\nu)\mathbf{q}_T + \sigma_\nu(\varphi_1)(\partial_m\varphi_{1\nu} - \overline{\varphi_{1T}}\partial_m\nu)\mathbf{q}_T + q_\nu(\sigma(\varphi_1).\nu)\partial_\nu\varphi_1.$$

Comme on a :

$$\overline{\nabla_T u_\nu}\nabla_T(\overline{\nabla_T u_\nu}\mathbf{q}_T) = \overline{\nabla_T u_\nu}(\pi\partial_m\mathbf{q}_T\pi)\nabla_T u_\nu + \frac{1}{2}\partial_m(|\nabla_T u_\nu|^2)\mathbf{q}_T$$

alors

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_{1T}} \Delta_T\varphi_{2\nu}\partial_m\varphi_{1\nu}\mathbf{q}_T\, d\Sigma &= -\int_{\Sigma_{1T}} \overline{\nabla_T\varphi_{2\nu}}\nabla_T(\overline{\nabla_T\varphi_{2\nu}}\mathbf{q}_T)d\Sigma \\ &= -\int_{\Sigma_{1T}} \overline{\nabla_T u_\nu}(\pi\partial_m\mathbf{q}_T\pi)\nabla_T u_\nu d\Sigma + \int_{\Sigma_{1T}} \frac{\mathrm{div}_T\,\mathbf{q}_T}{2}|\nabla_T\varphi_{2\nu}|^2 d\Sigma.\end{aligned}$$

Enfin, un calcul trop long pour être donnée ici, montre que :

$$\begin{aligned}\sigma_T^0(\varphi_2) : \pi\partial_m\left((\pi\partial_m\varphi_{1T}\pi + \varphi_{1\nu}(\partial_m\nu))\mathbf{q}_T\right)\pi \;=\; & \sigma_T^0(\varphi_2) : (\pi(\partial_m\varphi_{2T})\pi + \varphi_{2\nu}\partial_m\nu)\pi\partial_m\mathbf{q}_T\pi \\ & +\partial_m\varphi_{2\nu}(\sigma_T^0(\varphi_2)(\partial_m\nu)q_T) + \frac{1}{2}\partial_m(\sigma_T^0(\varphi_2) : \epsilon_T^0(\varphi_2))\mathbf{q}_T \\ & -(\sigma_T^0(\varphi_2) : \partial_m\nu)(\partial_m\varphi_{1\nu})\mathbf{q}_T \\ & +(\mathcal{R} : \sigma_T^0(\varphi_1)) : \left(\varphi_{1T}\bigotimes\mathbf{q}_T\right). \end{aligned} \tag{4.12}$$

En remplaçant les termes précédents par leurs valeurs on obtient :

$$\begin{aligned}(\varphi_1', (\mathbf{q}\nabla)\varphi_1)_\Omega|_0^T \;&+\; (\varphi_{2T}', (\pi\partial_m\varphi_{1T}\pi + \varphi_{1\nu}(\partial_m\nu))\mathbf{q}_T)_{\Gamma_1}|_0^T + (\varphi_{2\nu}', (\partial_m\varphi_{1\nu} + \overline{\varphi_{1T}}\partial_m\nu)\mathbf{q}_T)_{\Gamma_1}|_0^T \\ &+ \int_{Q_T}\sigma(\varphi_1) : \nabla\mathbf{q}\nabla\varphi_1\, dx\, dt + \int_{Q_T}\frac{\mathrm{div}\,\mathbf{q}}{2}(|\varphi_1'|^2 - \sigma(\varphi_1) : \epsilon(\varphi_1))dxdt \\ &+ \int_{\Sigma_{1T}}\partial_m\varphi_{2\nu}(\sigma_T^0(\varphi_2)(\partial_m\nu)\mathbf{q}_T)d\Sigma \\ &+ \int_{\Sigma_T}\frac{q_\nu}{2}\left(\sigma(\varphi_1) : \epsilon(\varphi_1) - 2(\sigma(\varphi_1)\nu)\partial_\nu\varphi_1 - |\varphi_1'|^2\right)d\Sigma \\ &+ \int_{\Sigma_{1T}}\partial_m\varphi_{2\nu}\pi\partial_m\mathbf{q}_T\pi\overline{\partial_m\varphi_{2\nu}}d\Sigma - \int_{\Sigma_{1T}}(\sigma_T^0(\varphi_2) : \partial_m\nu)\overline{\varphi_{1T}}(\partial_m\nu)\mathbf{q}_T d\Sigma \\ &+ \int_{\Sigma_{1T}}\frac{\mathrm{div}_T\mathbf{q}_T}{2}\left(|\varphi_2'|^2 - \sigma_T^0(\varphi_1) : \epsilon_T^0(\varphi_1) - |\nabla_T\varphi_{2\nu}|^2\right)d\Sigma \\ &+ \int_{\Sigma_{1T}}\Big(\sigma_T^0(\varphi_2) : (\pi\partial_m\varphi_{2T}\pi + \varphi_{2\nu}\partial_m\nu)(\pi\partial_m\mathbf{q}_T\pi) \\ &- \overline{(\nabla_T\varphi_{1\nu})}\nabla_T(\overline{\varphi_{1T}}(\partial_m\nu)\mathbf{q}_T)\Big)d\Sigma + \int_{\Sigma_{1T}}(\mathcal{R} : \sigma_T^0(\varphi_1)) : \left(\varphi_{1T}\bigotimes\mathbf{q}_T\right)d\Sigma = 0.\end{aligned} \tag{4.13}$$

*Calcul de l'intégrale sur* $\Sigma_{0T}$. De (1.1–1.4) et de la remarque 2.1 on obtient sur $\Gamma_0$ :

$$\varphi_1 = 0,\ \epsilon_T(\varphi_1) = 0,\ \sigma_S(\varphi_1) = \mu\partial_\nu\varphi_{1T},\ \sigma_\nu(\varphi_1) = (2\mu+\lambda)\partial_\nu\varphi_{1\nu}.$$

$$\sigma(\varphi_1) : \epsilon(\varphi_1) = \sigma_T(\varphi_1) : \epsilon_T(\varphi_1) + 2\overline{\sigma_S(\varphi_1)}\epsilon_S(\varphi_1) + \sigma_\nu(\varphi_1)\epsilon_\nu(\varphi_1) = \mu|\partial_\nu\varphi_{1T}|^2 + (2\mu+\lambda)|\partial_\nu\varphi_{1\nu}|^2$$

et

$$(\sigma(\varphi_1)\nu)\partial_\nu\varphi_1 = \mu|\partial_\nu\varphi_{1T}|^2 + (2\mu+\lambda)|\partial_\nu\varphi_{1\nu}|^2$$

d'où :

$$\int_{\Sigma_{0T}} \frac{q_\nu}{2}\left(\sigma(\varphi_1):\epsilon(\varphi_1)-2(\sigma(\varphi_1)\nu)\partial_\nu\varphi_1\right)d\Sigma = -\int_{\Sigma_{0T}} \frac{q_\nu}{2}\left(\mu|\partial_\nu\varphi_{1T}|^2+(2\mu+\lambda)|\partial_\nu\varphi_{1\nu}|^2\right)d\Sigma. \tag{4.14}$$

*Calcul de l'intégrale sur* $\Sigma_{1T}$ ; on a

$$\begin{aligned}
\sigma(\varphi_1):\epsilon(\varphi_1)-2(\sigma(\varphi_1)\nu)(\partial_\nu\varphi_1) &= \sigma_T(\varphi_1):\epsilon_T(\varphi_1)+2\overline{\sigma_S(\varphi_1)}\epsilon_S(\varphi_1)-2\overline{\sigma_S(\varphi_1)}\partial_\nu\varphi_{1T}-\sigma_\nu(\varphi_1)\epsilon_\nu(\varphi_1)\\
&= (2\mu\epsilon_T(\varphi_1)+\lambda\mathrm{tr}(\epsilon_T(\varphi_1))i_2):\epsilon_T(\varphi_1)+\lambda\epsilon_\nu(\varphi_1)\mathrm{tr}(\epsilon_T(\varphi_1))\\
&\quad +2\overline{\sigma_S(\varphi_1)}\,(\epsilon_S(\varphi_1)-\partial_\nu\varphi_{1T})-\sigma_\nu(\varphi_1)\epsilon_\nu(\varphi_1)\\
&= \left(2\mu\epsilon_T^0(\varphi_1)+\lambda tr(\epsilon_T^0(\varphi_1))i_2\right):\epsilon_T^0(\varphi)+\mu\left(|\overline{\partial_m\varphi_{1\nu}}-(\partial_m\nu)\varphi_{1T}|^2\right.\\
&\quad \left.-|\partial_\nu\varphi_{1T}|^2\right)+(2\mu+\lambda)|\partial_\nu\varphi_{1\nu}|^2
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma_{1T}}\left(\sigma(\varphi_1):\epsilon(\varphi_1)-2(\sigma(\varphi_1)\nu)(\partial_\nu\varphi_1)\right)d\Sigma &= \int_{\Sigma_{1T}}\Big(\left(2\mu\epsilon_T^0(\varphi_1)+\lambda tr(\epsilon_T^0(\varphi_1))i_2\right):\epsilon_T^0(\varphi)+\mu|\overline{\partial_m\varphi_{1\nu}}\\
&\quad -(\partial_m\nu)\varphi_{1T}|^2-\mu|\partial_\nu\varphi_{1T}|^2+(2\mu+\lambda)|\partial_\nu\varphi_{1\nu}|^2\Big)d\Sigma. \quad (4.15)
\end{aligned}$$

On obtient (4.11) à partir de (4.13–4.15).

### 4.3. Régularité des solutions faibles

**Théorème 4.1.** *Soient* $(\varphi^0,\varphi^1)\in\mathcal{W}\times\mathbb{H}$ *et* $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$ *la solution du problème (4.1) ; alors* $(\partial_\nu\varphi_1)_\Gamma\in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+;\mathbb{L}^2(\Gamma))$ *et il existe une constante* $C>0$*, indépendante de* $(\varphi^0,\varphi^1)$ *et de* $T>0$ *telle que :*

$$\int_{\Sigma_T}(\partial_\nu\varphi_1)^2d\Sigma+\int_{\Sigma_{1T}}|\varphi_1'|^2d\Sigma\le C(T+1)E_0. \tag{4.16}$$

*Preuve.* On commence par prendre $(\varphi^0,\varphi^1)\in D(\mathcal{A})\times\mathcal{W}$. On considère un champ $\mathbf{q}\in\mathbb{W}^{1,\infty}(\overline{\Omega})$ tel que : $\mathbf{q}_{|\Gamma}=\nu$ (*cf.* [25]). La relation (4.11) s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma_T}\frac{1}{2}(\mu|\partial_\nu\varphi_{1T}|^2 &+ (2\mu+\lambda)|\partial_\nu\varphi_{1\nu}|^2)d\Sigma+\int_{\Sigma_{1T}}\frac{1}{2}|\varphi_1'|^2d\Sigma=(\varphi',(\mathbf{q}\nabla)\varphi_1)_\Omega|_0^T\\
&+ \int_{Q_T}\frac{\mathrm{div}\,\mathbf{q}}{2}\left(|\varphi_1'|^2-\sigma(\varphi_1):\epsilon(\varphi_1)\right)dx\,dt\\
&+ \int_{Q_T}\sigma(\varphi_1):\nabla\mathbf{q}\nabla\varphi_1\,dx\,dt+\frac{1}{2}\int_{\Sigma_{1T}}\mu\left(|\overline{\partial_m\varphi_{1\nu}}-(\partial_m\nu)\varphi_{1T}|^2\right)d\Sigma\\
&+ \int_{\Sigma_{1T}}\frac{1}{2}\left((2\mu\epsilon_T^0(\varphi_1)+\lambda\mathrm{tr}(\epsilon_T^0(\varphi_1))i_2):\epsilon_T^0(\varphi_1)\right)d\Sigma.
\end{aligned}$$

L'équivalence des normes $\|.\|_\mathcal{W}$ et $|||.|||_\mathcal{W}$ sur $\mathcal{W}$ permet d'obtenir (4.16) pour les solutions fortes ; on termine par densité et passage à la limite.

### 4.4. Théorème d'unicité

On suppose qu'il existe $x_0\in\mathbb{R}^3$ tel que : $\Gamma_0=\{x\in\Gamma:(x-x_0).\nu(x)\ge 0\}$.
On prend $\mathbf{q}(x)=x-x_0$ ; on montre alors que :

$$\pi\partial_m\mathbf{q}_T\pi=i_2-q_\nu\partial_m\nu \ \text{ et } \ \mathrm{div}_T\mathbf{q}_T=2-q_\nu tr(\partial_m\nu). \tag{4.17}$$

On suppose que $\Gamma_1$ est convexe *ie*: $tr(\partial_m \nu) \geq 0$ sur $\Gamma_1$ ; on pose :

$$\begin{array}{ll} R = \|x - x_0\|_{\mathbb{L}^\infty(\overline{\Omega})}, & R_0 = \|x - x_0\|_{\mathbb{L}^\infty(\Gamma_0)} \\ r_1 = \mathrm{Min}\{|q_\nu(x)|, x \in \Gamma 1\}, & c_1 = \mathrm{Min}\{\mathrm{tr}(\partial_m \nu)(x), x \in \Gamma_1\} \end{array}$$

et on suppose que :

$$r_1(1 + c_1) \geq 1. \tag{4.18}$$

La relation (4.18) est vérifiée par exemple pour une sphère de rayon $\rho$ puisque dans ce cas on a $r_1 = \rho$ et $c_1 = \frac{2}{\rho}$.

**Proposition 4.5.** *Toute solution forte du problème (4.1) vérifie la relation :*

$$\begin{aligned} (\varphi_1', (\mathbf{q}\nabla)\varphi_1 + \varphi_1)_\Omega \,|_0^T \; &+ \; (\varphi_{2T}', (\pi\partial_m\varphi_{1T}\pi + \varphi_{1\nu}(\partial_m\nu))\,\mathbf{q}_T + \varphi_{2T})_{\Gamma_1} \,|_0^T \\ &+ \; (\varphi_{2\nu}', (\partial_m\varphi_{1\nu} - \overline{\varphi_{1T}}\partial_m\nu)\mathbf{q}_T + \varphi_{2\nu})_{\Gamma_1} \,|_0^T \\ &+ \; TE_0 = \int_{\Sigma_T} \frac{q_\nu}{2}\left(\mu|\partial_\nu\varphi_{1T}|^2 + (2\mu+\lambda)|\partial_\nu\varphi_{1\nu}|^2\right) d\Sigma \\ &+ \; \int_{\Sigma_{1T}} \frac{1}{2}\left(q_\nu(1 + tr(\partial_m\nu)) + 1\right)|\varphi_2'|^2 d\Sigma \\ &- \; \int_{\Sigma_{1T}} \frac{q_\nu}{2}\Big((2\mu\epsilon_T^0(\varphi_1) + \lambda tr(\epsilon_T^0(\varphi_1))i_2) : \epsilon_T^0(\varphi_1) \\ &+ \; \mu|\overline{\frac{\partial\varphi_{1\nu}}{\partial m}} - (\partial_m\nu)\varphi_{1T}|^2\Big) d\Sigma + - \int_{\Sigma_{1T}} \partial_m\varphi_{2\nu}(\epsilon_T^0(\varphi_2)(\partial_m\nu)\mathbf{q}_T) d\Sigma \\ &+ \; \int_{\Sigma_{1T}} \frac{1}{2}\left((q_\nu tr(\partial_m\nu) - 1)(\sigma_T^0(\varphi_2) : \epsilon_T^0(\varphi_2)) + |\nabla_T\varphi_{2\nu}|^2\right) d\Sigma \\ &+ \; \int_{\Sigma_{1T}} \left((\sigma_T^0(\varphi_2) : \partial_m\nu)\overline{\varphi_{1T}}(\partial_m\nu)\mathbf{q}_T + \overline{\nabla_T\varphi_{2\nu}}\nabla_T(\overline{\varphi_{1T}}(\partial_m\nu)\mathbf{q}_T)\right) d\Sigma \\ &+ \; \int_{\Sigma_{1T}} q_\nu\left(\sigma_T^0(\varphi_2) : (\pi\partial_m\varphi_{2T}\pi + \varphi_{2\nu}\partial_m\nu)\partial_m\nu\right) d\Sigma \\ &- \; \int_{\Sigma_{1T}} \Big((\mathcal{R} : \sigma_T^0(\varphi_1)) : \Big(\varphi_{1T} \bigotimes \mathbf{q}_T\Big)\Big). \end{aligned} \tag{4.19}$$

*Preuve.* On prend $\mathbf{q}(x) = x - x_0$ dans la relation (4.11) en tenant compte de (4.17) et de la relation d'équipartition de l'énergie :

$$(\varphi_1', \varphi_1)_\Omega|_0^T + (\varphi_2', \varphi_2)_{\Gamma_1}|_0^T + \int_{Q_T} \left(\sigma(\varphi_1) : \epsilon(\varphi_1) - |\varphi_1'|^2\right) dx\,dt + \int_{\Sigma_{1T}} \left(\sigma_T^0(\varphi_2) : \epsilon_T^0(\varphi_2) - |\varphi_2'|^2\right) d\Sigma = 0.$$

**Théorème 4.2.** *Soit $(\varphi^0, \varphi^1) \in \mathcal{W} \times \mathbb{H}$. Il existe un temps $T_0 > 0$ et trois constantes $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ et $C > 0$ indépendants de $(\varphi^0, \varphi^1)$ tels que la solution $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ du problème (4.1) correspondant vérifie :*

$$\begin{aligned} (T - T_0)E_0 \; &+ \; \frac{1}{R\sqrt{\delta_1}}|\varphi_1^0|_\Omega^2 + \frac{1}{2R}\left(\frac{1}{\sqrt{\delta_1}} + \frac{1}{\sqrt{\delta_2}}(1 + r_1c_1)\right)|\varphi_2^0|_{\Gamma_1}^2 \\ &\leq \; \frac{R_0}{2}\int_{\Sigma_{0T}} \left(\mu|\partial_\nu\varphi_{1T}|^2 + (2\mu+\lambda)|\partial_\nu\varphi_{1\nu}|^2\right) d\Sigma \\ &+ \; C\int_{\Sigma_{1T}} \left(\sigma_T^0(\varphi_2) : \epsilon_T^0(\varphi_2) + |\nabla_T\varphi_{2\nu}|^2\right) d\Sigma. \end{aligned} \tag{4.20}$$

*Preuve.* On commence par prendre $(\varphi^0,\varphi^1)\in D(\mathcal{A})\times\mathcal{W}$ ; les termes intégrés de la relation (4.19) se majorent par la méthode de Komornik comme dans [16, 25]. On pose :

$$\begin{array}{rcl} \xi(t) &=& (\varphi_1', (\mathbf{q}\nabla)\varphi_1+\varphi_1)_\Omega\,(t),\\ Y_T &=& (\pi\partial_m\varphi_{1T}\pi+\varphi_{1\nu}(\partial_m\nu))\,(t)\mathbf{q}_T, \quad Y_\nu \;=\; (\partial_m\varphi_{1\nu}-\overline{\varphi_{1T}}\partial_m\nu)\,(t)\mathbf{q}_T,\\ Y &=& Y_T+Y_\nu\nu, \qquad\qquad \eta(t) \;=\; (\varphi_2', Y+\varphi_2)_{\Gamma_1}\,(t). \end{array}$$

La majoration de $|\xi(t)|$ se fait exactement comme dans [16, 25] ; on montre qu'il existe $\delta_1>0$ tel que :

$$|(\varphi_1', (\mathbf{q}\nabla)\varphi_1+\varphi_1)|_\Omega^2|_0^T \le 2R\sqrt{\delta_1}E_0-\frac{1}{R\sqrt{\delta_1}}|\varphi_1|_\Omega^2-\frac{r_1}{2R\sqrt{\delta_1}}|\varphi_1|_{\Gamma_1}^2. \tag{4.21}$$

*Majoration de* $|\eta(t)|$. Soit $\beta>0$ ; alors :

$$|\eta(t)|\le\frac{\beta}{2}|\varphi_2'(t)|_{\Gamma_1}^2+\frac{1}{2\beta}|Y+\varphi_2|_{\Gamma_1}^2,$$

$$\begin{aligned}|Y+\varphi_2|_{\Gamma_1}^2 \;=\;& |(\pi\partial_m\varphi_{1T}\pi+\varphi_{1\nu}\partial_m\nu)(t)\mathbf{q}_T|_{\Gamma_1}^2+|\,(\partial_m\varphi_{1\nu}-\overline{\varphi_{1T}}(\partial_m\nu))\,(t)\mathbf{q}_T|_{\Gamma_1}^2+|\varphi_2|_{\Gamma_1}^2\\ &+\int_{\Gamma_1}(\overline{\varphi_{1T}}\pi\partial_m\varphi_{1T}\pi\mathbf{q}_T+\varphi_{1\nu}(\partial_m\varphi_{1\nu})\mathbf{q}_T)\,d\Gamma.\end{aligned}$$

Comme

$$\int_{\Gamma_1}(\overline{\varphi_{1T}}\pi\partial_m\varphi_{1T}\pi\mathbf{q}_T+\varphi_{1\nu}\partial_m\varphi_{1\nu}\mathbf{q}_T)\,d\Gamma=\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\partial_m(|\varphi_1|^2)\mathbf{q}_T d\Gamma=-\int_{\Gamma_1}\frac{\operatorname{div}_T\mathbf{q}_T}{2}|\varphi_1|^2d\Gamma$$

alors

$$|Y+\varphi_2|_{\Gamma_1}^2\le|(\pi\partial_m\varphi_{1T}\pi+\varphi_{1\nu}(\partial_m\nu)(t)\mathbf{q}_T|_{\Gamma_1}^2+|\,(\partial_m\varphi_{1\nu}-\overline{\varphi_{1T}}(\partial_m\nu))\,(t)\mathbf{q}_T|_{\Gamma_1}^2-(1+r_1c_1)\,|\varphi_2|_{\Gamma_1}^2.$$

D'autre part, comme les normes $\|.\|_\mathcal{W}$ et $|||.|||_\mathcal{W}$ définies dans l'introduction, sont équivalentes sur $\mathcal{W}$, il existe une constante $\delta_2>0$ telle que :

$$\begin{aligned}|(\pi\partial_m\varphi_{1T}\pi+\varphi_{1\nu}(\partial_m\nu))(t)\mathbf{q}_T|_{\Gamma_1}^2 \;&+\; |(\partial_m\varphi_{1\nu}-\overline{\varphi_{1T}}(\partial_m\nu))(t)\mathbf{q}_T|_{\Gamma_1}^2\le R^2\delta_2\left(\int_\Omega\sigma(\varphi_1):\epsilon(\varphi_1)dx\right.\\ &+\left.\int_{\Gamma_1}\left(\sigma_T^0(\varphi_2):\epsilon_T^0(\varphi_2)+|\nabla_T\varphi_{2\nu}|^2\right)d\Gamma\right).\end{aligned}$$

Alors

$$|\eta(t)|\le\frac{\beta}{2}|\varphi_2'(t)|_{\Gamma_1}^2-\left(\frac{1}{2\beta}+\frac{r_1c_1}{2\beta}\right)|\varphi_2|_{\Gamma_1}^2+\frac{R^2\delta_2}{2\beta}\left(\int_\Omega\sigma(\varphi_1):\epsilon(\varphi_1)dx+\int_{\Gamma_1}\left(\sigma_T^0(\varphi_2):\epsilon_T^0(\varphi_2)+|\nabla_T\varphi_{2\nu}|^2\right)d\Gamma\right).$$

Le choix $\beta=R\sqrt{\delta_2}$ donne $|\eta(t)|\le R\sqrt{\delta_2}E_0-\left(\frac{1}{2R\sqrt{\delta_2}}+\frac{r_1c_1}{2R\sqrt{\delta_2}}\right)|\varphi_2|_{\Gamma_1}^2$ ; donc

$$|(\varphi_2', Y+\varphi_2)_{\Gamma_1}|_0^T\le 2R\sqrt{\delta_2}E_0-\left(\frac{1}{2R\sqrt{\delta_2}}+\frac{r_1c_1}{2R\sqrt{\delta_2}}\right)|\varphi_2^0|_{\Gamma_1}^2.$$

On pose $T_0=2R(\sqrt{\delta_1}+\sqrt{\delta_2})$ ; on obtient alors (4.20) pour les solutions fortes en tenant compte de (4.18) et du fait que $\operatorname{tr}(\partial_m\nu)\ge 0$ sur $\Gamma_1$ ; on termine par densité et passage à la limite.

**Conséquence 4.1.** *Soit $T > T_0$. Pour $(\varphi^0, \varphi^1) \in \mathcal{W} \times \mathbb{H}$ on pose :*

$$\|((\varphi^0, \varphi^1)\|^2_{\mathcal{W}\times\mathbb{H}} = \int_{\Sigma_{0T}} \left(\mu|\partial_\nu \varphi_{1T}|^2 + (2\mu+\lambda)|\partial_\nu \varphi_{1\nu}|^2\right) d\Sigma + \int_{\Sigma_{1T}} \left(\sigma^0_T(\varphi_1) : \epsilon^0_T(\varphi_1) + |\nabla_T \varphi_{1\nu}|^2\right) d\Sigma \tag{4.22}$$

*où $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ est la solution du problème (4.1)correspondant aux données $\varphi^0$, $\varphi^1$. D'après (4.16) et (4.20) $\|.\|_{\mathcal{W}\times\mathbb{H}}$ est une norme sur $\mathcal{W} \times \mathbb{H}$ et il existe deux constantes $C_1(T) > 0$ et $C_2(T) > 0$ telles que :*

$$C_1(T)E_0 \le \|(\varphi^0, \varphi^1)\|^2_{\mathcal{W}\times\mathbb{H}} \le C_2(T)E_0, \quad \forall(\varphi^0, \varphi^1) \in \mathcal{W} \times \mathbb{H}. \tag{4.23}$$

On considère maintenant le problème :

$$\begin{cases} \xi_1'' - \operatorname{div}\sigma(\xi_1) = 0 & \text{dans} & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \xi_1 = 0 & \text{sur} & \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \xi_{2T}'' + \sigma_S(\xi_1) - \overline{\operatorname{div}_T \sigma^0_T(\xi_2)} = 0 & \text{sur} & \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ \xi_{2\nu}'' + \sigma_\nu(\xi_1) + \sigma^0_T(\xi_2)\ : \partial_m \nu - \Delta_T \xi_{2\nu} = 0 & \text{sur} & \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ \xi_1(0) = \xi_1^0, \qquad \xi_1'(0) = \xi_1^1 & \text{dans} & \Omega, \\ \xi_2(0) = \xi_2^0, \qquad \xi_2'(0) = \xi_2^1 & \text{sur} & \Gamma_1, \\ \Psi = \left(\mu(\partial_\nu \xi_{1T})_{|\Gamma_0} + (2\mu+\lambda)(\partial_\nu \xi_{1\nu})_{|\Gamma_0}\nu, \xi_{2|\Gamma_1}\right). \end{cases} \tag{4.24}$$

avec $\xi^0 = (\xi_1^0, \xi_2^0) \in \mathcal{W}$ et $\xi^1 = (\xi_1^1, \xi_2^1) \in \mathbb{H}$ ; soit $T > T_0$ ; on sait, d'après l'estimation (4.23), que $\|.\|_{\mathcal{W}\times\mathbb{H}}$ est une norme sur $\mathcal{W} \times \mathbb{H}$ équivalente à la norme définie par $E_0^{\frac{1}{2}}$. On considère les espaces :

$$H' = \mathcal{W} \times \mathbb{H}, \qquad G' = \mathbb{L}^2(\Gamma_0) \times \mathbb{H}^1_0(\Gamma_1) \tag{4.25}$$

et les opérateurs : $A^* : H' \to H'$ ; et $B^* : H' \to G'$ de domaines : $D(A^*) = D(B^*) = D(\mathcal{A}) \times \mathcal{W}$ définis par :

$$\begin{aligned} A^*(\eta_0, \eta_1) = (-\eta_1, \mathcal{A}\eta_0) = \Big(&-(\eta_1^1, \eta_1^2), (-\operatorname{div}\sigma(\eta_0^1), \\ &\sigma_S(\eta_0^1) - \overline{\operatorname{div}_T \sigma^0_T(\eta_0^2)}, \sigma_\nu(\eta_0^1) + \sigma^0_T(\eta_0^2) : \partial_m \nu - \Delta_T \eta^2_{0\nu})\Big) \end{aligned} \tag{4.26}$$

et

$$B^*(\eta_0, \eta_1) = \left(\mu(\partial_\nu \eta^1_{0T})_{|\Gamma_0} + (2\mu+\lambda)(\partial_\nu \eta^1_{0\nu})_{|\Gamma_0}\nu, \eta^2_{0|\Gamma_1}\right) \tag{4.27}$$

où $\eta_0 = (\eta_0^1, \eta_0^2)$ et $\eta_1 = (\eta_1^1, \eta_1^2)$.

On pose $\varphi = (\xi, \xi')$, $\varphi^0 = (\xi^0, \xi^1)$ ; le problème (4.24) s'écrit alors :

$$\varphi' = -A^*\varphi, \qquad \varphi(0) = \varphi^0, \qquad \Psi = B^*\varphi. \tag{4.28}$$

On montre aisément que :

**Proposition 4.6.** *$A^*$ engendre un groupe continu dans $H'$.*

**Proposition 4.7.** *Il existe un opérateur linéaire borné $E : G \to H$ tel que $B^* = E^* A^*$.*

*Preuve.* Soit $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in G = \mathbb{L}^2(\Gamma_0) \times \mathbb{H}^{-1}(\Gamma_1)$ ; on définit l'opérateur $E : G \longrightarrow H$ par : $E\mathbf{u} = E(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = ((0,0), (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2))$ où $\mathbf{v}_1$ est la solution du problème (4.29) suivant et $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{1|\Gamma_1}$

$$\begin{cases} \operatorname{div}\sigma(\mathbf{v}_1) = 0 & \text{dans} & \Omega, \\ \mathbf{v}_1 = -\mathbf{u}_1 & \text{sur} & \Gamma_0, \\ \sigma_S(\mathbf{v}_1) - \overline{\operatorname{div}_T \sigma^0_T(\mathbf{v}_1)} = \mathbf{u}_{2T} & \text{sur} & \Gamma_1, \\ \sigma_\nu(\mathbf{v}_1) + \sigma^0_T(\mathbf{v}_1) : \partial_m \nu - \Delta_T v_{1\nu} = \mathbf{u}_{2\nu} & \text{sur} & \Gamma_1. \end{cases} \tag{4.29}$$

La solution $\mathbf{v}_1$ de (4.29) est définie par transposition :

$$\int_\Omega \mathbf{f}\mathbf{v}_1 dx = \int_{\Gamma_0} (\mu \mathbf{u}_{1T}\partial_\nu \mathbf{v}_T + (2\mu+\lambda)u_{1\nu}\partial_\nu v_\nu)\, d\Gamma + (\mathbf{u}_2,\mathbf{v})_{\mathbb{H}^{-1}(\Gamma_1),\mathbb{H}^1_0(\Gamma_1)}\,,\ \forall \mathbf{f}\in \mathbb{L}^2(\Omega) \tag{4.30}$$

où $\mathbf{v}$ est la solution du problème :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\sigma(\mathbf{v}) = \mathbf{f} & \text{dans} \quad \Omega,\\ \mathbf{v}=0 & \text{sur} \quad \Gamma_0,\\ \sigma_S(\mathbf{v}) - \overline{\operatorname{div}_T \sigma^0_T(\mathbf{v})} = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1,\\ \sigma_\nu(\mathbf{v}) + \sigma^0_T(\mathbf{v}) : \partial_m \nu - \Delta_T v_\nu = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1. \end{cases} \tag{4.31}$$

Le problème (4.31) a pour formulation variationnelle :

$$\int_\Omega \mathbf{f}\mathbf{w} dx = \int_\Omega \sigma(\mathbf{v}) : \epsilon(\mathbf{w}) dx + \int_{\Gamma_1} \sigma^0_T(\mathbf{v}) : \epsilon^0_T(\mathbf{w}) d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \nabla_T v_\nu \nabla_T w_\nu d\Gamma,\ \forall \mathbf{w}\in\mathcal{K}. \tag{4.32}$$

On rappelle que $\mathcal{K} = \{\mathbf{v}\in\mathbb{H}^1(\Omega) : \mathbf{v}_{|\Gamma_0} = 0\ ;\ \mathbf{v}_{|\Gamma_1}\in\mathbb{H}^1(\Gamma_1)\}$ et :

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{K}} = \left(\int_\Omega \sigma(\mathbf{v}) : \epsilon(\mathbf{v}) dx + \int_{\Gamma_1} \left(\sigma^0_T(\mathbf{v}) \ : \epsilon^0_T(\mathbf{v}) + |\nabla_T v_\nu|^2\right) d\Gamma\right)^{\frac12}.$$

Le problème (4.32) admet une solution unique $\mathbf{v}\in\mathcal{K}$ et on a $\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{K}} \le C\|\mathbf{f}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$. D'autre part $(\mathbf{v},\mathbf{v}_{|\Gamma_1})\in D(\mathcal{A})$, d'où $\mathbf{v}\in\mathbb{H}^2(\Omega))$ et

$$\|\mathbf{v}_{|\Gamma_1}\|_{\mathbb{H}^{\frac32}(\Gamma_1)} + \|(\partial_\nu \mathbf{v})_{|\Gamma_0}\|_{\mathbb{H}^{\frac12}(\Gamma_0)} \le C\|\mathbf{f}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$$

ce qui donne un sens au second membre de (4.30) et montre que :

$$\left|\int_{\Gamma_0} (\mu \mathbf{u}_{1T}\partial_\nu \mathbf{v}_T + (2\mu+\lambda)u_{1\nu}\partial_\nu v_\nu)\, d\Gamma + \langle u_2,\mathbf{v}\rangle_{\mathbb{H}^{-1}(\Gamma_1),\mathbb{H}^1_0(\Gamma_1)}\right| \le C\left(\|\mathbf{u}_1\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_0)} + \|\mathbf{u}_2\|_{\mathbb{H}^{-1}(\Gamma_1)}\right)\|\mathbf{f}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$$

d'où l'existence et l'unicité d'un élément $\mathbf{v}_1\in\mathbb{L}^2(\Omega)$ **vérifiant** (4.30) et tel que :

$$\|\mathbf{v}_1\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \le C\|\mathbf{u}\|_G. \tag{4.33}$$

On montre que $\mathbf{v}_1$ est solution, dans un sens qui sera précisé, de (4.29).

Si on prend $\mathbf{v}\in\mathcal{D}(\Omega)$ dans (4.30) on obtient : $\operatorname{div}\sigma(\mathbf{v}_1) = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ ; $\mathbf{v}_1$ est donc un élément de $H(\operatorname{div}\sigma,\Omega)$ ; d'après la remarque (2.4) $\mathbf{v}_{1|\Gamma}$ et $(\sigma(\mathbf{v}_1).\nu)_{|\Gamma}$ sont définis comme éléments de $\mathbb{H}^{-\frac12}(\Gamma)$ et $\mathbb{H}^{-\frac32}(\Gamma)$ respectivement et on a

$$\langle \mathbf{v}_1, \sigma(\mathbf{w}).\nu\rangle_{\mathbb{H}^{-\frac12}(\Gamma),\mathbb{H}^{\frac12}(\Gamma)} - \langle \sigma(\mathbf{v}_1).\nu, \mathbf{w}\rangle_{\mathbb{H}^{-\frac32}(\Gamma),\mathbb{H}^{\frac32}(\Gamma)} = \int_\Omega \mathbf{v}_1 \operatorname{div}\sigma(\mathbf{w}) dx, \quad \forall \mathbf{w}\in\mathbb{H}^2(\Omega).$$

Soit $k\in\mathcal{D}(\Gamma_0)$ et $\mathbf{w}\in\mathbb{H}^2(\Omega)$ tels que : $\mathbf{w}_{|\Gamma}=0$, $(\sigma(\mathbf{w}).\nu)_{|\Gamma_0} = k$, et $(\sigma(\mathbf{w}).\nu)_{|\Gamma_1} = 0$. On a alors sur $\Gamma_1$ :

$$\sigma_S(\mathbf{w}) - \overline{\operatorname{div}_T \sigma^0_T(\mathbf{w})} = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_\nu(\mathbf{w}) - \sigma^0_T(\mathbf{w}) : \partial_m \nu - \Delta_T w_\nu = 0.$$

On peut alors prendre $\mathbf{v}=\mathbf{w}$ dans (4.30) ; en tenant compte de la remarque (2.4) on obtient :

$$\int_\Omega \mathbf{v}_1 \operatorname{div}\sigma(\mathbf{w}) dx = -\int_{\Gamma_0} (\mu \mathbf{u}_{1T}\partial_\nu \mathbf{w}_T + (2\mu+\lambda)u_{1\nu}\partial_\nu w_\nu) d\Gamma = \langle \mathbf{v}_1, k\rangle_{\mathbb{H}^{-\frac12}(\Gamma_0),\mathbb{H}^{\frac12}(\Gamma_0)}.$$

La définition de $\mathbf{w}$ donne $\mu\partial_\nu \mathbf{w}_T = k_T$ et $(2\mu+\lambda)\partial_\nu w_\nu = k_\nu$ sur $\Gamma_0$ ; d'où :

$$\langle \mathbf{v}_1, k\rangle_{\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0),\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} = -\int_{\Gamma_0} \mathbf{u}_1\, k\, d\Gamma.$$

Comme $k$ est arbitraire dans $\mathcal{D}(\Gamma_0)$ il s'ensuit que $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{u}_1$ sur $\Gamma_0$ au sens de $\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$ ; $\mathbf{v}_{1|\Gamma_0}$ est donc un élément de $\mathbb{L}^2(\Gamma_0)$.

Soient $h \in \mathcal{D}(\Gamma_1)$ et $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ tels que :

$$\mathbf{w}_{1|\Gamma_0} = 0, \qquad \mathbf{w}_{1|\Gamma_1} = -h, \qquad (\sigma(\mathbf{w}_1).\nu)_{|\Gamma} = 0$$

et

$$\begin{cases} \mathbf{w}_{2|\Gamma} = 0, \qquad (\sigma(\mathbf{w}_2).\nu)_{|\Gamma_0} = 0, \qquad \sigma_S(\mathbf{w})_{|\Gamma_1} = \overline{\mathrm{div}_T\sigma_T^0(h)}_{|\Gamma_1} \\ \sigma_\nu(\mathbf{w}_2)_{|\Gamma_1} = -(\sigma_T^0(h) : \partial_m\nu)_{|\Gamma_1} + (\Delta_T h_\nu)_{|\Gamma_1}. \end{cases}$$

On pose : $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$ ; alors $\mathbf{w}_{|\Gamma_0} = (\sigma(\mathbf{w}).\nu)_{|\Gamma_0} = 0$, $\sigma_S(\mathbf{w})_{|\Gamma_1} - \overline{\mathrm{div}_T\sigma_T^0(\mathbf{w})}_{|\Gamma_1} = 0$ et $\sigma_\nu(\mathbf{w})_{|\Gamma_1} - (\sigma_T^0(\mathbf{w}) : \partial_m\nu)_{|\Gamma_1} - (\Delta_T w_\nu)_{|\Gamma_1} = 0$ ; on peut alors prendre $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ dans (4.30) ; en tenant de la remarque (2.4) on obtient :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mathbf{v}_1 \,\mathrm{div}\,\sigma(\mathbf{w})dx &= -\int_{\Gamma_0} (\mu \mathbf{u}_{1T}\partial_\nu \mathbf{w}_T + (2\mu+\lambda)u_{1\nu}\partial_\nu w_\nu)\, d\Gamma - \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{w}\rangle_{\mathbb{H}^{-1}(\Gamma_1),\mathbb{H}_0^1(\Gamma_1)} \\ &= \langle \mathbf{v}_1, \sigma(\mathbf{w}).\nu\rangle_{\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1),\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} - \langle \sigma(\mathbf{v}_1).\nu, \mathbf{w}\rangle_{\mathbb{H}^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_1),\mathbb{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)}. \end{aligned}$$

Comme $\mathbf{w} = \sigma(\mathbf{w}).\nu = 0$ sur $\Gamma_0$ alors $\partial_\nu \mathbf{w}_T = 0$ et $\partial_\nu w_\nu = 0$ sur $\Gamma_0$ ; d'où

$$-\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{w}\rangle_{\mathbb{H}^{-1}(\Gamma_1),\mathbb{H}_0^1(\Gamma_1)} = \langle \mathbf{v}_1, \sigma(\mathbf{w}).\nu\rangle_{\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1),\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} - \langle \sigma(\mathbf{v}_1).\nu, \mathbf{w}\rangle_{\mathbb{H}^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_1),\mathbb{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)}.$$

En tenant compte des propriétés de $\mathbf{w}$ on obtient :

$$\begin{aligned} -\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{w}\rangle_{\mathbb{H}^{-1}(\Gamma_1),\mathbb{H}_0^1(\Gamma_1)} &= \langle \mathbf{v}_{1T}, \overline{\mathrm{div}_T\sigma_T^0(\mathbf{w})}\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1;T(\Gamma_1)),H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1;T(\Gamma_1))} - \langle v_{1\nu}, \sigma_T^0(\mathbf{w}) : \partial_m\nu\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1),H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \\ &\quad + \langle v_{1\nu}, \Delta_T w_\nu\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1),H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} - \langle \sigma(\mathbf{v}_1).\nu, \mathbf{w}\rangle_{\mathbb{H}^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_1),\mathbb{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)}. \end{aligned}$$

On définit $\overline{\mathrm{div}_T\sigma_T^0(\mathbf{v}_1)}$ comme élément de $H^{-\frac{5}{2}}(\Gamma_1; T(\Gamma_1))$ par la relation suivante, relation vérifiée si $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ :

$$\begin{aligned} \langle \overline{\mathrm{div}_T\sigma_T^0(\mathbf{v}_1)}, z_T\rangle_{H^{-\frac{5}{2}}(\Gamma_1;T(\Gamma_1)),H^{\frac{5}{2}}(\Gamma_1;T(\Gamma_1))} &= \langle \overline{\mathrm{div}_T\sigma_T^0(z_T)}, \mathbf{v}_{1T}\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1;T(\Gamma_1)),H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1;T(\Gamma_1))} \\ -\langle \sigma_T^0(z_T) : \partial_m\nu, v_{1\nu}\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1),H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}, &\quad \forall z_T \in H^{\frac{5}{2}}(\Gamma_1; T(\Gamma_1)). \end{aligned}$$

On a alors : $\|\overline{\mathrm{div}_T\sigma_T^0(\mathbf{v}_1)}\|_{H^{-\frac{5}{2}}} \leq C\|\mathbf{v}_1\|_{\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}$.

Comme $\mathbf{w} = -h$ sur $\Gamma_1$ et $\mathrm{div}_T\, \sigma_T^0(h) = \mathrm{div}_T\, \sigma_T^0(h_T) + \mathrm{div}_T\, \sigma_T^0(\nu h_\nu)$ alors :

$$\begin{aligned} -\langle \mathbf{u}_2, h\rangle_{\mathbb{H}^{-1}(\Gamma_1),\mathbb{H}_0^1(\Gamma_1)} &= \langle \overline{\mathrm{div}_T\sigma_T^0(\mathbf{v}_1)}, h_T\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1;T(\Gamma_1)),H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1;T(\Gamma_1))} \\ &\quad + \langle \mathbf{v}_{1T}, \overline{\mathrm{div}_T\sigma_T^0(h_\nu\nu)}\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1;T(\Gamma_1)),H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1;T(\Gamma_1))} \\ &\quad - \langle v_{1\nu}, \sigma_T^0(h_\nu\nu) : \partial_m\nu\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1),H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} + \langle \Delta_T v_{1\nu}, h_\nu\rangle_{H^{-\frac{5}{2}}(\Gamma_1),H^{\frac{5}{2}}(\Gamma_1)} \\ &\quad - \langle \sigma(\mathbf{v}_1).\nu, h\rangle_{\mathbb{H}^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_1),\mathbb{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)}. \end{aligned}$$

On définit $\sigma_T^0(\mathbf{v}_1):\partial_m\nu$ comme élément de $H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_1)$ par la relation suivante, relation vérifiée si $\mathbf{v}_1\in\mathbb{H}^2(\Omega)$ :

$$\begin{aligned}\langle\sigma_T^0(\mathbf{v}_1):\partial_m\nu,z_\nu\rangle_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_1),H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)} &= -\langle\mathbf{v}_{1T},\overline{\operatorname{div}_T\sigma_T^0(\nu z_\nu)}\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1;T(\Gamma_1)),H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1;T(\Gamma_1))}\\ &\quad+\langle v_{1\nu},\sigma_T^0(\nu z_\nu):\partial_m\nu\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1),H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)},\quad \forall z_\nu\in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1).\end{aligned}$$

On a alors $\|\sigma_T^0(\mathbf{v}_1):\partial_m\nu\|_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_1)}\le C\|\mathbf{v}_1\|_{\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}$ ; on obtient :

$$\begin{aligned}-\langle\mathbf{u}_2,h\rangle_{\mathbb{H}^{-1}(\Gamma_1),\mathbb{H}_0^1(\Gamma_1)} &= \langle\overline{\operatorname{div}_T\sigma_T^0(\mathbf{v}_1)},h_T\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1;T(\Gamma_1)),H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1;T(\Gamma_1))}-\langle\sigma_T^0(\mathbf{v}_1):\partial_m\nu,h_\nu\rangle_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_1),H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)}\\ &\quad+\langle\Delta_T v_{1\nu},h_\nu\rangle_{H^{-\frac{5}{2}}(\Gamma_1),H^{\frac{5}{2}}(\Gamma_1)}-\langle\sigma(\mathbf{v}_1).\nu,h\rangle_{\mathbb{H}^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_1),\mathbb{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)}\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{cases}-\mathbf{u}_{2T}=\operatorname{div}_T\sigma_T^0(\mathbf{v}_1)-\sigma_S(\mathbf{v}_1)\\ -u_{2\nu}=-\sigma_T^0(\mathbf{v}_1):\partial_m\nu+\Delta_T v_{1\nu}-\sigma_\nu(\mathbf{v}_1)\end{cases}$$

qui sont les conditions vérifiées par $\mathbf{v}_1$ sur $\Gamma_1$ dans (4.29).

On montre maintenant que l'opérateur $E$ est bien défini et est continu.

De la troisième équation de (4.29) il vient :

$$\overline{\operatorname{div}_T\sigma_T^0(\mathbf{v}_{1T})}=\sigma_S(\mathbf{v}_1)-\overline{\operatorname{div}_T\sigma_T^0(v_{1\nu}\nu)}-\mathbf{u}_{2T}.$$

Comme $\sigma_T^0(v_{1\nu}\nu)=v_{1\nu}\nu\,(2\mu(\partial_m\nu)+\lambda^\star\operatorname{tr}(\partial_m\nu)i_2)$ et $\mathbf{v}_1\in H(\operatorname{div}\sigma,\Omega)$ alors $\overline{\operatorname{div}_T\sigma_T^0(v_{1\nu}\nu)}$ est un élément de $H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_1;T(\Gamma_1))$ ; et donc $\overline{\operatorname{div}_T\sigma_T^0(\mathbf{v}_{1T})}\in H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_1;T(\Gamma_1))$ ; la proposition 2.2 donne alors $\mathbf{v}_{1T}\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1;T(\Gamma_1))$ et

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}_{1T}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1;T(\Gamma_1))}&\le C\left(\|\sigma_S(\mathbf{v}_1)\|_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_1;T(\Gamma_1))}+\|v_{1\nu}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}+\|\mathbf{v}_{1T}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1),T(\Gamma_1)}+\|\mathbf{u}_{2T}\|_{H^{-1}(\Gamma_1;T(\Gamma_1))}\right)\\ &\le C\left(\|\mathbf{u}_{2T}\|_{H^{-1}(\Gamma_1;T(\Gamma_1))}+\|\mathbf{v}_1\|_{H(\operatorname{div}\sigma,\Omega)}\right)\le C\|\mathbf{u}\|_G\end{aligned}$$

d'après (4.33), puisque $\operatorname{div}\sigma(\mathbf{v}_1)=0$. Comme $\mathbf{v}_1\in H(\operatorname{div}\sigma,\Omega)$ alors :

$$\Delta_T v_{1\nu}=\sigma_\nu(\mathbf{v}_1)+\sigma_T^0(\mathbf{v}_1):\partial_m\nu-u_{2\nu}\in H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_1)$$

d'où $v_{1\nu}\in\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ et

$$\|v_{1\nu}\|_{\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}\le C\left(\|\sigma_\nu(\mathbf{v}_1)\|_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_1)}+\|\sigma_T^0(\mathbf{v}_1):\partial_m\nu\|_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_1)}\right)+C\left(\|\mathbf{v}_{1\nu}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}+\|u_{2\nu}\|_{H^{-1}(\Gamma_1)}\right).$$

Comme $\operatorname{div}\sigma(\mathbf{v}_1)=0$ et $\|\sigma_T^0(\mathbf{v}_1):\partial_m\nu\|_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_1)}\le C\|\mathbf{v}_1\|_{\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}$ on obtient de la remarque 2.4 :

$$\|v_{1\nu}\|_{\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}\le C\left(\|\mathbf{v}_1\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+\|u_{2\nu}\|_{H^{-1}(\Gamma_1)}\right)\ \le\ C\|\mathbf{u}\|_G.$$

$E$ est donc bien défini et est continu.

On montre que : $B^*=E^*A^*$.

Pour $(\eta_0,\eta_1)\in D(A^*)$ et $u=(u_1,u_2)\in G$ on a

$$\begin{aligned}
\langle E^*A^*(\eta_0,\eta_1),u\rangle_{G',G} &= \langle A^*(\eta_0,\eta_1),Eu\rangle_{H',H}=\langle(-\eta_1,\mathcal{A}\eta_0),((0,0),(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2))\rangle_{H',H}=(\mathcal{A}\eta_0,(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2))_{\mathcal{H}}\\
&= -\int_\Omega \mathbf{v}_1\operatorname{div}\sigma(\eta_0^1)dx+(\sigma(\eta_0^1).\nu,\mathbf{v}_2)_{\Gamma_1}+(\sigma_T^0(\eta_0^1):\partial_m\nu,v_{2\nu})_{\Gamma_1}\\
&\quad -(\overline{\operatorname{div}_T\sigma_T^0(\eta_0^2)},\mathbf{v}_{2T})_{\Gamma_1}-(\Delta_T\eta_{0\nu}^2,v_{2\nu})_{\Gamma_1}=-(\sigma(\eta_0^1).\nu,\mathbf{v}_1)_\Gamma+(\sigma(\mathbf{v}_1).\nu,\eta_0^1)_{\Gamma_1}\\
&\quad +(\sigma(\eta_0^1).\nu,\mathbf{v}_2)_{\Gamma_1}+(\sigma_T^0(\eta_0^1):\partial_m\nu,v_{2\nu})_{\Gamma_1}-(\overline{\operatorname{div}_T\sigma_T^0(\eta_0^2)},\mathbf{v}_{2T})_{\Gamma_1}-(\Delta_T\eta_{0\nu}^2,v_{2\nu})_{\Gamma_1}\\
&= (\sigma(\eta_0^1).\nu,\mathbf{v}_1)_{\Gamma_0}+(\sigma(\mathbf{v}_1).\nu,\eta_0^1)_{\Gamma_1}+(\sigma_T^0(\eta_0^1):\partial_m\nu,v_{2\nu})_{\Gamma_1}-(\overline{\operatorname{div}_T\sigma_T^0(\eta_0^2)},\mathbf{v}_{2T})_{\Gamma_1}\\
&\quad -(\Delta_T\eta_{0\nu}^2,v_{2\nu})_{\Gamma_1}=\int_{\Gamma_0}\left\{\mu u_{1T}\partial_\nu\eta_{0T}^1+(2\mu+\lambda)u_{1\nu}\partial_\nu\eta_{0\nu}^1\right\}d\Gamma+(\sigma(\mathbf{v}_1).\nu,\eta_0^1)_{\Gamma_1}\\
&\quad +(\sigma_T^0(\eta_0^1):\partial_m\nu,v_{2\nu})_{\Gamma_1}-(\overline{\operatorname{div}_T\sigma_T^0(\eta_0^2)},\mathbf{v}_{2T})_{\Gamma_1}-(\Delta_T\eta_{0\nu}^2,v_{2\nu})_{\Gamma_1}.
\end{aligned}$$

Les définitions de $\operatorname{div}_T\sigma_T^0(\mathbf{v}_1)$, de $\sigma_T^0(\mathbf{v}_1):\partial_m\nu$ et (4.29) donnent :

$$\begin{aligned}
(\sigma_S(\mathbf{v}_1),\eta_{0T}^1)_{\Gamma_1} &= (\overline{\operatorname{div}_T\sigma_T^0(\mathbf{v}_1)}+u_{2T},\eta_{0T}^1)_{\Gamma_1}=(\mathbf{v}_{1T},\overline{\operatorname{div}_T\sigma_T^0(\eta_{0T}^1)})_{\Gamma_1}-(v_{1\nu},\sigma_T^0(\eta_{0T}^1):\partial_m\nu)_{\Gamma_1}+(u_{2T},\eta_{0T}^1)_{\Gamma_1}\\
(\sigma_\nu(\mathbf{v}_1),\eta_{0\nu}^1)_{\Gamma_1} &= (-\sigma_T^0(\mathbf{v}_1):\partial_m\nu+\Delta_T v_{1\nu}+u_{2\nu},\eta_{0\nu}^1)_{\Gamma_1}\\
&= (\mathbf{v}_{1T},\overline{\operatorname{div}_T\sigma_T^0(\eta_{0\nu}^1\nu)})_{\Gamma_1}-(v_{1\nu},\sigma_T^0(\eta_{0\nu}^1):\partial_m\nu)_{\Gamma_1}+(\Delta_T v_{1\nu}+u_{2\nu},\eta_{0\nu}^1)_{\Gamma_1}
\end{aligned}$$

d'où

$$(\sigma(\mathbf{v}_1).\nu,\eta_0^1)_{\Gamma_1}=(\mathbf{v}_{1T},\overline{\operatorname{div}_T\sigma_T^0(\eta_0^1)})_{\Gamma_1}-(v_{1\nu},\sigma_T^0(\eta_0^1):\partial_m\nu)_{\Gamma_1}+(\Delta_T v_{1\nu},\eta_{0\nu}^1)_{\Gamma_1}+(u_2,\eta_0^1)_{\Gamma_1}$$

et

$$\langle E^*A^*(\eta_0,\eta_1),u\rangle_{G',G}=\int_{\Gamma_0}\left\{\mu u_{1T}\partial_\nu\eta_{0T}^1+(2\mu+\lambda)u_{1\nu}\partial_\nu\eta_{0\nu}^1\right\}d\Gamma+(u_2,\eta_0^1)_{\Gamma_1}=\langle B^*(\eta_0,\eta_1),u\rangle_{G',G}.$$

**Conclusion.** La solution du problème (1.6) est définie par transposition. Soit $\mathbf{u}=(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)\in G$ et $\xi=(\xi_1,\xi_2)$ la solution du problème (4.24). On multiplie : la première équation de (1.6) par $\xi_1$ et on intègre formellement sur $Q_T$ ; on obtient :

$$\left[\int_\Omega(\mathbf{y}_1'\xi_1-\mathbf{y}_1\xi_1')dx\right]_0^T+\int_{\Sigma_T}((\sigma(\xi_1).\nu)\mathbf{y}_1-(\sigma(\mathbf{y}_1).\nu)\xi_1)\,d\Sigma=0. \tag{4.34}$$

La troisième équation de (1.6) par $\xi_{2T}$ et on intègre formellement sur $\Sigma_{1T}$ ; on obtient :

$$\begin{aligned}
\left[\int_{\Gamma_1}(\mathbf{y}_{2T}'\xi_{2T}-\mathbf{y}_{2T}\xi_{2T}')d\Gamma\right]_0^T &+ \int_{\Sigma_{1T}}\mathbf{y}_{2T}\xi_{2T}''d\Sigma+\int_{\Sigma_{1T}}\sigma_T^0(\mathbf{y}_2):\pi\partial_m\xi_{2T}\pi d\Sigma\\
&+ \int_{\Sigma_{1T}}\sigma_S(\mathbf{y}_1)\xi_{2T}d\Sigma=\int_{\Sigma_{1T}}\mathbf{u}_{2T}\xi_{2T}\,d\Sigma.
\end{aligned}\tag{4.35}$$

La quatrième équation de (1.6) par $\xi_{2\nu}$ et on intègre formellement sur $\Sigma_{1T}$ ; on obtient :

$$\begin{aligned}
\left[\int_{\Gamma_1}(y_{2\nu}'\xi_{2\nu}-y_{2\nu}\xi_{2\nu}')d\Gamma\right]_0^T &+ \int_{\Sigma_{1T}}y_{2\nu}\xi_{2\nu}''d\Sigma+\int_{\Sigma_{1T}}\xi_{2\nu}\sigma_T^0(\mathbf{y}_2):\partial_m\nu d\Sigma+\int_{\Sigma_{1T}}\sigma_\nu(\mathbf{y}_1)\xi_{2\nu}d\Sigma\\
&+ \int_{\Sigma_{1T}}\nabla_T\xi_{2\nu}\nabla_T y_{2\nu}d\Sigma=\int_{\Sigma_{1T}}u_{2\nu}\xi_{2\nu}\,d\Sigma.
\end{aligned}\tag{4.36}$$

La somme de (4.34, 4.35) et (4.36) et les conditions aux limites vérifiées, (formellement), par $\mathbf{y}$ et $\xi$ donnent :

$$(\xi_1(T), y_1'(T))_\Omega - (\xi_1'(T), \mathbf{y}_1(T))_\Omega + (\xi_2(T), y_2'(T))_{\Gamma_1} - (\xi_2'(T), \mathbf{y}_2(T))_{\Gamma_1} = (\xi_1(0), y_1'(0))_\Omega - (\xi_1'(0), \mathbf{y}_1(0))_\Omega$$
$$+(\xi_2(0), y_2'(0))_{\Gamma_1} - (\xi_2'(0), \mathbf{y}_2(0))_{\Gamma_1} + \int_0^T \left((\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)(s), \left(\mu(\partial_\nu \xi_{1T})_{|\Gamma_0} + (2\mu+\lambda)(\partial_\nu \xi_{1\nu})_{|\Gamma_0}\nu, \xi_{2|\Gamma_1}\right)(s)\right)_{G,G'} ds. \tag{4.37}$$

On pose :

$$\begin{aligned} x &= (\mathbf{y}', -\mathbf{y}), \quad \varphi = (\xi, \xi'), \quad x^0 = (\mathbf{y}^1, -\mathbf{y}^0), \quad \varphi^0 = (\xi^0, \xi^1) \\ \psi &= B^*\varphi = ((\mu(\partial_\nu \xi_{1T})_{|\Gamma_0} + (2\mu+\lambda)(\partial_\nu \xi_{1\nu})_{|\Gamma_0}\nu, \xi_{2|\Gamma_1}). \end{aligned}$$

La relation (4.37) s'écrit alors :

$$\langle x(T), \varphi(T)\rangle_{H,H'} = \langle x^0, \varphi^0\rangle_{H,H'} + \int_0^T \langle \mathbf{u}(s), \psi(s)\rangle_{G,G'}\, ds. \tag{4.38}$$

Le théorème 1.2 découle maintenant des propositions 4.6, 4.7, de (4.23) et de la méthode générale de stabilisation développée dans [17].

Considérons en effet le problème :

$$x' = Ax + Bu, \qquad\qquad x(0) = x^0, \tag{4.39}$$

où $A$ et $B$ sont les opérateurs définis en (4.26) et (4.27) respectivement.

On multiplie l'équation de (4.39) par la solution $\varphi$ du problème (4.28) qui est équivalent au problème (4.24) ; une intégration formelle entre 0 et T donne (4.38). Comme les problèmes (4.24) et (4.28) sont équivalents il s'ensuit que le problème (1.6) est équivalent au problème (4.39).

On définit la solution de (4.39) comme une fonction continue $x : \mathbb{R}^+ \to H$ qui vérifie (4.38) pour tout $\varphi^0 \in H'$ et tout $T > 0$. On montre que pour tout $x^0 \in H$ et tout $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; G)$ le problème (4.39) admet une solution unique $x$ qui vérifie :

$$\|x\|_{L^\infty(0,T;H)} \le c_T \left(\|x^0\|_H + \|u\|_{L^2(0,T;G)}\right), \quad \forall T > 0.$$

Pour $\omega > 0$ et $T > T_0$ fixés la relation :

$$\langle \Lambda_\omega \varphi_0, \psi_0\rangle_{H,H'} := \int_0^T e^{-2\omega s} \langle JB^\star e^{-sA^\star}\varphi_0, B^\star e^{-sA^\star}\psi_0\rangle_{G,G'} \tag{4.40}$$

où $J : G' \to G$ désigne l'isomorphisme canonique de Riesz, définit un isomorphisme positif et auto-adjoint de $H' = \mathcal{W} \times \mathbb{H}$ sur $H = \mathcal{W}' \times \mathbb{H}$ (*cf.* [17]).

On pose :

$$F = -JB^\star \Lambda_\omega^{-1}.$$

On sait de [17] que $A + BF$ engendre un sous-groupe fortement continu dans $H$ et qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x^0 \in H$ la solution $x$ du problème à boucle fermée :

$$x' = Ax + BFx, \qquad\qquad x(0) = x^0, \tag{4.41}$$

vérifie l'estimation :

$$\|x(t)\|_H \le M\|x^0\|_H\, e^{-\omega t}, \quad \forall t \ge 0, \quad \forall x^0 \in H. \tag{4.42}$$

On écrit l'opérateur $\Lambda_\omega^{-1}$ : $H = \mathcal{W}' \times \mathbb{H} \to H' = \mathcal{W} \times \mathbb{H}$ sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} P & , & -Q \\ -R & , & S \end{pmatrix}$$

avec $P : \mathcal{W}' \to \mathcal{W}$ et $Q : \mathbb{H} \to \mathcal{W}$.

Le feedback $u = (u_1, u_2)$ est donné par :

$$u = -J\,B^\star\,\Lambda_\omega^{-1}\,x$$

avec $x = (y', -y)$ ce qui avec (4.42) donne le théorème 1.2.

Remarquons que pour $\omega = 0$ l'opérateur $\Lambda_\omega$ coinside avec l'opérateur $\Lambda$ défini dans la méthode d'unicité hilbertienne (HUM) de Lions (*cf.* [25]).

Le feedback $u = Fx$ où $x$ est la solution du problème (4.39) est celui qui minimise la fonction coût :

$$\int_0^T \Big(2\omega\langle\Lambda_\omega^{-1}x(t), x(t)\rangle_{H',H} + e^{-2\omega T}\|B^\star e^{-TA^\star}\Lambda_\omega^{-1}x(t)\|_{G'}^2 + \|u(t)\|_G^2\Big)\,dt \tag{4.43}$$

parmi les couples $(x, u)$ qui vérifient (4.39) (*cf.* [17]).

La minimisation de (4.43) conduit au feedback $F = -JB^\star P$ où $P$ est l'unique solution de l'équation de Riccati :

$$-A^\star P - PA + PBJB^\star P = 2\omega\Lambda_\omega^{-1} + e^{-2\omega T}\Lambda_\omega^{-1}e^{-TA}BJB^\star e^{-TA^\star}\Lambda_\omega^{-1}.$$

L'opérateur $P = \Lambda_\omega^{-1}$ vérifie cette équation (*cf.* [17]).

Pour donner la forme explicite du feedback on résoud le problème :

$$\begin{cases} \xi_1'' - \operatorname{div}\sigma(\xi_1) = 0 & \text{dans} \quad \Omega\times\mathbb{R}^+, \\ \xi_1 = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0\times\mathbb{R}^+, \\ \xi_{2T}'' + \sigma_S(\xi_1) - \overline{\operatorname{div}_T\sigma_T^0(\xi_2)} = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1\times\mathbb{R}^+, \\ \xi_{2\nu}'' + \sigma_\nu(\xi_1) + \sigma_T^0(\xi_2) : (\partial_m\nu) - \Delta_T\xi_{2\nu} = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1\times\mathbb{R}^+, \\ \xi_1(0) = \xi_1^0, \qquad \xi_1'(0) = \xi_1^1 & \text{dans} \quad \Omega, \\ \xi_2(0) = \xi_2^0, \qquad \xi_2'(0) = \xi_2^1 & \text{sur} \quad \Gamma_1, \\ \Psi = (\mu(\partial_\nu\xi_{1T})_{\Gamma_0} + (2\mu+\lambda)(\partial_\nu\xi_{1\nu})_{\Gamma_0}\nu, \xi_{2|\Gamma_1}), & \end{cases} \tag{4.44}$$

avec $(\xi^0, \xi^1) \in \mathcal{W}\times\mathbb{H}$, puis le problème :

$$\begin{cases} z_1'' - \operatorname{div}\sigma(z_1) = 0 & \text{dans} \quad \Omega\times(0,T), \\ z_1(s) = -e^{-2\omega s}(\mu\partial_\nu\xi_{1T}(s) + (2\mu+\lambda)\partial_\nu\xi_{1\nu}(s)), & \text{sur} \quad \Gamma_0\times(0,T), \\ z_{2T}''(s) + \sigma_S(z_1(s)) - \overline{\operatorname{div}_T\sigma_T^0(z_2(s))} = e^{-2\omega s}\xi_{2T}(s) & \text{sur} \quad \Gamma_1\times(0,T), \\ z_{2\nu}''(s) + \sigma_\nu(z_1(s)) + \sigma_T^0(z_2(s)) : (\partial_m\nu) - \Delta_T z_{2\nu}(s) = e^{-2\omega s}\xi_{2\nu}(s) & \text{sur} \quad \Gamma_1\times(0,T), \\ z_1(T) = 0, \quad z_1'(T) = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ z_2(T) = 0, \quad z_2'(T) = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1, \end{cases} \tag{4.45}$$

avec $T > T_0$.

Nous savons de (4.40) que l'opérateur $\Lambda_\omega$ est un isomorphisme de $H'$ sur $H$ défini par :

$$\Lambda_\omega\varphi^0 = \int_0^T e^{-2\omega s}\,e^{-sA}\,BJB^\star\,e^{-sA^\star}\,\varphi^0\,ds, \qquad \forall\,\varphi^0\in H' \tag{4.46}$$

avec $T > T_0$.

On pose : $\varphi = (\xi, \xi')$, $\varphi^0 = (\xi^0, \xi^1)$, $z = (z_1, z_2)$, $\theta = (z', -z)$.

Comme les problèmes (1.6) et (4.39) sont équivalents alors le problème (4.45) s'écrit :

$$\theta' = A\,\theta + e^{-2\omega s}\,BJB^\star\,\varphi(s), \qquad \theta(T) = 0.$$

On obtient :

$$\int_0^T e^{-sA}\,\theta'(s)ds = \int_0^T e^{-sA}\,A\,\theta(s)\,ds + \int_0^T e^{-2\omega s}\,e^{-sA}\,BJB^\star\,\varphi(s)ds$$

ou encore :

$$\int_0^T \big((e^{-sA}\,\theta(s))' + e^{-sA}\,A\,\theta(s)\big)\,ds = \int_0^T e^{-sA}\,A\,\theta(s)\,ds + \int_0^T e^{-2\omega s}\,e^{-sA}\,BJB^\star\,\varphi(s)ds.$$

Sachant que $\theta(T) = 0$ on obtient :

$$\theta(0) = -\int_0^T e^{-2\omega s}\,e^{-sA}\,BJB^\star\,\varphi(s)ds.$$

Comme les problèmes (4.28) et (4.44) sont équivalents on obtient :

$$\theta(0) = -\int_0^T e^{-2\omega s}\,e^{-sA}\,BJB^\star e^{-s\,A^\star}\,\varphi^0\,ds.$$

De (4.46) il vient alors :

$$\Lambda_\omega\,\varphi^0 = -\theta(0) = (-z'(0), z(0)).$$

L'isomorphisme $\Lambda_\omega : \mathcal{W}\times\mathbb{H} \to \mathcal{W}'\times\mathbb{H}$ est donc défini par :

$$\Lambda_\omega\,(\xi^0, \xi^1) = (-z'(0), z(0)).$$

Nous savons que le feedbck est donné par :

$$u = -J\,B^\star\,\Lambda_\omega^{-1}\,(y'(t), -y(t)) = J\,B^\star\,\Lambda_\omega^{-1}\,(-y'(t), y(t)).$$

En posant $(\xi^0, \xi^1) = \Lambda_\omega^{-1}\,(-y'(t), y(t))$ on obtient :

$$u(t) = (\mu(\partial_\nu\xi^0_{1T})_{\Gamma_0} + (2\mu+\lambda)(\partial_\nu\xi^0_{1\nu})_{\Gamma_0}\nu, \xi^0_{2\Gamma_1}) \quad \text{avec} \quad (\xi^0, \xi^1) = \Lambda_\omega^{-1}(-y'(t), y(t)), \quad \forall t > 0. \tag{4.47}$$

## 5. Démonstration du théorème 1.3

On reprend le problème (1.8) et les notations données en introduction.

$\tilde{\mathcal{A}}$ est à résolvante compacte ; ses valeurs propres sont alors isolées ayant $\infty$ comme seul point d'accumulation possible ; comme il engendre un semi-groupe contractant, ses valeurs propres sont à parties réelles négatives. Soient $S(t)$ le sous-groupe engendré par $\tilde{\mathcal{A}}$, $\sigma(\tilde{\mathcal{A}})$ le spectre de $\tilde{\mathcal{A}}$, $\omega$ =sup$\{Re(\lambda), \lambda \in \sigma(\tilde{\mathcal{A}})\}$ et $\omega_0 = \lim_{t\to+\infty} t^{-1}\mathrm{Log}\|S(t)\|$, on a $\omega_0 \geq \omega$ (*cf.* [10]). On va montrer que les valeurs propres de $\tilde{\mathcal{A}}$ sont aussi proches que l'on veut de l'axe imaginaire, ce qui donnera $\omega_0 \geq 0$ et terminera la démonstration.

On considère $\tilde{\mathcal{A}}$ comme une perturbation de l'opérateur $\mathcal{A}$ défini par : $\mathcal{A}(\mathbf{v}, z) = (z, \Delta\mathbf{v})$ et de domaine :

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{(\mathbf{v}, z) \in V\times V\ :\ \Delta\mathbf{v} \in L^2(\Omega),\ \partial_\nu\mathbf{v} - \Delta_T\mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}\cdot$$

Soit $\lambda$ une valeur propre de $\mathcal{A}$ correspondant à la fonction propre $v$ ; on a

$$\begin{cases} \Delta v = \lambda^2 v & \text{dans} \quad \Omega, \\ v = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0, \\ \partial_\nu v - \Delta_T v = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1. \end{cases}$$

On cherche des fonctions propres sous la forme : $v(x,y) = f(x)f(y)$ ; on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{f''(x)}{f(x)} + \dfrac{f''(y)}{f(y)} = \lambda^2, & \dfrac{f''(y)}{f(y)} = \dfrac{f'(\pi)}{f(\pi)}, \\ \dfrac{f''(x)}{f(x)} = \dfrac{f'(\pi)}{f(\pi)}, & f(0) = 0. \end{cases}$$

En posant $\alpha^2 = \frac{f'(\pi)}{f(\pi)}$ on obtient $\lambda^2 = 2\alpha^2$ et $f(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}$ où $C_1$ et $C_2$ sont des constantes. Les conditions :

$$\frac{f'(\pi)}{f(\pi)} = \alpha^2, \qquad f(0) = 0,$$

donnent le système :

$$\begin{cases} (\alpha - 1)C_1 e^{\alpha\pi} - (\alpha + 1)C_2 e^{-\alpha\pi} = 0, \\ C_1 + C_2 = 0. \end{cases}$$

En annulant le determinant de ce système on obtient l'équation aux valeurs propres pour $\mathcal{A}$ :

$$e^{\lambda\pi\sqrt{2}} = (\lambda + \sqrt{2})(\lambda - \sqrt{2})^{-1}.$$

$\mathcal{A}$ engendre un semi-groupe unitaire ; ses valeurs propres sont donc imaginaires pures ; en posant $\lambda = i\mu\frac{\sqrt{2}}{2}$, $i^2 = -1$ et $\mu \in \mathbb{R}$ on obtient $\operatorname{tg}(\mu\pi) = 4\mu(1-\mu^2)^{-1}$ ; on a alors une suite $\mu_n$ telle que $|\mu_n| \to \infty$ lorsque $n \to \infty$ ; on a aussi $|\mu_n - n| \to 0$ lorsque $|n| \to \infty$. En effet

$$\operatorname{tg}(\mu_n\pi) - \operatorname{tg}(n\pi) = (\mu_n - n)\pi \cos^{-2} c_n = 4\mu_n(1-\mu_n^2)^{-1}$$

d'où :

$$|\mu_n - n| \le |4\mu_n(\pi(1-\mu_n^2))^{-1}| \to 0 \ \text{ lorsque } \ |n| \to +\infty.$$

Soit $\lambda$ une valeur propre de $\tilde{\mathcal{A}}$ correspondant à la fonction propre $v$ on a :

$$\begin{cases} \Delta v = \lambda^2 v & \text{dans} & \Omega, \\ v = 0 & \text{sur} & \Gamma_0, \\ \partial_\nu v - \Delta_T v + \lambda v = 0 & \text{sur} & \Gamma_1. \end{cases}$$

En procédant comme ci-dessus pour l'opérateur $\mathcal{A}$ on aboutit à l'équation aux valeurs propres pour $\tilde{\mathcal{A}}$ suivante :

$$e^{\lambda\pi\sqrt{2}} = (\lambda + \sqrt{2} - 2)(\lambda - \sqrt{2} - 2)^{-1}.$$

$\tilde{\mathcal{A}}$ engendre un semi-groupe contractant ; ses valeurs propres sont donc à parties réelles négatives ; on pose :

$$\begin{cases} g_1(\lambda) = e^{\lambda\pi\sqrt{2}} - (\lambda + \sqrt{2})(\lambda - \sqrt{2})^{-1}, \\ g_2(\lambda) = e^{\lambda\pi\sqrt{2}} - (\lambda + \sqrt{2} - 2)(\lambda - \sqrt{2} - 2)^{-1}. \end{cases}$$

On sait que les zéros de $g_1$ forment une suite $(\lambda_n)$ de nombres imaginaires pures et

$$|\lambda_n - in\sqrt{2}| \to 0 \ \text{ lorsque } \ |n| \to +\infty.$$

On termine la démonstration en montrant que les zéros de $g_2$ sont aussi proches que l'on veut de ceux de $g_1$. On considère un contour $\gamma_n$ ayant en son intérieur un seul $\lambda_n$ et un seul $in\sqrt{2}$ ; on prend par exemple

$$\gamma_n = \{z \in : |z - in\sqrt{2}| = \rho\}$$

avec $\rho$ assez petit $|\lambda_n - in\sqrt{2}| < \rho$ et $n$ assez grand ; pour $\lambda \in \gamma_n$ on a $|\lambda - \lambda_n| \to \rho$. On montre que pour $n$ assez grand on a :

$$|g_1(\lambda) - g_2(\lambda)| < |g_1(\lambda)|, \quad \forall \lambda \in \gamma_n$$

comme on peut prendre $\rho$ aussi petit que l'on veut, le résultat découle alors du théorème de Rouché. On a

$$g_1(\lambda) - g_2(\lambda) = 4\sqrt{2}(\lambda - \sqrt{2})^{-1}(\lambda - \sqrt{2} - 2)^{-1}.$$

On montre alors que

$$|4\sqrt{2}(\lambda - \sqrt{2})^{-1}(\lambda - \sqrt{2} - 2)^{-1}| < |e^{\lambda\pi\sqrt{2}} - (\lambda + \sqrt{2})(\lambda - \sqrt{2})^{-1}|, \quad \forall \lambda \in \gamma_n.$$

On a

$$e^{\lambda\pi\sqrt{2}} = e^{\lambda_n\pi\sqrt{2}} + (\lambda - \lambda_n)\pi\sqrt{2}e^{\theta_n\pi\sqrt{2}}$$

avec

$$\theta_n = \alpha_n + i\beta_n$$

et il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha_n > \alpha$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ ; alors

$$\begin{aligned}
e^{\lambda\pi\sqrt{2}} - (\lambda + \sqrt{2})(\lambda - \sqrt{2})^{-1} &= e^{\lambda_n\pi\sqrt{2}} - (\lambda + \sqrt{2})(\lambda - \sqrt{2})^{-1} + (\lambda - \lambda_n)\pi\sqrt{2}e^{\theta_n\pi\sqrt{2}} \\
&= (\lambda_n + \sqrt{2})(\lambda_n - \sqrt{2})^{-1} - (\lambda + \sqrt{2})(\lambda - \sqrt{2})^{-1} + (\lambda - \lambda_n)\pi\sqrt{2}e^{\theta_n\pi\sqrt{2}} \\
&= 2\sqrt{2}(\lambda - \lambda_n)(\lambda - \sqrt{2})^{-1}(\lambda_n - \sqrt{2})^{-1} + (\lambda - \lambda_n)\pi\sqrt{2}e^{\theta_n\pi\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

alors

$$|e^{\lambda\pi\sqrt{2}} - (\lambda + \sqrt{2})(\lambda - \sqrt{2})^{-1}| \geq |(\lambda - \lambda_n)\pi\sqrt{2}e^{\theta_n\pi\sqrt{2}}| - |2\sqrt{2}(\lambda - \lambda_n)(\lambda - \sqrt{2})^{-1}(\lambda_n - \sqrt{2})^{-1}|$$

Pour $\lambda \in \gamma_n$ on a

$$|\lambda - \lambda_n| \to \rho, \ \ |(\lambda - \lambda_n)(\lambda - \sqrt{2})^{-1}(\lambda_n - \sqrt{2})^{-1}| \to 0, \quad \text{lorsque } \ |n| \to +\infty$$

et il existe $\beta > 0$ tel que $|e^{\theta_n\pi\sqrt{2}}| > \beta \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$. Il existe alors $\delta > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$|e^{\lambda\pi\sqrt{2}} - (\lambda + \sqrt{2})(\lambda - \sqrt{2})^{-1}| > \delta, \ \ \forall \lambda \in \gamma_n, \ \ \forall n \in \mathbb{Z}, \ \ |n| > n_0.$$

Comme d'autre part on a pour $\lambda \in \gamma_n$

$$|4\sqrt{2}(\lambda - \sqrt{2})^{-1}(\lambda - \sqrt{2} - 2)^{-1}| \to 0 \ \text{ lorsque } \ |n| \to +\infty$$

alors pour $|n|$ assez grand

$$|4\sqrt{2}(\lambda - \sqrt{2})^{-1}(\lambda - \sqrt{2} - 2)^{-1}| < |e^{\lambda\pi\sqrt{2}} - (\lambda + \sqrt{2})^{-1}(\lambda - \sqrt{2})^{-1}|, \qquad \forall \lambda \in \gamma_n$$

ce qui termine la démonstration du théorème 1.3.

## Références


[1] F. Alabau et V. Komornik, Observabilité, controlabilité et stabilisation frontière du système d'élasticité linéaire. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **324** (1997) 519–524.

[2] A. Bendali et K. Lemrabet, The effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the Helmholtz equation. *SIAM J. Appl. Math.* **56** (1996) 1664–1693.

[3] R. Bey, A. Heminna et J.-P. Lohéac, Stabilisation frontière du système de l'élasticité. Nouvelle approche. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **330** (2000) 563–566.
[4] F. Bourquin, J.-S. Briffaut et M. Collet, On the feedback stabilization : Komornik's method, in *Proc. of the 2nd international conference on active control in mechanical engineering.* Lyon (1997).
[5] H. Brezis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert.* North Holland, Amsterdam (1973).
[6] R.F. Curtain et H.J. Zwart, *An introduction to infinite dimensional linear systems theory.* Springer-Verlag, Paris.
[7] G. Duvaut et J.L. Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique.* Dunod, Paris (1972).
[8] A. Guesmia, Stabilisation frontière d'un système d'élasticité. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **324** (1997) 1355–1360.
[9] A. Haraux, *Semi-groupes linéaires et équations d'évolutions linéaires périodiques*, Publications du laboratoire d'Analyse Numérique, 78011. Université Pierre et Marie Curie, Paris (1978).
[10] A. Haraux, *Systèmes dynamiques dissipatifs et applications.* Masson, Paris (1991).
[11] A. Heminna, Contrôlabilité exacte d'un problème avec conditions de Ventcel évolutives pour le système linéaire de l'élasticité. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **324** (1997) 195–200.
[12] A. Heminna, Stabilisation de problèmes de Ventcel. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **328** (1999) 1171–1174.
[13] M.A. Horn, Implications of sharp trace regularity results on boundary tabilization of the system of linear elasticity. *J. Math. Anal. Appl.* **223** (1998) 126–150.
[14] T.J.R. Hughes et J.E. Marsden, *Mathematical foundations of elasticity.* Prentice - Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632.
[15] L. Hörmander, *Linear partial differential operators.* Springer-Verlag, Baud (1969).
[16] V. Komornik, *Exact controllability and stabilization ; The multiplier method.* Masson-John Wiley, Paris (1994).
[17] V. Komornik, Stabilisation rapide de problèmes d'évolution linéaires. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **321** (1995) 581–586.
[18] J.E. Lagnese, Boundary stabilization of linear elastodynamic systems. *SIAM J. Control Optim.* **21** (1983) 968–984.
[19] J.E. Lagnese, Uniform asymptotic energy estimates for solutions of the equations of dynamic plane elasticity with nonlinear dissipation at the boundary. *Nonlinear Anal.* **16** (1991) 35–54.
[20] I. Lasiecka et R. Triggiani, Uniform exponential energy decay of wave equations in a bounded region with $L_2(0,\infty;L_2(\Gamma))$-feedback control in the Dirichlet boundary conditions. *J. Differential Equations* **66** (1987) 340–390.
[21] J.P. LaSalle, *Some extensions of Liapounov's second method (1960).*
[22] K. Lemrabet, Problème aux limites de Ventcel dans un domaine non régulier. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **15** (1985) 531–534.
[23] K. Lemrabet, *Étude de divers problèmes aux limites de Ventcel d'origine physique ou mécanique dans des domaines non réguliers.* Thèse, USTHB, Alger (1987).
[24] K. Lemrabet, Problème de Ventcel pour le système de l'élasticité dans un domaine de $\mathbb{R}^3$. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **304** (1987) 151–154.
[25] J.L. Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbation et stabilisation de systèmes distribués.* Masson (1986).
[26] J.L. Lions et E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et leurs applications.* Dunod, Paris (1968).
[27] A. Samarsky et V. Andreev, *Méthodes aux différences pour équations elliptiques.* Éditions de Moscou (1978).
[28] E. Sanchez-Palencia et D. Leguillon, *Computations of singular problems and elasticity.* R.M.A. Masson, Paris (1987).
[29] R. Valid, *La mécanique des milieux continus et le calcul des structures.* Eyrolles, Paris (1977).
[30] A.D Wentzell (Ventcel'), On boundary conditions for multidimensional diffusion processes. *Theor. Probab. Appl.* **4** (1959) 164–177.