COMPOSITIO MATHEMATICA

JEAN-MARC DELORT

Microlocalisation simultanée et problème de Cauchy ramifié

Compositio Mathematica, tome 100, nº 2 (1996), p. 171-204
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1996__100_2_171_0>

Compositio Mathematica **100:** 171–204, 1996.

Microlocalisation simultanée et problème de Cauchy ramifié

JEAN-MARC DELORT
Université Paris XIII – Institut Galilée, Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications, URA 742, Avenue Jean-Baptiste Clément, F-993430 Villetaneuse, France

Received 21 January 1994; accepted in final form 2 December 1994

0. Introduction

D'Agnolo et Schapira [1] ont récemment étudié certains problèmes de Cauchy à données ramifiées du point de vue de la théorie microlocale des faisceaux. Plus précisément, ces auteurs ont prouvé un résultat géométrique général d'image inverse du complexe des solutions d'un complexe faiblement cohomologiquement constructible K à valeurs dans un complexe de faisceaux F, sous certaines hypothèses. Ils ont également montré que si $Z_1, \dots, Z_p$ sont p hypersurfaces complexes de $X = \mathbb{C}^n$ se coupant transversalement deux à deux le long d'une même sous-variété Z de codimension 2, les sommes de fonctions ramifiées autour de chacune des Z_j se réalisent comme sections de $R\mathcal{H}om(K, \mathcal{O}_X)$ où K est un complexe convenable et $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X. Leur résultat général s'applique dans ce contexte et leur permet de résoudre le problème de Cauchy pour un $\mathcal{D}$-module, étendant ainsi un résultat de Hamada–Leray–Wagschal [6].

Le but de cet article est de réaliser une construction similaire, qui permette d'étendre de manière analogue un cas particulier d'un résultat de [12] concernant le problème de Cauchy pour un opérateur à données ramifiées générales le long de la réunion des p hypersurfaces $Z_1, \dots, Z_p$. Les fonctions ramifiées autour de $Z_1 \cup \cdots \cup Z_p$ peuvent en effet se décrire à l'aide d'un complexe $R\mathcal{H}om(K, \mathcal{O}_X)$ où K est un faisceau convenable. La difficulté nouvelle réside dans le fait que $SS(K)$ contient le conormal à l'intersection Z des Z_j alors que dans le cas traité par d'Agnolo et Schapira, le microsupport du complexe K correspondant est contenu dans la réunion des fibrés conormaux aux Z_j dans X. La méthode de [1] ne peut donc s'étendre directement au cadre qui nous intéresse. Cette difficulté va nous empêcher d'obtenir un énoncé géométrique contenant le résultat de [12] dans toute sa généralité, et va nous obliger à nous restreindre au *cas particulier* $p = 2$. Dans ce cas, qui dans l'approche de Leichtnam est techniquement beaucoup plus simple que le cas général, le faisceau K s'écrit comme un produit tensoriel $K_1 \otimes K_2$, où K_1 et K_2 décrivent respectivement les fonctions ramifiées autour de Z_1 et Z_2, et vérifient donc $SS(K_j) = T^*_{Z_j}X$, fibré conormal à Z_j dans X. En particulier $K_j|_Y$ est isomorphe au faisceau L permettant de décrire les fonctions ramifiées autour de Z sur Y. On construit alors pour tout complexe F une flèche naturelle

$$R\mathcal{H}om(K_1 \otimes K_2;\, F)|_Z \to R\mathcal{H}om(L, F|_Y)|_Z \tag{0.1}$$

et le théorème principal de cet article affirme que sous des hypothèses géométriques convenables sur les microsupports $SS(K_1)$, $SS(K_2)$, $SS(F)$, la flèche (0.1) est un isomorphisme. On vérifie ensuite que ces hypothèses sont satisfaites lorsque F est le complexe des solutions holomorphes d'un opérateur à caractéristiques de multiplicité constante, dont la variété caractéristique ne rencontre T^*_ZX que suivant deux directions complexes distinctes.

La méthode de preuve repose, comme dans [1], sur une microlocalisation du problème. Afin d'exploiter la structure de produit tensoriel de K, on introduit une microlocalisation simultanée, qui est l'analogue dans le cadre des faisceaux de la deuxième microlocalisation simultanée de [4]. Le premier chapitre de l'article est consacré à la définition de cette notion et à la preuve de résultats étendant à ce cadre certains des théorèmes de [8]. L'application au problème de Cauchy ramifié fait l'objet du second chapitre. On écrit pour cela le complexe $R\mathcal{H}om(K_1 \otimes K_2, F)$ sous la forme

$$R\mathcal{H}om(\mathbb{C}_{\Delta_X}, R\mathcal{H}om(q_1^{-1}K_1 \otimes q_2^{-1}K_2, q_3^!F) \tag{0.2}$$

où $\mathbb{C}_{\Delta_X}$ est le faisceau constant sur la diagonale de $X \times X \times X$ et q_j la jième projection de $X \times X \times X$ sur X. On utilise alors la microlocalisation simultanée du premier chapitre pour écrire (0.2) comme image directe d'un complexe sur $T^*(X \times X \times X)$ par la projection naturelle de ce fibré sur la base. Le point essentiel consiste à remarquer que les hypothèses géométriques du problème permettent de remplacer, relativement à l'un des facteurs, l'image directe par une image directe à support propre. On montre alors que les singularités microlocales de l'un des faisceaux K_j n'interviennent plus dans le problème, ce qui permet d'obtenir l'isomorphisme cherché par l'intermédiaire de résultats de commutation d'images inverses et de microlocalisations simultanées. Précisons que cette idée est inspirée de certaines techniques de majoration de singularités microlocales de solutions d'équations semi-linéaires utilisées dans [10], [11], [5] (cf. également [13]).

NOTATIONS. Dans l'ensemble de l'article, nous utiliserons les notations suivantes. Si X est une variété analytique réelle (resp. complexe) on note T^*X son fibré cotangent réel (resp. complexe) et pour Z sous-variété analytique réelle (resp. complexe) de X, on désigne par T^*_ZX le fibré conormal à Z dans X et par $\dot{T}^*_ZX$ le complémentaire de la section nulle dans T^*_ZX. Lorsque $\pi:\ E \to X$ est un fibré vectoriel, on désigne par $\dot{\pi}$ la restriction de π au complémentaire de la section nulle, et par $E|_Z$ la restriction de E à un sous-ensemble Z de X (i.e. le produit fibré de E et de Z sur X). Si S est une partie d'un cotangent réel, on désigne par Vect(S) $\subset T^*X$ la réunion des sous-espaces vectoriels engendrés par la fibre de

S en tout point de X. Si Λ_1 et Λ_2 sont deux parties (coniques) du cotangent T^*X à une variété analytique réelle X, on note d'après [8] $\Lambda_1 \underset{\infty}{\hat{+}} \Lambda_2$ la partie de T^*X définie en coordonnées locales par:

$$\begin{aligned}\Lambda_1 \underset{\infty}{\hat{+}} \Lambda_2 = \Big\{&(x,\xi) \in T^*X \,;\ \text{il existe des suites } (x_n^1, \xi_n^1)_n \in \Lambda_1,\\ &(x_n^2, \xi_n^2)_n \in \Lambda_2 \quad \text{avec}\\ &x_n^1 \to x,\ x_n^2 \to x,\ \xi_n^1 + \xi_n^2 \to \xi\\ &|\xi_n^1| \to +\infty,\ |x_n^1 - x_n^2|\,|\xi_n^1| \to 0\Big\}.\end{aligned} \tag{0.3}$$

On définit de même $\Lambda_1 \hat{+} \Lambda_2$ en suprimant, dans (0.3), la condition $|\xi_n^1| \to +\infty$. Si X' est une sous-variété fermée de la variété X et $s:\ X' \hookrightarrow X$ l'injection, on définit pour A partie de T^*X une partie $s^\#(A) \subset T^*X'$ (cf. [8] Sect. 6.2). Si l'on choisit des coordonnées locales (t,x) sur X telles que $X' = \{t = 0\}$ et si l'on note $(t, x\,;\ \tau, \xi)$ les coordonnées duales, on a:

$$\begin{aligned}s^\#(A) = \Big\{&(x,\xi) \in T^*X \,;\ \text{il existe } (t_n, x_n\,;\ \tau_n, \xi_n)_n \text{ des suites de}\\ &\text{points de } A \text{ avec}\\ &(x_n, \xi_n) \to (x,\xi) \quad t_n \to 0, \quad |t_n|\,|\tau_n| \to 0\Big\}.\end{aligned} \tag{0.4}$$

Lorsque Z est une partie d'une variété analytique réelle X, on note $\mathbb{C}_Z$ le faisceau constant sur Z. Si X est une variété analytique complexe, on désigne par $\mathcal{O}_X$ (resp. $\mathcal{D}_X$) le faisceau des fonctions holomorphes (resp. des opérateurs différentiels à coefficients holomorphes) sur X. Si X est une variété analytique réelle $D^b(X)$ désigne la catégorie dérivée de la catégorie des complexes (à l'homotopie près) de faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X à cohomologie bornée (cf. [8]). Si $f:\ Y \to X$ est une application analytique entre variétés analytiques réelles, on note Rf_* (resp. $Rf_!$) le foncteur dérivé de l'image directe (resp. de l'image directe à support propre) et f^{-1} (resp. $f^!$) le foncteur d'image inverse (resp. le dual de $Rf_!$: cf. [8] chapitre 3). On désigne par $\omega_{Y/X}$ le complexe dualisant relatif défini par $\omega_{Y/X} = f^!\,\mathbb{Z}_X$. Si M est une partie de X, on note $R\Gamma_M(\cdot)$ le foncteur dérivé du foncteur des sections à support dans M et $R\mathcal{H}om_A(\cdot,\cdot)$ (resp. $\cdot \overset{\mathrm{L}}{\underset{A}{\otimes}} \cdot$) le bifoncteur dérivé du foncteur des germes de A-homomorphismes (resp. du produit tensoriel sur A). Dans le cas $A = \mathbb{C}$, on supprimera A dans la notation. Enfin, pour F objet de $D^b(X)$, on note $SS(F) \subset T^*X$ le microsupport de F.

1. Microlocalisation simultanee

Il s'agit dans cette première partie de développer la notion de microlocalisation simultanée d'un complexe de faisceaux sur un produit de variétés, le long d'un produit de sous-variétés, en s'inspirant à la fois de la théorie géométrique de la microlocalisation des faisceaux de [8], et de la deuxième microlocalisation simultanée par transformation de FBI introduite dans [4]. La plupart des constructions et des démonstrations sont calquées sur celles de [8] et permettent d'obtenir des estimations géométriques semblables à celles de [4].

1.1. Définitions et propriétés de base

Soient $X_1, \dots, X_q$ q variétés C^∞ (ou analytiques réelles) et pour $k = 1, \dots, q$ soit M_k une sous-variété fermée de X_k. Rappelons que la déformation normale de M_k dans X_k est une variété de dimension $\dim X_k + 1$, $\tilde{X}_k$ munie de deux applications $p_k : \tilde{X}_k \to X_k$ et $t_k : \tilde{X}_k \to \mathbb{R}$ telles que $p_k^{-1}(X_k - M_k)$ soit isomorphe à $(X_k - M_k) \times (\mathbb{R} - \{0\})$, que $t_k^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$ soit isomorphe à $X \times (\mathbb{R} - \{0\})$ et que $t^{-1}(0)$ soit isomorphe à $T_{M_k}X_k$. Lorsqu'on dispose sur X_k d'un système de coordonnées locales $x_k = (x'_k, x''_k)$ tel que M_k soit donné par $x'_k = 0$, $\tilde{X}_k$ s'identifie au produit $X_k \times \mathbb{R}$ muni des coordonnées (x'_k, x''_k, t_k), p_k étant donnée par $p_k(x'_k, x''_k, t_k) = (t_k x'_k, x''_k)$ et $t_k : \tilde{X}_k \to \mathbb{R}$ étant la projection sur le dernier facteur. Notons $X = X_1 \times \cdots \times X_q$, $M = M_1 \times \cdots \times M_q$, $\tilde{X} = \tilde{X}_1 \times \cdots \times \tilde{X}_q$, $p = p_1 \times \cdots \times p_q$, $t = t_1 \times \cdots \times t_q$. On note $\Omega \subset \tilde{X}$ l'image réciproque de $(\mathbb{R}_+^*)^q$ par t et $T_M X = T_{M_1}X_1 \times \cdots \times T_{M_q}X_q = t^{-1}(0) \subset \tilde{X}$. On introduit les notations suivantes:

$$\begin{tikzcd}
T_{M_1}X_1 \times \cdots \times T_{M_q}X_q \arrow[r, hook, "s"] \arrow[d] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] & \Omega \arrow[l, hook', "j"'] \arrow[dl, "\tilde{p}"] \\
M_1 \times \cdots \times M_q \arrow[r, hook, "i"] & X &
\end{tikzcd} \tag{0.4}$$

Si S est une partie de X, on pose

$$\tilde{C}_{(M)}(S) = T_M X \cap \overline{\tilde{p}^{-1}(S)}. \tag{1.1.2}$$

Il résulte de la définition que dans le système de coordonnées locales sur $T_{M_1}X_1 \times \cdots \times T_{M_q}X_q$ déduit des coordonnées précédentes sur les X_k:

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_{(M)}(S) = \{((x'_1, x''_1), \dots, (x'_q, x''_q)) \in T_{M_1}X_1 \times \cdots \times T_{M_q}X_q \,;\; & \\
\text{il existe des suites} & \\
((x_1'^n, x_1''^n), \dots, (x_q'^n, x_q''^n)) \in S & \\
c_k^n \in \mathbb{R}_+^* \; k = 1, \dots, q, c_k^n \to +\infty \quad \text{si} \quad n \to +\infty & \\
\text{avec} \quad x_k''^n \to x''_k \text{ et } c_k^n x_k'^n \to x'_k\}. &
\end{aligned} \tag{1.1.3}$$

L'ensemble précédent est une partie q-conique de $T_{M_1}X_1 \times \cdots \times T_{M_q}X_q$ (i.e. est invariante sous l'action de $(\mathbb{R}_+^*)^q$ donnée par $(u_1, \ldots, u_q)$. $((x_1', x_1''), \ldots, (x_q', x_q'')) = ((u_1x_1', x_1''), \ldots, (u_qx_q', x_q''))$. On remarquera que si S est un produit $S = S_1 \times \cdots \times S_q$, $\tilde{C}_{(M)}(S)$ n'est autre que le produit des cônes normaux de Whitney $C_{M_1}(S_1) \times \cdots \times C_{M_q}(S_q)$.

Le lemme suivant est analogue à la Proposition 4.1.3 de [8].

LEMME 1.1.1. *Soit V un ouvert q-conique de $T_{M_1}X_1 \times \cdots \times T_{M_q}X_q$. Alors l'ensemble des $\tilde{p}(W \cap \Omega)$ où W décrit le filtre des voisinages ouverts de V dans $\tilde{X}$ coincide avec l'ensemble des ouverts U de X tels que $V \cap \tilde{C}_{(M)}(X - U) = \emptyset$.*

Dans les applications de la Section 2, $M_1, \ldots, M_q$ seront naturellement des sous-variétés linéaires d'ouverts de $\mathbb{R}^n$. En particulier nous disposerons toujours de coordonnées locales $x_k = (x_k', x_k'')$ telles que $\{x_k' = 0\} = M_k$. Nous ne chercherons donc pas dans cette section à formuler tous les résultats de manière intrinsèque. Nous utiliserons le lemme suivant, valable sur des ouverts de carte:

LEMME 1.1.2. *Supposons que l'on dispose sur $X_1, \ldots, X_q$ de coordonnées locales du type précédent. Alors tout ouvert q-conique V de $T_{M_1}X_1 \times \cdots \times T_{M_q}X_q$ admet une base de voisinages ouverts W dans $\tilde{X}$ tels que les fibres de la restriction de $\tilde{p}$ à $W \cap \Omega$ soient homéomorphes à $\mathbb{R}^q$ ou bien vides.*

Définissons alors le spécialisé simultané le long de $(M_1, \ldots, M_q)$:

DEFINITION 1.1.3. Soit $F \in \mathcal{O}b(D^b(X_1 \times \cdots \times X_q))$. On appelle spécialisé simultané de F le long de $(M_1, \ldots, M_q)$ l'objet

$$\nu_{(M)}(F) = \nu_{(M_1,\ldots,M_q)}(F) = s^{-1}Rj_*\tilde{p}^{-1}F. \tag{1.1.4}$$

Par définition $\nu_{(M)}(F)$ est un objet de $D^b(T_{M_1}X_1 \times \cdots \times T_{M_q}X_q)$ à cohomologie localement constante sous l'action de $(\mathbb{R}_+^*)^q$ sur $T_{M_1}X_1 \times \cdots \times T_{M_q}X_q$. On dira que $\nu_{(M)}(F)$ est q-conique.

Soient V un ouvert q-conique de $T_{M_1}X_1 \times \cdots \times T_{M_q}X_q$ et U un ouvert de $X_1 \times \cdots \times X_q$ tel que $\tilde{C}_{(M)}(X - U) \cap V = \emptyset$. Comme dans le cas du spécialisé usuel, on construit une flèche naturelle $R\Gamma(U, F) \to R\Gamma(V, \nu_{(M)}(F))$ et on en déduit des isomorphismes en cohomologie ([8] Théorème 4.2.3):

PROPOSITION 1.1.4. (i) *Soit V un ouvert q-conique de $T_{M_1}X_1 \times \cdots \times T_{M_q}X_q$, au dessus d'un ouvert de carte de $M_1 \times \cdots \times M_q$. On a pour tout entier k:*

$$H^k(V, \nu_{(M)}(F)) \simeq \varinjlim_{U} H^k(U, F) \tag{1.1.5}$$

où U décrit la famille des ouverts de $X_1 \times \cdots \times X_q$ vérifiant $\tilde{C}_{(M)}(X - U) \cap V = \emptyset$.

(ii) *Soit U_0 un ouvert de $M_1 \times \cdots \times M_p$ contenu dans un domaine de carte et A un fermé q-conique de $T_{M_1}X_1 \times \cdots \times T_{M_q}X_q$. On a:*

$$H^k_{A\cap\tau^{-1}(U_0)}(\tau^{-1}(U_0), \nu_{(M)}(F)) = \varinjlim_{Z,U} H^k_{Z\cap U}(U, F) \tag{1.1.6}$$

où la limite inductive est prise pour U décrivant le filtre des voisinages de U_0 dans X et Z la famille des fermés de X vérifiant $\tilde{C}_{(M)}(Z) \cap \tau^{-1}(U_0) \subset A$.

Soit J une partie de $\{1, \ldots, q\}$. Pour tout $j \in J$, on notera $i_{J,j}$ l'injection de M_j dans $T_{M_j}X_j$, $\bar{i}_{J,j}$ l'injection de M_j dans X_j, $\tau_{J,j}$ la projection de $T_{M_j}X_j$ sur M_j et on posera $M_{J,j} = X_j$. Si $j \notin J$, $i_{Jj}, \bar{i}_{J,j}$ et $\tau_{J,j}$ désigneront l'identité de $T_{M_j}X_j$ sur $T_{M_j}X_j$ et on posera $M_{J,j} = M_j$. Enfin, on notera $i_J = i_{J,1} \times \cdots \times i_{J,q}$, $\bar{i}_J = \bar{i}_{J,1} \times \cdots \times \bar{i}_{J,q}$, $\tau_J = \tau_{J,1} \times \cdots \times \tau_{J,q}$, $(M_J) = (M_{J,1}, \ldots, M_{J,q})$. On a alors le résultat suivant analogue au Théorème 4.2.3 de [8]:

PROPOSITION 1.1.5. *Pour toute partie $J \subset \{1, \ldots, q\}$ on a des isomorphismes:*

(i) $R\tau_{J*}\nu_{(M)}(F) \simeq i_J^{-1}(\nu_{(M)}(F))$ *et* $\bar{i}_J^{-1}(\nu_{(M_J)}(F)) \xrightarrow{\sim} i_J^{-1}(\nu_{(M)}(F))$

(ii) $R\tau_{J!}\nu_{(M)}(F) \simeq i_J^!(\nu_{(M)}(F))$ *et*
$R\Gamma_{M_1\times\cdots\times M_q}(F)|_M \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{M_1\times\cdots\times M_q}(\nu_{(M)}(F))|_M$.

Les premiers isomorphismes dans les assertions (i) et (ii) précédentes résultent du caractère q-conique de $\nu_{(M)}(F)$ (cf. [8] Proposition 3.7.5). La flèche naturelle $\bar{i}_J^{-1}(\nu_{(M_J)}(F)) \to i_J^{-1}(\nu_{(M)}(F))$ se construit comme pour la spécialisation usuelle relativement à chaque variable dont l'indice est dans J et on prouve qu'il s'agit d'un isomorphisme comme dans [8]. De même pour l'assertion (ii).

Nous pouvons désormais définir le microlocalisé simultané:

DEFINITION 1.1.6. Reprenons les notations de la définition 1.1.3. On appelle microlocalisé simultané de F le long de $(M_1, \ldots, M_q)$ l'objet q-conique de $D^b(T^*_{M_1}X_1 \times \cdots \times T^*_{M_q}X_q)$

$$\mu_{(M)}(F) = (\nu_{(M)}(F))^\wedge \tag{1.1.7}$$

où $\wedge$ désigne la transformation de Fourier-Sato ([8] Sect. 3.7).

REMARQUE. Soit $H = \{(x'_k, x''_k, t_k)_{k=1,\ldots,q} \in \Omega; t_1 = t_2 = \cdots = t_q\}$ et notons h l'injection de H dans Ω. Utilisant la flèche naturelle $\mathrm{Id} \to h_*h^{-1}$ on obtient une flèche

$$s^{-1}Rj_*\tilde{p}^{-1}F \to s^{-1}Rj_*h_*h^{-1}\tilde{p}^{-1}F$$

i.e. une flèche

$$\nu_{(M_1,\ldots,M_q)}(F) \to \nu_{M_1\times\cdots\times M_q}(F) \tag{1.1.8}$$

où $\nu_{M_1\times\cdots\times M_q}$ désigne la spécialisation usuelle le long de $M_1 \times \cdots \times M_q$. Par transformation de Fourier-Sato, on obtient donc un morphisme naturel:

$$\mu_{(M_1,\ldots,M_q)}(F) \to \mu_{M_1\times\cdots\times M_q}(F). \tag{1.1.9}$$

On peut rapprocher (1.1.9) du fait que lorsqu'on resteint la transformation de FBI de deuxième espèce simultanée de [4] à la diagonale de l'espace des petits paramètres, on obtient la transformation de FBI de deuxième espèce usuelle de [14], [9], [5].

Avant d'énoncer l'analogue de la Proposition 1.1.5 pour le microlocalisé simultané, introduisons les notations suivantes. Si J est une partie de $\{1,\ldots,q\}$ et $j \in J$, notons $i'_{J,j}$ l'injection de M_j dans $T^*_{M_j}X_j$, $\bar{i}'_{J,j}$ l'injection de M_j dans X_j et $\pi_{J,j}$ la projection de $T^*_{M_j}X_j$ sur M_j. Si $j \notin J$, $i'_{J,j}, \bar{i}'_{J,j}, \pi_{J,j}$ désigneront l'identité de $T^*_{M_j}X_j$. On pose alors $i'_J = i'_{J,1} \times \cdots \times i'_{J,q}$, $\bar{i}'_J = \bar{i}'_{J,1} \times \cdots \times \bar{i}'_{J,q}$, $\pi_J = \pi_{J,1} \times \cdots \times \pi_{J,q}$. Lorsque $J = \{1,\ldots,q\}$, on supprime l'indice J. On déduit de la Proposition 1.1.5 par transformation de Fourier:

PROPOSITION 1.1.7. *Pour toute partie J de $\{1,\ldots,q\}$ on a des isomorphismes:*

(i) $R\pi_*\mu_{(M)}(F) \simeq \mu_{(M)}(F)|_{M_1\times\cdots\times M_q}$ *et*
$R\Gamma_{M_1\times\cdots\times M_q}(F)|_{M_1\times\cdots\times M_q} \xrightarrow{\sim} \mu_{(M)}(F)|_{M_1\times\cdots\times M_q}$

(ii) $R\pi_{J!}\mu_{(M)}(F) \simeq i'^{!}_J\mu_{(M)}(F)$ *et*
$\bar{i}'^{-1}_J\mu_{(M_J)}(F) \bigotimes_{j\in J} \omega_{M_j/X_j} \xrightarrow{\sim} i'^{!}_J\mu_{(M)}(F)$.

1.2. CÔNE NORMAL SIMULTANÉ ET MAJORATIONS DE MICROSUPPORTS

Nous allons prendre pour définition du cône normal simultané la caractérisation donnée par le Lemme 2.1.2. de [4]. Le fait que l'objet obtenu est indépendant des divers choix arbitraires effectués résulte de l'équivalence de cette caractérisation et de la définition intrinsèque donnée dans [4]. Considérons q variétés analytiques réelles $X_1,\ldots,X_q$ et pour $j = 1,\ldots,q$ soit Λ_j une sous-variété lagrangienne lisse de T^*X_j. Pour tout $j = 1,\ldots,q$, choisissons une transformation canonique $\chi_j : T^*X_j \to T^*X_j$ telle que $\chi_j(\Lambda_j) = X_j$ section nulle de T^*X_j. On note $\tilde{\chi}_j : T^*\Lambda_j \to T^*X_j$ l'application induite sur les cotangents et $\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_1 \times \cdots \times \tilde{\chi}_q : T^*\Lambda_1 \times \cdots \times T^*\Lambda_q \to T^*X_1 \times \cdots \times T^*X_q$. Soit S une partie conique de $T^*X_1 \times \cdots \times T^*X_q$ (pour l'action naturelle de $\mathbb{R}^*_+$ sur cet ensemble). On a alors:

DEFINITION 1.2.1. Le cône normal simultané à S le long de $(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_q)$ est l'ensemble $C_{(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_q)}(S) \subset T^*\Lambda_1 \times \cdots \times T^*\Lambda_q$ défini par

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}C_{(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_q)}(S) = \{&(y_1,\ldots,y_q;\eta_1,\ldots,\eta_q)\in T^*X_1\times\cdots\times T^*X_q;\\ &\text{il existe des suites}\\ &(z_1^m,\ldots,z_q^m;\zeta_1^m,\ldots,\zeta_q^m)\in S\\ &u_j^m\in\mathbb{R}_+^*,\ u_j^m\to 0\quad\text{si}\quad m\to\infty\ j=1,\ldots,q\\ &\text{telles que si}\quad (y_j^m,\eta_j^m)=\chi_j(z_j^m,u_j^m\zeta_j^m)\quad\text{on ait}\\ &y_j^m\to y_j,\eta_j^m/u_j^m\to\eta_j\ j=1,\ldots,q\}.\end{aligned}\tag{1.2.1}$$

Considérons le cas où Λ_j est le fibré conormal à une sous-variété M_j de X_j. Il existe une identification canonique de $T^*T_{M_j}X_j$ et $T^*T^*_{M_j}X_j$ ([8] Proposition 5.5.1) donnée dans les coordonnées locales provenant de coordonnées $x_j=(x'_j,x''_j)$ sur X_j telles que $M_j=\{x'_j=0\}$ par

$$(x'_j,x''_j;\xi'_j,\xi''_j)\longrightarrow(\xi'_j,x''_j;-x'_j,\xi''_j).\tag{1.2.2}$$

Cela permet d'identifier $C_{(T^*_{M_1}X_1,\ldots,T^*_{M_q}X_q)}(S)$ à une partie de $T^*(T_{M_1}X_1\times\cdots\times T_{M_q}X_q)$ que l'on désignera par la même notation. Il résulte des propriétés fonctorielles du microsupport:

THÉORÈME 1.2.2. *Soit F un objet de $D^b(X_1\times\cdots\times X_q)$. On a:*

$$SS(\nu_{(M)}(F))\subset C_{(T^*_{M_1}X_1,\ldots,T^*_{M_q}X_q)}(SS(F))$$
$$SS(\mu_{(M)}(F))\subset C_{(T^*_{M_1}X_1,\ldots,T^*_{M_q}X_q)}(SS(F)).$$

1.3. MICROLOCALISATION SIMULTANÉE ET IMAGES INVERSES

Ce paragraphe est consacré à l'obtention de résultats de comparaison entre le microlocalisé simultané de la restriction d'un faisceau à une sous-variété et la restriction du microlocalisé simultané. Ces résultats sont parallèles à ceux de la Section 6.7 de [8] aussi bien dans leurs énoncés que dans leur preuve. On n'a toutefois pas tenté d'obtenir les théorèmes optimaux mais seulement ceux qui nous seront utiles dans la Section 2.

Soient $X_1,\ldots,X_q$ q variétés analytiques réelles et pour $j=2,\ldots,q$ notons M_j une sous-variété fermée de X_j. De plus, soit Y_1 une sous-variété fermée de X_1. On désignera par f l'injection $Y_1\times X_2\times\cdots\times X_q\hookrightarrow X_1\times\cdots\times X_q$. On utilisera la même notation pour l'injection $Y_1\times M_2\times\cdots\times M_q\hookrightarrow X_1\times M_2\times\cdots\times M_q$ On note alors:

$$\begin{aligned}&f_\pi\colon T^*X_1|_{Y_1}\times T^*X_2\times\cdots\times T^*X_q\hookrightarrow T^*X_1\times\cdots\times T^*X_q,\\ &{}^tf'\colon T^*X_1|_{Y_1}\times T^*X_2\times\cdots\times T^*X_q\to T^*Y_1\times T^*X_2\times\cdots\times T^*X_q\end{aligned}\tag{1.3.1}$$

les applications naturelles déduites de f. On notera également:

$$f_{M,\pi}\colon Y_1 \times T^*_{M_2}X_2 \times \cdots \times T^*_{M_q}X_q \hookrightarrow X_1 \times T^*_{M_2}X_2 \times \cdots \times T^*_{M_q}X_q$$
$$f_{M,\tau}\colon Y_1 \times T_{M_2}X_2 \times \cdots \times T_{M_q}X_q \hookrightarrow X_1 \times T_{M_2}X_2 \times \cdots \times T_{M_q}X_q \qquad (1.3.2)$$

les injections naturelles. Il existe une flèche naturelle

$$f^{-1}_{M,\pi}\mu_{(X_1,M_2,\ldots,M_q)}(F) \longrightarrow \mu_{(Y_1,M_2,\ldots,M_q)}(f^{-1}F). \qquad (1.3.3)$$

Pour la construire, il suffit en effet de définir une flèche

$$f^{-1}_{M,\tau}\nu_{(X_1,M_2,\ldots,M_q)}(F) \to \nu_{(Y_1,M_2,\ldots,M_q)}(f^{-1}F) \qquad (1.3.4)$$

et d'utiliser la transformation de Fourier-Sato. Si l'on munit X_j de coordonnées locales x_j telles que pour $j \geq 2$ $x_j = (x'_j, x''_j)$ avec M_j donnée par $x'_j = 0$, et si l'on note $\tilde{X}_j$ l'éclaté de X_j le long de M_j, muni des coordonnées (x'_j, x''_j, t_j), on désigne par Ω_X (resp. Ω_Y) l'ouvert de $X_1 \times \tilde{X}_2 \times \cdots \times \tilde{X}_q$ (resp. $Y_1 \times \tilde{X}_2 \times \cdots \times \tilde{X}_q$) donné par $t_2 > 0, \ldots, t_q > 0$. Si s_X, j_X, p_X (resp. s_Y, j_Y, p_Y) désignent les applications correspondantes définies par (1.1.1), et si $\tilde{f} : Y_1 \times \tilde{X}_2 \times \cdots \times \tilde{X}_q \hookrightarrow X_1 \times \tilde{X}_2 \times \cdots \times \tilde{X}_q$ est l'injection, on construit (1.3.4) en écrivant:

$$f^{-1}_{M,\tau}s_X^{-1}Rj_{X*}j_X^{-1}p_X^{-1}F = s_Y^{-1}\tilde{f}^{-1}Rj_{X*}j_X^{-1}p_X^{-1}F$$
$$\to s_Y^{-1}Rj_{Y*}j_Y^{-1}\tilde{f}^{-1}p_X^{-1}F = s_Y^{-1}Rj_{Y*}j_Y^{-1}p_Y^{-1}f^{-1}F. \qquad (1.3.5)$$

Notons π_X (resp. π_Y) la projection naturelle de $X_1 \times T^*_{M_2}X_2 \times \cdots \times T^*_{M_q}X_q$ (resp. $Y_1 \times T^*_{M_2}X_2 \times \cdots \times T^*_{M_q}X_q$) sur $X_1 \times \cdots \times X_q$ (resp. $Y_1 \times X_2 \times \cdots \times X_q$). Nous désignerons par τ_X et τ_Y les applications analogues sur les fibrés normaux. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} R\pi_{Y*}f^{-1}_{M,\pi}\mu_{(X_1,M_2,\ldots,M_q)}(F) \arrow[r] & R_{\pi_{Y*}}\mu_{(Y_1,M_2,\ldots,M_q)}(f^{-1}F) \\ f^{-1}R\Gamma_{X_1\times M_2\times\cdots\times M_q}(F)|_{X_1\times M_2\times\cdots\times M_q} \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] & R\Gamma_{Y_1\times M_2\times\cdots\times M_q}(f^{-1}F)|_{Y_1\times M_2\times\cdots\times M_q} \arrow[u, "\wr"] \end{tikzcd} \qquad (1.3.6)$$

les flèches verticales désignant celles de la Proposition 1.1.7(i).

Pour tout $j = 2, \ldots, q$ désignons par σ_j l'injection

$$\sigma_j : Y_1 \times M_2 \times \cdots \times M_{j-1} \times X_j \times M_{j+1} \times \cdots \times M_q \hookrightarrow X_1 \times \cdots \times X_q. \qquad (1.3.7)$$

Il s'agit alors de prouver le théorème suivant:

THÉORÈME 1.3.1. *Soient F un objet de $D^b(X_1 \times \cdots \times X_q)$ et Z un fermé de Y_1. Supposons que*

(i) *Pour tout* $j = 2, \ldots, q$ $\quad \sigma_j$ *est non caractéristique pour* F *au voisinage de* $Z \times M_2 \times \cdots \times M_q$.
(ii) *L'injection* $f_{M,\pi}$ *est non caractéristique pour le cône normal simultané* $C_{(X_1, T^*_{M_2}X_2, \ldots, T^*_{M_q}X_q)}(SS(F))$ *au-dessus de* $Z \times T^*_{M_2}X_2 \times \cdots \times T^*_{M_q}X_q$.
(iii) *L'intersection de* $T^*_{Y_1}X_1|_Z \times T^*_{M_2}X_2 \times \cdots \times T^*_{M_q}X_q$ *avec* $SS(F)$ *est contenue dans* $T^*_{X_1}X_1 \times T^*_{M_2}X_2 \times \cdots \times T^*_{M_q}X_q$.

Alors la flèche déduite de (1.3.3)

$$\begin{aligned} & f^{-1}_{M,\pi}\mu_{(X_1,M_2,\ldots,M_q)}(F)|_{Z\times T^*_{M_2}X_2\times\cdots\times T^*_{M_q}X_q} \\ & \quad \to \mu_{(Y_1,M_2,\ldots,M_q)}(f^{-1}F)|_{Z\times T^*_{M_2}X_2\times\cdots\times T^*_{M_q}X_q} \end{aligned} \tag{1.3.8}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Munissons X_1 de coordonnées locales $x_1 = (y_1, z_1)$ telles que Y_1 soit donné par $y_1 = 0$. On notera $\xi_1 = (\eta_1, \zeta_1)$ les coordonnées duales. Soit $\tilde{f}'$ l'injection de Ω_Y dans Ω_X. La flèche (1.3.8) provient par transformation de Fourier-Sato de (1.3.4), (1.3.5) et l'on peut décomposer ce dernier morphisme en:

$$\begin{aligned} f^{-1}_{M,\tau}s^{-1}_X Rj_{X*}j^{-1}_X p^{-1}_X f &\simeq s^{-1}_Y \tilde{f}^{-1}Rj_{X*}\tilde{p}^{-1}_X F \\ &\to s^{-1}_Y(\omega^{\otimes -1}_{\tilde{Y}/\tilde{X}} \otimes \tilde{f}^! Rj_{X*}\tilde{p}^{-1}_X F) \\ &\simeq s^{-1}_Y(\omega^{\otimes -1}_{\tilde{Y}/\tilde{X}} \otimes Rj_{Y*}\tilde{f}'^! \tilde{p}^{-1}_X F) \\ &\simeq s^{-1}_Y Rj_{Y*}\tilde{p}^{-1}_Y(\omega^{\otimes -1}_{\tilde{Y}/\tilde{X}} \otimes f^! F) \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

où $\omega_{\tilde{Y}/\tilde{X}}$ (resp. $\omega_{Y/X}$) est la complexe dualisant de $Y_1 \times \tilde{X}_2 \times \cdots \times \tilde{X}_q$ (resp. $Y_1 \times X_2 \times \cdots \times X_q$) dans $X_1 \times \tilde{X}_2 \times \cdots \times \tilde{X}_q$ (resp. $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_q$). Le transformé de Fourier-Sato du dernier faisceau est $\mu_{(Y_1,X_2,\ldots,X_q)}(\omega^{\otimes -1}_{Y/X} \otimes f^! F)$ et sa restriction à $Z \times T^*_{M_2}X_2 \times \cdots \times T^*_{M_q}X_q$ est bien isomorphe au terme de droite de (1.3.8) grâce à l'hypothèse (i) du théorème et au Corollaire 6.4.4 de [8]. Pour prouver le théorème, il nous suffit de montrer que la flèche déduite de (1.3.9)

$$(s^{-1}_Y \tilde{f}^{-1}Rj_{X*}\tilde{p}^{-1}_X F)^\wedge \longrightarrow (s^{-1}_Y(\omega^{\otimes -1}_{\tilde{Y}/\tilde{X}} \otimes \tilde{f}^! Rj_{X*}\tilde{p}^{-1}_X F))^\wedge$$

est un isomorphisme au voisinage de $Z \times T^*_{M_2}X_2 \times \cdots \times T^*_{M_q}X_q$. Si H désigne le troisième terme du triangle

$$\omega_{\tilde{Y}/\tilde{X}} \otimes \tilde{f}^{-1}Rj_{X*}\tilde{p}^{-1}_X F \to \tilde{f}'^! Rj_{X*}\tilde{p}^{-1}_X F \to H \xrightarrow{+1} \tag{1.3.10}$$

on doit donc prouver que $SS((s^{-1}_Y H)^\wedge)$ ne rencontre par $Z_1 \times T^*_{M_2}X_2 \times \cdots \times T^*_{M_q}X_q$ injecté dans la section nulle de $T^*(Y_1 \times T^*_{M_2}X_2 \times \cdots \times T^*_{M_q}X_q)$. Compte tenu de l'identification (1.2.2) il faut donc voir que les hypothèses du théorème entrainent que $SS(s_Y^{-1}H)$ ne peut contenir de point de la forme

$$(z_1,(0,x_2''),\dots,(0,x_q'');0,(\xi_2',0),\dots,(\xi_q',0)) \tag{1.3.11}$$

avec $z_1 \in Z, x_j'' \in M_j$ $j=2,\dots,q$. En majorant $SS(s_Y^{-1}H)$ par $s_Y^\#(SS(H))$ et en utilisant (0.4), on obtient tout d'abord:

LEMME 1.3.2. *Supposons le point* (1.3.11) *dans* $SS(s_Y^{-1}H)$. *Il existe alors des suites*

$$(y_1^n,z_1^n;\eta_1^n,\zeta_1^n)\in T^*X_1,(x_j^n,\xi_j^n)\in T^*X_j,\quad t_j^n\in\mathbb{R}_+^*\ j=2,\dots,q$$

telles que l'on ait pour tout n

$$\begin{aligned}&((y_1^n,z_1^n),(t_j^n x_j'^n,x_j''^n)_{j=2,\dots,q};\\ &\quad(\eta_1^n,\zeta_1^n),(\xi_j'^n/t_j^n,\xi_j''^n)_{j=2,\dots,q})\in SS(F)\end{aligned} \tag{1.3.12}$$

et que

$$\begin{aligned}&(y_1^n,z_1^n)\to(0,z_1),\quad |\eta_1^n|\to+\infty,\zeta_1^n\to0,\\ &(x_j'^n,x_j''^n;\xi_j'^n,\xi_j''^n)\to(0,x_j'';\xi_j',0),t_j^n\to0\ j=2,\dots,q.\end{aligned}$$

Il nous faut déduire de ce lemme que l'appartenance de (1.3.11) à $SS(s_Y^{-1}H)$ est contradictoire avec les hypothèses du théorème. Considérons la suite (1.3.12) et posons pour $j=2,\dots,q$

$$\lambda_j^n=|\xi_j'^n|/t_j^n. \tag{1.3.13}$$

Si $|\eta_1^n|(\lambda_2^n+\cdots+\lambda_q^n)^{-1}$ n'est pas borné, après extraction d'une sous-suite de (1.3.12) divisé dans les fibres par $|\eta_1^n|$, on obtient un point de $SS(F)$ dans $T_{Y_1}^*X_1|_Z\times T_{X_2}^*X_2|_{M_2}\times\cdots\times T_{X_q}^*X_q|_{M_q}$ hors de la section nulle, ce qui contredit l'hypothèse (i) du théorème. Il existe donc $C>0$ avec $|\eta_1^n|\leqslant C(\lambda_2^n+\cdots+\lambda_q^n)$. En particulier, le membre de droite tend vers l'infini. Supposons qu'il existe $j\in\{2,\dots,q\}$ et une sous-suite telle que $\lambda_j^n(\Sigma_{\ell\neq j}\lambda_\ell^n)^{-1}\to0$, par exemple $j=2$. Divisant dans les fibres de (1.3.12) par $\lambda_3^n+\cdots+\lambda_q^n$ et passant à la limite sur une sous-suite convenable, on obtient qu'il existe un point de la forme

$$((0,z_1),(0,x_j'')_{j=2,\dots,q};(\eta_1,0),(\omega_j',0)_{j=2,\dots,q})$$

dans $SS(F)$ avec $\omega'^2=0$ et $|\omega'^3|+\cdots+|\omega'^q|\neq0$. Cela contredit l'hypothèse (i) pour σ_2.

Il en résulte donc qu'il existe $c\in]0,1[$ avec $c\lambda_j^n\leq\lambda_2^n\leq c^{-1}\lambda_j^n$ pour $j=2,\dots,q$. Considérons alors la suite:

$$((y_1^n,z_1^n),(t_j^n x_j'^n,x_j''^n)_{j=2,\dots,q};(\eta_1^n/\lambda_2^n,\zeta_1^n/\lambda_2^n),(\xi_j'^n/t_j^n\lambda_2^n,\xi_j''^n/\lambda_2^n)_{j=2,\dots,q}).$$

Elle est dans $SS(F)$ et, après extraction éventuelle d'une sous-suite converge vers un point de la forme

$$((0,z_1),(0,x_j'')_{j=2,\dots,q},(\eta_1,0),(\omega_j',0)_{j=2,\dots,q}),$$

i.e. un point de $T^*_{Y_1}X_1|_{Z_1} \times T^*_{M_2}X_2 \times \cdots \times T^*_{M_q}X_q$. L'hypothèse iii) du théorème implique alors $\eta_1 = 0$ d'où $\eta_1^n/\lambda_j^n \to 0$ pour $j = 2,\dots,q$. Si l'on pose alors pour $j = 2,\dots,q$ $u_j^n = t_j^n|\eta_1^n| = |\xi'^n_j||\eta_1^n|/\lambda_j^n$ on a donc $u_j^n \to 0$ pour $j = 2,\dots,q$. Définissons

$$\begin{aligned}
&(\tilde y_1^n,\tilde z_1^n) = (y_1^n,z_1^n), \quad (\tilde\eta_1^n,\tilde\zeta_1^n) = (\eta_1^n/|\eta_1^n|,\zeta_1^n/|\eta_1^n|),\\
&(\tilde x'^n_j,\tilde x''^n_j) = (t_j^n x'^n_j, x''^n_j), \quad (\tilde\xi'^n_j,\tilde\xi''^n_j) = (\xi'^n_j/u_j^n,\xi''^n_j/|\eta_1^n|),
\end{aligned}$$

$j = 2,\dots,q$. D'après (1.3.12) le point

$$((\tilde y_1^n,\tilde z_1^n),(\tilde x'^n_j,\tilde x''^n_j)_{j=2,\dots,q};(\tilde\eta_1^n,\tilde\zeta_1^n),(\tilde\xi'^n_j,\tilde\xi''^n_j)_{j=2,\dots,q}) \tag{1.3.14}$$

est dans $SS(F)$ et, après extraction éventuelle d'une sous-suite, on a:

$$\begin{aligned}
&(\tilde y_1^n,\tilde z_1^n;\tilde\eta_1^n,\tilde\zeta_1^n) \to (0,z_1;y_1^*,0)\\
&\left.\begin{aligned} &u_j^n\tilde\xi'^n_j \to \xi_j' \qquad \tilde x'^n_j/u_j^n \to 0\\ &\tilde x''^n_j \to x_j'' \qquad \tilde\xi''^n_j \to 0\end{aligned}\right\} \quad j = 2,\dots,q
\end{aligned}$$

pour un certain y_1^* vérifiant $|y_1^*| = 1$. D'après la définition du cône normal simultané, le point

$$((0,z_1),(\xi_j',x_j'')_{j=2,\dots,q};(y_1^*,0),(0,0)_{j=2,\dots,q})$$

est dans $C_{(T^*_{X_1}X_1,T^*_{M_2}X_2,\dots,T^*_{M_q}X_q)}(SS(F))$. Ce point est aussi conormal à l'injection $f_{M,\pi}$ au-dessus de $Z \times T^*_{M_2}X_2 \times \cdots \times T^*_{M_q}X_q$ et l'hypothèse (ii) du théorème implique alors la contradiction $y_1^* = 0$.

Nous allons maintenant prouver un second résultat du même type. Les données géométriques sont les suivantes: soient $X_1,\dots,X_q$ q variétés analytiques réelles et pour $j = 2,\dots,q$ soient $M_j \subset Y_j \subset X_j$ deux sous-variétés fermées de X_j. Notons f l'injection de $X_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_q$ dans $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_q$ et ${}^tf_M'$ la projection naturelle de $X_1 \times T^*_{M_2}X_2 \times \cdots \times T^*_{M_q}X_q$ sur $X_1 \times T^*_{M_2}Y_2 \times \cdots \times T^*_{M_q}Y_q$. Pour tout $j = 2,\cdots,q$ on notera σ_j l'injection

$$\begin{aligned}
\sigma_j\colon &X_1 \times M_2 \times \cdots \times M_{j-1} \times Y_j \times M_{j+1} \times \cdots \times M_q\\
&\hookrightarrow X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_q.
\end{aligned} \tag{1.3.15}$$

Soit Z un fermé de X_1. Il s'agit de prouver le théorème suivant:

THÉORÈME 1.3.3. *Soit F un objet de $D^b(X_1\times\cdots\times X_q)$. Supposons que pour tout*

$j = 2, \dots, q$, σ_j est non caractéristique pour F au dessus de $Z \times M_2 \times \cdots \times M_q$. Alors la flèche canonique

$$R^t f'_{M!}\mu_{(X_1,M_2,\dots,M_q)}(F)|_{Z\times T^*_{M_2}Y_2\times\cdots\times T^*_{M_q}Y_q}$$
$$\to \mu_{(X_1,M_2,\dots,M_q)}(f^{-1}F \otimes \overset{q}{\underset{2}{\otimes}} \omega_{Y_j/X_j})|_{Z\times T^*_{M_2}Y_2\times\cdots\times T^*_{M_q}Y_q} \tag{1.3.16}$$

est un isomorphisme.

Indiquons d'abord la construction de (1.3.16). Si l'on désigne par f'_M l'injection de $X_1 \times T_{M_2}Y_2 \times \cdots \times T_{M_q}Y_q$ dans $X_1 \times T_{M_2}X_2 \times \cdots \times T_{M_q}X_q$, il suffit, par transformation de Fourier-Sato, de construire une flèche.

$$f'^{-1}_M \nu_{(X_1,M_2,\dots,M_q)}(F) \to \nu_{(X_1,M_2,\dots,M_q)}(f^{-1}F). \tag{1.3.17}$$

On obtient (1.3.17) en écrivant

$$f'^{-1}_M s_X^{-1} Rj_{X*}\tilde{p}_X^{-1} F = s_Y^{-1} \tilde{f}_M^{-1} Rj_{X*}\tilde{p}^{-1} F$$
$$\to s_Y^{-1} Rj_{Y*}j_Y^{-1}\tilde{f}_M^{-1} p_X^{-1} = s_Y^{-1} Rj_{Y*}\tilde{p}_Y^{-1} f^{-1} F \tag{1.3.18}$$

où, si l'on note pour $j = 2, \dots, q$, $\tilde{Y}_j$ (resp. $\tilde{X}_j$) l'éclaté de M_j dans Y_j (resp. X_j) et si Ω_Y (resp. Ω_X) est l'ouvert de $X_1 \times \tilde{Y}_2 \times \cdots \times \tilde{Y}_q$ (resp. $X_1 \times \tilde{X}_2 \times \cdots \times \tilde{X}_q$) donné par $t_j > 0$ $j = 2, \dots, q$, les applications s_X, s_Y, p_X, p_Y sont données par

$$\begin{tikzcd}
X_1 \times T_{M_2}Y_2 \times \cdots \times T_{M_q}X_q \arrow[r, hook, "s_Y"] \arrow[d, "f'_M"] & X_1 \times \tilde{Y}_2 \times \cdots \times \tilde{Y}_q \arrow[r, "p_Y"] \arrow[d, "\tilde{f}_M"] & X_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_q \arrow[d, "f"] \\
X_1 \times T_{M_2}X_2 \times \cdots \times T_{M_q}X_q \arrow[r, hook, "s_X"] & X_1 \times \tilde{X}_2 \times \cdots \times \tilde{X}_q \arrow[r, "p_X"] & X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_q
\end{tikzcd}$$

j_Y (resp. j_X) est l'injection de Ω_Y (resp. Ω_X) dans $X_1 \times \tilde{Y}_2 \times \cdots \times \tilde{Y}_q$ (resp. $X_1 \times \tilde{X}_2 \times \cdots \times \tilde{X}_q$) et $\tilde{p}_Y = p_Y \circ j_Y, \tilde{p}_X = p_X \circ j_X$.

La preuve du théorème reposera sur le lemme suivant:

LEMME 1.3.4. *Sous les hypothèses du théorème, on a:*

(i) *f'_M est non caractéristique pour $\nu_{(X_1,M_2,\dots,M_q)}(F)$, au voisinage de $Z \times T_{M_2}Y_2 \times \cdots \times T_{M_q}Y_q$.*
(ii) *${}^t f'_M$ est propre sur $\mathrm{Supp}(\mu_{(X_1,M_2,\dots,M_q)}(F))$, au voisinage de $Z \times T^*_{M_2}Y_2 \times \cdots \times T^*_{M_q}Y_q$.*
(iii) *$\tilde{f}_M$ est non caractéristique pour $Rj_{X*}\tilde{p}_X^{-1}F$ au voisinage de $Z \times T_{M_2}Y_2 \times \cdots \times T_{M_q}Y_q$.*

Démonstration. Choisissons des coordonnées locales x_j sur X_j avec pour $j = 2,\dots,q$ $x_j = (x'_j, x''_j), x'_j = (y'_j, z'_j)$ de telle manière que $M_j = \{x'_j = 0\}$ et $Y_j = \{y'_j = 0\}$. On a alors des coordonnées (x'_j, x''_j) (resp. (z'_j, x''_j), resp. (ξ'_j, x''_j), resp. (ζ'_j, x''_j)) sur $T_{M_j}X_j$ (resp. $T_{M_j}Y_j$, resp. $T^*_{M_j}X_j$, resp. $T^*_{M_j}Y_j$). On note alors $(x'_j = (y'_j, z'_j), x''_j; \xi'_j = (\eta'_j, \zeta'_j), \xi''_j)$ (resp. $(\xi'_j, x''_j; \xi'^*_j = (\eta'^*_j, \zeta''^*_j), x''^*_j)$ les coordonnées sur $T^*T_{M_j}X_j$ (resp. $T^*T^*_{M_j}X_j$). Le conormal à f'_M est la partie de $T^*(X_1 \times T_{M_2}X_2 \times \cdots \times T_{M_q}X_q)$ d'équations

$$\xi_1 = 0, \quad y'_j = 0, \quad \zeta'_j = 0, \quad \xi''_j = 0, \quad j = 2,\dots,q. \tag{1.3.20}$$

Compte-tenu de l'identification (1.2.2), il suffit pour prouver (i) de voir que

$SS(\mu_{(X_1,M_2,\dots,M_q)}(F))$ ne rencontre pas la partie de $T^*(X_1 \times T^*_{M_2}X_2 \times \cdots \times T^*_{M_q}X_q)$ d'équations:

$$\xi_1 = 0, \quad \zeta'_j = 0, \quad \eta'^*_j = 0, \quad x''^*_j = 0, \quad j = 2,\dots,q \quad x_1 \in Z \tag{1.3.21}$$

hors de $\eta'_j = 0$ pour tout $j = 2,\dots,q$. Si un point $(x_1, (\xi'_j, x''_j)_{j=2,\dots,q}; \xi_1, (\xi'^*_j, x''^*_j)_{j=2,\dots,q})$, est dans cette intersection, il existe d'après le théorème 1.2.2 une suite

$$(x_1^n, (x'^n_j, x''^n_j)_{j=2,\dots,q}; \xi_1^n, (\xi'^n_j, \xi''^n_j)_{j=2,\dots,q}) \in SS(F) \tag{1.3.22}$$

et des suites $u_j^n \in \mathbb{R}^*_+$ tendant vers 0 avec:

$$\begin{aligned}
&(x_1^n; \xi_1^n) \to (x_1; 0)\\
&(u_j^n \xi'^n_j, x''^n_j; -x'^n_j/u_j^n, \xi''^n_j)\\
&\quad \to (\xi'_j = (\eta'_j, 0), x''_j; \xi'^*_j = (0, \zeta'^*_j), x''^*_j = 0).
\end{aligned} \tag{1.3.23}$$

Il nous faut voir que les hypothèses du théorème impliquent alors $\eta'_j = 0$ pour tout j. On peut supposer que $\Sigma_2^q |\xi'^n_j| \to \infty$. S'il existe $j \in \{2,\dots,q\}$ tel que, le long d'une sous-suite $|\xi'^n_j|(\Sigma_{\ell \neq j}|\xi'^n_\ell|)^{-1} \to 0$, par exemple $j = 2$, il résulte de (1.3.22) qu'il existe un élément non nul dans la fibre de $SS(F) \cap (T^*_{X_1}X_1 \times T^*_{Y_2}X_2 \times T^*_{M_3}X_3 \times \cdots \times T^*_{M_q}X_q)$ au-dessus de $Z \times M_2 \times \cdots \times M_q$ ce qui contredit le fait que σ_2 est non caractéristique. On peut donc supposer que les $|\xi'^n_j|$ sont deux à deux comparables lorsque $n \to \infty$.

Supposons alors l'un des $\eta'_j \neq 0$, par exemple $j = 2$. On a alors, grâce à (1.3.23), $\frac{\xi'^n_2}{|\xi'^n_2|} \to (\frac{\eta'_2}{|\eta'_2|}, 0)$. D'autre part, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que les $\frac{\xi'^n_j}{|\xi'^n_2|}$ convergent. Divisant dans les fibres (1.3.22) par $|\xi'^n_2|$, on obtient encore l'existence d'un élément non nul dans $SS(F) \cap T^*_{X_1}X_1 \times T^*_{Y_2}X_2 \times$

$T^*_{M_3}X_3 \times \cdots \times T^*_{M_q}X_q$ au dessus d'un point de $Z \times M_2 \times \cdots \times M_3$, d'où la contradiction cherchée. On a donc obtenu (i).

L'assertion (ii) se prouve de manière analogue. Enfin, pour montrer (iii), remarquons que

$$\begin{aligned} &SS(Rj_{X*}\tilde{p}_X^{-1}F)|_{Z\times T_{M_2}X_2\times\cdots\times T_{M_q}X_q} \\ &\quad \subset \{(x_1,(0,x_j)_{j=2,\ldots,q};\xi_1,(\tau_j,\xi_j)_{j=2,\ldots,q}); \\ &\qquad (x_1,x_2,\ldots,x_q;\xi_1,\ldots,\xi_q) \in s_X^\sharp(SS(Rj_{X*}\tilde{p}_X^{-1}F))\}. \end{aligned}$$

Comme $s_X^\sharp(SS(Rj_{X*}\tilde{p}_X^{-1}F)) \subset C_{(T^*_{X_1}X_1, T^*_{M_2}X_2,\ldots,T^*_{M_q}X_q)}(SS(F))$ d'après la preuve du Théorème 1.2.2., (iii) résulte de la preuve de (i).

Compte-tenu du Lemme 1.3.4, la flèche du Théorème 1.3.3 s'écrit donc aussi

$$\begin{aligned} &R^t f'_{M*}\mu_{(X_1,M_2,\ldots,M_q)}(F)|_{Z\times T^*_{M_2}Y_2\times\cdots\times T^*_{M_q}Y_q} \\ &\quad \to \mu_{(X_1,M_2,\ldots,M_q)}(f^!F)|_{Z\times T^*_{M_2}Y_2\times\cdots\times T^*_{M_q}Y_q}. \end{aligned} \tag{1.3.24}$$

Notons π_Y la projection de $X_1 \times T^*_{M_2}Y_2 \times \cdots \times T^*_{M_q}Y_q$ sur $X_1 \times M_2 \times \cdots \times M_q$. Compte tenu de la Proposition 1.1.7, on a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} R\pi_{Y*}R^t f'_{M*}\mu_{(X_1,M_2,\ldots,M_q)}(F)|_{Z\times M''} & \longrightarrow & R\pi_{Y*}\mu_{(X_1,M_2,\ldots,M_q)}(f^{-1}F\otimes\bigotimes_2^q\omega_{Y_j/X_j})|_{Z\times M''} \\ \uparrow & & \uparrow \\ R\Gamma_{X_1\times M_2\times\cdots\times M_q}(F)|_{Z\times M''} & \longrightarrow & R\Gamma_{X_1\times M_2\times\cdots\times M_q}(f^{-1}F\otimes\bigotimes_2^q\omega_{Y_j/X_j})|_{Z\times M''} \end{array} \tag{1.3.25}$$

où $M'' = M_2 \times \cdots \times M_q$.

Démonstration du Théorème 1.3.3. Il suffit de voir que sous les hypothèses du théorème, (1.3.18) est un isomorphisme. Notons $\tilde{f}'_M$ l'injection de Ω_Y dans Ω_X. D'après l'estimation (1.2.6) de $SS(\tilde{p}_X^{-1}F)$ et l'hypothèse du théorème, $\tilde{f}'_M$ est non caractéristique pour $\tilde{p}_X^{-1}F$ au voisinage de $t_j = 0 \;\forall\, j = 2,\ldots,q$ et $x_1 \in Z$. De plus, d'après le Lemme 1.3.4 (iii), $\tilde{f}_M$ est non caractéristique pour $Rj_{X*}\tilde{p}_X^{-1}F$ au voisinage de $Z \times T_{M_2}Y_2 \times \cdots \times T_{M_q}Y_q$. On a alors:

$$s_Y^{-1}\tilde{f}_M^{-1}Rj_{X*}\tilde{p}_X^{-1}F \xrightarrow{\sim} s_Y^{-1}Rj_{Y*}\tilde{f}'^{-1}_M\tilde{p}_X^{-1}F \xrightarrow{\sim} s_Y^{-1}Rj_{Y*}\tilde{p}_Y^{-1}f^{-1}F$$

d'où le résultat.

Dans la Section 2, nous utiliserons non pas le Théorème 1.3.3 lui-même mais un Corollaire, analogue au Corollaire 6.7.6 de [8], et que nous allons maintenant établir.

Soient $Y_1,\ldots,Y_q$ q variétés analytiques réelles $X_2,\ldots,X_q$ $q-1$ variétés analytiques réelles contenant $Y_2,\ldots,Y_q$ comme sous-variétés fermées. On notera

f l'injection de $Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_q$ dans $Y_1 \times X_2 \times \cdots \times X_q$. On définit $\bar{Y}_j = Y_j \times Y_j, \bar{X}_j = X_j \times X_j$ pour j variant respectivement de 1 à q et de 2 à q. On considère alors les projections

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \bar{Y}_1\times\bar{X}_2\times\cdots\times\bar{X}_q \arrow[dl, "q_1^X"'] \arrow[dr, "q_2^X"] & \\ Y_1\times X_2\times\cdots\times X_q & & Y_1\times X_2\times\cdots\times X_q \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & \bar{Y}_1\times\bar{Y}_2\times\cdots\times\bar{Y}_q \arrow[dl, "q_1^Y"'] \arrow[dr, "q_2^Y"] & \\ Y_1\times\cdots\times Y_q & & Y_1\times\cdots\times Y_q \end{tikzcd} \tag{1.3.26}$$

q_ℓ^X (resp. q_ℓ^Y)$(\ell = 1,2)$ étant donnée sur le $j^{\text{ième}}$ facteur du produit par la $\ell^{\text{ième}}$ projection. Notons

$$\begin{aligned} f_\pi &: T^*Y_1 \times T^*X_2|_{Y_2} \times \cdots \times T^*X_q|_{Y_q} \hookrightarrow T^*Y_1 \times T^*X_2 \times \cdots \times T^*X_q \\ {}^tf' &: T^*Y_1 \times T^*X_2|_{Y_2} \times \cdots \times T^*X_q|_{Y_q} \to T^*Y_1 \times T^*Y_2 \times \cdots \times T^*Y_q \end{aligned} \tag{1.3.27}$$

les applications naturelles. Soit Z un fermé de Y_1, que l'on considèrera aussi comme une partie de $\bar{Y}_1$ grâce à l'injection diagonale $Y_1 \hookrightarrow \bar{Y}_1$. Pour $j = 2, \dots, q$ soit $V_j = T^*_{Y_1}Y_1|_Z \times T^*X_2|_{Y_2} \times \cdots \times T^*X_{j-1}|_{Y_{j-1}} \times T^*_{Y_j}X_j \times T^*X_{j+1}|_{Y_{j+1}} \times \cdots \times T^*X_q|_{Y_q}$. On a alors:

COROLLAIRE 1.3.5. *Soient F et G des objets de $D^b(Y_1 \times X_2 \times \cdots \times X_q)$ et $D^b(Y_1 \times \cdots \times Y_q)$ respectivement. Supposons que pour $j = 2, \dots, q$ $V_j \cap SS(F) \cap {}^tf'^{-1}(SS(G)^a)$ est contenu dans la section nulle. Si M_j (resp. N_j) désigne la diagonale de $X_j \times X_j$ (resp. $Y_j \times Y_j$) et si l'on note*

$$\begin{aligned} g_\pi &: \bar{Y}_1 \times T^*X_2|_{Y_2} \times \cdots \times T^*X_q|_{Y_q} \hookrightarrow \bar{Y}_1 \times T^*X_2 \times \cdots \times T^*X_q \\ {}^tg' &: \bar{Y}_1 \times T^*X_2|_{Y_2} \times \cdots \times T^*X_q|_{Y_q} \to \bar{Y}_1 \times T^*Y_2 \times \dots \times T^*Y_q, \end{aligned} \tag{1.3.28}$$

on a un isomorphisme

$$\begin{aligned} &R{}^tg'_!\, g_\pi^{-1} \mu_{(\bar{Y}_1, M_2, \dots, M_q)}(R\mathcal{H}om(q_2^{X-1} Rf_! G, q_1^{X!} F))|_{Z \times T^*Y_2 \times \cdots \times T^*Y_1} \\ &\xrightarrow{\sim} \mu_{(\bar{Y}_1, N_2, \dots, N_q)}(R\mathcal{H}om(q_2^{Y-1} G, q_1^{Y!} f^! F))|_{Z \times T^*Y_2 \times \cdots \times T^*Y_q} \end{aligned} \tag{1.3.29}$$

(en identifiant $T^*_{M_j}\bar{X}_j$ à T^*X_j et $T^*_{N_j}\bar{Y}_j$ à T^*Y_j $j = 2, \dots, q$).

Le corollaire s'obtient en exprimant le membre de gauche de (1.3.29) comme image directe d'un complexe concentré sur $\bar{Y}_1 \times (X_2 \times Y_2) \times \dots \times (X_q \times Y_q)$ puis en appliquant le théorème.

2. Problème de Cauchy ramifié

2.1. Enoncé du théorème

Nous nous proposons dans ce paragraphe de donner un résultat d'image inverse analogue au Théorème 2.1.1. de [1]. En appliquant ce résultat au cas des faisceaux permettant de décrire les fonctions holomorphes ramifiées autour de la réunion de deux hypersurfaces complexes, nous en déduirons un théorème du type Cauchy-Kowalewski pour les $\mathcal{D}$-modules. Ce résultat, dans le cas du $\mathcal{D}$-module engendré par un opérateur, coïncide avec le cas particulier du théorème de Leichtnam [12] concernant les solutions ramifiées autour de la réunion de deux hypersurfaces complexes transversales d'un opérateur à caractéristique de multiplicité constante.

Commençons par fixer les notations et introduire les hypothèses. Soit Y une sous-variété analytique réelle fermée d'une variété analytique réelle X et soit Z une sous-variété fermée de Y. Notons f l'injection de Y dans X. Donnons-nous F, K_1, K_2 trois objets de $D^b(X)$ et L un objet de $D^b(Y)$, tels qu'il existe des isomorphismes $\psi_i : L \to f^{-1}K_i$ $i = 1, 2$. Nous supposerons:

(i) $SS(F)$ et $\mathrm{Vect}(SS(K_i))$, $i = 1, 2$ ne rencontrent pas $T^*_Y X$ hors de la section nulle.

(ii) $SS(K_i)|_Z \subset T^*_Z X = 1, 2,\quad SS(K_i) \cap \mathrm{Vect}(SS(K_j)) \subset T^*_X X$ pour $i \neq j$, $\pi(SS(K_1) \cap \dot{T}^*X) \cap \pi(SS(K_2) \cap \dot{T}^*X) \subset Z$.

(iii) $SS(F) \cap \dot{T}^*_Z X \subset SS(K_1) \cup SS(K_2)$.

(iv) $[SS(F) \underset{\infty}{\overset{\wedge}{+}} SS(K_i)]|_Z$ ne rencontre ni $SS(K_j)^a$ pour $j \neq i$ ni $T^*_Y X$ hors de la section nulle $(i, j \in \{1, 2\})$.

(v) L est faiblement cohomologiquement constructible (au sens de [1] Section 2.1).

(vi) Il existe un morphisme $\tau : L \to \mathbb{C}_Y$ induisant un isomorphisme $R\Gamma_{\{z\}}(L) \to R\Gamma_{\{z\}}(\mathbb{C}_Y)$ pour tout $z \in Z$.

(vii) Il existe un morphisme $\delta : L \to L \overset{\mathrm{L}}{\otimes} L$ tel que les composés

$$
\begin{aligned}
&L \xrightarrow{\delta} L \overset{\mathrm{L}}{\otimes} L \xrightarrow{\tau \otimes Id} L \\
&L \xrightarrow{\delta} L \overset{\mathrm{L}}{\otimes} L \xrightarrow{Id \otimes \tau} L
\end{aligned} \tag{2.1.1}
$$

coïncident avec l'identité.

Comme f est non caractéristique pour K_1, K_2 et que $L \simeq f^{-1}K_i$, il résulte de (ii) que $SS(L)|_Z \subset T^*_Z Y$. En outre, grâce aux isomorphismes ψ_i, on a une flèche naturelle $f^{-1}R\mathcal{H}\mathrm{om}(K_1 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} K_2, F) \to R\mathcal{H}\mathrm{om}(L \overset{\mathrm{L}}{\otimes} L, f^{-1}F)$. En composant avec la flèche induite par δ, $R\mathcal{H}\mathrm{om}(L \overset{\mathrm{L}}{\otimes} L, f^{-1}F) \to R\mathcal{H}\mathrm{om}(L, f^{-1}F)$, on obtient un morphisme naturel

$$f^{-1}R\mathcal{H}\mathrm{om}(K_1 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} K_2, F) \to R\mathcal{H}\mathrm{om}(L, f^{-1}F). \tag{2.1.2}$$

Le principal résultat s'énonce alors:

THÉORÈME 2.1.1. *Sous les hypothèses (i) à (vii) précédentes, la flèche*

$$f^{-1}R\mathcal{H}\mathrm{om}(K_1 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} K_2, F)|_Z \to R\mathcal{H}\mathrm{om}(L, f^{-1}F)|_Z \tag{2.1.3}$$

est un isomorphisme.

Il suffit de prouver le théorème au voisinage d'un point fixé $z_0 \in Z$, et on raisonnera donc désormais au voisinage d'un tel point. Prouvons d'abord:

LEMME 2.1.2. *Il existe un triangle distingué de $D^b(X)$ $F \to F_1 \oplus F_2 \to F_0 \overset{+1}{\to}$ vérifiant les conditions suivantes:*

(i) *f est non caractéristique pour F_0, F_1, F_2 au voisinage de Z_0.*

(ii) $SS(K_i) \overset{\wedge}{\underset{\infty}{+}} SS(F_i)|_Z = SS(K_i) \overset{\wedge}{\underset{\infty}{+}} SS(F)|_Z$ $i = 1, 2$ *au voisinage de z_0.*

(iii) $SS(F_0) \cap T^*_Z X \subset T^*_X X, SS(F_i)^a \cap \dot{T}^*_Z X \subset SS(K_i)$ $i = 1, 2, SS(F_i) \cap SS(K_j) \subset T^*_X X$ *pour $i, j \in \{1, 2\}, i \neq j$ au voisinage de z_0.*

Démonstration. La démonstration du lemme repose sur l'utilisation du résultat de D'Agnolo [2], qui étend à des ouverts coniques non nécessairement convexes ou propres le 'refined microlocal cut-off lemma' de [8] (Proposition 6.1.4 et 6.1.6). D'après l'hypothèse (ii) il existe $\Gamma_i \subset\subset \Gamma'_i$ avec Γ_i (resp. Γ'_i) voisinage ouvert conique de la fibre de Vect$(SS(K_i))$ en z_0 (resp. de $\bar{\Gamma}_i - \{0\}$) dans $\dot{T}^*_{z_0} X, i = 1, 2$ tels que $\bar{\Gamma}'_i \cap SS(K_j) \subset T^*_X X$ si $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant 2$. D'après [2] il existe, pour tout W_i voisinage conique de $SS(F) \cap \{z_0\} \times (\bar{\Gamma}'_i - \{0\})$ des objets F_i de $D^b(X)$ et des flèches $F \to F_i$, qui sont des isomorphismes sur $\{z_0\} \times \Gamma_i$, tels que $SS(F_i) \cap \pi^{-1}(z_0) \subset W_i \cup \{0\}$($\pi$ désignant la projection $T^*X \to X$) $i = 1, 2$. On définit alors F_0 comme le troisième terme du triangle $F \to F_1 \oplus F_2 \to F_0 \overset{+1}{\to}$. Si les W_i sont choisis assez petits et les Γ'_i symétriques, l'hypothèse (i) entraine que f est non caractéristique pour F_0, F_1, F_2 et que $SS(F_i)^a \cap SS(K_j) \subset T^*_X X$ si $i \neq j$, au voisinage de z_0. Comme $F \overset{\sim}{\to} F_i$, au voisinage de $\{z_0\} \times \Gamma_i$ et que pour z voisin de z_0, $\{z\} \times \Gamma_i \supset SS(K_i) \cap \pi^{-1}(z) \cap \dot{T}^*X$, on a $SS(K_i) \overset{\wedge}{\underset{\infty}{+}} SS(F_i) = SS(K_i) \overset{\wedge}{\underset{\infty}{+}} SS(F)$ au voisinage de z_0.

On a $\{z_0\} \times (\bar{\Gamma}'_i - \{0\}) \cap SS(F) \cap T^*_Z X \subset SS(K_i) \cap \dot{T}^*_{z_0} X \subset \{z_0\} \times \Gamma_i$ d'après l'hypothèse (iii). Comme $W_i \cap (T^*_Z X)_{z_0}$ est base de voisinage du membre de gauche de cette inclusion lorsque W_i décrit le filtre des voisinages de $SS(F) \cap \{z_0\} \times (\bar{\Gamma}_i - \{0\})$ on voit que si W_i est assez petit, $W_i \cap (\dot{T}^*_Z X)_{z_0} \subset \Gamma_i$. Alors $SS(F_i) \cap \dot{T}^*_Z X \subset SS(F) \cap \dot{T}^*_Z X$ au voisinage de z_0. Utilisant alors l'hypothèse (iii) et le fait que $SS(F_i)$ et $SS(K_j)$ ne se rencontrent pas hors de la section nulle si $i \neq j$ et si W_i est assez petit, on obtient $SS(F_i) \cap \dot{T}^*_Z X \subset SS(K_i)$ près de Z_0 pour $i = 1, 2$. Il en résulte en particulier que $SS(F_0) \cap (\dot{T}^*_Z X)_{z_0} \subset \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Comme $F \to F_1 \oplus F_2$ est un isomorphisme sur $\{z_0\} \times (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$, il en découle $SS(F_0) \cap T^*_Z X \subset T^*_X X$ au voisinage de z_0.

Compte-tenu du lemme, il nous suffit pour prouver le théorème de montrer que les flèches

$$f^{-1} R\mathcal{H}om(K_1 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} K_2, F_j)|_Z \to R\mathcal{H}om(L, f^{-1}F_j)|_Z \tag{2.1.4}$$

sont des isomorphismes au voisinage de z_0 pour $j = 0, 1, 2$.

La preuve du théorème va reposer sur l'écriture de $R\mathcal{H}om(K_1 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} K_2, F_j)$ en termes de microlocalisé simultané. Notons X_1, X_2, X_3 trois copies de X et q_j^X : $X_1 \times X_2 \times X_3 \to X_j$ la $j^{\text{ième}}$ projection $j = 1, 2, 3$. D'autre part, soient R_1^X et R_2^X la première et la deuxième projection de $(X_1 \times X_2 \times X_3) \times (X_1 \times X_2 \times X_3)$ sur $X_1 \times X_2 \times X_3$. Pour $j = 1, 2, 3$ soit M_j la diagonale de $X_j \times X_j$. Alors $M_1 \times M_2 \times M_3$ est une sous-variété de $(X_1 \times X_2 \times X_3)^2$ et $T^*_{M_1 \times M_2 \times M_3}(X_1 \times X_2 \times X_3)^2$ s'identifie à $T^*X_1 \times T^*X_2 \times T^*X_3$. On notera π^X la projection de $T^*(X_1 \times X_2 \times X_3)$ sur $X_1 \times X_2 \times X_3$. Enfin on désignera par Δ_X la diagonale de $X_1 \times X_2 \times X_3$,

$$\Delta_X = \{(x_1, x_2, x_3) \in X_1 \times X_2 \times X_3; x_1 = x_2 = x_3\}.$$

Pour $j = 0, 1, 2$ on pose

$$H_j^X = R\mathcal{H}om(R_2^{X-1}\mathbb{C}_{\Delta_X}, R_1^{X!} R\mathcal{H}om(q_1^{X-1}K_1 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_2^{X-1}K_2; q_3^{X!}F_j)). \tag{2.1.5}$$

Pour tout j, H_j^X est donc un objet de $D^b((X_1 \times X_2 \times X_3)^2)$. Considérons alors $R\pi_*^X \mu_{(M_1,M_2,M_3)}(H_j^X)$. D'après la Proposition 1.1.7 ce dernier objet est isomorphe à $R\Gamma_{M_1 \times M_2 \times M_3}(H_j^X)|_{M_1 \times M_2 \times M_3}$ et on a donc d'après (2.1.5)

$$R\mathcal{H}om(K_1 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} K_2, F_j) \xrightarrow{\sim} [R\pi_*^X \mu_{(M_1,M_2,M_3)}(H_j^X)]|_{\Delta_X}. \tag{2.1.6}$$

Prouvons d'abord:

LEMME 2.1.3. *On a les inclusions suivantes:*
$\mathrm{Supp}(\mu_{(M)}(H_0)) \subset T^*_{X_1 \times X_2 \times X_3}(X_1 \times X_2 \times X_3)$,
$\mathrm{Supp}(\mu_{(M)}(H_1)) \subset \{(x_1, x_2, x_2; \xi_1, \xi_2, \xi_3) \in T^*(X_1 \times X_2 \times X_3); x_1 = x_2 = x_3$
$(x_1, \xi_1) \in SS(K_1), \xi_2 = 0, (x_3, \xi_3) \in SS(F_1), \xi_1$ *et* ξ_3 *colinéaires*$\}$,
$\mathrm{Supp}(\mu_{(M)}(H_2)) \subset \{(x_1, x_2, x_3; \xi_1, \xi_2, \xi_3) \in T^*(X_1 \times X_2 \times X_3); x_1 = x_2 = x_3;$
$\xi_1 = 0, (x_2, \xi_2) \in SS(K_2), (x_3, \xi_3) \in SS(F_2), \xi_2$ *et* ξ_3 *colinéaires*$\}$.

Démonstration. Prouvons la dernière inclusion. Soit $(x_1, x_2, x_3; \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ un point de $\mathrm{Supp}(\mu_{(M)}(F_2))$. Le point $((x_1, x_2, x_3; \xi_1, \xi_2, \xi_3); (0, 0, 0; 0, 0, 0))$ de $T^*(T^*(X_1 \times X_2 \times X_3))$ est alors dans $SS(\mu_{(M)}(F_2))$. Notons

$$\begin{aligned} S = \Big\{&(x'_1, x'_2, x'_3, x''_1, x''_2, x''_3\,;\, \xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \xi''_1, \xi''_2, \xi''_3) \in \\ &T^*((X_1 \times X_1) \times (X_2 \times X_2) \times (X_3 \times X_3))\,; \\ &x''_1 = x''_2 = x''_3,\ \xi''_1 + \xi''_2 + \xi''_3 = 0 \\ &(x'_j, \xi'_j) \in SS(K_j)\ j = 1,2,\ (x'_3, \xi'_3) \in SS(F_2)\Big\}. \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

D'après le Théorème 1.2.2, $SS(\mu_{(M)}(H_2^X)) \subset C_{(T^*_{M_1}\bar{X}_1, T^*_{M_2}\bar{X}_2, T^*_{M_3}\bar{X}_3)}(S)$ où $\bar{X}_j = X_j \times X_j$ $j = 1,2,3$. D'après la Définition 1.2.1, il existe alors des suites de réels strictement positifs $(u_n^j)_n$ $j = 1,2,3$, des suites $(x''^n_j, \xi''^n_j)_n$ $j = 1,2,3$ vérifiant $x''^n_1 = x''^n_2 = x''^n_3, \xi''^n_1 + \xi''^n_2 + \xi''^n_3 = 0$, des suites $(x'^n_j, \xi'^n_j)_n$ de $SS(K_j)$ $j = 1,2$ et une suite $(x'^n_3, \xi'^n_3)_n$ de $SS(F_2)$ telles que

$$\begin{aligned} &u_j^n \cdot \xi'^n_j \to \xi_j, \qquad \frac{1}{u_j^n}(x'^n_j - x''^n_j) \to 0, \\ &&j = 1,2,3. \\ &x'^n_j \to x_j, \qquad \xi'^n_j + \xi''^n_j \to 0, \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

Si $\xi'^n_1 \to 0$, ξ_1 est nul et $\xi'^n_3 \to 0$. Alors ξ_2 et ξ_3 sont nécessairement colinéaires. On peut donc supposer, quitte à extraire une sous-suite, qu'il existe $c > 0$ avec $|\xi'^n_1| \geqslant c$ pour tout n.

Notons x la valeur commune à x_1, x_2, x_3. Remarquons d'abord que si $|\xi'^n_3|/|\xi'^n_1| \to 0$, la relation $\xi'^n_1 + \xi'^n_2 + \xi'^n_3 \to 0$ implique que $SS(K_1)$ et $SS(K_2)^a$ se rencontrent hors de la section nulle, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse (ii). Quitte à extraire des sous-suites, on peut donc supposer qu'il existe une constante $C > 0$ avec $|\xi'^n_1| \leqslant C|\xi'^n_3|$ et $|\xi'^n_2| \leqslant C|\xi'^n_3|$ pour tout n. Si ξ'^n_3 est bornée, ξ'^n_1 et ξ'^n_2 également, donc $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$. On peut donc supposer que $|\xi'^n_3| \to \infty$ (après extraction éventuelle d'une sous-suite). Supposons d'abord $x \in Z$. Comme on peut supposer que $\xi'^j_n/|\xi'^3_n|$ converge vers une limite ω_j pour $j = 1,2,3$, et que $\xi'^n_1 + \xi'^n_2 + \xi'^n_3 \to 0$, on a $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$, $(x, \omega_j) \in SS(K_j)$ $j = 1,2$, $(x, \omega_3) \in SS(F_2)$. Alors $(x, \omega_3) \in SS(F_2) \cap T^*_Z X \subset SS(K_2)$ d'après le lemme 2.1.2. Comme la fibre de Vect$(SS(K_2))$ en x ne rencontre pas $SS(K_1)$ (hypothèse ii) hors de la section nulle, on a nécessairement $\omega_1 = 0$ i.e. $|\xi'^n_1|/|\xi'^n_3| \to 0$. En particulier, $|\xi'^n_2|$ et $|\xi'^n_3|$ sont équivalentes lorsque $n \to +\infty$.

On a $|\xi'^n_1| \geqslant c > 0$ pour tout n. La suite $(\xi'^n_2 + \xi'^n_3)/|\xi'^n_1|$ converge, après extraction, vers une limite $\theta_1 = -\lim \xi'^n_1/|\xi'^n_1|$. De plus, les conditions $(1/u_j^n)\,|x'^n_j - x''^n_j| \to 0$ de (2.1.8) impliquent $|x'^n_j - x''^n_j|\,|\xi'^n_j| \to 0$ $\ j = 2,3$, d'où puisque $x''^n_2 = x''^n_3$ et que $|\xi'^n_2|$ est équivalent à $|\xi'^n_3|$, $|x'^n_2 - x'^n_3| \cdot |\xi'^n_2|/|\xi'^n_1| \to 0$. Il en résulte que le point (x, θ_1) est dans $SS(K_2) \underset{\infty}{\hat{+}} SS(F_2)$ et dans $SS(K_1)^a$. D'après l'assertion (ii) du Lemme 2.1.2 et l'hypothèse (iv) cela implique la contradiction $\theta_1 = 0$.

Dans le cas où $x \notin Z$, l'hypothèse (ii) entraîne que pour n assez grand $\xi'^n_1 = 0$ ou $\xi'^n_2 = 0$. Comme $SS(K_1)$ ne rencontre pas $SS(F_2)^a$ hors de la section nulle d'après le Lemme 2.1.2, on a en fait $\xi'^n_1 = 0$ pour n assez grand et $\xi'^n_2 + \xi'^n_3 \to 0$. Comme précédemment, cela entraîne que ξ_2 et ξ_3 sont colinéaires, $(x,\xi_2) \in SS(K_2)$, $(x,\xi_3) \in SS(F_2)$.

Le cas $j = 1$ s'obtient de même. Le cas $j = 0$ est plus simple.

Chaque copie X_j de X contient une copie Y_j de Y et on note $f_j\colon Y_j \hookrightarrow X_j$ l'injection correspondante. Soient N_j la diagonale de $Y_j \times Y_j$ et $\pi^Y\colon T^*_{N_1\times N_2\times N_3}(Y_1\times Y_2\times Y_3)^2 \simeq T^*Y_1 \times T^*Y_2 \times T^*Y_3 \to Y_1 \times Y_2 \times Y_3$ la projection. Soient Δ_Y la diagonale de $Y_1 \times Y_2 \times Y_3$ et pour $j = 1,2,3$ $f_{j\pi}\colon T^*X_j|_{Y_j} \hookrightarrow T^*X_j$ et ${}^tf'_j\colon T^*X_j|_{Y_j} \to T^*Y_j$ les injections et projections correspondantes. Si l'on note $q^Y_j : Y_1 \times Y_2 \times Y_3 \to Y_j$ la j$^{\text{ième}}$ projection $j = 1,2,3$ et R^Y_1 et R^Y_2 la première et la deuxième projection de $(Y_1 \times Y_2 \times Y_3)^2$ sur $Y_1 \times Y_2 \times Y_3$, on pose

$$H^Y_j = R\mathcal{H}om(R^{Y-1}_2\,\mathbb{C}_{\Delta_Y}, R^{Y!}_1\,R\mathcal{H}om(q^{Y-1}_1\,L \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q^{Y-1}_2\,L, q^{Y!}_3\,f^{-1}\,F_j) \qquad (2.1.9)$$

pour $j = 0,1,2$.

Construisons alors une flèche naturelle

$$\begin{aligned}&R({}^tf'_1 \times {}^tf'_2 \times {}^tf'_3)_!\,(f_{1\pi} \times f_{2\pi} \times f_{3\pi})^{-1}\,\mu_{(M_1,M_2,M_3)}(H^X_j)\\ &\quad \to \mu_{(N_1,N_2,N_3)}(H^Y_j). \end{aligned} \qquad (2.1.10)$$

Indiquons cette construction pour $j = 2$. L'application linéaire tangente à $f_1 \times f_1\colon Y_1 \times Y_1 \hookrightarrow X_1 \times X_1$ induit une injection de $T_{N_1}(Y_1 \times Y_1) \simeq TY_1$ dans $T_{M_1}(X_1 \times X_1) \simeq TX_1$ d'où une injection

$$(f_{1\tau} \times \mathrm{Id})\colon TY_1 \times TX_2 \times TX_3 \hookrightarrow TX_1 \times TX_2 \times TX_3. \qquad (2.1.11)$$

On en déduit une flèche naturelle

$$\begin{aligned}&(f_{1\tau} \times \mathrm{Id})^{-1}\,\nu_{(M_1,M_2,M_3)}(H^X_2)\\ &\quad \to \nu_{(N_1,M_2,M_3)}(((f_1 \times f_1) \times \mathrm{Id})^{-1}\,H^X_2) \end{aligned} \qquad (2.1.12)$$

en procédant comme dans (1.3.5). Par transformation de Fourier-Sato on en déduit

$$\begin{aligned}&R{}^t(f'_1 \times \mathrm{Id})_!\,(f_{1\pi} \times \mathrm{Id})^{-1}\,\mu_{(M_1,M_2,M_3)}(H^X_2)\\ &\quad \to \mu_{(N_1,M_2,M_3)}(((f_1 \times f_1) \times \mathrm{Id})^{-1}\,H^X_2) \otimes \omega_{T^*Y_1/T^*X_1|_{Y_1}}. \end{aligned} \qquad (2.1.13)$$

Utilisons alors la flèche

$$((f_1 \times f_1) \times \mathrm{Id})^{-1}\,H^X_2 \to ((f_1 \times f_1) \times \mathrm{Id})^!\,H^X_2 \otimes \omega^{\otimes -1}_{Y_1\times Y_1|X_1\times X_1}. \qquad (2.1.14)$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}&((f_1 \times f_1) \times \mathrm{Id})^! H_2^X \\ &\quad = R\mathcal{H}om[R_2^{-1}(f_1 \times \mathrm{Id})^{-1}\mathbb{C}_{\Delta_X}, R_1^! \, R\mathcal{H}om(q_1^{-1} L \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_2^{-1}K_2, q_3^! F_2)]\end{aligned}$$

où q_j est la $\mathrm{j}^{\text{ième}}$ projection définie sur $Y_1 \times X_2 \times X_3$, R_1 et R_2 la première et la deuxième projection de $(Y_1 \times X_2 \times X_3)^2$ sur $Y_1 \times X_2 \times X_3$, et où on a utilisé l'isomorphisme $f^{-1}K_1 \simeq L$. Or $(f_1 \times \mathrm{Id})^{-1}\mathbb{C}_{\Delta_X} = (\mathrm{Id} \times f_2 \times f_3)_! \mathbb{C}_{\Delta_Y}$ et on a donc

$$\begin{aligned}&((f_1 \times f_1) \times \mathrm{Id})^! H_2^X \\ &\quad = h_* R\mathcal{H}om(\bar{R}_2^{-1}\mathbb{C}_{\Delta_Y}, \bar{R}_1^! \, R\mathcal{H}om(q_1^{-1} L \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_2^{-1}K_2, q_3^! F_2)) \overset{\text{déf}}{=} h_* \bar{H}_2 \qquad (2.1.15)\end{aligned}$$

où h est l'injection de $(Y_1 \times Y_1) \times (X_2 \times Y_2) \times (X_3 \times Y_3)$ dans $(Y_1 \times Y_1) \times (X_2 \times X_2) \times (X_3 \times X_3)$ et $\bar{R}_1$ (resp. $\bar{R}_2$) la première (resp. deuxième) projection de $(Y_1 \times X_2 \times X_3) \times (Y_1 \times Y_2 \times Y_3)$ sur $Y_1 \times X_2 \times X_3$ (resp. $Y_1 \times Y_2 \times Y_3$). Par composition de (2.1.13), (2.1.14) on a donc obtenu une flèche du terme de gauche de (2.1.10) à valeurs dans

$$\begin{aligned}&R(\mathrm{Id} \times {}^t f_2' \times {}^t f_3')_! (\mathrm{Id} \times f_{2\pi} \times f_{3\pi})^{-1} \mu_{(N_1, M_2, M_3)} (h_* \bar{H}_2) \\ &\quad \otimes \omega^{\otimes -1}_{T^*Y_1 | T^*X_1|_{Y_1}}. \qquad (2.1.16)\end{aligned}$$

Or, revenant à la définition du microlocalisé à l'aide du spécialisé, on constate que ce dernier complexe n'est autre que

$$R(\mathrm{Id} \times {}^t f_2' \times {}^t f_3')_! \, \mu_{(N_1, N_2, N_3)} (\bar{H}_2) \otimes \omega^{\otimes -1}_{T^*Y_1 | T_1^* X_1|_{Y_1}}. \qquad (2.1.17)$$

Appliquons alors la flèche (1.3.16). En utilisant également le morphisme naturel $f_j^{-1} \otimes \omega_{Y_j/X_j} \to f_j^! \quad j = 2, 3$, on obtient un morphisme à valeurs dans

$$\mu_{(N_1, N_2, N_2)}[(\mathrm{Id} \times (f_2 \times \mathrm{Id}) \times (f_3 \times \mathrm{Id}))^! \bar{H}_2] \otimes \omega^{\otimes -1}_{T^*Y_1 | T_1^* X_1|_{Y_1}}. \qquad (2.1.18)$$

Il reste à remarquer que

$$\begin{aligned}&(\mathrm{Id} \times (f_2 \times \mathrm{Id}) \times (f_3 \times \mathrm{Id}))^! \bar{H}_2 \\ &\quad = R\mathcal{H}om(R_2^{Y-1} \mathbb{C}_{\Delta_Y}, R_1^{Y!} \, R\mathcal{H}om(q_1^{Y-1} L \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_2^{Y-1} L, q_3^{Y!} f^! F_2)) \quad (2.1.19)\end{aligned}$$

et que f étant non caractéristique pour F_2, $f^! F_2 \simeq f^{-1} F_2 \otimes \omega_{Y_1|X_1}$.

Dans le cas $j = 1$, on construit (2.1.10) en raisonnant comme précédemment, mais en intervertissant le rôle de 1 et 2.

Dans le cas $j = 0$, on construit (2.1.10) comme pour $j = 2$.

D'après le Lemme 2.1.3, ${}^tf_1' \times {}^tf_2' \times {}^tf_3'$ est propre sur le support de $\mu_{(M)}(H_j^X)$ (cf. hypothèse i)). On peut donc écrire

$$R\pi_*^Y R({}^tf_1' \times {}^tf_2' \times {}^tf_3')_!\,(f_{1\pi} \times f_{2\pi} \times f_{3\pi})^{-1}\,\mu_{(M)}(H_j^X)$$
$$\simeq (f_1 \times f_2 \times f_3)^{-1}\,R\pi_*^X\,\mu_{(M)}\,(H_j^X) \tag{2.1.20}$$

en utilisant, pour commuter images directes et images inverse, le fait que $R\pi_*^X \mu_{(M)}(H_j^X) = \mu_{(M)}(H_j^X)|_{M_1 \times M_2 \times M_3}$. On a alors le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} R\pi_*^Y\,{}^t(f_1' \times f_1' \times f_3')_!(f_{1\pi} \times f_{2\pi} \times f_{3\pi})^{-1}\mu_{(M)}(H_j^X)\big|_{\Delta_Y} & \longrightarrow & R\pi_*^Y\mu_{(N)}(H_j^Y)\big|_{\Delta_Y} \\ \uparrow\wr & & \uparrow\wr \\ f^{-1}R\mathcal{H}om(K_1 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} K_2, F_j) & \longrightarrow & R\mathcal{H}om(L \overset{\mathrm{L}}{\otimes} L, f^{-1}F_j) \end{array} \tag{2.1.21}$$

La première flèche horizontale provient de (2.1.10). La deuxième flèche forizontale est la flèche naturelle, utilisée dans la construction de (2.1.2). La première flèche verticale provient de (2.1.6), par l'intermédiaire de (2.1.20). La deuxième flèche verticale découle, comme (2.1.6), de la Proposition 1.1.7.

Si G est un complexe de faisceaux coniques sur un cotangent T^*X et si $\pi: T^*X \to X$ et $\dot{\pi}: \dot{T}^*X = T^*X - X \to X$ sont les projections, on a un triangle

$$R\pi_!G \to R\pi_*G \to R\dot{\pi}_*(G|_{\dot{T}^*X}) \xrightarrow{+1} \tag{2.1.22}$$

d'où en particulier $R\pi_!G \xrightarrow{\sim} R\pi_*G$ lorsque le support de G est contenu dans la section nulle. Si l'on désigne par π_j^X (resp. π_j^Y) aussi bien la projection de T^*X_j sur X_j (resp. T^*Y_j sur Y_j) que l'application qui s'en déduit par produit avec l'identité sur les facteurs d'ordre autre que j, il résulte du Lemme 2.1.3 que l'on a les isomorphismes

$$R\pi_{1!}^Y R\pi_{2*}^Y R\pi_{3*}^Y({}^tf_1' \times {}^tf_2' \times {}^tf_3')_!(f_{1\pi} \times f_{2\pi} \times f_{3\pi})^{-1}\mu_{(M)}(H_j^X)$$
$$\xrightarrow{\sim} R\pi_{1*}^Y R\pi_{2*}^Y R\pi_{3*}^Y({}^tf_1' \times {}^tf_2' \times {}^tf_3')_!$$
$$(f_{1\pi} \times f_{2\pi} \times f_{3\pi})^{-1}\mu_{(M)}(H_j^X) \tag{2.1.23}$$

pour $j = 0$ ou $j = 2$ et

$$R\pi_{1*}^Y R\pi_{2!}^Y R\pi_{3*}^Y({}^tf_1' \times {}^tf_2' \times {}^tf_3')_!(f_{1\pi} \times f_{2\pi} \times f_{3\pi})^{-1}\mu_{(M)}(H_j^X)$$
$$\xrightarrow{\sim} R\pi_{1*}^Y R\pi_{2*}^Y R\pi_{3*}^Y({}^tf_1' \times {}^tf_2' \times {}^tf_3')_!$$
$$(f_{1\pi} \times f_{2\pi} \times f_{3\pi})^{-1}\mu_{(M)}(H_j^X) \tag{2.1.24}$$

pour $j = 0$ ou $j = 1$. Compte-tenu des isomorphismes (2.1.21), on déduit donc de (2.1.22) un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} R\pi^Y_{1!}R\pi^Y_{2*}R\pi^{Yt}_{3*}(f_1'\times f_1'\times f_3')_!(f_{1\pi}\times f_{2\pi}\times f_{3\pi})^{-1}\mu_{(M)}(H_j^X)\big|_{\Delta_Y} \arrow[r] \arrow[d] & R\pi^Y_{1!}R\pi^Y_{2*}R\pi^Y_{3*}\mu_{(N)}(H_j^Y)\big|_{\Delta_Y} \arrow[d] \\ f^{-1}R\mathcal{H}om(K_1 \overset{L}{\otimes} K_2, F_j) \arrow[r] & R\mathcal{H}om(L \overset{L}{\otimes} L, f^{-1}F_j) \end{tikzcd} \tag{2.1.25}$$

où, pour $j = 0$ ou 2, la première flèche verticale est un isomorphisme. On a un diagramme analogue pour $j = 0$ ou 1 en intervertissant dans (2.1.25) le rôle joué par 1 et 2. Le point essentiel dans la preuve du Théorème 2.1.1 réside dans la proposition suivante, qui sera prouvée au paragraphe 2.2:

PROPOSITION 2.1.4. *Sous les hypothèses du Théorème 2.1.1, on a des isomorphismes*

$$R\pi^Y_{1!}R\pi^Y_{2*}R\pi^Y_{3*}({}^tf_1' \times {}^tf_2' \times {}^tf_3')_!(f_{1\pi} \times f_{2\pi} \times f_{3\pi})^{-1}\mu_{(M)}(H_j^X)|_Z$$
$$\xrightarrow{\sim} R\pi^Y_{1!}R\pi^Y_{2*}R\pi^Y_{3*}\mu_{(N)}(H_j^Y)|_Z$$

pour $j = 0, 2$ *et*

$$R\pi^Y_{1*}R\pi^Y_{2!}R\pi^Y_{3*}({}^tf_1' \times {}^tf_2' \times {}^tf_3')_!(f_{1\pi} \times f_{2\pi} \times f_{3\pi})^{-1}\mu_{(M)}(H_j^X)|_Z$$
$$\xrightarrow{\sim} R\pi^Y_{1*}R\pi^Y_{2!}R\pi^Y_{3*}\mu_{(N)}(H_j^Y)|_Z$$

pour $j = 0, 1$, *où* Z *est considéré comme une partie de* Δ_Y.

2.2. PREUVE DU THÉORÈME 2.1.1

Nous allons d'abord prouver la Proposition 2.1.4. On montrera uniquement le premier isomorphisme, le second étant identique après interversion des indices 1 et 2. Il s'agit d'exploiter tout d'abord le fait que $R\pi^X_{1!}\ \mu_{(M_1,M_2,M_3)}(H_j^X)$ s'exprime à partir de $\mu_{(\bar{X}_1,M_2,M_3)}\,(H_j^X)$ où $\bar{X}_1 = X_1 \times X_1$. On a en effet:

LEMME 2.2.1. *Notons* δ_1^Y *l'injection diagonale de* Y_1 *dans* $\bar{Y}_1 = Y_1 \times Y_1$ *et* $\bar{f}_1 = f_1 \times f_1$ *l'injection* $\bar{Y}_1 \hookrightarrow \bar{X}_1 = X_1 \times X_1$. *On a alors le diagramme commutatif suivant, dans lequel les flèches verticales sont des isomorphismes:*

$$\begin{tikzcd} R\pi^Y_{1!}R^t(f_1'\times f_1'\times f_3')_!(f_{1\pi}\times f_{2\pi}\times f_{3\pi})^{-1}\mu_{(M_1,M_2,M_3)}(H_j^X)\big|_Z \arrow[r] & {} \\ (\delta_1^Y\times \mathrm{Id})^{-1}R^t(\mathrm{Id}\times f_2'\times f_3')_!(\mathrm{Id}\times f_{2\pi}\times f_{3\pi})^{-1}(\bar{f}_1\times \mathrm{Id})^{-1}\mu_{(\bar{X}_1,M_2,M_3)}(H_j^X)\otimes\omega_{X_1}^{\otimes -1}\big|_Z \arrow[u, "\wr"] \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{c} \longrightarrow R\pi^Y_{1!}\mu_{(N_1,N_2,N_3)}(H^Y_j)\big|_Z \\ \uparrow \wr \\ \longrightarrow (\delta^Y_1\times\mathrm{Id})^{-1}\mu_{(Y_1,N_2,N_3)}(H^X_j)\otimes\omega^{\otimes-1}_{X_1}\Big|_Z \end{array} \tag{2.2.1}$$

(où l'on a noté par abus $\omega^{\otimes-1}_{X_1}|_{Y_1}$ et $\omega^{\otimes-1}_{Y_1}$ les images réciproques de ces complexes par la projection $Y_1 \times T^*Y_2 \times T^*Y_3 \to Y_1$, et ou Id *désigne l'identité sur plusieurs espaces différents).*

Démonstration. La flèche verticale de gauche dans le diagramme précédent est isomorphe à la flèche

$$\begin{aligned} &R(\mathrm{Id}\times {}^tf_2'\times {}^tf_3')_!(\mathrm{Id}\times f_{2\pi}\times f_{3\pi})^{-1}(f_1\times\mathrm{Id})^{-1} \\ &\quad(\delta^X_1\times\mathrm{Id})^{-1}\mu_{(\bar{X}_1,M_2,M_3)}(H^X_j)\otimes\omega^{\otimes-1}_{X_1}|_{Y_1} \\ &\quad\to R(\mathrm{Id}\times {}^tf_2'\times {}^tf_3')_!(\mathrm{Id}\times f_{2\pi}\times f_{3\pi})^{-1}R(\pi^X_1\times\mathrm{Id})_!\mu_{(M_1,M_2,M_3)}(H^X_j) \end{aligned}$$

qui provient de la Proposition 1.1.7 (ii), compte-tenu de l'identification $\omega_{X_1/\bar{X}_1} \simeq \omega^{\otimes-1}_{X_1}$. C'est en particulier un isomorphisme. De même, la deuxième flèche verticale est définie par la proposition 1.1.7 (ii) et est également un isomorphisme.

La première flèche horizontale du diagramme provient de (2.1.10). La seconde est construite de la manière suivante. Tout d'abord grâce à (1.3.3) on a une flèche

$$(\bar{f}_1\times\mathrm{Id})^{-1}\mu_{(\bar{X}_1,M_2,M_3)}(H^X_j)\to\mu_{(\bar{Y}_1,M_2,M_3)}((\bar{f}_1\times\mathrm{Id})^{-1}H^X_j). \tag{2.2.2}$$

Utilisant

$$(\bar{f}_1\times\mathrm{Id})^{-1}H^X_j\to(\bar{f}_1\times\mathrm{Id})^!H^X_j\otimes\omega^{\otimes-1}_{\bar{Y}_1/\bar{X}_1} \tag{2.2.3}$$

on obtient un morphisme de

$$\mu_{(\bar{Y}_1,M_2,M_3)}((\bar{f}_1\times\mathrm{Id})^{-1}H^X_j)\to\mu_{(\bar{Y}_1,M_2,M_3)}(\bar{H}_j)\otimes\omega^{\otimes-1}_{\bar{Y}_1/\bar{X}_1} \tag{2.2.4}$$

où

$$\bar{H}_j = R\mathcal{H}om[R_2^{-1}(\mathrm{Id}\times f_2\times f_3)_!\mathbb{C}_{\Delta_Y}, R_1^!\,R\mathcal{H}om(q_1^{-1}L\overset{\mathrm{L}}{\otimes}q_2^{-1}K_2, q_3^!F_j)] \tag{2.2.5}$$

(cf. (2.1.14), (2.1.15)) et (2.2.4) est un isomorphisme dès que (2.2.3) l'est.

La flèche (1.3.29) permet alors de définir

$$\begin{aligned} &R(\mathrm{Id}\times {}^tf_2'\times {}^tf_3')_!(\mathrm{Id}\times f_{2\pi}\times f_{3\pi})^{-1}\mu_{(\bar{Y}_1,M_2,M_3)}(\bar{H}_j) \\ &\quad\to\mu_{(\bar{Y}_1,N_2,N_3)}(R\mathcal{H}om[R_2^{Y-1}\mathbb{C}_{\Delta_Y}, R_1^{Y!}\times \\ &\quad R\mathcal{H}om(q_1^{Y-1}L\overset{\mathrm{L}}{\otimes}q_2^{Y-1}L, q_3^{Y!}f^!F_j)]). \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Comme au voisinage de Z, f est non caractéristique pour F_j (Lemme 2.1.2), on peut remplacer $f^!F_j$ par $f^{-1}F_j \otimes \omega_{Y/X}$, et on obtient la deuxième flèche horizontale du diagramme du Lemme 2.2.1 en composant (2.2.2), (2.2.4) et (2.2.6). Par construction, cette deuxième flèche est donc compatible à la première, elle même déduite de (2.1.10).

D'après le lemme précédent, il nous suffit pour prouver la Proposition 2.1.4, de montrer que la deuxième flèche horizontale du diagramme (2.2.1) est un isomorphisme, sous les hypothèses (i) à (vii) du Théorème 2.1.1. Il suffit pour cela de voir que (2.2.2), (2.2.3) et (2.2.6) sont des isomorphismes.

LEMME 2.2.2. *La flèche naturelle*

$$\begin{aligned}&(\bar{f}_1 \times \mathrm{Id})^{-1}\mu_{(\bar{X}_1,M_2,M_3)}(H_j^X)|_{Z\times T^*X_2\times T^*X_3}\\ &\quad\to \mu_{(\bar{Y}_1,M_2,M_3)}((\bar{f}_1 \times \mathrm{Id})^{-1}H_j^X)|_{Z\times T^*X_2\times T^*X_3}\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

est un isomorphisme pour $j=0$ *ou* $j=2$.

Démonstration. Il nous suffit de vérifier que les hypothèses du Théorème 1.3.1 sont satisfaites pour le couple H_j^X et l'injection $\bar{f}_1 \times \mathrm{Id}$. Les injections σ_2 et σ_3 de l'énoncé du théorème sont ici:

$$\begin{aligned}&\sigma_2\colon \bar{Y}_1 \times \bar{X}_2 \times M_3 \hookrightarrow \bar{X}_1 \times \bar{X}_2 \times \bar{X}_3\\ &\sigma_3\colon \bar{Y}_1 \times M_2 \times \bar{X}_3 \hookrightarrow \bar{X}_1 \times \bar{X}_2 \times \bar{X}_3.\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

D'autre part $SS(H_j^X)$ est donné par (2.1.7) si $j=2$, et par l'expression analogue obtenue en remplaçant dans (2.1.7) la condition $(x_3', \xi_3') \in SS(F_2)$ par $(x_3', \xi_3') \in SS(F_0)$ si $j=0$. Un point

$$(x_1', x_2', x_3', x_1'', x_2'', x_3''; \xi_1', \xi_2', \xi_3', \xi_1'', \xi_2'', \xi_3'') \tag{2.2.9}$$

de cet ensemble qui est aussi conormal à σ_3 vérifie:

$$\begin{aligned}&(x_1', \xi_1') \in T^*_{Y_1}X_1,\ (x_1'', \xi_1'') \in T^*_{Y_1}X_1,\\ &x_2' = x_2'', \qquad \xi_2' + \xi_2'' = 0,\\ &\xi_3' = 0, \qquad \xi_3'' = 0.\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Si de plus ce point est au-dessus de $Z \times M_2 \times M_3$ (où Z est toujours identifié à une partie de la diagonale de $\bar{Y}_1$), on a en outre

$$x_1' = x_1'' \in Z, \quad x_3' = x_3''. \tag{2.2.11}$$

Comme Y est non caractéristique pour K_1 au dessus de Z, (2.1.7) et (2.2.10) entraînent $\xi_1' = 0$. D'après (2.1.7), (2.2.10), $(x_2''; -\xi_2'') \in SS(K_2)$ et $x_1'' = x_2''$, $\xi_1'' + \xi_2'' = 0$ donc $(x_1'', \xi_1'') \in SS(K_2) \cap T^*_YX$. On a donc $\xi_1'' = 0$ et $\xi_2'' = 0$, d'où aussi $\xi_2' = 0$. L'hypothèse i) du Théorème 1.3.1 est donc satisfaite (le cas où (2.2.9) est conormal à σ_2 se traitant de même). D'après (1.2.1), si un point

$$((x_1', x_1''), (x_2, \xi_3), (x_3, \xi_3)\,;\, (x_1'^*, x_1''^*), (x_2^*, \xi_2^*), (x_3^*, \xi_3^*)) \tag{2.2.12}$$

de $T^*(\bar{X}_1 \times T^*X_2 \times T^*X_3)$ est dans le cône normal simultané $C_{(\bar{X}_1, T^*_{M_2}\bar{X}_2, T^*_{M_3}\bar{X}_3)}(SS(H^X_j))$, il existe des suites

$$\begin{aligned}&((x'^n_1, x''^n_1), (x'^n_2, x''^n_2), (x'^n_3, x''^n_3)\,;\\ &\quad (\xi'^n_1, \xi''^n_1), (\xi'^n_2, \xi''^n_2), (\xi'^n_3, \xi''^n_3)),\end{aligned} \tag{2.2.13}$$

de $T^*(\bar{X}_1 \times \bar{X}_2 \times \bar{X}_3)$, u^n_2, u^n_3 de $\mathbb{R}^*_+$ vérifiant les conditions suivantes:

$$\begin{aligned}&u^n_2 \to 0, \quad u^n_3 \to 0\\ &x''^n_1 = x''^n_2 = x''^n_3, \quad \xi''^n_1 + \xi''^n_2 + \xi''^n_3 = 0,\\ &(x'^n_k, \xi'^n_k) \in SS(K_k), \quad k = 1,2, \quad (x'^n_3, \xi'^n_3) \in SS(F_j)\\ &(x'^n_1, \xi'^n_1) \to (x'_1, x'^*_1), \quad (x''^n_1, \xi''^n_1) \to (x''_1, x''^*_1)\\ &(x'^n_k, u^n_k\,\xi'^n_k) \to (x_k, \xi_k), \quad k = 2,3,\\ &\xi'^n_k + \xi''^n_k \to x^*_k, \quad \frac{x''^n_k - x'^n_k}{u^n_k} \to \xi^*_k, \quad k = 2,3.\end{aligned} \tag{2.2.14}$$

Si de plus le point (2.2.12) est conormal à l'injection de $\bar{Y}_1 \times T^*X_2 \times T^*X_3$ dans $\bar{X}_1 \times T^*X_2 \times T^*X_3$ au-dessus de $Z \times T^*X_2 \times T^*X_3$, on a

$$\begin{aligned}&x^*_2 = 0, \quad \xi^*_2 = 0, \quad x^*_3 = 0, \quad \xi^*_3 = 0,\\ &(x'_1, x'^*_1) \in T^*_Y X, \quad (x''_1, x''^*_1) \in T^*_Y X, \quad x'_1 = x''_1 \in Z.\end{aligned} \tag{2.2.15}$$

Comme $(x'_1, x'^*_1) \in SS(K_1)$ et que Y est non caractéristique pour K_1, $x'^*_1 = 0$. Puisque $\xi'^n_k + \xi''^n_k \to 0$ si $k = 2,3$ et que $\xi''^n_1 = -\xi''^n_2 - \xi''^n_3$ d'après (2.2.14), on a $x''^*_1 = \lim(\xi'^n_2 + \xi'^n_3)$. Considérons d'abord le cas où $|\xi'^n_2| \to \infty$. En particulier $|\xi'^n_2| \sim |\xi'^n_3|$ et ces quantités sont dominées par $\frac{1}{u^n_2}$ et $\frac{1}{u^n_3}\cdot$ La dernière ligne de (2.2.14) implique alors $|\xi'^n_2|\,|x'^n_2 - x'^n_3| \to 0$. Le point $(x''_1\,;\,x''^*_1)$ est donc dans $[SS(K_2) \underset{\infty}{\hat{+}} SS(F_j)] \cap T^*_Y X|_Z$. D'après le lemme 2.1.2 et l'hypothèse iv), cela implique $x''^*_1 = 0$. Dans le cas où $|\xi'^n_2|$ ne tend pas vers l'infini, on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que ξ'^n_2 et ξ'^n_3 convergent respectivement vers $\tilde{\xi}_2$ et $\tilde{\xi}_3$. D'après (2.2.14), on a alors $x''^*_1 = \tilde{\xi}_2 + \tilde{\xi}_3$. Comme $x_2 = x_3 = x'_1 \in Z$ et que $(x_2, \tilde{\xi}_2) \in SS(K_2)$ et $(x''_1, x''^*_1) \in T^*_Y X$, il résulte de l'hypothèse (ii) du Théorème 2.1.1 que $(x_3, \tilde{\xi}_3) \in T^*_Z X \cap SS(F_j)$ qui d'après le Lemme 2.1.2 est contenu dans la section nulle si $j = 0$ et dans la section nulle union $SS(K_2)$ si $j = 2$. Dans tous les cas, on a $(x''_1, x''^*_1) \in \mathrm{Vect}(SS(K_2)) \cup T^*_X X$. Utilisant l'hypothèse (i), on obtient $x''^*_1 = 0$. L'hypothèse (ii) du Théorème 1.3.1 est donc satisfaite.

Considérons enfin un point de la forme (2.2.9), qui est dans $SS(H^j_X)$ et dans $T^*_{\bar{Y}_1}\bar{X}_1|_Z \times T^*_{M_2}\bar{X}_2 \times T^*_{M_3}\bar{X}_3$. On a d'abord $(x'_1, \xi'_1) \in T^*_Y X|_Z \cap SS(K_1)$ d'où $\xi'_1 = 0$. D'autre part on a les relations

$$x'_2 = x''_2, \quad \xi'_2 + \xi''_2 = 0, \quad x'_3 = x''_3, \quad \xi'_3 + \xi''_3 = 0. \tag{2.2.16}$$

D'après (2.1.7), on a alors $\xi'_3 = \xi''_1 - \xi'_2$ et $x'_3 \in Z$. Comme $(x''_1, \xi''_1) \in T^*_Y X$, $(x'_2, \xi'_2) \in SS(K_2)|_Z \subset T^*_Z X$, on a $(x'_3, \xi'_3) \in T^*_Z X \cap SS(F_2) \subset SS(K_2) \cap T^*_Z X$ dans le cas $j = 2$ et $(x'_3, \xi'_3) \in T^*_Z X \cap SS(F_0) \subset T^*_X X$ si $j = 0$. On a dans tous les cas $(x''_1, \xi''_1) \in \mathrm{Vect}(SS(K_2))|_Z$. Comme par hypothèse $(x''_1, \xi''_1) \in T^*_Y X$ on a $\xi''_1 = 0$. Le point considéré est donc dans $T^*_{\bar{X}_1} \bar{X}_1 \times T^*_{M_2} \bar{X}_2 \times T^*_{M_3} \bar{X}_3$ donc l'hypothèse (iii) du Théorème 1.3.1 est satisfaite. Le Lemme 2.2.2 est donc démontré.

Remarquons maintenant que $\bar{f}_1 \times \mathrm{Id}$ est non caractéristique pour H^X_j au-dessus de $Z \times \bar{X}_2 \times \bar{X}_3$ (il suffit d'utiliser la majoration (2.1.7) de $SS(H^X_j)$ et le fait que f est non caractéristique pour K_1 près de Z). Pour prouver la Proposition 2.1.4, il nous reste donc à voir que sous les hypothèses du Théorème 2.1.1, la flèche (2.2.6) est un isomorphisme au-dessus de $Z \times T^*Y_2 \times T^*Y_3$ pour $j = 0$ ou 2. Or cela résulte du Corollaire 1.3.5, dont on vérifie aisément que les hypothèses sont satisfaites comme Y est non caractéristique pour K_2 et F_j.

Afin de simplifier les notations, nous poserons désormais

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}\,\mathrm{hom}(K_1, K_2\,;\,F_j) \;=\; &\mu_{(M_1,M_2,M_3)}(R\mathcal{H}om(R_2^{X\,-1}\mathbb{C}_{\Delta_X},\\ &R_1^{X\,!}R\mathcal{H}om(q_1^{X\,-1}K_1 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_2^{X\,-1}K_2, q_3^{X\,!}F_j)) \qquad (2.2.17)\end{aligned}$$

(pour $j = 0, 1, 2$) et de même, si L_1 et L_2 sont dans $D^b(Y)$

$$\begin{aligned}&\tilde{\mu}\,\mathrm{hom}(L_1, L_2\,;\,f^{-1}\,F_j)\\ &\quad = \mu_{(N_1,N_2,N_3)}(R\mathcal{H}om(R_2^{Y\,-1}\mathbb{C}_{\Delta_Y},\\ &\qquad R_1^{Y\,!}R\mathcal{H}om(q_1^{Y\,-1}L_1 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_2^{Y\,-1}L_2, q_3^{Y\,!}f^{-1}F_j)). \qquad (2.2.18)\end{aligned}$$

Le morphisme $\tau : L \to \mathbb{C}_Y$ défini dans l'hypothèse vi) induit un morphisme

$$\tilde{\mu}\,\mathrm{hom}(\mathbb{C}_Y, L\,;\,f^{-1}\,F_j) \to \tilde{\mu}\,\mathrm{hom}(L, L\,;\,f^{-1}\,F_j) \qquad (2.2.19)$$

pour $j = 0, 1, 2$. Prouvons alors:

LEMME 2.2.3. *Le morphisme*

$$\begin{aligned}&R\pi^Y_{1!}\,R\pi^Y_{2*}\,R\pi^Y_{3*}\,\tilde{\mu}\,\mathrm{hom}(\mathbb{C}_Y, L\,;\,f^{-1}\,F_j)|_{Z\times Y_2\times Y_3}\\ &\quad\to R\pi^Y_{1!}\,R\pi^Y_{2*}\,R\pi^Y_{3*}\,\tilde{\mu}\,\mathrm{hom}(L, L\,;\,f^{-1}\,F_j)|_{Z\times Y_2\times Y_3} \qquad (2.2.20)\end{aligned}$$

est un isomorphisme (pour $j = 0, 1, 2$).

Démonstration. Nous allons nous contenter d'indiquer les idées de la preuve du lemme. Désignons par L' soit L, soit $\mathbb{C}_Y$. D'après la Proposition 1.1.7, on a:

$$\begin{aligned}&R\pi^Y_{1!}\tilde{\mu}\,\mathrm{hom}(L', L\,;\,f^{-1}\,F_j) \otimes \omega_{Y_1}\\ &\quad \xleftarrow{\sim} (\delta_1 \times \mathrm{Id})^{-1}\mu_{(\bar{Y}_1,N_2,N_3)}(R\mathcal{H}om(R_2^{Y\,-1}\mathbb{C}_{\Delta_Y},\\ &\qquad R_1^{Y\,!}R\mathcal{H}om(q_1^{Y\,-1}L' \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_2^{Y\,-1}L, q_3^{Y\,!}f^{-1}F_j))) \qquad (2.2.21)\end{aligned}$$

où δ_1^Y est toujours l'injection diagonale de Y_1 dans $\bar{Y}_1 = Y_1 \times Y_1$. Par transformation de Fourier-Sato, il nous suffit de prouver que l'on a un isomorphisme

$$\begin{aligned}
&(\delta_1 \times \mathrm{Id})^{-1}\nu_{(\bar{Y}_1,N_2,N_3)}(R\mathcal{H}om(R_2^{Y-1}\mathbb{C}_{\Delta_Y},\\
&\qquad R_1^{Y!}R\mathcal{H}om(q_1^{Y-1}\mathbb{C}_Y \otimes q_2^{Y-1}L, q_3^{Y!}f^{-1}F_j)))\\
&\to (\delta_1 \times \mathrm{Id})^{-1}\nu_{(\bar{Y}_1,N_2,N_3)}(R\mathcal{H}om(R_2^{Y-1}\mathbb{C}_{\Delta_Y},\\
&\qquad R_1^{Y!}R\mathcal{H}om(q_1^{Y-1}L \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_2^{Y-1}L, q_3^{Y!}f^{-1}F_j))).
\end{aligned} \tag{2.2.22}$$

Nous allons alors exploiter le fait que l'on spécialise dans les expressions précédentes le long de la variété toute entière relativement à la première variable. Cela permet, en raisonnant comme dans [1] Section 2.1 et formule 2.1.4, d'exprimer la fibre de chacun des deux membres de (2.2.22) sous la forme:

$$R\mathrm{Hom}(\text{"}\varinjlim_{U}\text{"}R\Gamma_c(U,L'),G)) \tag{2.2.23}$$

où U décrit le filtre des voisinages ouverts d'un point y_1 de Z, G désigne un objet auxilliaire indépendant de L', et où on a utilisé le foncteur "$\varinjlim$" de [8] paragraphe 1.1. L'hypothèse (v) du Théorème 2.1.1 entraine que "$\varinjlim_U$"$R\Gamma_c(U,L) = R\Gamma_{\{y_1\}}L$. D'après l'hypothèse (vi), le morphisme $\tau\colon L \to \mathbb{C}_Y$ induit un isomorphisme $R\Gamma_{\{y_1\}}L \to R\Gamma_{\{y_1\}}\mathbb{C}_Y$. Il résulte donc de (2.2.23) appliqué pour $L' = L$ et $L' = \mathbb{C}_Y$ que la flèche (2.2.22) est un isomorphisme en tout point. Cela achève la preuve du Lemme 2.2.3.

Nous pouvons maintenant prouver le Théorème 2.1.1. Il nous suffit de montrer que (2.1.4) est un isomorphisme pour $j = 0,1,2$. Nous allons traiter les cas $j = 0$ et $j = 2$, le cas $j = 1$ s'obtenant par interversion des indices 1 et 2. Remarquons d'abord que la flèche $\tau\colon L \to \mathbb{C}_Y$ de l'hypothèse (vi) du théorème induit $\tau \otimes \mathrm{Id}\colon L \overset{L}{\otimes} L \to L$ d'où un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
R\pi_*^Y \mu\mathrm{hom}(\mathbb{C}_Y, L; f^{-1}F_j)|_{\Delta_Y} \arrow[r] & R\pi_*^Y \mu\mathrm{hom}(L, L; f^{-1}F_j)|_{\Delta_Y} \\
R\mathcal{H}\mathrm{om}(L, f^{-1}F_j) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] & R\mathcal{H}\mathrm{om}(L \overset{L}{\otimes} L, f^{-1}F_j) \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd} \tag{2.2.24}$$

où $\pi^Y = \pi_1^Y \times \pi_2^Y \times \pi_3^Y : T^*Y_1 \times T^*Y_2 \times T^*Y_3 \to Y_1 \times Y_2 \times Y_3$, et où les isomorphismes verticaux s'obtiennent comme (2.1.6), en utilisant la Proposition 1.1.7. Considérons alors le diagramme commutatif suivant:

$$
\begin{tikzcd}
R\pi^Y_{1!}R\pi^Y_{2*}R\pi^Y_{3*}R^t\underline{f}'_!\underline{f}_\pi^{-1}\tilde{\mu}\hom(K_1,K_2;F_j)|_Z \arrow[r, "\sim", "(a)"'] \arrow[d, "(1')"', "\wr"] & R\pi^Y_* R^t\underline{f}'_! f_\pi^{-1}\tilde{\mu}\mathcal{H}om(K_1,K_2;F_j)|_Z \arrow[d, "(1)"'] \\
R\pi^Y_{1!}R\pi^Y_{2*}R\pi^Y_{3*}\tilde{\mu}\hom(L,L;f^{-1}F_j)|_Z \arrow[r, "(b)"'] & R\pi^Y_*\tilde{\mu}\hom(L,L;f^{-1}F_j)|_Z \\
R\pi^Y_{1!}R\pi^Y_{2*}R\pi^Y_{3*}\tilde{\mu}\hom(\mathbf{C}_Y,L;f^{-1}F_j)|_Z \arrow[r, "\sim", "(c)"'] \arrow[u, "(2')", "\wr"'] & R\pi^Y_*\tilde{\mu}\hom(\mathbf{C}_Y,L;f^{-1}F_j)|_Z \arrow[u, "(2)"] \\
 & f^{-1}R\mathcal{H}om(K_1\overset{L}{\otimes}K_2,F_j)|_Z \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, "(1'')"'] \\
 & R\mathcal{H}om(L\overset{L}{\otimes}L,f^{-1}F_j)|_Z \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, bend left, "(3)"] \\
 & R\mathcal{H}om(L,f^{-1}F_j)|_Z = R\mathcal{H}om(L,f^{-1}F_j)|_Z \arrow[l, "\sim"'] \arrow[u, bend left, "(2'')"]
\end{tikzcd}
$$

(2.2.25)

dans lequel $\underline{f}$ désigne le produit $f_1 \times f_2 \times f_3$ et où Z a été identifié à une partie de la diagonale Δ_Y de $Y_1 \times Y_2 \times Y_3$.

Les flèches sont définies de la manière suivante: (a), (b) et (c) proviennent de la flèche naturelle (2.1.22) de l'image directe à support propre vers l'image directe d'un complexe de faisceaux coniques. Les flèches (1) et (1′) proviennent de (2.1.10). La flèche (1″) est la flèche naturelle. Le diagramme dont (1) et (1″) sont les flèches verticales est donc (2.1.21). Les flèches (2) et (2′) proviennent de (2.2.19), et le diagramme déterminé par (2) et (2″) n'est autre que (2.2.24). La flèche (3) provient du morphisme $\delta : L \to L \overset{\mathrm{L}}{\otimes} L$ introduit dans l'hypothèse (vii) du théorème. Comme on suppose que $L \xrightarrow{\delta} L \overset{\mathrm{L}}{\otimes} L \xrightarrow{\tau\otimes\mathrm{Id}} L$ est l'identité, le diagramme déterminé par (3) et (2″) commute.

D'après la Proposition 2.1.4, (1') est un isomorphisme (pour $j = 0$ ou $j = 2$). D'après le Lemme 2.2.4, (2') est aussi un isomorphisme. D'après (2.1.23) (a) est un isomorphisme (pour $j = 0$ ou $j = 2$). Enfin, remarquons que le support de $\tilde{\mu}\hom(\mathbb{C}_Y, L\,;\, f^{-1}F_j)$ est contenu dans l'ensemble des points

$(y_1, y_2, y_3\,; \eta_1, \eta_2, \eta_3)$ de $T^*Y_1 \times T^*Y_2 \times T^*Y_3$ vérifiant $\eta_1 = 0$ (en raisonnant à partir de l'estimation du microsupport, comme dans la preuve du Lemme 2.1.3). Il en résulte que la flèche (c) est un isomorphisme. La flèche $(3) \circ (1)''$ est le morphisme (2.1.4)

$$f^{-1}\, R\mathcal{H}om(K_1 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} K_2, F_j)|_Z \to R\mathcal{H}om(L, f^{-1}F_j)|_Z$$

et il résulte du diagramme (2.2.32) que c'est un isomorphisme (pour $j = 0$ ou $j = 2$).

Cela achève la preuve du Théorème 2.1.1.

2.3. Application au problème de Cauchy

Considérons X un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$, Y une hypersurface complexe de X, passant par 0, $f : Y \hookrightarrow X$ l'injection. Soit Z une hypersurface complexe de Y, contenant 0 et soient Z_1 et Z_2 deux hypersurfaces complexes de X, coupant Y suivant Z, transversales et transversales à Y.

Soit d'autre part $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module cohérent à gauche. Supposons que sa variété caractéristique $\mathrm{Car}(\mathcal{M})$ vérifie les conditions suivantes:

$$T^*_{Z_i}X \subset \mathrm{Car}(\mathcal{M}), \quad i = 1, 2$$

$$\mathrm{Car}(\mathcal{M}) \cap T^*_Z X \subset T^*_{Z_1}X \cup T^*_{Z_2}X$$

$$Z_1 \text{ et } Y \text{ (resp. } Z_2 \text{ et } Y\text{) sont non caractéristiques pour } T^*_{Z_2}X \underset{\infty}{\hat{+}} \mathrm{Car}(\mathcal{M})$$

$$\text{(resp. } T^*_{Z_1}X \underset{\infty}{\hat{+}} \mathrm{Car}(\mathcal{M})\text{) au-dessus de} Z. \tag{2.3.1}$$

Choisissons un système de coordonnées locales $z = (z_1, \dots, z_n)$ au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$ tel que $Z_i = \{z_i = 0\}$ $i = 1, 2, Y = \{z_1 - z_2 = 0\}$. On a donc $Z = \{z_1 = z_2 = 0\}$. Pour r réel strictement positif, notons $U_r = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n;\ |z_k| < r, k = 1, \dots, n\}$. Soit $\tilde{U}^i_r$ le revêtement universel de $U_r - Z_i$ donné par:

$$\begin{aligned} p_1 \colon \tilde{U}^1_r &= \{w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n\,; \\ &\qquad \mathrm{Re}\, w_1 < \mathrm{Log}\, r, |w_k| < r, k \neq 1\} \to U_r \\ &\qquad (w_1, \dots, w_n) \to (e^{w_1}, w_2, \dots, w_n), \\ p_2 \colon \tilde{U}^2_r &= \{w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n\,; \\ &\qquad \mathrm{Re}\, w_2 < \mathrm{Log}\, r, |w_k| < r, k \neq 2\} \to U_r \\ &\qquad (w_1, \dots, w_n) \to (w_1, e^{w_2}, w_3, \dots, w_n). \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Notons $\tilde{U}_r$ le revêtement universel de $U_r - (Z_1 \cup Z_2)$ donné par

$$\begin{aligned} q \colon \tilde{U}_r &= \{w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n; \\ &\qquad \mathrm{Re}\, w_i < \mathrm{Log}\, r, i = 1, 2, |w_k| < r, k \geqslant 3\} \to U_r \\ &\qquad (w_1, \dots, w_n) \to (e^{w_1}, e^{w_2}, w_3, \dots, w_n). \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Si $q_1 : \tilde{U}_r \to \tilde{U}_r^1$ et $q_2 : \tilde{U}_r \to \tilde{U}_r^2$ sont les applications naturelles, on a $q = p_1 \circ q_1 = p_2 \circ q_2$. Soit alors K le faisceau

$$K = q_! \, q^{-1} \, \mathbb{C}_X = q_! \, q^! \, \mathbb{C}_X . \tag{2.3.4}$$

Si l'on pose $K_1 = p_{1!} \, p_1^{-1} \, \mathbb{C}_X$ et $K_2 = p_{2!} \, p_2^{-1} \, \mathbb{C}_X$, on a

$$\begin{aligned} K_1 \otimes K_2 &= p_{1!} \, p_1^{-1} \, \mathbb{C}_X \otimes p_{2!} \, p_2^{-1} \, \mathbb{C}_X \\ &= p_{1!} (p_1^{-1} \, \mathbb{C}_X \otimes p_1^{-1} \, p_{2!} \, p_2^{-1} \, \mathbb{C}_X) \\ &= p_{1!} \, q_{1!} \, q_2^{-1} \, p_2^{-1} \, \mathbb{C}_X = K. \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

On sait alors que si $\mathcal{O}_X$ est le faisceau des fonctions holomorphes sur X, le faisceau des fonctions ramifiées autour de $Z_1 \cup Z_2$ est $Rq_* q^{-1} \mathcal{O}_X \simeq R\mathcal{H}om(K, \mathcal{O}_X)$ ([3]). Plus généralement, si G est un objet de $D^b(X)$, on a aussi $Rq_* q^{-1} G \simeq R\mathcal{H}om(K, G)$ (cf. [1], Section 3.1).

Si $V_r = Y \cap U_r$, on note $\tilde{V}_r$ le revêtement universel de $V_r - Z$ donné par

$$\begin{aligned} p \colon \tilde{V}_r &= \{ w = (w_1, w_3, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^{n-1} ; \\ &\qquad \operatorname{Re} w_1 < \operatorname{Log} r, |w_k| < r, k \geqslant 3 \} \to V_r \\ &\qquad (w_1, w_3, \dots, w_n) \to (e^{w_1}, w_3, \dots, w_n). \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Soit alors $L = p_! p^{-1} \mathbb{C}_Y = p_! p^! \mathbb{C}_Y$. On a $L = f^{-1} K_i \; i = 1, 2$ et

$$\begin{aligned} SS(K_1) &= T^*_{Z_1} X \cup T^*_X X, \quad SS(K_2) = T^*_{Z_2} X \cup T^*_X X \\ SS(L) &= T^*_Z Y \cup T^*_Y Y. \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

La flèche canonique $p_! p^! \to \mathrm{Id}$ donne un morphisme $\tau \colon L \to \mathbb{C}_Y$. D'après [1] Lemme 3.1.1, ce morphisme induit un isomorphisme $R\Gamma_Z(L) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_Z(\mathbb{C}_Y)$. D'autre part, écrivons

$$L \otimes L = p_! p^{-1} \mathbb{C}_Y \otimes p_! p^{-1} \mathbb{C}_Y = p_! p^{-1} p_! p^{-1} \mathbb{C}_Y . \tag{2.3.8}$$

La flèche naturelle $\mathrm{Id} \to p^! p_!$ définit alors un morphisme $p_! p^{-1} \mathbb{C}_Y \to p_! (p^! p_!) p^{-1} \mathbb{C}_Y$ i.e. un morphisme $\delta : L \to L \otimes L$ d'après (2.3.8). Prouvons:

LEMME 2.3.1. *Les composées* $L \xrightarrow{\delta} L \otimes L \xrightarrow{\tau \otimes \mathrm{Id}} L$ *et* $L \xrightarrow{\delta} L \otimes L \xrightarrow{\mathrm{Id} \otimes \tau} L$ *coïncident avec l'identité.*

Démonstration. Il suffit de prouver la propriété annoncé dans les fibres. Si x est un point de Z, la fibre de L en x est nulle et il n'y a rien à prouver. Soit alors $x \in Y - Z$. Un élément α de $L_x = (p_! p^! \mathbb{C}_Y)_x$ s'écrit $(\alpha^y)_{y \in p^{-1}(x)}$ où α^y est un nombre complexe nul sauf pour un nombre fini de y, et son image par δ est l'élément $(\alpha^y_z)_{y, z \in p^{-1}(x)}$ de $(L \otimes L)_x = (p_! p^! p_! p^! \mathbb{C}_Y)_x$ donné par

$$\begin{aligned} \alpha^y_y &= \alpha^y \quad \forall y \in p^{-1}(x), \\ \alpha^y_z &= 0 \quad \text{si} \quad y, z \in p^{-1}(x) \quad \text{avec} \quad z \neq y. \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

D'autre part les deux flèches $\tau \otimes \mathrm{Id}$ (resp. $\mathrm{Id} \otimes \tau$): $L \otimes L \to L$ associent à la famille $(\alpha_z^y)_{y,z \in p^{-1}(x)}$ vérifiant $\alpha_z^y = 0$ pour tous y, z sauf un nombre fini la famille $(\Sigma_y \alpha_z^y)_{z \in p^{-1}(x)}$ (resp. $(\Sigma_z \alpha_z^y)_{y \in p^{-1}(x)}$). La composée de δ et de cette dernière flèche est donc bien l'identité.

Si $\mathcal{O}_X$ désigne le faisceau des fonctions holomorphes sur X, posons $F = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ le complexe des solutions holomorphes de $\mathcal{M}$. On a $SS(F) = \mathcal{C}ar(\mathcal{M})$ ([8], Section 11.3). Remarquons alors que les hypothèses du Théorème 2.1.1 sont satisfaites par K_1, K_2, L et F. L'hypothèse (i) résulte de (2.3.1), (2.3.7) et du fait que Y, Z_1, Z_2 se coupent transversalement le long de Z (ce qui entraîne en particulier que Y est non caractéristique pour $\mathcal{M}$ au voisinage de Z d'après la seconde inclusion (2.3.1)). L'hypothèse (ii) découle de (2.3.7) et l'hypothèse (iii) de (2.3.1). De même iv) est impliqué par (2.3.1), (2.3.7). Comme $SS(L)$ est, hors de la section nulle, le conormal à une sous-variété analytique, L est faiblement $\mathbb{R}$-constructible donc faiblement cohomologiquement constructible ([8], Section 8.4). L'hypothèse (v) est donc satisfaite. On a déjà remarqué que $R\Gamma_Z(L) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_Z(\mathbb{C}_Y)$ d'où vi). Enfin (vii) découle du Lemme 2.3.1. D'après le Théorème 2.1.1, on a donc un isomorphisme $R\mathcal{H}om(K_1 \otimes K_2, F)|_Z \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om(L, f^{-1}F)|_Z$. Notons $\mathcal{M}_Y$ le $\mathcal{D}_Y$-module induit par $\mathcal{M}$ sur Y. Comme Y est non caractéristique pour $\mathcal{M}$ (au voisinage de Z), il résulte du théorème de Cauchy–Kovalewski–Kashiwara $f^{-1}F \simeq R\mathcal{H}om(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}_Y)$ ([7]). On note alors:

$$\mathcal{O}^{\mathrm{ram}}_{Z_1 \cup Z_2/X} = R\mathcal{H}om(K_1 \otimes K_2, \mathcal{O}_X)$$
$$\mathcal{O}^{\mathrm{ram}}_{Z/Y} = R\mathcal{H}om(L, \mathcal{O}_Y) \tag{2.3.10}$$

les faisceaux des fonctions holomorphes ramifiées autour de $Z_1 \cup Z_2$ dans X et Z dans Y respectivement. L'isomorphisme que l'on vient d'obtenir s'écrit donc encore:

THÉORÈME 2.3.2. *Sous les hypothèse (2.3.1), on a l'isomorphisme*

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}^{\mathrm{ram}}_{Z_1 \cup Z_2/X})|_Z \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}^{\mathrm{ram}}_{Z/Y})|_Z. \tag{2.3.11}$$

Pour terminer, montrons que les hypothèses (2.3.1) sont vérifiées dans le cas où $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X P$, P étant un opérateur différentiel holomorphe à caractéristiques de multiplicité constante, tel que Y soit non caractéristique pour P et que les caractéristiques de P soient transversales à $T^*X\ |_Y$. Supposons en outre que $T^*_Z X \cap \mathcal{C}ar\, P$ contient deux directions complexes distinctes. Le symbole réduit q de P est alors un polynôme homogène de degré 2 dans les fibres de T^*X, et la réunion des bicaractéristiques de q issues de $T^*_Z X \cap \mathcal{C}ar\, P$ est formé par la réunion des conormaux à deux hypersurfaces complexes Z_1 et Z_2, se coupant transversalement le long de Z et transversales à Y (cf. [1], Proposition 3.1.3). Pour vérifier les hypothèses (2.3.1), il suffit de s'assurer par un calcul direct que $[\mathcal{C}ar\,\mathcal{M} \underset{\infty}{\hat{+}} T^*_{Z_1}X] \cap \dot{T}^*X$ (resp. $[\mathcal{C}ar\,\mathcal{M} \underset{\infty}{\hat{+}} T^*_{Z_2}X] \cap \dot{T}^*X$) ne rencontre pas $T^*_{Z_2}X \cup T^*_Y X$ (resp. $T^*_{Z_1}X \cup T^*_Y X$).

Le Théorème 2.3.2 s'applique donc à $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X P$. En particulier, comme $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}^{\mathrm{ram}}_{Z/Y})$ est concentré en degré 0, (2.3.11) entraîne $R^1\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}^{\mathrm{ram}}_{Z_1 \cup Z_2/X}) = 0$, ce qui signifie que l'équation $Pu = f$ peut être résolue dans l'espace des fonctions ramifiées autour de $Z_1 \cup Z_2$. On retrouve ainsi le résultat de [12] dans le cas particulier des fonctions ramifiées le long de la réunion de deux hypersurfaces. Le Théorème 2.1.1 ne nous permet pas par contre de retrouver le cas général du théorème de Leichtnam car le faisceau faiblement cohomologiquement constructible décrivant les sections ramifiées autour de la réunion de p hypersurfaces complexes se coupant transversalement le long d'une hypersurface commune n'admet pas une représentation sous la forme $K_1 \otimes K_2$ avec $SS(K_1) \cap SS(K_2) \subset T^*_X X$ lorsque $p > 2$.

Remerciements

Je remercie A. d'Agnolo, E. Leichtnam et P. Schapira pour des discussions sur ce travail.

References

1. D'Agnolo, A. et Schapira, P.: An inverse image theorem for sheaves with applications to the Cauchy problem, *Duke Math. J.*, vol. 64, n°3 (1991) 451–472.
2. D'Agnolo, A.: *On the microlocal cut-off of sheaves*, Preprint, 8 p.
3. Deligne, P.: Le formalisme des cycles évanescents in Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie (1967–1969) (SGA 7 II), *Lecture Notes in Math.* 340, Springer-Verlag, New York, (1973) 82–115.
4. Delort, J.-M.: Deuxième microlocalisation simultanée et front d'onde de produits. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4ème série, 23 (1990) 257–310.
5. Delort, J.-M.: *FBI transformation; second microlocalization and semilinear caustics*. Springer. Lecture notes in Math. 1522 (1992).
6. Hamada, T., Leray, J. et Wagshal, C.: Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples: problème de Cauchy ramifié, Hyperbolicité partielle. *J. Math. Pures Appl.* (9) 55 (1976) 297–352.
7. Kashiwara, M.: *Systems of Microdifferential Equations*. Progress in Mathematics, Birkhäuser (1983).
8. Kashiwara, M. et Schapira, P.: *Sheaves on manifolds*. Grundlehren Math. Wiss. 292, Springer-Verlag, Berlin (1990).
9. Lebeau, G.: *Deuxième microlocalisation sur les sous-variétés isotropes*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, vol. 35 (2) (1985) 145–216.
10. Lebeau, G.: Equation des ondes semi-linéaires II. Contrôle des singularités et caustiques non-linéaires. *Inv. Math.* 95 (1989) 277–323.
11. Lebeau, G.: Singularités des solutions d'équations d'onde semi-linéaires. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4ème série, 25 (1992) 201–231.
12. Leichtnam, E.: Le problème de Cauchy ramifié. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4ème série, 23 (1990) 369–443.
13. Leichtnam, E.: Le problème de Cauchy ramifié semi-linéaire d'ordre deux. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4ème série, 24 (1991) 189–214.
14. Sjöstrand, J.: *Singularités analytiques microlocales*. Astérisque 95 (1982).