MARIE-FRANCE VIGNÉRAS

Erratum à l'article : « Représentations modulaires de $GL(2,F)$ en caractéristique l, F corps p-adique, $p \neq l$ »

Compositio Mathematica, tome 101, nº 1 (1996), p. 109-113

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1996__101_1_109_0>

Compositio Mathematica **101:** 109–113, 1996.

Erratum à l'article: Représentations modulaires de $\mathrm{GL}(2, F)$ en caractéristique l, F corps p-adique, $p \neq l$. *

MARIE-FRANCE VIGNÉRAS
8 Rue des Ecoles, 75005 Paris, France

Received: April 4 1995; accepted in final form: August 8 1995

La démonstration du Lemme 38 de l'article ci-dessus n'est complète que si $q \neq 1$ modulo l. Voici une autre démonstration qui est valable pour tout q, établie grâce à l'aide de Hervé Jacquet, et de [JL]**, équivalente à une *relation de congruence sur les facteurs* ϵ.

Soient $p \neq l$ deux nombres premiers, et F un corps local non archimédien de corps résiduel à $q = p^f$ éléments. Soit π une représentation irréductible cuspidale de $G = \mathrm{GL}(2, F)$ sur $\overline{\mathbf{Q}}_l$, de caractère central ω_π à valeurs l-entières (i.e. dans $\overline{\mathbf{Z}}_l^*$). On identifie le centre de G à F^* par l'application diagonale. Soit $\psi\colon F \to \overline{\mathbf{Q}}_l^*$ un caractère additif lisse de F, de noyau l'anneau des entiers O_F. Le modèle de Kirillov $K(\pi, \psi)$ est le $\overline{\mathbf{Q}}_l$-espace vectoriel $C_c^\infty(F^*)$ des fonctions localement constantes à support compact $f : F^* \to \overline{\mathbf{Q}}_l$, munie d'une action de G isomorphe à π, telle que

$$\left(\pi \begin{pmatrix} ad & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} f\right)(x) = \omega_\pi(d) f(ax), \tag{1}$$

$$\left(\pi \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f\right)(x) = \psi(bx) f(x), \tag{2}$$

pour $a, d, x \in F^*$, $b \in F$. Le Lemme 38 résulte du théorème suivant:

THÉORÈME. *Le $\overline{\mathbf{Z}}_l$-module L des fonctions du modèle de Kirillov à valeurs l-entières, est stable par G.*

---

* Compositio Math. 72:33–36, 1989.

** Jacquet H., Langlands R. Automorphic forms on GL(2). Springer-Verlag Lecture Notes in Math.114, 1970.

Preuve. (a) Réduction. Les valeurs de ψ et de ω_π étant l-entières, le $\overline{\mathbf{Z}}_l$-module L est stable par le groupe B des matrices triangulaires supérieures. On a $G = B \cup BwB$, où

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il suffit de montrer que $\pi(w)L \subset L$. On a

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w = w \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

pour $a \in F^*$. Donc (1) implique que la valeur en a de $\pi(w)f$ est égale à la valeur en 1 de $\pi(w)\phi$, où $\phi(x) = \omega_\pi(a)f(a^{-1}x)$ appartient à L. Il suffit de montrer que la valeur en 1 de $\pi(w)f$ est l-entière, pour tout $f \in L$.

(b) Rappel. L'action de $\pi(w)$ est décrite dans [JL] grâce à une transformation de Fourier sur $C_c^\infty(M(2,F))$ pour la mesure de Haar μ normalisée par $M(2,0_F)$ (i.e. le volume de $M(2,0_F)$ est 1):

$$\hat{f}(x) = \int_{M(2,F)} f(y)\psi\,\mathrm{tr}(xy)\,\mathrm{d}y,$$

où tr: $M(2,F) \to F$ est la trace. La mesure est auto-duale:

$$f(0) = \int_{M(2,F)} \hat{f}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Une fonction est à valeurs l-entières si et seulement si sa transformée de Fourier est à valeurs l-entières.

Soit $\phi(g)$ un coefficient de π et $f \in C_c^\infty(G)$. Notons $|x|_F$ la valeur absolue de $x \in F^*$, et det: $G \to F^*$ le déterminant. La fonction nulle hors de G et égale à

$$f(\det g)\phi(g)|\det g|_F^{-1}$$

pour $g \in G$, appartient à $C_c^\infty(M(2,F))$. Sa transformée de Fourier est égale à 0 hors de G et égale à[JL Lemma 13.1.1, p. 419] à

$$(\pi(w)f)(\det g)\phi(g^{-1})\omega_\pi^{-1}(\det g), \tag{2}$$

pour $g \in G$.

(c) Lemme préliminaire. *Il existe un coefficient ϕ de π, à valeurs l-entières, tel que $\phi(1) = 1$.*

On choisit un sous-groupe ouvert compact K de pro-ordre inversible modulo l, tel que $\pi^K \neq 0$ (π a un vecteur K-invariant non nul). Comme les valeurs de ω_π sont l-entières, un modèle quelconque V de π contient un $\overline{\mathbf{Z}}_l G$-réseau M avec les propriétés (article loc.cit. Lemme 31 p. 60):

– M^K est un $\overline{\mathbf{Z}}_l$-module libre non nul de rang fini.
– $V^K = M^K \otimes_{\bar{\mathbf{Z}}} \overline{\mathbf{Q}}_l$.
– $\pi(e_K)M = M^K$, où e_K est la mesure de Haar normalisée de K.

Notons $\tilde{V}$ le dual lisse de V, muni de l'action contragrédiente $\tilde{\pi}$, et $\tilde{M}^K$ l'image de $\mathrm{Hom}_{\bar{\mathbf{Z}}}(M^K, \overline{\mathbf{Z}}_l)$ par $v' \to \tilde{v}' := v'\pi(e_K)$. Alors

– $\tilde{M}^K$ est un $\overline{\mathbf{Z}}_l$-module libre non nul de rang fini.
– $(\tilde{V})^K = \tilde{M}^K \otimes_{\bar{\mathbf{Z}}} \overline{\mathbf{Q}}_l$.

On choisit une base (v_i) de M^K, de base duale (v_i'). On prend $\phi(g) = \langle \tilde{v}_1, \pi(g)v_1\rangle$.

(d) Démonstration du théorème. Avec ce coefficient, on déduit de (1) que $(\pi(w)f)(1) \in \overline{\mathbf{Z}}_l$ pour tout $f \in L$. ⌑

Dans notre article, nous avions utilisé une transformée de Fourier formelle sur $C_c^\infty(F^*)$. Le groupe des unités O_F^* est un groupe profini, commutatif, isomorphe au produit de $(\mathbf{Z}/l^a\mathbf{Z})$ et d'un groupe profini H de pro-ordre premier à l, où $q-1 = l^a m$, $(m,l) = 1$. Si μ est la mesure de Haar normalisée par H, étendue en une mesure de Haar sur O_F^*, et si $\chi \in \mathrm{Hom}(O_F^*, \overline{\mathbf{Q}}_l^*)$ est un caractère lisse, la transformée de Fourier d'une fonction $\phi \in C_c^\infty(O_F^*)$ est

$$\hat{\phi}(\chi) = \int_{O_F^*} \phi(x)\chi(x)\,\mathrm{d}x.$$

La transformée de Fourier d'une fonction de $C_c^\infty(O_F^*)$ à valeurs l-entières est l-entière. La réciproque n'est pas vraie si $a = 0$.

En effet, ϕ est invariante par un sous-groupe d'indice fini H' de H, et

$$\hat{\phi}(\chi) = [H:H']^{-1} \sum_{x\in O_F^*/H'} \phi(x)\chi(x).$$

Elle est nulle si χ n'est pas H'-invariante, et l'on a la formule d'inversion

$$\sum_\chi \hat{\phi}(\chi) = [H:H']^{-1} \sum_{x\in O_F^*/H'} \phi(x)\sum_\chi \chi(x) = [H:H']^{-1}[O_F^*:H']\phi(1),$$

$$\sum_\chi \hat{\phi}(\chi) = l^a\phi(1). \tag{3}$$

Donc si les valeurs de $\hat{\phi}$ sont l-entières, on a $\phi(1) \in \overline{\mathbf{Z}}_l$ *si et seulement si la transformée de Fourier de ϕ vérifie la relation de congruence* $l^{-a}\sum_\chi \hat{\phi}(\chi) \in \overline{\mathbf{Z}}_l$.

La transformée de Fourier formelle de $f \in C_c^\infty(F^*)$ en χ est la somme formelle (finie)

$$\hat{f}(\chi, X) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n X^n, \qquad a_n = \int_{O_F^*} f(p_F^n x)\chi(x)\,\mathrm{d}x,$$

où p_F est une uniformisante de O_F, et X une indéterminée. Celle de $f(p_F^{-m}x)$ est $\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_{n-m}X^n = X^m\hat{f}(\chi, X)$. Celle de $f(x^{-1})$ est $\hat{f}(\chi^{-1}, X^{-1})$.

La transformée de Fourier formelle de $\pi(\omega)f$ en χ est ([JL] 2.10 p. 46, 2.18.1 p. 79)

$$\epsilon(\pi', \psi)\hat{f}(\chi^{-1}\omega_\pi^{-1}|_{O_F^*}, X^{-1}), \tag{4}$$

où χ est identifié à un caractère de F^* trivial sur p_F, $\pi' = \pi \otimes \chi^{-1}$ det, $\epsilon(\pi, \psi) = c(\pi, \psi)X^m$ est le traditionnel facteur $\epsilon(\pi, s, \psi) = c(\pi, \psi)q^{-ms}$ de Jacquet-Langlands (on peut identifier π à une représentation complexe, pour $s \in \mathbf{C}$, et l'on pose $X = q^{-s}$), et $m = m(\pi)$ est un entier > 0 (le conducteur de π).

(4) est égal à $c(\pi', \psi)$ fois la transformée de Fourier formelle de $f(p_F^{m(\pi')}x^{-1})$ en $\chi\omega_\pi$. Si f est à valeurs entières, le théorème dit que $\pi(\omega)f$ est à valeurs l-entières; par (3) et (4), il est équivalent à certaines congruences entre les facteurs $\epsilon(\pi \otimes \chi^{-1}$ det, $\psi)$.

Voici un cas particulier. Si χ est trivial sur H, le conducteur de $\pi \otimes \chi$ est égal à celui de π. On identifie le groupe des caractères $\mathrm{Hom}(O_F^*, \overline{\mathbf{Q}}_l^*)$ triviaux sur H au groupe $\mathcal{X}$ des caractères de $\mathbf{Z}/l^a\mathbf{Z}$. On choisit f invariante par H. On déduit de (2) que

$$l^a(\pi(\omega)f)(1) = \sum_{x\in O_F^*/H} f(p_F^m x^{-1})\omega_\pi(x) \sum_{\chi\in\mathcal{X}} c(\pi', \psi)\chi(x). \tag{4}$$

En choisissant différents f, on obtient des relations congruences sur les facteurs ϵ.

COROLLAIRE. *Pour tout $x \in O_F^*$, la somme*

$$l^{-a} \sum_{\chi\in\mathcal{X}} \epsilon(\pi \otimes \chi^{-1} \det, \psi)\chi(x)$$

est l-entière.

Cette congruence se ramène, à la congruence classique des caractères $\chi \in \hat{H}$ d'un groupe fini H

$$|H|^{-1} \sum_{\chi\in\hat{H}} \chi(h) \in \mathbf{Z}, \quad h \in H,$$

en utilisant la correspondance de Langlands, et la propriété que $\epsilon(\pi, \psi) \in \overline{\mathbf{Z}}_l^*$ [*loc. cit.*]. Soit s une représentation irréductible de dimension 2 du groupe de Weil absolu W_F de F, et $\tau\colon W_F^{ab} \to F^*$ un isomorphisme du corps de classes local. Si s n'est pas modérément ramifiée, alors [Deligne-Henniart*, Th. 4.2, p. 108]

$$\epsilon(s \otimes \chi\tau, \psi) = \epsilon(s, \psi)\chi(c),$$

* *Invent. Math.* **64** (1981), p. 89–118

où $c \in F^*$ ne dépend que de s. Si s est modérément ramifiée, elle est induite d'un caractère modérément ramifié μ de l'extension quadratique non ramifiée de F, à valeurs dans $\overline{\mathbf{Z}}_l^*$. Par torsion par un caractère non ramifié, on peut supposer que μ est triviale sur p_F, et alors

$$\epsilon(s \otimes \chi\tau, \psi) = \sum_{x \in \mathbf{F}_{q^2}^*} \mu(x)\chi(x^{1+q})\psi((x + x^q)/p_F).$$

Il est clair dans les deux cas, que la congruence pour $\epsilon(s \otimes \chi\tau, \psi)$ résulte de la congruence classique des caractères d'un groupe fini.