COMPOSITIO MATHEMATICA

MARCO A. GARUTI

Prolongement de revêtements galoisiens en géométrie rigide

Compositio Mathematica, tome 104, nº 3 (1996), p. 305-331
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1996__104_3_305_0>

Compositio Mathematica **104:** 305–331, 1996.

Prolongement de revêtements galoisiens en géométrie rigide

MARCO A. GARUTI
Département de Mathematiques, Université Paris-Sud, Orsay, France

Received 30 June, 1995; received in final form 31 October 1995

Abstract. In the first part of the paper we study finite Galois coverings of rigid annuli: we show that, up to finite extension of the ground field, an étale covering of an annulus can be extended to a finite covering of the closed disk, branched at a finite number of points. The proof has recourse to the cohomology of the profinite fundamental group of these spaces.

These results are then applied to the problem of lifting to a complete discrete valuation ring a finite Galois covering of curves over the residue field; cuspidal singularities have to be introduced when the original covering is wildly ramified.

Key words: Galois coverings, fundamental group, profinite groups, rigid analytic geometry, algebraic curves.

Introduction

Soit R un anneau de valuation discrète, complet, de corps résiduel k de caractéristique positive p, algébriquement clos. La valuation définit une topologie totalement discontinue sur le corps des fractions K de R. Néanmoins, grâce à la géométrie rigide de Tate [21], on peut parler d'une géométrie analytique globale sur le corps K.

Dans ce travail, nous étudions des revêtements finis galoisiens de courbes analytiques rigides. Nous considérons le problème suivant:

PROBLÈME 1. *Etant donné un revêtement fini, étale, galoisien de la couronne* $C = \{x \in K : |x| = 1\}$*, est-il possible de le prolonger en un revêtement fini galoisien, éventuellement ramifié, du disque* $D = \{x \in K : |x| \leqslant 1\}$*? Peut-on trouver un tel revêtement ramifié seulement à l'origine?*

Lorsque le degré du revêtement est premier à la caractéristique résiduelle p, la situation ne présente pas de nouveautés par rapport au cas classique (sur le corps des complexes); par contre, en travaillant avec des revêtements de degré multiple de p, on rencontre des phénomènes de ramification sauvage, et on est confronté à des situations complètement différentes suivant la caractéristique de K.

Nous nous sommes interessés seulement aux revêtements *géométriques*, c'est à dire géométriquement irréductibles. Notre résultat est alors le suivant:

THÉORÈME 1. *Pour tout revêtement étale fini galoisien géométrique de la couronne C, il existe une extension finie L/K, telle que ce revêtement se prolonge en un revêtement fini, galoisien, de même groupe, du disque $D \times_K L$, ramifié en un nombre fini de points rationnels sur L.*

Il est intéressant de remarquer que la complexité du groupe G n'intervient que par les groupes d'inertie.

Nous appliquons le résultat de prolongement ci-dessus à une question classique relative aux relèvements de revêtements galoisiens de courbes:

PROBLÈME 2 (cf. Oort [11]). *Soit X une R-courbe propre et lisse, X_k sa fibre spéciale et soit*

$$\rho_k: Y_k \longrightarrow X_k$$

un revêtement génériquement étale, galoisien de courbes lisses sur k. Peut-on trouver un revêtement galoisien de R-courbes lisses

$$\rho: Y \longrightarrow X$$

dont la spécialisation est ρ_k?

Remarque. Si X_k est une courbe lisse sur k, par Grothendieck [6], exp. III, 6.10, on peut trouver une R-courbe formelle et lisse $\mathfrak{X}$ de fibre spéciale X_k. Cette courbe formelle $\mathfrak{X}$ n'est pas unique. Si de plus X_k est une courbe propre et lisse sur k, par le principe GAGA formel (cf. Grothendieck [5], exp. 182, Thm. 4), on peut trouver une R-courbe propre et lisse X se réduisant sur X_k. En particulier donc on veut savoir si, une fois choisi un relèvement X de X_k, il est possible de relever un revêtement galoisien de X_k en un un revêtement galoisien de X.

La réponse à cette question dépend de la ramification de ρ_k. Dans le cas d'un revêtement étale, Grothendieck ([6], I.8.4) a montré que le problème admet une solution unique. Un résultat analogue peut être établit pour des revêtements modérés: tout revêtement fini galoisien modéré de X_k se relève en un revêtement galoisien de X de manière unique une fois relèvé le lieu de la ramification.

Pour des revêtements sauvagement ramifiés la réponse au problème de départ peut être négative. C'est le cas, par exemple, si R est un anneau d'inégale caractéristique, pour le quotient d'une courbe par son groupe total des automorphismes,

$$\rho_k: Y_k \longrightarrow X_k = Y_k/\mathrm{Aut}(Y_k)$$

lorsque ce groupe a plus de $84(g(Y_k) - 1)$ éléments (de telles courbes existent en caractéristique positive, cf. Roquette [15]).

Parfois il est possible de relever le revêtement $Y_k \to X_k$ seulement sur une extension ramifiée de R, ce qui conduit à formuler une variante du probleme (*weak lifting problem*, dans la terminologie de Oort [11]): dans cette direction Oort, Sekiguchi et Suwa [16] ont montré que tout revêtement cyclique de degré p peut être relevé sur l'anneau $W(k)[\zeta]$, où $W(k)$ est l'anneau des vecteurs de Witt de k et ζ une racine primitive p-ième de l'unité.

Le contrexemple ci-dessus montre toutefois que l'on ne peut pas espérer un relèvement pour tout revêtement sauvage en inégale caractéristique, même sur un anneau plus ramifié.

Par contre, nous montrons ici que l'on peut relever 'topologiquement' tout revêtement galoisien dans le sens suivant:

THÉORÈME 2. *Soit X une courbe propre et lisse sur R, et soit*

$$\rho_k : Y_k \to X_k$$

un revêtement fini génériquement étale, galoisien de groupe G de courbes propres et lisses sur k. Il existe alors une extension finie R'/R et un revêtement génériquement étale, galoisien de groupe G

$$\rho' : Y' \to X' = X \times_R R'$$

vérifiant les conditions suivantes:

(1) *Y' est une R'-courbe propre normale.*
(2) *Il existe un G-morphisme ν*

$$\begin{tikzcd} Y_k \arrow[r, "\nu"] \arrow[dr, "\rho_k"'] & Y'_k \arrow[d, "\rho'_k"] \\ & X_k \end{tikzcd}$$

qui est un isomorphisme en dehors du diviseur de la ramification sauvage de ρ_k.

(3) *La fibre spéciale Y'_k est réduite, unibranche et ν est sa normalisation; en particulier Y'_k est homéomorphe à Y_k.*

Le plan du travail est le suivant. L'outil principal pour l'étude des revêtements (d'espaces rigides où de schémas) est le groupe fondamental (algébrique) introduit dans Grothendieck [6].

Si $X = \operatorname{Sp} A$ est un affinoïde d'algèbre de Tate A, $\pi_1(X)$ désigne le groupe profini $\pi_1(\operatorname{Spec} A)$; nous introduisons aussi un groupe fondamental $\pi_{1,\mathrm{alg}}(D - 0)$ qui classe les revêtement finis du disque D étales en dehors de 0. Il s'agit de groupes *profinis*, et nous aurons en fait à travailler avec leur pro-p-quotients maximaux. Le premier paragraphe est donc consacré à des compléments sur les groupes profinis et les pro-p-groupes; nous y démontrons des résultats (Lemmes 1.9 et 1.10) qui permettent de relever une action d'un groupe fini d'ordre premier à p sur la cohomologie d'un pro-p-groupe libre en une action sur le groupe même; ils seront essentiels pour le prolongement de revêtements par des groupes qui ont des quotients premiers à p.

Si on néglige l'arithmétique du corps K en travaillant avec des revêtements géométriques, les pro-p-quotients fondamentaux qui interviennent alors sont des pro-p-groupes libres, et les résultats qui nous intéressent se déduisent de leur cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On est donc ramené à l'étude des revêtements cycliques de degré p, une situation que l'on sait traiter aisément grâce à la théorie de Kummer ou d'Artin-Schreier.

Nous commençons par prolonger le revêtement donné de la couronne C au dessus d'une couronne d'épaisseur non nul $C(r) = \{x \in K : r \leqslant |x| \leqslant 1\}$ (Proposition 2.4); pour r assez proche de 1, le groupe de Galois du revêtement obtenu sur la couronne $|x| = r$ est résoluble, extension d'un groupe cyclique d'ordre premier à p par un p-groupe. Le résultat découle alors d'une étude détaillée de la flèche naturelle $u\colon \pi_1(C) \to \pi_{1,\mathrm{alg}}(\mathbf{P}^1_K - S)$, où $\mathbf{P}^1_K$ est la droite projective et S un esemble fini de points de $\mathbf{P}^1_K - C$.

La démonstration du Théorème 2 est locale au voisinage des points de ramification. Si x est un point de X_k ramifié dans Y_k, du point de vue de la géométrie rigide les points de X_K qui se spécialisent en x est un disque ouvert, et on est essentiellement ramenés à prolonger un revêtement de groupe G donné sur le bord du disque en un revêtement ramifié à l'interieur.

On obtient alors une courbe rigide propre $Y'_{K'}$, revêtement galoisien de groupe G de $X_K \times K'$, et on applique le principe *GAGA rigide* pour conclure que cette courbe est en fait fibre générique d'une R'-courbe; le fait que la fibre spéciale de cette courbe soit unibranche découle assez simplement de la construction.

1. Compléments sur les pro-p-groupes

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques résultats connus sur les groupes profinis et leur cohomologie; nous renvoyons à Serre [18] pour les démonstrations.

Un *groupe profini* est un groupe topologique limite projective de groupes finis (munis de la topologie discrète): c'est donc un groupe topologique compact totalement discontinu; une base de voisinages de l'unité est formée par les sous-groupes ouverts distingués. Les groupes profinis, munis des homomorphismes continus, forment une catégorie où les produits infinis et les limites projectives existent. Pour un nombre premier p fixé, on appelle *pro-p-groupe* un groupe profini, limite projective de p-groupes finis.

Dans la théorie des groupes profinis, un rôle particulièrement important est joué par les groupes libres; soit I un ensemble d'indices et $\Lambda(I)$ le groupe abstrait libre engendré par des éléments $\{x_i\}_{i\in I}$, muni de la topologie discrète: le *groupe profini libre* engendré par les $\{x_i\}_{i\in I}$ est le completé profini de $\Lambda(I)$, i.e.

$$L(I) = \varprojlim_{U} \Lambda(I)/U,$$

où les U varient parmi les sous-groupes distingués de $\Lambda(I)$ tels que 1) $\Lambda(I)/U$ est un groupe fini, et 2) U contient presque tous les x_i. Le *pro-p-groupe libre* engendré par les $\{x_i\}_{i\in I}$ est défini comme la limite $L^{(p)}(I) = \varprojlim_U \Lambda(I)/U$, où les U varient parmi les sous-groupes distingués de $\Lambda(I)$ vérifiants les conditions (1) et (2) ci-dessus et encore (3) $\Lambda(I)/U$ est un p-groupe.

L'appellation de groupe libre est justifiée par la proprieté suivante, immédiate à partir des définitions: si G est un groupe profini (resp. un pro-p-groupe) les morphismes de $L(I)$ (resp. $L^{(p)}(I)$) dans G correspondent bijectivement aux familles d'éléments $(g_i)_I$ de G qui tendent vers zéro suivant le filtre des complémentaires des parties finies de G.

Une propriété remarquable des groupes profinis est l'existence de sections continues: si $f: G_1 \to G_2$ est un morphisme surjectif de groupes profinis, il existe une application continue $s: G_2 \to G_1$ telle que $f \circ s$ soit l'identité sur G_2 (cf. Serre [18], Prop. 1, p. I-2). Cela déjà suffit à prouver la

PROPOSITION 1.1 *Un groupe profini libre L (resp. un pro-p-groupe libre $L^{(p)}$) a la propriété de relèvement pour les suites exactes de groupes profinis (resp. les suites exactes de pro-p-groupes)*

$$1 \to N \to E \to Q \to 1,$$

i.e. pour tout homomorphisme $\phi: L \to Q$ il existe un homomorphisme $\phi': L \to E$ tel que $\phi = \pi \circ \phi'$. En particulier tout endomorphisme α d'un quotient L/S de L se relève à un endomorphisme de L.

La cohomologie d'un groupe profini G à coefficients dans un G-module discret A (i.e. un groupe abélien fini muni de la topologie discrète et d'une action continue de G) est définie à l'aide de co-chaines continues de la façon usuelle (cf. Serre [18], Chap. I, Sect. 2); rappelons que, en particulier, $H^0(G, A) = A^G$, le sous-groupe des éléments de A invariants sous l'action de G et que, si A est muni d'action triviale, $H^1(G, A) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cont}}(G, A)$.

La cohomologie des groupes profinis est reliée à la théorie analogue pour les groupes finis par la proposition suivante:

PROPOSITION 1.2 (Serre [18], Prop. 8, p. I-9). *Si $(G_i)_I$ est un système projectif de groupes profinis et $(A_i)_I$ un système inductif de G_i-modules discrets (les morphismes $A_i \to A_j$ étant compatibles avec les $G_j \to G_i$), alors, pour tout $q \geqslant 0$:*

$$H^q(\varprojlim G_i, \varinjlim A_i) = \varinjlim H^q(G_i, A_i).$$

Si p est un nombre premier fixé, on appelle *p-dimension cohomologique* d'un groupe profini G, le plus petit entier n tel que $H^{n+1}(G,A) = 0$ pour tout G-module discret simple annulé par p; en fait on peut se limiter au cas $A = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ muni d'action triviale (Serre [18], Prop. 20, p. I-32):

Bien entendu, on a $G = \{1\}$ si et seulement si $cd_pG = 0$ pour tout nombre premier p; de plus, on a la caractérisation suivante:

PROPOSITION 1.3 (Serre [18], Prop. 16, p. I-23). *Soit G un groupe profini, p un nombre premier. Alors $cd_pG \leqslant 1$ si et seulement si G a la propriété de relèvement pour les suites exactes de groupes profinis*

$$1 \to N \to E \to Q \to 1,$$

où le noyau N est un pro-p-groupe.

Le *sous-groupe de Frattini* G^* d'un pro-p-groupe G est défini comme le sous-groupe fermé de G intersection des noyaux de tous les morphismes $\chi\colon G \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. L'application $g \mapsto \phi_g$, où

$$\begin{aligned} \phi_g\colon H^1(G,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) &\to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ \chi &\to \chi(g), \end{aligned}$$

établit un isomorphisme entre le groupe compact G/G^* et le dual du groupe discret $H^1(G,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ (dualité de Pontrjagin).

PROPOSITION 1.4 (Serre [18], Prop. 23 p. I-35). *Une condition nécéssaire et suffisante pour qu'un morphisme*

$$\varphi\colon G_1 \to G_2,$$

entre pro-p-groupes soit surjectif, est que le morphisme induit

$$\bar{\varphi}\colon G_1/G_1^* \to G_2/G_2^*,$$

soit surjectif, ou, dualement, que l'homomorphisme

$$H^1(\varphi)\colon H^1(G_2,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to H^1(G_1,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}),$$

soit injectif.

Puisque les images homomorphes d'un pro-p-groupe libre $L^{(p)}(I)$ sont determinées par les images d'un système de générateurs, on voit bien que

$$H^1(L^{(p)}(I),\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \bigoplus_I \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

PROPOSITION 1.5 (Serre [18], Prop. 24 p. I-36). *Soit G un pro-p-groupe, I un ensemble et*

$$\varphi\colon H^1(G,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to \bigoplus_I \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

un homomorphisme. Alors:

(1) *Il existe un morphisme $f\colon L^{(p)}(I) \to G$ tel que $\varphi = H^1(f)$.*
(2) *Si φ est injectif, f est surjectif.*
(3) *Si φ est bijectif et si $cd_pG \leqslant 1$, f est un isomorphisme.*

COROLLAIRE 1.6 *Tout pro-p-groupe est quotient d'un pro-p-groupe libre. Pour qu'un pro-p-groupe soit libre, il faut et suffit que $cd_pG \leqslant 1$.*

COROLLAIRE 1.7 *Si L est un pro-p-groupe libre, tout automorphisme de L/L^* se relève en un automorphisme de L.*

Il suffit pour cela d'appliquer le critère précédent au relèvement donné par la Proposition 1.

Nous dirons qu'un sous-groupe F d'un pro-p-groupe libre L est un *facteur direct* de L si l'inclusion naturelle $i\colon F \to L$ admet un scindage, i.e. un homomorphisme $s\colon L \to F$ tel que $s \circ i = 1_F$. Si N est le noyau d'un tel scindage s, l'application $F * N \to L$ induit un isomorphisme en cohomologie et est donc un isomorphisme, car elle est surjective et, L étant libre, elle admet un scindage surjectif: on en déduit que F est nécessairement un sous-groupe distingué de L, libre, car la dimension cohomologique d'un sous-groupe fermé est majorée par la dimension du groupe. De même, le sous-groupe N défini ci-dessus est un facteur direct libre de L: nous dirons qu'il est un *supplémentaire de F*: remarquons que ce sous-groupe, comme le scindage s qui le définit, n'est pas unique.

PROPOSITION 1.8 *Soit F un pro-p-groupe, $f\colon F \to L$ un morphisme de F dans un pro-p-groupe libre tel que $H^1(f)$ soit surjectif: alors f fait de F un facteur direct de L.*

Preuve. Soit $H = f(F)$ l'image de F, $i\colon H \hookrightarrow L$ l'inclusion naturelle. H est un sous-groupe fermé du groupe libre L (ces groupes sont compacts); il est donc libre. Puisque l'application composée $H^1(L,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to H^1(H,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to H^1(F,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est surjective, le deuxième homomorphisme est surjectif, mais il est aussi injectif, car $F \to H$ est surjectif (Proposition 1.4).

On a alors que $H^1(i) : H^1(L,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to H^1(H,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est un homomorphisme surjectif de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espaces vectoriels, qui admet donc un scindage γ : $H^1(H,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to H^1(L,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$; par dualité de Pontrjagin et par la Proposition 1.5, il existe un homomorphisme surjectif $g\colon L \to H$ tel que $H^1(g) = \gamma$. On voit bien alors que l'homomorphisme $i * j\colon H * \ker g \to L$ (j étant l'inclusion naturelle) est un isomorphisme, car il l'est en cohomologie (Corollaire 1.7).

D'autre part, $H^1(f) : H^1(L, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to H^1(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est aussi un homomorphisme surjectif de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espaces vectoriels; par la Proposition 1.5, le scindage $\sigma\colon H^1(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to H^1(L, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ se relève en un homomorphisme $s\colon L \to F$ tel que $\sigma = H^1(s)$, et s est surjectif puisque σ est injectif. De plus, $f \circ s|_H$ est un endomorphisme du pro-p-groupe libre H qui induit l'identité en cohomologie: on en déduit que $f \circ s|_H$ est un isomorphisme. En particulier $s|_H$ est aussi injectif, et donc f établit un isomorphisme entre F et le facteur direct H.

Nous terminons ce paragraphe par deux lemmes sur les pro-p-groupes munis d'une action d'un groupe fini d'ordre premier à p.

LEMME 1.9 *Soit L un pro-p-groupe libre, Γ un groupe fini d'ordre premier à p. Alors une action de Γ sur L/L^* se relève en une action sur L.*

Preuve. Soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble des couples (S, φ_S) formés d'un sous-groupe fermé distingué S de L et d'une action $\varphi_S\colon \Gamma \to \mathrm{Aut}(L/S)$ de Γ sur L/S. On peut ordonner $\mathfrak{S}$ par la relation suivante: on dit que $(S', \varphi_{S'}) \leqslant (S, \varphi_S)$ si

(1) $S' \subset S$;
(2) Les actions φ_S et $\varphi_{S'}$ commutent avec le quotient $L/S' \to L/S$
$\mathfrak{S}$ est non vide ($L^* \in \mathfrak{S}$) et si $\{S_i\}_{i \in I}$ est une chaine dans $\mathfrak{S}$, $S = \bigcap_{i \in I} S_i$ est un majorant de la chaine (l'action de Γ sur $L/S \simeq \varprojlim L/S_i$ est définie à partir des L/S_i). On peut donc appliquer le lemme de Zorn à $\mathfrak{S}$ pour trouver un élément maximal N de $\mathfrak{S}$; on va montrer que $N = \{1\}$.

Par la propriété de relèvement des pro-p-groupes libres (Proposition 1), tout élément σ de Γ peut se relever en un automorphisme $\hat{\sigma}$ de L: en choisissant un relèvement pour tout $\sigma \in \Gamma$ on peut former le sous-groupe Γ_1, a priori infini, de $\mathrm{Aut}(L)$ engendré par tous ces $\hat{\sigma}$; nous conviendrons de prendre $\hat{1} = 1$.

Si $N \neq \{1\}$, il existe un sous-groupe ouvert distingué U, qu'on peut supposer stable sous l'action de Γ_1, tel que $N \not\subset U$. On va montrer qu'il est possible de relever l'action de Γ sur le quotient $L/U \cap N$, ce qui contredit la maximalité de N.

Puisque U est ouvert, $N/N \cap U$ est un p-groupe fini et donc Γ_1 agit sur $L/N \cap U$ *via* un quotient fini convenable Γ_2. Par abus de notation on continuera à appeler $\hat{\sigma}$ l'image de $\hat{\sigma}$ par la projection $\Gamma_1 \to \Gamma_2$.

Considérons le quotient $\pi\colon \Gamma_2 \to \Gamma$; par définition, les éléments de $\ker \pi$ laissent stable $N/N \cap U$ et agissent trivialement sur L/N et donc $\ker \pi$ stabilise la suite normale à un cran

$$L/N \cap U \supset N/N \cap U \supset \{1\}.$$

Or, tout groupe fini d'ordre premier à p qui stabilise une suite normale de pro-p-groupes est trivial: c'est un résultat classique pour les automorphismes de p-groupes finis (cf. Gorenstein [4], Corollaire 5.3.3) qu'on peut étendre aux pro-p-groupes par passage à la limite. On a alors que $\ker \pi$ est un p-groupe et on en déduit que la suite exacte de groupes finis

$$1 \to \ker \pi \to \Gamma_2 \to \Gamma \to 1$$

est scindée, car l'ordre du noyau est premier à l'ordre du qoutient. On peut donc munir $L/N \cap U$ d'une action de Γ, de sorte que $N \cap U$ appartienne à $\mathfrak{S}$, ce qui contredit la maximalité de N.

LEMME 1.10 *Si $\phi\colon \Gamma \to \mathrm{Aut}(L)$ et $\psi\colon \Gamma \to \mathrm{Aut}(L)$ sont deux relèvements d'une action de Γ sur L/L^*, il existe un automorphisme α de L, induisant l'identité en cohomologie, tel que $\psi(\sigma) = \alpha \circ \varphi(\sigma) \circ \alpha^{-1}$, pour tout $\sigma \in \Gamma$.*

Preuve. La démonstration est une variante de la précédente. On note $\Phi = \phi(\Gamma)$ et $\Psi = \psi(\Gamma)$ les deux sous-groupes de $\mathrm{Aut}(L)$ images de Γ; si S est un sous-groupe distingué de L stable par Φ et Ψ, on note Φ_S (resp. Ψ_S) l'action de ces groupes sur le quotient L/S. Soit $\mathfrak{A}$ l'ensemble des couples (S, α_S) formés d'un sous-groupe fermé distingué S de L, stable par $\phi(\Gamma)$ et $\psi(\Gamma)$, et d'un automorphisme $\alpha_S \in \mathrm{Aut}(L/S)$ tel que $\Psi_S = \alpha_S \Phi_S \alpha_S^{-1}$. On peut ordonner $\mathfrak{A}$ par la relation suivante: on dit que $(S', \alpha_{S'}) \leqslant (S, \alpha_S)$ si

(1) $S' \subset S$;
(2) $\alpha_{S'}$ se réduit sur α_S.

On peut appliquer le lemme de Zorn à $\mathfrak{A}$ pour trouver un élément maximal (N, α_N) de $\mathfrak{A}$; on va montrer que $N = \{1\}$.

On relève α_N en un endomorphisme $\hat{\alpha}$ de L qui est un automorphisme car il induit l'identité en cohomologie (Corollaire 1.7).

Si $N \neq \{1\}$, il existe un sous-groupe ouvert distingué U de L tel que $N \not\subseteq U$; on peut supposer que U soit stable simultanèment sous l'action de Φ, Ψ et $\hat{\alpha}\Phi\hat{\alpha}^{-1}$.

Notons G le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(L/N \cap U)$ formé des automorphismes qui stabilisent $N/N \cap U$. On dispose alors d'une suite exacte

$$1 \to H \to G \xrightarrow{r_N} \mathrm{Aut}(L/N) \to 1,$$

où r_N est la réduction mod. $N/N \cap U$ et H est le sous-groupe de G formé des automorphismes de $L/N \cap U$ qui induisent l'identité sur L/N; H est donc un p-groupe fini.

Notons (de façon assez abusive) Γ le sous-groupe $\Psi_N = \alpha_N \Phi_N \alpha_N^{-1}$ de $\mathrm{Aut}(L/N)$, et soit $G_1 = r_N^{-1}(\Gamma)$ le sous-groupe de G des automorphismes qui se réduisent sur un élément de Γ, extension du groupe fini Γ d'ordre premier à p par le p-groupe H:

$$1 \to H \to G_1 \xrightarrow{r_N} \Gamma \to 1,$$

$\Psi_{N\cap U}$ et $\hat{\alpha}\Phi_{N\cap U}\hat{\alpha}^{-1}$ définissent deux scindages de cette suite exacte, et sont donc conjugués par un élément $\beta \in H$.

Comme β induit l'identité mod. $N \cap U$, $\beta\hat{\alpha}$ se réduit sur α_N, et on a bien que $L/N \cap U$ muni de l'automorphisme $\alpha_{N\cap U} = \beta\hat{\alpha}$ définit un élément de $\mathfrak{A}$, ce qui contredit la maximalité de (N, α_N).

COROLLAIRE 1.11 *Soit L un pro-p-groupe libre, F un facteur direct de L et soit* $\phi\colon \Gamma \to \mathrm{Aut}(L)$ *une action d'un groupe fini d'ordre premier à p. Supposons que* F *soit stable sous cette action. Alors F admet un supplémentaire stable.*

Preuve. Considerons le groupe de cohomologie $H^1(L, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$: il s'agit d'un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espace vectoriel, muni d'une action de Γ qui stabilise le facteur direct $H^1(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Puisque Γ est cyclique d'ordre premier à p, on peut trouver un supplémentaire $H^1(E, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ à $H^1(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ dans $H^1(L, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, stable sous l'action de Γ.

Soit E un supplémentaire de F relèvant $H^1(E, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Par le Lemme 1, on peut relever l'action de Γ à E. A présent, on dispose de deux action de Γ sur L: d'une part, l'action $\phi\colon \Gamma \to \mathrm{Aut}(L)$ donnée au départ et de l'autre une action définie à partir de la décomposition $\psi\colon \Gamma \longrightarrow \mathrm{Aut}(F) * \mathrm{Aut}(E)$ qui coïncide avec ϕ sur le premier facteur et est le relèvement de l'action en cohomologie sur le deuxième. Par le lemme précédent, il existe un automorphisme α de L, induisant l'identité en cohomologie, tel que $\psi(\Gamma) = \alpha\phi(\Gamma)\alpha^{-1}$: il est maintenant facile de vérifier sur le diagramme

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\psi(\sigma)"] \arrow[d, "\alpha"'] & L \arrow[d, "\alpha"] \\ L \arrow[r, "\phi(\sigma)"] & L \end{tikzcd}$$

commutatif pour tout $\sigma \in \Gamma$, que $M := \alpha(E)$ est un supplémentaire de F (l'homomorphisme $F * M \to L$ donne l'identité en cohomologie), stable sous l'action du groupe $\phi(\Gamma)$.

2. Prolongement de revêtements galoisiens de couronnes rigides

Soit K un corps complet pour une valuation discrète v, R l'anneau de la valuation, π une uniformisante de R, k le corps résiduel, qu'on supposera algèbriquement clos de caractéristique $p > 0$.

Une *algèbre de Tate* est une K-algèbre topologiquement de type fini, i.e. isomorphe, comme K-algèbre topologique, à un quotient d'une algèbre de séries formelles restreintes $K\{X_1, \dots, X_n\}$ (rappelons qu'une série formelle $F = \sum_I a_I \underline{X}^I$ est dite restreinte lorsque $a_I \to 0$ quand $|I| \to \infty$). Nous renvoyons à l'article original de Tate [21] pour une discussion des propriétés de ces algèbres.

EXEMPLES 2.1 (a) L'algèbre $K\{X\}$ des séries convergentes sur le disque unité fermé $D = \{x \in K : |x| \leqslant 1\}$ de la droite affine sur K.

(b) L'algèbre $K\{X, Y\}/(XY - 1)$ des séries convergentes sur la couronne d'épaisseur nulle $C = \{x \in K : |x| = 1\}$, 'bord' de D.

(c) L'algèbre $K\{X,Y\}/(XY - \pi^n)$ des séries convergentes sur la couronne $C(r) = \{x \in K : r \leqslant |x| \leqslant 1\}$ de rayon $r = |\pi|^n < 1$.

Si A est une algèbre de Tate et $f_0, \dots, f_n$ est un ensemble d'éléments de A engendrant l'ideal unité, on peut former le quotient $B = A\{Y_1, \dots, Y_n\}/\langle f_1 - f_0Y_1, \dots, f_n - f_0Y_n\rangle$; l'inclusion $A \to B$ donne lieu à une application $\operatorname{Sp} B \to \operatorname{Sp} A$ entre les spectres maximaux de ces algèbres de Tate qui envoie $\operatorname{Sp} B$ sur la partie $U = \{x \in \operatorname{Sp} A : |f_i(x)| \leqslant |f_0(x)|\}$ de $\operatorname{Sp} A$ (si x est un point de $\operatorname{Sp} A$, le corps $K(x) = A/\mathfrak{m}_x$ est une extension finie du corps complet K, et donc il existe une unique extension à $K(x)$ de la valuation de K).

Les parties U de $\operatorname{Sp} A$ du type decrit ci-dessus sont dites *ouverts standards* de $\operatorname{Sp} A$. On définit une topologie de Grothendieck sur $\operatorname{Sp} A$ où les ouverts sont les parties de $\operatorname{Sp} A$ possèdant un recouvrement fini par des ouverts standards. Un recouvrement ouvert de $\operatorname{Sp} A$ est dit *admissible* s'il admet un raffinement fini par des ouverts standards.

On peut munir l'espace topologique $X = \operatorname{Sp} A$ d'un faisceau d'anneau $\mathcal{O}_X$ tel que pour tout ouvert standard $U = \operatorname{Sp} B$ de X, $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = B$ (cf. Tate [21], 8.2).

L'espace annelé $X = \operatorname{Sp} A$, muni de le topologie de Grothendieck et du faisceau $\mathcal{O}_X$ introduits ci-dessus, est dit *espace analytique rigide affinoïde*; on appelle *revêtement étale* de l'affinoïde $\operatorname{Sp} A$ un morphisme $f : \operatorname{Sp} B \to \operatorname{Sp} A$ défini par une A-algèbre finie étale (au sens algébrique) B et on dira de plus que f est un revêtement étale *galoisien* si A est l'algèbre B^G des invariants de B sous l'action d'un groupe fini G opérant librement.

On appelle *disque rigide standard* (resp. *couronne standard*) l'espace rigide affinoïde de l'Exemple 2.1.(a) (resp. 2.1.(b)); on les note D et C respectivement.

Dans la suite, on aura besoin d'introduire des structures entières sur les espaces rigides, et donc de faire le lien entre géométrie rigide et géométrie formelle.

Si $\mathfrak{X} = \operatorname{Spf} \mathcal{A}$ est un schéma formel affine noethérien, spectre formel d'une R-algèbre noethérienne complète pour la topologie π-adique, par Grothendieck and Dieudonné 0, 7.5.3, $\mathcal{A}$ est une R-algèbre topologiquement de type fini, i.e. $\mathcal{A}$ est isomorphe, comme R-algèbre topologique, à un quotient de l'algèbre des series formelles restreintes $R\{T_1, \dots, T_r\}$ par un idéal $\mathcal{I}$ (nécessairement de type fini, puisque $R\{\underline{T}\}$ est noethérienne). Au schéma formel $\mathfrak{X}$ on peut alors associer l'espace rigide affinoïde $X_K = \operatorname{Sp}(\mathcal{A} \otimes_R K)$, spectre maximal de l'algèbre de Tate $K\{T_1, \dots, T_r\}/\mathcal{I} \otimes K$.

Inversement, si $X = \operatorname{Sp} A$ est un K-espace rigide affinoïde, un *modèle entier* pour X est un R-schéma formel affine $\mathfrak{X} = \operatorname{Spf} \mathcal{A}$, spectre d'une R-algèbre telle que $\mathcal{A} \otimes_R K = A$.

La comparaison entre différents modèles entiers fait intervenir des schémas formels qui ne sont plus affines. On dit qu'un faisceau cohérent d'idéaux $\mathcal{I}$ est *admissible* s'il contient une puissance de l'uniformisante π, et on appelle *éclatement admissible* de $\mathfrak{X}$ le long de $\mathcal{I}$ le morphisme $\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$, où $\mathfrak{X}'$ est le schéma formel completé π-adique de l'éclatement de $\mathfrak{X}$ en $\mathcal{I}$. Deux modèles entiers $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{X}'$ d'un même espace rigide X (affinoïde ou pas) diffèrent par une suite d'éclatements admissibles, dans le sens qu'il existe un troisième modèle $\mathfrak{X}''$ qui domine les précédents par des éclatements admissibles.

DÉFINITION 2.2 Si X est un espace rigide affinoïde connexe d'algèbre de Tate A, ω un point géométrique fixé de Spec A, on définit le *groupe fondamental profini* de X par la formule

$$\pi_1(X, \omega) \stackrel{\text{def}}{=} \pi_1(\operatorname{Spec} A, \omega)$$

(où le π_1 d'un schéma est pris au sens de Grothendieck [6]).

Si X est normal et S est un ensemble fini de points fermés de X, $\omega \notin S$, nous notons $\pi_{1,\text{alg}}(X - S, \omega)$ le groupe fondamental du schéma affine Spec $(A) - S$.

Une telle définition est justifiée par le fait qu'un revêtement fini étale rigide de X correspond à une A-algèbre finie étale et donc à un revêtement étale du schéma Spec (A).

On a donc une équivalence de catégories entre les revêtements finis étales Y de X et les ensembles finis munis d'action de $\pi_1(X, \omega)$ établie par le foncteur $Y \mapsto \operatorname{Hom}_X(\omega, Y)$.

Si X est un espace rigide affinoïde, on dira qu'un revêtement étale Y/X est un *revêtement géométrique* de X si Y est géométriquement connexe, i.e. s'il reste connexe après toute extension finie du corps K.

DÉFINITION 2.3 Si X est un espace rigide affinoïde, on définit le *groupe fondamental géométrique* de X comme le noyau du morphisme canonique $\pi_1(X, \omega) \to \operatorname{Gal}(\bar{K}, K)$:

$$1 \to \pi_1(X, \omega)_{\text{géom}} \to \pi_1(X, \omega) \to \operatorname{Gal}(\bar{K}, K) \to 1, \tag{1}$$

où $\bar{K}$ une clôture séparable fixée de K dans le corps de ω.

Cette définition ne dépend évidemment pas du choix de ω et de $\bar{K}$. Ce groupe, qui n'est pas un groupe fondamental d'un espace rigide, puisque on ne dispose pas d'une géométrie rigide sur $\bar{K}$ (ce corps n'étant pas complet), peut toutefois être interpreté comme groupe des revêtements géométriques de X dans le sens suivant: puisque $\operatorname{Gal}(\bar{K}/K)$ est la limite projective des groupes $\operatorname{Gal}(L/K)$, où L varie parmi les extensions finies galoisiennes de K contenues dans $\bar{K}$, on déduit de la suite (1) que

$$\pi_1(X, \omega)_{\text{géom}} = \varprojlim_{L/K} \pi_1(X \times_K L, \omega),$$

les termes de droite indiquant les groupes fondamentaux des schémas d'anneau $A \otimes_K L$.

Soit $C' \to C$ un revêtement géométrique fini, étale, galoisien de groupe G de la couronne C. Nous voulons étudier la possibilité de le prolonger en un revêtement fini galoisien éventuellement ramifié, du disque D (Problème 1).

Si X est une courbe affinoïde et $\mathfrak{X}$ un modèle entier de X, un point rationnel $x_K \in X(K)$ définit un point entier $x \in \mathfrak{X}(R)$: cela permet de définir une application de réduction de X vers la fibre spéciale X_k de $\mathfrak{X}$. Supposons que X admette un modèle entier lisse au voisinage x: une coordonée locale f sur $\mathfrak{X}$ nulle en x, définit un morphisme étale de $\mathfrak{X}$ vers le disque formel standard $\mathfrak{D} = \operatorname{Spf} R\{T\}$, modèle entier de D, qui envoit x sur 0 et établit un isomorphisme entre l'ensemble des points de X qui se réduisent suivant x et le disque ouvert $\{t \in D : |t| < 1\}$.

PROPOSITION 2.4 *Soit X une courbe affinoïde lisse sur K, $x_1, \ldots, x_s \in X(K)$ des points rationnels, U l'ouvert de X complémentaire d'une réunion finie de disques ouverts disjoints $\Delta_i \cong \{t_i \in K : |t_i| < 1\}$, $i = 1, \ldots, s$ définis comme ci-dessus. Aprés une extension finie L/K du corps de base, tout revêtement fini étale de U se prolonge en un revêtement fini ramifié de X. Si de plus le revêtement de U est galoisien, on peut trouver un rationnel $0 < r < 1$ tel que prolongement est encore étale et galoisien de même groupe en restriction à l'ouvert $U(r)$, complémentaire des disques $\Delta_i(r) \cong \{t_i \in K : |t_i| < r\}$.*

Preuve. On peut supposer que le revêtement en question est galoisien de groupe G. Par recollement, on peut se ramener au cas $s = 1$. Quitte à remplacer X par un ouvert, on peut supposer que U est un *domaine de Laurent*, $U = X(1/f) = \{x \in X : |f(x)| \geqslant 1\}$, f étant la coordonnée locale en $x = x_1$; U est alors un ouvert affinoïde d'algèbre de Tate $A\{1/f\} = A[T]/(Tf - 1)$.

Supposons, pour commencer, que le revêtement U'/U soit monogène. Notons $B = A\{1/f\}$ l'algèbre de Tate de U et $C = B[1/f] = B[T]/(Tf - 1)$ l'algèbre de $X - \{x\}$. Soit $B' = B[\alpha] = B[Z]/\phi(Z)$ l'algèbre d'un revêtement galoisien monogène de groupe G de U; on peut approcher le polynôme $\phi(Z) \in B[Z]$, qu'on supposera unitaire, par un polynôme unitaire $F(Z) \in C[Z]$ du même degré. Toute racine de $F(Z)$ (dans une clôture algèbrique du corps des fractions de B) est proche d'une racine de $\phi(Z)$ et donc F est un polynôme séparable. Si de plus on choisit F suffisamment proche de ϕ pour que la racine a de F qui approche α vérifie l'inégalité

$$|a - \alpha|_v < \inf_{\sigma \in G} |\sigma\alpha - \alpha|_v,$$

le lemme de Krasner (cf. par exemple S. Lang, *Algebraic Number Theory*, Graduate Texts in Mathematics 110, Springer, Heidelberg, 1986, Chap. II, Sect. 2, Prop.3) montre que $B[\alpha] \cong B[a]$, ce qui permet de prolonger le revêtement donné en un revêtement fini de X. Ce revêtement est étale en dehors d'un nombre fini de points: en particulier on peut trouver un disque $\Delta(r)$ de rayon $0 < r < 1$ et un revêtement étale $U'(r)$ de $U(r) = X - f^{-1}\Delta(r)$ qui prolonge U'.

Il est possible que l'épaisseur de cette couronne ne soit pas entière, i.e. que $r > |\pi|$, et donc que la couronne semi-ouverte $r \leqslant |x| < 1$ ne contienne pas de points rationnels sur K; il est alors nécessaire d'introduire une extension finie L du corps de base, pour rendre $r \leq |\pi_L|$.

Le germe de prolongement est unique: de façon précise, si le revêtement U' de U possède une section ε, cette section se prolonge au dessus de $U(r)$ pour r suffisament grand (cf. Raynaud [14], Lemme 3.4.3); en appliquant cette remarque au revêtement $\coprod_{\mathrm{Aut}(U'(r)/U(r))} U'(r)$ de $U(r)$, on voit bien que si U'/U est galoisien, quitte à augmenter r on peut supposer que le revêtement prolongé $U'(r)/U(r)$ est galoisien de même groupe.

On a supposé que le revêtement était monogène: cette hypothèse n'est pas restrictive, car le fait que K soit infini implique que localement (pour la topologie de Zariski sur $\operatorname{Spec} B$) toute B-algèbre finie étale est monogène (cf. Raynaud [12], Prop. 11 p. 34). Soit encore B' l'algèbre du revêtement U'/U et fixons un point $u \in U$: il existe alors un voisinage de Zariski V de u et un élément $\alpha \in B'$ tel que $B'|_V = B[\alpha]|_V$. Si $U - V = \{a_1, \dots, a_s\}$, pour δ suffisament petit, les disques $\Delta_i = \{x \in K : |x - a_i| < \delta\}$ sont contenus dans U et tous disjoints. Posons $W = U - \bigcup_{i=1}^{s} \Delta_i$, W est un ouvert admissible de U. On peut prolonger le revêtement $B[\alpha]|_W$ par les méthodes ci-dessus: en le recollant au revêtement initial au dessus de l'ouvert admissible W on trouve le prolongement cherché.

COROLLAIRE 2.5 *Gardons les notations de 2.4, et supposons $V \to U$ galoisien de groupe G: alors, pour r assez proche de* 1, *et quitte à étendre ultérieurement le corps de base, la restriction du revêtement prolongé au dessus des couronnes semi-ouverte $r \leqslant |t_i| < 1$ est decomposée en une somme de revêtements galoisiens de groupe de Galois résoluble, extension d'un groupe cyclique d'ordre premier à p par un p-groupe.*

Preuve. Nous reprenons ici les arguments de Raynaud [14], 3.4. L'espace rigide $U(r) = \operatorname{Sp} A\{Z\}/(Zf - \pi_L^n)$ sur lequel on a prolongé le revêtement de départ, admet un modèle formel affine $\mathfrak{U}(r) = \operatorname{Spf} \mathcal{A}\{Z\}/Zf - \pi_L^n$ dont la fibre spéciale est formée de la fibre spéciale X_k de $\mathfrak{X}$ et d'une droite affine coupant transversalement X_k au point $\bar{x}$, spécialisation de x (on a supposé que X_k est lisse en $\bar{x}$), sur lequel se spécialisent aussi les points de la couronne rigide ouverte $0 < v(x) < r$. Choisissons comme modèle entier pour $U'(r)$ la normalisation $\mathfrak{U}'(r)$ de $U'(r)$. On peut alors établir une bijection entre les composantes connexes de $U'(r)$ au dessus de la couronne ouverte et les points de la fibre spéciale de $\mathfrak{U}'(r)$ au dessus de $\bar{x}$, et entre les groupes de décomposition de ces composantes et ceux des point correspondants (*loc. cit.*, Proposition 3.4.6). Pour r suffisament proche de 1, le sous-schéma réduit X'_k de la fibre spéciale de $\mathfrak{U}'(r)$ au dessus de X_k est normal aux points qui sont au dessus de $\bar{x}$ (*loc. cit.*, Lemme 3.4.2); notons $y_1, \dots, y_d$ ces points. Appliquons à présent le théorème de reduction semi-stable au schéma formel $\mathfrak{U}'(r)$: après extension finie de R, on peut trouver un modèle semi-stable $\mathfrak{U}''(r)$. Notons encore $y_1, \dots, y_d$ les points de la transformée stricte de X'_k au dessus de $\bar{x}$ (les groupes de décomposition en ces points dans $\mathfrak{U}''(r)$ et dans $\mathfrak{U}'(r)$ sont les mêmes).

Si η_i est le point générique de la composante irréductible de X'_k passant par y_i et D_{η_i},I_{η_i} désignent respectivement les sous-groupes de décomposition et d'inertie en η_i, le groupe D_{η_i}/I_{η_i} opère fidèlement sur la composante irréductible de X'_k passant par y_i: si $J_{y_i} \subset D_{\eta_i}/I_{\eta_i}$ est le sous-groupe d'inertie en y_i, le sous-groupe de décomposition $D_{y_i} \subset G$ en y_i est alors extension de J_{y_i} par I_{η_i}. Puisque k est algébriquement clos, le premier est un groupe d'inertie d'un corps local, et on peut appliquer les théorèmes classiques (par exemple Serre [19], Corollaire 4.2.4) pour montrer que ce groupe est résoluble, extension d'un groupe cyclique d'ordre premier à la caractéristique résiduelle p par un p-groupe. Quitte à étendre ultérieurement le corps L, de façon à éliminer l'inertie provenant de la base, il en est de même pour I_{η_i}.

Remarque 2.6 Dans le cas $X = D, U = C$ la proposition 1 permet de prolonger un revêtement galoisien de C en un revêtement ramifié du disque D (pour l'instant non galoisien), c'est à dire un revêtement ramifié algébrique de l'anneau de D.

Soit S l'ensemble fini des points de ramification: si K est de caractéristique nulle, Lütkebohmert a montré que tout revêtement rigide de $D - S$ se prolonge en un revêtement algébrique ramifié de D (cf. Lütkebohmert [10], Corollary 2.9). Par contre, un tel énoncé est faux en égale caractéristique (cf. *loc. cit.*, Example 2.10).

Dans la suite nous éviterons cet écueil en travaillant systématiquement avec des revêtements finis ramifiés d'affinoïdes.

On peut plonger la couronne C et le disque D dans la droite projective $\mathbf{P}^1_K$. Les proposition suivantes sont immédiates à partir des théories de Kummer et d'Artin-Schreier.

PROPOSITION 2.7(a) *Tout revêtement cyclique de degré premier à p de la couronne C se prolonge en un revêtement fini galoisien de la droite projective $\mathbf{P}^1_K$ ramifié en $\{0, \infty\}$.*

PROPOSITION 2.7(b) *Si K est de caractéristique* 0 *et contient les racines p-ièmes de l'unité, tout revêtement galoisien de degré p de C se prolonge en un revêtement fini galoisien de $\mathbf{P}^1_K$ ramifié en un un nombre fini de points.*

PRPOSITION 2.7(c) *Si K est de caractéristique p, tout revêtement galoisien de degré p de la couronne C se prolonge en un revêtement fini galoisien de $\mathbf{P}^1_K$ ramifié en $\{0, \infty\}$.*

Preuve. Soit $(n, p) = 1$ et donnons nous un revêtement cyclique de degré n de la couronne C. Par la théorie de Kummer, ce revêtement est monogène, donné par une équation $T^n - \alpha(X) = 0$, $\alpha(X)$ une unité de $K\{X, X^{-1}\}$ (comme k est algébriquement clos, R contient les racines n-ièmes de l'unité). On peut approximer α par un polynôme de Laurent $a(X) \in K[X, X^{-1}]$ qui est encore une unité sur C. Si π est l'uniformisante de R, on peut écrire $a(x) = \pi^N x^M u(1 + b(x))$ avec

$b(x) \in \pi R[x]$: $1 + b(x)$ admet une racine n-ième, car $(n,p) = 1$, et la théorie de Kummer permet de remplacer l'équation de départ pour trouver un revêtement galoisien (le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ agissant par multiplication par une racine de l'unité) de $\mathbf{P}^1_K$ ramifié seulement en $\{0, \infty\}$.

Si K est de caractéristique nulle, on peut encore appliquer la théorie de Kummer pour étudier un revêtement cyclique de degré p de C et utiliser le même argument d'approximation; on est toutefois forcés d'admettre de la ramification au dessus de l'ensemble fini $\{a(X) = 0\}$ (notation ci-dessus).

Enfin, si $\mathrm{char} K = p$, par la théorie d'Artin–Schreier on peut supposer que le revêtement en question est monogène, donné par une équation $T^p - T - \alpha(X) = 0$, $\alpha(X) \in K\{X\}[X^{-1}]$, et le prolonger en un revêtement galoisien de $\mathbf{P}^1_K$, donné par une équation $T^p - T - a(X) = 0$, $a(X) \in K[X, X^{-1}]$: c'est bien un revêtement fini galoisien de la droite projective, ramifié au plus en $\{0, \infty\}$.

Pour traiter des revêtements arbitraires de C nous allons étudier plus en détail les groupes fondamentaux de C et de D. Pour ne pas trop alourdir la notation, nous éviterons de mentionner le point base ω de ces groupes, que nous supposerons fixé une fois pour toutes dans C.

Notons $\pi_1^{(p)}(C)$ (resp. $\pi_{1,\mathrm{alg}}^{(p)}(D - 0)$) le plus grand pro-$p$-quotient de $\pi_1(C)$ (resp. $\pi_{1,\mathrm{alg}}(D - 0)$).

Comme nous venons de le voir dans les exemples ci-dessus, le cas le plus simple se présente lorsque K est de caractéristique p.

LEMME 2.8 *Supposons K de caractéristique $p > 0$. Alors la flèche naturelle*

$$u^{(p)} \colon \pi_1^{(p)}(C) \longrightarrow \pi_{1,\mathrm{alg}}^{(p)}(D - 0)$$

induite par l'immersion $C \hookrightarrow D$ fait de $\pi_1^{(p)}(C)$ un facteur direct de $\pi_{1,\mathrm{alg}}^{(p)}(D - 0)$.

Preuve. $\pi_{1,\mathrm{alg}}^{(p)}(D - 0)$ est libre car $cd_p\, \pi_{1,\mathrm{alg}}(D - 0) \leq 1$ (la p-dimension cohomologique d'un schéma affine noetherien de caractéristique p est au plus égale à un, cf. Artin, Grothendieck et Verdier [1], III, Th. 5.1 p. 58); la théorie d'Artin–Schreier et la Proposition 2.7.(c) montrent que tout homomorphisme continu

$$f : \pi_1^{(p)}(C) \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

s'étend en un revêtement du disque épointé d'équation $T^p - T - a_f(x) = 0$; puisque l'équation du revêtement correspondant à un produit d'homomorphismes fg est $T^p - T - \alpha_f(x) - \alpha_g(x) = 0$, on a bien démontré que

$$H^1(u^{(p)}) : H^1(\pi_{1,\mathrm{alg}}^{(p)}(D - 0), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(\pi_1^{(p)}(C), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

est surjectif: il ne reste plus qu'a appliquer la Proposition 1.8.

Du lemme précédent on déduit immédiatement le corollaire suivant:

THÉORÈME 2.9 *Si K est de caractéristique p, tout revêtement galoisien de degré une puissance de p de la couronne C se prolonge en un revêtement fini galoisien du disque D avec même groupe, ramifié au plus en* 0.

Remarque 2.10 Signalons au passage, bien que nous n'aurons pas à nous en servir dans la suite, que, quitte à passer à une extension finie du corps K, le Lemme 2.8 et son corollaire restent valides, sans hypothèses sur la caractéristique de K, lorsque on remplace p par un nombre premier $\ell \neq p$. Pour cela on peut utiliser le même raisonnement en remplaçant la théorie d'Artin-Schreier par la théorie de Kummer: tout ce dont on a besoin est un renseignement sur la dimension cohomologique de $\pi_{1,\mathrm{alg}}^{(\ell)}(D-0)$.

Dans le cas d'inégale caractéristique la Proposition 2.7.(c) montre bien qu'il n'est pas possible, en général, d'avoir le même résultat pour des revêtements de degré divisible par la caractéristique résiduelle; de plus les groupes fondamentaux sont, en général, de p-dimension cohomologique au moins 2, si le corps K n'est pas algébriquement clos.

Nous allons plonger le disque rigide D dans $\mathbf{P}^1_K$, muni de sa structure d'espace analytique rigide (non affinoïde), définie par recollement de deux copies de D, centrées en 0 et ∞, le long de la couronne C. Pour le groupe fondamental profini du schéma $\mathbf{P}^1_K - \{0, \infty\}$ on dispose encore d'une suite exacte du type (1)

$$1 \to \pi_1(\mathbf{P}^1_{\bar{K}} - \{0, \infty\}) \to \pi_1(\mathbf{P}^1_K - \{0, \infty\}) \to \mathrm{Gal}(\bar{K}, K) \to 1$$

où le noyau est le groupe fondamental du schéma affine $\mathbf{P}^1_{\bar{K}} - \{0, \infty\}$.

Si $S = \{a_1, \ldots, a_s\}$ est un ensemble fini de points de $\mathbf{P}^1_K - C$, contenant $0, \infty$, rationnels sur une extension finie L/K, on dispose d'un morphisme de groupes profinis

$$\varphi_S \colon \pi_1(C)_{\text{géom}} \hookrightarrow \pi_1(C \times_K L) \xrightarrow{u_S} \pi_1(\mathbf{P}^1_L - S)$$

où u_S est l'application définie par l'immersion $C \times_K L \to \mathbf{P}^1_L - S$ (L/K étant une extension finie, le corps L est complet pour l'unique extension à L de la valuation de K; en particulier, $C \times_K L$ est la couronne rigide standard sur le corps complet valué L).

LEMME 2.11 *Supposons K de caractéristique 0. L'application*

$$\varphi^{(p)} = \varprojlim_S \varphi_S^{(p)} : \pi_1^{(p)}(C)_{\text{géom}} \longrightarrow \varprojlim_S \pi_1^{(p)}(\mathbf{P}^1_{\bar{K}} - S)$$

où la limite est prise sur les ensembles finis S de points géométriques de $\mathbf{P}^1_{\bar{K}} - C$, fait de $\pi_1^{(p)}(C)_{\text{géom}}$ un facteur direct de $\varprojlim_S \pi_1^{(p)}(\mathbf{P}^1_{\bar{K}} - S)$.

Preuve. Le groupe fondamental $\pi_1(\mathbf{P}^1_{\bar{K}} - S)$ est libre de rang $s - 1 \geqslant 1$ et peut être engendré par s éléments $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$, σ_i étant un générateur profini d'un groupe d'inertie au dessus de a_i, avec la relation $\prod_{i=1}^{s} \sigma_i = 1$ (cf. Grothendieck [6], Cor. 2.12 p. 392); si $S' \supset S$, le morphisme $\pi_1(\mathbf{P}^1_{\bar{K}} - S') \to \pi_1(\mathbf{P}^1_{\bar{K}} - S)$ (relatif au même point base ω) est défini en envoyant $\sigma_{s+1}, \ldots, \sigma_{s'}$ sur 1.

Les flêches $\varphi_S^{(p)} : \pi_1^{(p)}(C) \to \pi_1^{(p)}(\mathbf{P}^1_{\bar{K}} - S)$ induites par les immersions sont évidemment compatibles avec le système projectif et donnent lieu à un homomorphisme en cohomologie (cf. prop. 1.2)

$$\begin{aligned} &H^1(\varprojlim \pi_1^{(p)}(\mathbf{P}^1_{\bar{K}} - S), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \\ &\quad = \varinjlim H^1(\pi_1^{(p)}(\mathbf{P}^1_{\bar{K}} - S), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to H^1(\pi_1^{(p)}(C)_{\text{géom}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

La théorie de Kummer et la Propositon 2.7.(b) montrent que tout revêtement géométrique cyclique (défini sur une extension finie L/K) de degré p de C se prolonge en un revêtement géométrique de $\mathbf{P}^1_L - S$, pour un ensemble fini S de points rationnels sur L de $\mathbf{P}^1_L - C$ suffisamment grand, et donc la flèche ci-dessus est surjective. D'autre part, le pro-p-groupe $\varprojlim \pi_1^{(p)}(\mathbf{P}^1_{\bar{K}} - S)$ est libre, car

$$H^2(\varprojlim \pi_1^{(p)}(\mathbf{P}^1_{\bar{K}} - S), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \varinjlim H^2(\pi_1^{(p)}(\mathbf{P}^1_{\bar{K}} - S), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0.$$

On peut donc appliquer la Proposition 1.8, ce qui achève la démonstration.

THÉORÈME 2.12 *Si K est de caractéristique nulle, pour tout revêtement géométrique étale galoisien de degré une puissance de p de la couronne rigide, il existe une extension finie L/K, telle que ce revêtement se prolonge en un revêtement fini, géométrique, galoisien de même groupe, du disque $D \times_K L$ étale en dehors d'un nombre fini de points rationnels sur L.*

Preuve. Il est immediat, à partir de la proposition précédente, que tout morphisme surjectif $\vartheta : \pi_1^{(p)}(C)_{\text{géom}} \to G$ dans un p-groupe fini G, peut être prolongé en un morphisme surjectif $\vartheta_{\lim} : \varprojlim \pi_1^{(p)}(\mathbf{P}^1_{\bar{K}} - S) \to G$. $\vartheta_{\lim}$ s'annule sur presque tous les générateurs de $\varprojlim \pi_1^{(p)}(\mathbf{P}^1_{\bar{K}} - S)$: on peut alors trouver un ensemble fini S de points de $\mathbf{P}_{\bar{K}}$ suffisament grand pour que $\vartheta_{\lim}$ factorise par un morphisme surjectif ϑ_S tel que

$$\vartheta : \pi_1^{(p)}(C)_{\text{géom}} \xrightarrow{\varphi^{(p)}S} \pi_1^{(p)}(\mathbf{P}^1_{\bar{K}} - S) \overset{\vartheta_S}{\twoheadrightarrow} G. \tag{3}$$

Il ne reste plus qu'à se restreidre à $D \times_K L - \{S \cap D \times_K L\}$, L étant une extension finie de K sur laquelle le revêtement $\vartheta_S : \pi_1^{(p)}(\mathbf{P}^1_{\bar{K}} - S) \to G$ est défini.

Pour traiter le cas d'un revêtement fini d'ordre quelconque on a vu que, quitte à faire une extension finie de K, il suffit de considérer des revêtements par des groupes G qui sont résolubles, produits semi-directs d'un p-groupe P par un groupe cyclique Γ d'ordre premier à p (cf. Corollaire 2.5). On va d'abord prolonger au dessus de $\mathbf{P}^1_K - \{0, \infty\}$ le revêtement cyclique de groupe Γ, $C'' = C'/P$ de C, ce qui est possible grâce à la théorie de Kummer (cf. Proposition 2.7.(a)), et ensuite prolonger le P-revêtement C' de C'' en appliquant le Théorème 2.9 ou le Théorème 2.10, selon la caractéristique de K: il faut s'assurer que ce deuxième prolongement peut être construit de façon équivariante sous l'action de Γ, pour que le revêtement composé soit encore galoisien.

THÉORÈME 2.13 *Si K est de caractéristique nulle et C'/C est un revêtement fini étale géométrique, galoisien de groupe $G = P \rtimes \Gamma$, produit semi-direct d'un p-groupe P par un groupe cyclique Γ d'ordre premier à p, de la couronne rigide d'épaisseur nulle, il existe une extension finie L/K, telle que ce revêtement se prolonge en un revêtement géométrique fini, galoisien de même groupe du disque $D \times_K L$, privé d'un nombre fini de points rationnels sur L.*

Preuve. En considérant la tour des revêtements de C:

$$C' \xrightarrow{P} C'' = C'/P \xrightarrow{\Gamma} C$$

on peut d'abord prolonger C''/C en un Γ-revêtement X'' de $X = \mathbf{P}^1_K - \{0, \infty\}$ (cf. Proposition 2.7.(a)).

Par la formule de Hurwitz, un revêtement fini étale de degré premier à p de $\mathbf{P}^1_{\bar{K}} - \{0, \infty\}$ est totalement ramifié en 0, ∞ et isomorphe à $\mathbf{P}^1_{\bar{K}} - \{0, \infty\}$: un revêtement étale géométrique X de degré premier à p de $\mathbf{P}^1_K - \{0, \infty\}$ est donc une courbe sur K de genre géométrique 0 qui, puisque 0 est totalement ramifié, possède un point rationnel sur K, et qui est donc isomorphe à $\mathbf{P}^1_K - \{0, \infty\}$.

On peut alors, en appliquant le Théorème 2.9 ou le Théorème 2.12, selon la caractéristique de K et quitte à faire une extension finie L/K, prolonger le P-revêtement C' de C'' en un P-revêtement de $X'' \simeq \mathbf{P}^1_K - \{0, \infty\}$, étale en dehors d'un ensemble fini de points $S'' \subset X''(L)$. Toutefois, pour que le revêtement composé

$$X' \xrightarrow{P} X'' = X'/P \xrightarrow{\Gamma} X$$

soit galoisien de groupe G, il faut prendre soin de construir ce P-revêtement $X' \to X''$ de façon équivariante sous l'action de Γ définie comme suit.

Notons $\pi_1^{(p,\Gamma)}(C'')$ (resp. $\pi_1^{(p,\Gamma)}(X'')$) le groupe profini limite projective des groupes $P \ltimes \Gamma$, P variant parmi les quotients finis $\pi_{1,\text{géom}}^{(p)}(C'')$ (resp. $\pi_{1,\text{géom}}^{(p)}(X'')$): on dispose de suites exactes scindées

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \pi_{1,\text{géom}}^{(p)}(X'') & \longrightarrow & \pi_1^{(p,\Gamma)}(C'') & \longrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \varprojlim_S \pi_{1,\text{géom}}^{(p)}(X''-S) & \longrightarrow & \varprojlim_S \pi_1^{(p,\Gamma)}(X''-S) & \longrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

et le choix d'un scindage $\Gamma \to \pi_1^{(p,\Gamma)}(C'')$ définit une action de Γ sur le groupe $\varprojlim_S \pi_{1,\text{géom}}^{(p)}(X''-S)$ qui laisse stable le facteur direct $\pi_{1,\text{géom}}^{(p)}(C'')$

L'homomorphisme surjectif $\vartheta : \pi_1^{(p)}(C'') \to P$ peut être prolongé en un morphisme surjectif $\vartheta_{\lim}$: $\varprojlim \pi_1^{(p)}(X''-S'') \to P$ qui est Γ-équivariant si on peut trouver un supplémentaire au facteur direct $\pi_1^{(p)}(C'')$ qui soit stable sous l'action de Γ.

Cette deniere condition étant satisfaite grâce au corollaire 1.11, on peut construir un prolongement Γ-équivariant $X' \to X''$ de $C' \to C''$, de façon que le revêtement composé $X' \to X$, qui prolonge le revêtement initial C'/C, soit encore galoisien de groupe G: il ne reste plus qu'à se restreidre à $D \times_K L - \{S \cap D \times_K L\}$, L étant une extension finie de K sur laquelle le revêtement $\vartheta_{S''} : \pi_1^{(p)}(X''-S'') \to P$ est défini.

Preuve du Théorème 1. Par la Proposition 2.4 et son corollaire, quitte à étendre le corps K, on peut prolonger le revêtement C'/C en un revêtement étale galoisien de groupe G de la couronne $C(r) = \{x \in K : r \leqslant |x| \leqslant 1\}$, tel que la restriction de $C'(r)$ au dessus de la couronne semi-ouverte $r \leqslant |x| < 1$ est un revêtement décomposé en une somme de revêtements galoisiens de groupes résolubles du type $P \ltimes \Gamma$.

Considérons la couronne d'épaisseur nulle $\Lambda = \{x \in K : |x| = r\}$, contenue dans $C(r)$. Si $\Lambda' = C'(r) \times \Lambda$ est la restriction de $C'(r)$ au dessus de Λ, on peut appliquer le Théorème 2.13 pour prolonger le revêtement résoluble (réductible) Λ'/Λ en un revêtement Δ' du disque $\Delta = \{x \in K : |x| \leqslant r\}$.

On peut alors les recoller $C'(r)$ et Δ' le long de l'ouvert admissible Λ en un revêtement galoisien de groupe G de D.

COROLLAIRE 2.14 *Soit X une courbe affinoïde lisse sur K, U un ouvert de X, complémentaire d'une réunion finie de disque ouverts (cf. Proposition 2.4) et soit $U' \to U$ un revêtement fini galoisien géométrique de U. Il existe alors une extension finie L/K, telle que ce revêtement se prolonge en un revêtement géométrique fini, galoisien de même groupe X' de $X \times_K L$, ramifié en un nombre fini de points rationnels sur L.*

3. Relèvement de revêtements galoisiens de courbes algébriques

Traditionnellement, l'étude de problèmes de relèvement a été conduit par des techniques de déformations infinitésimales (cf. Grothendieck [6], exposés I-III); nous poursuivons cette approche en employant le language des espaces analytiques rigides.

On a déja introduits les espaces rigides affinoïdes et les éclatements admissibles dans les schémas formels. La catégorie des espaces rigides séparés et quasi-compacts est définie comme la localisation de la catégorie des R-schémas formels séparés de type fini et complets pour la topologie π-adique par rapport aux éclatements admissibles (cf. Raynaud [13]).

Tout R-schéma formel séparé de type fini $\mathfrak{X}$ définit donc de façon canonique un espace rigide séparé quasi-compact X_K qu'on appelera *fibre générique* de $\mathfrak{X}$; inversement, tout espace rigide séparé et quasi-compact est la fibre générique de schémas formels qu'on appelera des *modèles entiers* de X_K. De façon analogue, tout faisceau cohérent sur $\mathfrak{X}$ définit un faisceau cohérent sur X_K (en tensorisant par K) et tout faisceau cohérent sur X_K provient d'un faisceau sur $\mathfrak{X}$.

Les schémas formels propres correspondent aux espaces rigides propres, et en particulier, pour tout espace analytique rigide propre, le choix d'un modèle entier permet d'appliquer les résultats 'GAGA formel' de EGA III; par exemple toute courbe rigide propre est la fibre générique d'une R-courbe algèbrique propre. Ce type de raisonnement entre dans le cadre du principe *GAGA rigide*.

Nous démontrerons le théorème 2 par une suite de constructions locales, suivies de recollements. Nous commencons par nous placer dans le cas affine. Soit $\mathfrak{X}$ une R-courbe formelle, affine et lisse, $x \in \mathfrak{X}(R)$ un point de $\mathfrak{X}$, x_k sa réduction mod π. Soit $Y_k \to X_k$ un revêtement fini, normal, galoisien de groupe G de la fibre spéciale de $\mathfrak{X}$, étale sur $U_k = X_k - \{x_k\}$. Soient $y_1, \ldots, y_r$ les points de Y_k au dessus de x_k: fixons-en un, disons y_1, et notons $I = I_{y_1}$ son groupe d'inertie.

L'immersion ouverte $U_k \hookrightarrow X_k$ se relève en une immersion ouverte de schémas formels $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{X}$ (Grothendieck et Dieudonné [8], 2.7.1): on dispose d'une équivalence de catégories entre les revêtements étales de U_k et de $\mathfrak{U}$ (cf. Grothendieck [6], I, 8.4). On a donc en particulier un revêtement étale de groupe G,

$$\mathfrak{V} \longrightarrow \mathfrak{U},$$

qui se réduit mod. π suivant la restriction de $V_k = \rho_k^{-1}(U_k) \to U_k$.

Notons U_K (resp. X_K, V_K) les espaces rigides fibres génériques des schémas formels $\mathfrak{U}$ (resp. $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{V}$); le complémentaire de U_K dans X_K est formé des points qui se spécialisent sur x_k.

Le but est de prolonger le revêtement $\mathfrak{V} \to \mathfrak{U}$ en un revêtement galoisien $\mathfrak{X}$. On va proceder en trois étapes. Le premier pas consiste en une localisation étale au voisinage de x pour ramener le groupe de Galois G au groupe d'inertie I.

Rappelons que si H est uns sous-groupe de G et si $Y \to X$ est un revêtement (de schémas ou d'espaces rigides) galoisien de groupe H, le *revêtement induit* $\mathrm{Ind}_H^G Y$ de X est défini par

$$Y = \coprod_{\gamma \in \Gamma} Y_\gamma$$

où Γ est un système de représentants des classes à gauche de G/H. Si $g \in G$ et $\alpha \in \Gamma$, il existe un unique $\beta \in \Gamma$ et un unique $h \in H$ tels que $g\alpha = \beta h$, et on définit l'action de G sur Ind_H^G en convenant que $g|_{Y_\alpha}$ envoie Y_α sur Y_β par h. Pour plus de détails cf. Raynaud [14], 4.1.

PROPOSITION 3.1 *Soit $\mathfrak{X}$ une R-courbe formelle, affine et lisse, $x \in \mathfrak{X}(R)$ un point de $\mathfrak{X}$. Soit $Y_k \to X_k$ un revêtement fini, normal, galoisien de groupe G de la fibre spéciale X_k de $\mathfrak{X}$, étale sur $U_k = X_k - \{x_k\}$. Quitte à remplacer $\mathfrak{X}$ par un voisinage de x, il existe un $\mathfrak{X}$-schéma formel $\mathfrak{X}^1$ vérifiant les conditions suivantes:*

(1) *$\mathfrak{X}^1$ est un $\mathfrak{X}$-schéma formel étale et fidèlement plat.*
(2) *Il existe un seul point au dessus de x_k dans la fibre spéciale X_k^1 de $\mathfrak{X}^1$.*
(3) *Le revêtement $Y_k^1 \to$ Spec A^1, déduit par changement de base*

$$\begin{tikzcd} Y_k^1 \arrow[r] \arrow[d] & Y_k \arrow[d] \\ X_k^1 \arrow[r] & X_k \end{tikzcd}$$

est de la forme $Y_k^1 = \mathrm{Ind}_I^G Z_k$.
(4) *Avec les notations ci-dessus, le revêtement étale $\mathfrak{V}^1 \to \mathfrak{U}^1$ déduit du changement de base $\mathfrak{X}^1 \to \mathfrak{X}$ est de la forme $\mathfrak{V}^1 = \mathrm{Ind}_I^G \mathfrak{W}^1$.*

Preuve. Soit $\mathcal{O}_{X_k,x_k}$ l'anneau local de X_k en x_k et $\mathcal{O}^h_{X_k,x_k}$ son henselisé. Au dessus de Spec $\mathcal{O}^h_{X_k,x_k}$, le revêtement $Y_k \to X_k$ se décompose partiellement et dévient un revêtement induit de I à G. Considérons Spec $\mathcal{O}^h_{X_k,x_k}$ comme limite inductive filtrante de schémas affines étales sur X_k ayant un seul point au dessus de x_k: on voit qu'il existe un schéma X_k^1, affine sur X_k, ayant un seul point x_k^1 au dessus de x_k et tel que $Y_k^1 = Y_k \times_{X_k} X_k^1$ soit de la forme $\mathrm{Ind}_I^G Z_k^1$, où $Z_k^1 \to X_k^1$ est un revêtement fini normal de groupe I. Quitte à restreindre X_k au voisinage de x_k, on peut supposer que $X_k^1 \to X_k$ est surjectif.

Le morphisme étale $X_k^1 \to X_k$ se relève uniquement mod. π^n en un morphisme étale de R/π^n-schémas; par passage à la limite, on obtient un morphisme étale de R-schémas formels $\lambda\colon \mathfrak{X}^1 \to \mathfrak{X}$.

Soit $\mathfrak{U}^1 = \lambda^{-1}(\mathfrak{U})$ et soit $\mathfrak{W}_k^1$ la restriction de Z_k^1 au dessus de U_k^1. L'image réciproque $\mathfrak{V}^1 \to \mathfrak{U}^1$ de $\mathfrak{V} \to \mathfrak{U}$ par λ est un revêtement étale de $\mathfrak{U}^1$ qui est induit à partir de W_k^1 en réduction mod. π. Donc on a $\mathfrak{V}^1 = \mathrm{Ind}_I^G \mathfrak{W}^1$, où $\mathfrak{W}^1$ est le revêtement étale de $\mathfrak{U}^1$ de groupe I qui relève W_k^1.

La deuxième étape est le prologement du revêtement étale $\mathfrak{V}^1 \to \mathfrak{U}^1$ en un revêtement galoisien ramifié de $\mathfrak{X}^1$.

PROPOSITION 3.2 *Avec les notations de la proposition 3.1, il existe une extension finie R'/R, telle que le revêtement $\mathfrak{W}^1 \times_R R' \to \mathfrak{U}^1 \times_R R'$ se prolonge en un revêtement*

$$\mathfrak{Z}'^1 \longrightarrow \mathfrak{X}^1 \times_R R',$$

galoisien de groupe I, normal, ramifié en un nombre fini de points.

Preuve. Quitte à remplacer $\mathfrak{X}^1$ par un ouvert, on peut trouver une coordonnée g sur $\mathfrak{X}^1$ qui s'annule en x^1: elle définit un morphisme étale

$$g_x : \mathfrak{X}^1 \longrightarrow \mathfrak{D},$$

dans le disque formel standard $\mathfrak{D}$ qui induit un isomorphisme entre l'ensemble des points de $\mathfrak{X}^1 \otimes K$ qui ont même réduction que x^1 et le disque rigide ouvert.

Soient U_K^1 (resp. W_K^1) les espaces rigides affinoïdes canoniquement associés à $\mathfrak{U}^1$ (resp. $\mathfrak{W}^1$): l'isomorphisme donné par g_x permet d'appliquer le Corollaire 2.14 pour prolonger, après extension finie K'/K, le revêtement $W_K^1 \to U_K^1$ en un revêtement

$$Z'^1_{K'} \longrightarrow X^1_{K'}$$

galoisien de groupe I, ramifié en un nombre fini de points de $X^1_{K'} - U^1_{K'}$; si K est de caractéristique p, on peut concentrer la ramification au point $x^1_{K'}$.

Si R' est l'anneau des entiers de K', $\mathfrak{Z}'^1$ est défini comme la normalisation de $\mathfrak{X}^1$ dans Z'^1_K.

Remarque 3.3 Si le revêtement de départ $\rho_k : Y_k \to X_k$ est modérément ramifié en x_k, on peut trouver un unique relèvement $\mathfrak{Z}^1 \to \mathfrak{X}^1$ normal et modérément ramifié au dessus de x^1 sans utiliser les résultats du Section 2. Il suffit de remarquer que, par la Proposition 3.1, on est ramenés à un revêtement par le groupe d'inertie, qui est cyclique d'ordre premier à p: le revêtement $Z_K^1 \to X_k^1$ est monogène, donné par une équation de Kummer $T^n - a = 0$, et il suffit de choisir un relèvement $\hat{a}$ de a qui s'annule en x^1. Ce relèvement est unique, car deux relèvement de a diffèrent par une puissance n-ième dans le corps des fonctions rationnelles sur $\mathfrak{X}^1$.

PROPOSITION 3.4 *La fibre spéciale $Z_k'^1$ du schéma formel $\mathfrak{Z}'^1$ donné par la Proposition 3.2 est réduite, unibranche et admet Z_k^1 (cf. Proposition 3.1.* (3)*) pour normalisation.*

Preuve. $\mathfrak{Z}'^1$ étant normal, Z'^1_k est de profondeur 1 au dessus de x^1_k et, puisque elle prolonge W^1_k, Z'^1_k est réduite. De plus, par construction, W^1_k est isomorphe un ouvert de Zariski de Z'^1_k et de Z^1_k; on a alors une application birationelle

$$\nu\colon Z^1_k \longrightarrow Z'^1_k.$$

Puisque Z^1_k est normale, ν est le morphisme de normalisation. ν est surjectif et équivariant sous I: comme il y a un seul point dans Z^1_k au dessus de x^1_k, *a fortiori* il y en a un seul dans Z'^1_k, et ν est un homéomorphisme I-équivariant. En particulier Z'^1_k est unibranche.

COROLLAIRE 3.5 *Dans les notations de la Proposition 3.1, il existe une extension finie R'/R telle que le revêtement $\mathfrak{V}^1 \to \mathfrak{U}^1$ se prolonge en un revêtement $\mathfrak{Y}'^1 \to \mathfrak{X}^1$ normal, galoisien de groupe G, tel que la fibre spéciale Y'^1_k soit reduite, unibranche et admette un morphisme de normalisation $Y^1_k \to Y'^1_k$ G-équivariant.*

Preuve. Il suffit de poser $\mathfrak{Y}'^1 = \mathrm{Ind}_I^G \mathfrak{Z}'^1$.

La troisième et dernière étape consiste en une descente du revêtement $\mathfrak{Y}'^1 \to \mathfrak{X}^1$ par le morphisme $\lambda\colon \mathfrak{X}^1 \to \mathfrak{X}$: on va l'obtenir au moyen d'un argument de descente de Ferrand et Raynaud [3] combiné avec un passage à la limite; pour d'autres résultats de ce type, cf. Harbater [9].

Soit $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}\,\mathcal{A}$ une R-courbe formelle lisse et $\mathfrak{X}^1 = \mathrm{Spf}\,\mathcal{A}^1$ un $\mathfrak{X}$-schéma formel étale et fidèlement plat. Soit x un point de $\mathfrak{X}(R)$, et supposons que x se relève en un unique point $x^1 \in \mathfrak{X}^1(R)$. Si f est une coordonnnée sur $\mathfrak{X}$ qui s'annule en x, on note $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\{x\}}$ le complété π-adique de $S^{-1}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$, $S = \{f^n\}$, anneau des fonctions du schéma formel complémentaire des points qui se spécialisent suivant x.

Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, on peut définir les modules $\mathcal{M}^1 = \mathcal{M} \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^1}$ et $\mathcal{M}_x = \mathcal{M} \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\{x\}}$. On a alors un isomorphisme

$$u\colon \mathcal{M}^1 \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^1,\{x^1\}} \longrightarrow \mathcal{M}_x \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\{x\}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^1,\{x^1\}}.$$

En fait ces données déterminent $\mathcal{M}$:

LEMME 3.6 *Le foncteur $\mathcal{M} \mapsto (\mathcal{M}^1, \mathcal{M}_x, u)$ établit une équivalence entre la catégories des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-modules (resp. algèbres, resp. G-algèbres) cohérents et la catégorie des triplets formés d'un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^1}$-module (resp. algèbre, resp. G-algèbre) cohérent, d'un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\{x\}}$-module (resp. algèbre, resp. G-algèbre) cohérent et d'un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^1,\{x^1\}}$-isomorphisme u comme ci-dessus.*

Preuve. Notons $\mathcal{A} = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ et $\mathcal{A}^1 = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^1}$. Donnons-nous un $\mathcal{A}_{\{x\}}$-module cohérent M_x, un $\mathcal{A}^1$-module cohérent N^1 et un isomorphisme $u : N^1 \otimes \mathcal{A}^1_{\{x^1\}} \to M_x \otimes_{\mathcal{A}_{\{x\}}} \mathcal{A}^1_{\{x^1\}}$: par la Proposition 4.2 de Ferrand–Raynaud [3], on peut construire, pour tout entier n, un $\mathcal{A}/\pi^n$-module N_n muni d'isomorphismes $N_n \otimes_{\mathcal{A}/\pi^n}$

$\mathcal{A}^1/\pi^n \cong N^1/\pi^n$ et $N_n \otimes_{\mathcal{A}/\pi^n} \mathcal{A}_{\{x\}}/\pi^n \cong M_x/\pi^n$ compatibles avec u_n. Le fait que les N_n soient définis par des diagrammes cartésiens à partir des données M_x/π^n et N^1/π^n (cf. *loc. cit.*), permet de vérifier sans peine que ces modules et les isomorphismes mentionnés définissent un système projectif, et on peut donc passer à la limite pour trouver un $\mathcal{A}$-module N. Enfin, puisque les N_n sont définis par des diagrammes cartésiens, si les M_x/π^n et N^1/π^n sont munis de structures d'algèbres (resp. G-algèbres), les N_n et leur limite N le sont aussi.

COROLLAIRE 3.7 *Soit $\mathfrak{X}$ une R-courbe formelle affine lisse, $x \in \mathfrak{X}(R)$ et soit $\mathfrak{X}^1$ une R-courbe formelle affine lisse, étale et fidèlement plate sur $\mathfrak{X}$, ayant un seul point x^1 au dessus de x. Soit $\mathfrak{U}$ l'ouvert de $\mathfrak{X}$ complémentare des points qui se spécialisent suivant x et $\mathfrak{U}^1$ son image réciproque dans $\mathfrak{X}^1$. Alors, pour tout revêtement fini (galoisien de groupe G) $\varrho_{\mathfrak{U}} : \mathfrak{V} \to \mathfrak{U}$ et pour tout revêtement fini (galoisien) $\varrho'_{\mathfrak{X}^1} : \mathfrak{Y}'^1 \to \mathfrak{X}^1$ qui prolonge le précédent après le changement de base $\mathfrak{X}^1 \to \mathfrak{X}$, il existe un unique revêtement (galoisien de groupe G)*

$$\varrho'_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{Y}' \longrightarrow \mathfrak{X}$$

qui induit $\varrho_{\mathfrak{U}}$ en restriction à $\mathfrak{U}$ et tel que $\mathfrak{Y}' \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}^1 = \mathfrak{Y}'^1$.

Preuve du Théorème 1. Soit $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_s$ le diviseur de ramification de $\rho_k : Y_k \to X_k$; on choisit un relèvement $x_1, \ldots, x_s$ dans $X(R)$ pour chacun de ces points et on note Σ l'ensemble des points de la courbe propre et lisse X se réduisant suivant les x_i. Soit $\{\mathfrak{X}_\alpha\}_\alpha$ un recouvrement fini affine formel du schéma formel $\mathfrak{X} = \hat{X}$, séparé complété de X pour la topologie π-adique: on peut le supposer suffisament fin pour que les $\mathfrak{X}_\alpha$ vérifient les hypothèses de Proposition 3.1 et pour que tout $\mathfrak{X}_\alpha$ contienne au plus un des x_i; on peut aussi supposer que $\mathfrak{X}_\alpha \cap \mathfrak{X}_\beta \cap \Sigma = \varnothing$ pour $\alpha \neq \beta$.

Par les résultats de relèvement de revêtements étales, un dispose d'une famille de revêtements finis étales, galoisiens de groupe G, des ouverts $\mathfrak{U}_\alpha = \mathfrak{X}_\alpha - \{\mathfrak{X}_\alpha \cap \Sigma\}$.

Fixons un indice α: si $\mathfrak{X}_\alpha$ contient l'un des x_i, par la Proposition 3.1 et le Corollaire 3.5, quitte à passer à une extension finie R'_α de R, on peut trouver un R'_α-schéma formel affine lisse $\mathfrak{X}^1_\alpha$, étale et fidèlement plat sur $\mathfrak{X}_\alpha$, et un revêtement normal, galoisien de groupe G

$$\varrho'^1_\alpha : \mathfrak{Y}'^1_\alpha \longrightarrow \mathfrak{X}^1_\alpha$$

qui prolonge le revêtement de $\mathfrak{U}_\alpha$ après le changement de base; on sait aussi (Corollaire 3.5) que la fibre spéciale de $\mathfrak{Y}'^1_\alpha$ est réduite et unibranche.

Le Corollaire 3.7 permet de descendre le revêtement ϱ'^1_α en un revêtement normal, galoisien de groupe G

$$\varrho'_\alpha : \mathfrak{Y}'_\alpha \longrightarrow \mathfrak{X}_\alpha \times_R R'_\alpha$$

Puisque $\mathfrak{X}^1_\alpha$ est étale et fidèlement plat sur $\mathfrak{X}_\alpha$, la fibre spéciale de $\mathfrak{Y}'_\alpha$ est encore réduite et unibranche.

Si R' est l'extension composée de toutes les R'_α, les hypothèses permettent de recoller les revêtements ϱ'_α en un revêtement

$$\varrho' : \mathfrak{Y}' \longrightarrow \mathfrak{X} \times_R R'$$

normal fini galoisien de groupe G. La fibre spéciale Y'_k est reduite et unibranche; par le Corollaire 3.5, elle admet un morphisme de normalisation

$$\nu : Y_k \longrightarrow Y'_k$$

qui est un homéomorphisme G-équivariant. En fait Y'_k est lisse aux points modérément ramifiés (cf. Remarque 3.3).

La courbe formelle normale $\mathfrak{Y}'$ étant finie sur $\mathfrak{X}'$, propre sur R', par GAGA formel le revêtement ϱ' ainsi construit s'algébrise en un revêtement galoisien

$$\rho' : Y' \longrightarrow X \times_R R'$$

de groupe G de R'-courbes, ce qui achève la démonstration.

En combinant le Corollaire 3.7 et la Remarque 3.3 on retrouve le résultat de relèvement pour les revêtements modérés:

COROLLAIRE 3.8 (Grothendieck). *Soit X une R-courbe propre et lisse, $\rho_k : Y_k \to X_k$ un revêtement fini galoisien modéré de courbes propres et lisses sur k, et soit D un relèvement à X du diviseur de la ramification modérée de ρ_k. Alors il existe un unique revêtement $\rho : Y \to X$ modéré, galoisien de même groupe de R-courbes propres et lisses, étale en dehors de D.*

EXEMPLE 3.9 Le quotient de la courbe $Y_k = \mathbf{P}^1_k$ par le groupe $G = \mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_p)$ est isomorphe à $\mathbf{P}^1_k$. On peut relever le revêtement $Y_k \to \mathbf{P}^1_k$ en un revêtement galoisien de groupe G de courbes propres normales sur l'anneau $R = W(k)[\zeta]$, où $W(k)$ est l'anneau des vecteurs de Witt de k et ζ une racine primitive p-ième de l'unité. On peut trouver un relèvement de genre arithmétique $p_a = \frac{1}{2}(p+1)(p-1)(p-3)$ et dont la fibre spéciale a $p+1$ points de rebroussement, chacun desquels donne une contribution à p_a égale à $\delta = \frac{1}{2}(p-1)(p-3)$.

EXEMPLE 3.9 (cf. Roquette [15]). Soit C_k la courbe hyperelliptique revêtement double de $\mathbf{P}^1_k$, normalisation de l'équation d'Artin–Schreier $z^2 = y^p - y$ (on suppose ici $p \neq 2$). C_k est de genre $g = \frac{1}{2}(p-1)$ et le groupe $\mathrm{Aut}(C_k)$ est engendré par $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_p)$ (qui se relève à C_k) et par l'involution hyperelliptique: on a donc que, pour $p \geqslant 5$, $|\mathrm{Aut}(C_k)| \gneq 84(g-1)$ (en fait C_k est – à isomorphisme prés – la seule courbe de genre $g < p-1$ qui ne respecte pas la borne de Hurwitz, cf. *loc. cit.*, Satz 3).

On peut relever le revêtement galoisien $C_k \to C_k/\mathrm{Aut}(C_k) \cong \mathbf{P}^1_k$ à $R = W(k)[\zeta]$. On trouve une R-courbe $C' \to \mathbf{P}^1_R$ de genre arithmétique $p_a = \frac{1}{2}(p-1)(2p^2-3p-4)$ dont la fibre spéciale a $p+1$ points de rebroussement, tous de multiplicité $\delta = \frac{1}{2}(p-1)(2p-5)$.

Acknowledgement

Je tiens à remercier vivement Michel Raynaud pour les conseils et les encouragements qu'il n'a cessé de me prodiguer tout au long de l'élaboration de ce travail. Je voudrais aussi remercier D. Harbater et W. Lütkebohmert pour des remarques qui ont permis une amélioration du texte original.

References

1. Artin, M., Grothendieck, A. and Verdier, J. L. (eds.): *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Lecture Notes in Math. 269, 270, 305, Springer, Heidelberg, 1972–73.
2. Bosch, S., Güntzer, U. and Remmert, R.: *Non-archimedean analysis*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 261, Springer, Heidelberg, 1984.
3. Ferrand, D. and Raynaud, M.: *Fibres formelles d'un anneau local noetherien*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 4me série 3 (1970) 295–311.
4. Gorenstein, D.: *Finite groups*, Chelsea, New York, 1980.
5. Grothendieck, A.: *Fondements de la Géométrie Algébrique*, Séminaire Bourbaki (1957–62), Mathématique Paris, 1962.
6. Grothendieck, A. (ed.): *Revêtements étales et groupe fondamental*, Lecture Notes in Math. 224, Springer, Heidelberg, 1971.
7. Grothendieck, A. and Dieudonné, J.: *Éléments de Géométrie Algébrique*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 166 Springer, Heidelberg, 1971.
8. Grothendieck, A. and Dieudonné, J.: *Éléments de Géométrie Algébrique IV: Étude locale des schémas et des morphismes de schémas*, Publications Mathématiques de l'I.H.E.S. 20, 24, 28, 32.
9. Harbater, D.: *Formal patching and adding branch points*, American Journal of Mathematics 115 (1993) 487–508.
10. Lütkebohmert, W.: *Riemann's existence problem for a p-adic field*, Inventiones Mathematicae 111 (1993) 309–330.
11. Oort, F.: *Finite group schemes, local moduli for abelian varieties and lifting problems*, Algebraic Geometry, Oslo 1970 (F. Oort, ed.), Wolters-Noordhoff, 1972, pp. 223–254.
12. Raynaud, M.: *Anneau locaux henséliens*, Lecture Notes in Math. 169, Springer, Heidelberg, 1970.
13. Raynaud, M.: *Géométrie analytique rigide d'après Tate, Kiehl...*, Mémoires de la Société Mathématique de France 39–40 (1974) 319–327.
14. Raynaud, M.: *Revêtements de la droite affine en caractéristique $p > 0$ et conjecture d'Abhyankar*, Inventiones Mathematicae 116 (1994) 425–462.
15. Roquette, P.: *Abschätzung der Automorphismenzahl von Funktionenkörpern bei Primzahlcharakteristik*, Mathematische Zeitschrift 117 (1970) 157–163.
16. Sekiguchi, T., Oort, F. and Suwa, N.: *On the deformations of Artin–Schreier to Kummer*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 4me série 22 (1989) 345–375.
17. Serre, J.-P.: *Groupes algébriques et corps de classes*, Hermann, Paris, 1959.
18. Serre, J.-P.: *Cohomologie Galoisienne*, Lecture Notes in Math. 5, Springer, Heidelberg, 1964.
19. Serre, J.-P.: *Corps Locaux*, Hermann, Paris, 1968.
20. Shatz, S.: *Profinite groups, arithmetic and geometry*, Annals of Math. Studies 67, Princeton University Press, Princeton, 1972.
21. Tate, J.: *Rigid analytic spaces*, Inventiones Mathematicae 12 (1971) 257–289.