COMPOSITIO MATHEMATICA

EMMANUEL LESIGNE
CHRISTIAN MAUDUIT

Propriétés ergodiques des suites q-multiplicatives

Compositio Mathematica, tome 100, nº 2 (1996), p. 131-169
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1996__100_2_131_0>

Compositio Mathematica **100:** 131–169, 1996.

Propriétés ergodiques des suites q-multiplicatives

EMMANUEL LESIGNE[1] * et CHRISTIAN MAUDUIT[2]
[1]*Département de mathématiques, Université François Rabelais, Faculté des Sciences et Techniques, Parc de Grandmont, 37200 Tours, France*
[2]*Laboratoire de Mathématiques Discrètes, 163 rue de Luminy – Case 930, 13288 Marseille Cedex 9, France*

Received 29 March 1994; accepted in final form 2 February 1995

A. Introduction

Soit q un nombre entier naturel non nul.

Une suite $u = (u(n))_{n\geqslant 0}$ dans le groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 est dite q-multiplicative si elle vérifie: pour tout nombre entier naturel non nul t, pour tous nombres entiers naturels a et b, si $b < q^t$, alors $u(aq^t + b) = u(aq^t)u(b)$.

Une telle suite est caractérisée par la donnée des valeurs $u(kq^t)$ pour $k \in \{1, 2, \ldots, q-1\}$ et $t \in \mathbb{N}$.

La notion de suite q-multiplicative, introduite en 1948 par R. Bellman et H. N. Shapiro ([BS]), a été étudiée par de nombreaux auteurs ([Coq], [C-K-M], [Del], [Gue], [Lia], [Mos], [Que], [L-M-M]). Les suites $(\exp(2i\pi n\alpha))_{n\geqslant 0}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, $(\exp(2i\pi s_q(n)\alpha))_{n\geqslant 0}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $s_q(n)$ désigne la somme des chiffres du nombre n écrit en base q, ou encore la suite de Van der Corput $u(n) = \exp\left(2i\pi\Sigma_{j\geqslant 0}\frac{k_j}{q^j}\right)$ si $n = \Sigma_{j\geqslant 0}k_jq^j$ et $k_j \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$, sont des exemples classiques de suites q-multiplicatives.

Une suite u de nombres complexes est dite strictement ergodique si le sous-shift qui lui est associé est un système dynamique uniquement ergodique et minimal (cf. partie D, pour le rappel précis de cette définition). La stricte ergodicité de suites q-multiplicatives est une question qui a déjà été discutée par M. Keane ([Kea]), P. Liardet ([Lia1][Lia2]) ainsi que par B. Mossé et les auteurs ([L-M-M]).

Une suite u de nombres complexes est appelée une bonne suite de poids pour le théorème ergodique si, pour toute transformation ponctuelle T préservant la mesure sur un espace probabilisé, la suite d'opérateurs

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n T^n$$

* Bénéficiaire d'une aide à la recherche du MRT (# 01-92, Préfecture Région Centre).

L'objet de cet article est de caractériser précisément d'une part les suites q-multiplicatives strictement ergodiques, d'autre part les suites q-multiplicatives dont toutes les puissances sont de bonnes suites de poids pour le théorème ergodique.

Nous verrons comment, dans chacun de ces problèmes, on peut se ramener à l'étude des suites q-multiplicatives telles que, pour tout k entre 1 et $q-1$, $\lim_{n\to\infty} u(kq^n) = 1$. Parmi celles-ci nous caractérisons, dans la partie B, celles qui vérifient:

- pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la suite $V(N,\alpha) := \frac{1}{N}\Sigma_{n=0}^{N-1} u(n)\, \mathrm{e}^{2i\pi n\alpha}$ est convergente (Théorème 1).
- pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la suite $V(N,\alpha,m) := \frac{1}{N}\Sigma_{n=0}^{N-1} u(n+m)\, \mathrm{e}^{2i\pi(n+m)\alpha}$ converge uniformément en $m \in \mathbb{N}$ (Théorème 2).
- pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la suite $(\frac{1}{M}\Sigma_{m=0}^{M-1}|V(N,\alpha,m) - \lim_{n\to\infty} V(n,\alpha)|)_{N>0}$ converge vers zéro uniformément en $M \in \mathbb{N}, M > 0$ (Théorème 3).

Le Théorème 2 nous permet, dans la partie D, de caractériser les suites q-multiplicatives strictement ergodiques. Par exemple, dans le cas des suites 2-multiplicatives, et en notant $u(2^n) = \mathrm{e}^{2i\pi\theta_n}$, $||\theta|| = \inf\{|\theta - p| : p \in \mathbb{Z}\}$ si $\theta \in \mathbb{R}$, on a: la suite u n'est pas strictement ergodique si et seulement si il existe un nombre entier d tel que la suite $||d\theta_n||$ tende vers zéro avec une vitesse ni trop grande, ni trop petite, qui se traduit par la divergence de la série $\Sigma_n||\mathrm{d}\theta_n||$ et la convergence de la série $\Sigma_n||\mathrm{d}\theta_n||^2$.

Pour étudier la stricte ergodicité, nous plongeons le sous-shift associé à la suite u dans une extension d'un odomètre par un groupe compact et nous établissons un critère de stricte ergodicité pour les fermetures d'orbites dans les systèmes de ce type.

Le Théorème 3 nous permet, dans la partie C, de caractériser les suites q-multiplicatives u telles que, pour toute fonction continue ρ, la suite $\rho(u)$ soit une bonne suite de poids pour le théorème ergodique. Par exemple, dans le cas des suites 2-multiplicatives, cette propriété n'est pas satisfaite si et seulement si il existe un entier d et un réel α tels que la série $\Sigma_n(\mathrm{d}\theta_n - 2^n\alpha)$ diverge modulo 1 et la série $\Sigma_n||\mathrm{d}\theta_n - 2^n\alpha||^2$ converge.

Pour démontrer ce résultat, on distingue deux cas: si la suite est à spectre vide (dans l'exemple précédent c'est essentiellement le cas où $\Sigma_n||\mathrm{d}\theta_n - 2^n\alpha||^2$ diverge) le théorème ergodique pondéré est démontré dans [L-M-M]; si la suite est à spectre non vide, alors elle est presque périodique au sens de Besicovitch.

Voici quelques exemples simples et significatifs. Nous dirons qu'une suite 2-multiplicative u est bonne si toute ses puissances sont des bonnes suites de poids pour le théorème ergodique, et nous noterons $u(2^n) = \exp(2i\pi\theta_n)$. On a alors:

- pour $\theta_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, ou $\theta_n = \frac{1}{n^2}$ la suite u est bonne et strictement erdodique;
- pour $\theta_n = \frac{(-1)^n}{n}$ la suite u est bonne mais n'est pas strictement ergodique;
- pour $\theta_n = \frac{1}{n}$ la suite u n'est pas bonne et n'est pas strictement ergodique;

- pour $\theta_n = 2^n\alpha + \frac{1}{n}$, où le nombre réel α n'est pas un rationnel dyadique, la suite u n'est pas bonne mais est strictement ergodique.

Notations

Si $\theta \in \mathbb{R}$, on note $e(\theta) := \exp(2i\pi\theta)$ et $\|\theta\| := \inf\{|\theta - p| : p \in \mathbb{Z}\}$.

Si u est une suite q-multiplicative, on note, pour chaque $n \in \mathbb{N}, n > 0$ et k entier entre 0 et $q - 1$, $u(kq^n) = e(\theta_n^k)$.

DÉFINITION A1. On appelle noyau de la suite q-multiplicative u et on note $\mathcal{N}(u)$ l'ensemble des nombres réels α tels que pour tout k entre 1 et $q - 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \|\theta_n^k - kq^n\alpha\| = 0.$$

REMARQUE. On vérifie sans difficulté que le noyau d'une suite q-multiplicative est soit vide, soit de la forme $\{\alpha_0 + \frac{p}{q^n} \mid p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ pour un nombre réel α_0.

B. Convergence des moyennes trigonométriques pondérées par une suite q-multiplicative dont le noyau contient zéro

Soit $u(n)$ une suite q-multiplicative dans $\mathbb{U}$; on note comme précédemment

$$e(\theta_n^k) = u(kq^n) \quad \text{si} \quad n \geqslant 0 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant k < q.$$

On suppose, dans tout ce paragraphe que, pour tout k, $\lim_{n\to\infty} \theta_n^k = 0$.
On utilise les notations suivantes:

$$\text{si } N \in \mathbb{N}, N > 0,\ \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad m \in \mathbb{N},$$

$$V(N) := \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u(n),$$

$$V(N,\alpha) := \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u(n)\,\mathrm{e}(n\alpha),$$

$$V(N,\alpha,m) := \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u(n+m)\,\mathrm{e}((n+m)\alpha).$$

Remarquons que

$$V(q^N,\alpha) = \frac{1}{q^N}\prod_{n=0}^{N-1}\sum_{k<q} \mathrm{e}(\theta_n^k + kq^n\alpha).$$

On se propose d'étudier le comportement de ces expressions quand N tend vers $+\infty$.

1. Convergence simple

THÉORÈME 1. *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes:*

(1.1) *Pour tout nombre réel α, la suite $(V(N,\alpha))_{N>0}$ est convergente.*

(1.2) *Pour tout nombre entier m, la suite*

$$\left(\prod_{n=m}^{N-1} \frac{1}{q} \sum_{k<q} \mathrm{e}(\theta_n^k)\right)_{N>m}$$

est convergente.

(1.3) *La série de terme général $\Sigma_{k<q}\theta_n^k$ est convergente ou la série de terme général $\Sigma_{k<q}(\theta_n^k)^2$ est divergente.*

REMARQUE. Il y a équivalence entre

$$\sum_n \sum_{k<q} (\theta_n^k)^2 < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_n \sum_{\substack{i<q \\ j<q}} (\theta_n^i - \theta_n^j)^2 < +\infty.$$

En effet, d'une part, puisque $\theta_n^0 = 0$, on a

$$\sum_{k<q} (\theta_n^k)^2 \leqslant \sum_{\substack{i<q \\ j<q}} (\theta_n^i - \theta_n^j)^2$$

et, d'autre part,

$$\sum_{\substack{i<q \\ j<q}} (\theta_n^i - \theta_n^j)^2 \leqslant 2 \sum_{\substack{i<q \\ j<q}} ((\theta_n^i)^2 + (\theta_n^j)^2) \leqslant 4q \sum_{k<q} (\theta_n^k)^2.$$

LEMME B1. *Il existe un nombre rationnel q-adique α tel que, pour tout $n \geqslant 0$,*

$$\sum_{k<q} \mathrm{e}(\theta_n^k + kq^n\alpha) \neq 0,$$

c'est à dire tel que, pour tout $N \geqslant 0, V(q^N, \alpha) \neq 0$.

Démonstration du Lemme B1. Du fait que, pour tout k, $\lim \theta_n^k = 0$, on déduit que

$$\left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \sum_{k<q} \mathrm{e}(\theta_n^k) = 0 \right\} \quad \text{est fini.}$$

Si cet ensemble est vide, on choisit $\alpha = 0$. Sinon, on note m son plus grand élément. Démontrons, par récurrence sur m, qu'il existe un nombre entier p tel que, pour tout n,

$$\sum_{k<q} \mathrm{e}\left(\theta_n^k + kq^n \frac{p}{q^{m+1}}\right) \neq 0.$$

Du fait que la matrice de Van der Monde $A := (\mathrm{e}(kp/q))_{\substack{0\leqslant k<q\\ 0\leqslant p<q}}$ est inversible, on déduit que

$$(\mathrm{e}(\theta_m^0), \mathrm{e}(\theta_m^1), \ldots, \mathrm{e}(\theta_m^{q-1}))A \neq 0,$$

autrement dit qu'il existe un nombre entier r tel que

$$\sum_{k<q} \mathrm{e}\left(\theta_m^k + kq^m \frac{r}{q^{m+1}}\right) \neq 0.$$

Les suites $(\rho_n^k)_{n\geqslant 0} = \left(\theta_n^k + kq^n \frac{r}{q^{m+1}}\right)_{n\geqslant 0}$ définissent une nouvelle suite q-multiplicative u' telle que $u'(kq^n) = \mathrm{e}(\rho_n^k)$.
Pour tout $n > m$, on a $\Sigma_{k<q}\, \mathrm{e}(\rho_n^k) = \Sigma_{k<q}\, \mathrm{e}(\theta_n^k) \neq 0$.
On a $\Sigma_{k<q}\, \mathrm{e}(\rho_m^k) \neq 0$ par choix de r.
Donc si l'on pose $m' = \max\{n \in \mathbb{N} \mid \Sigma_{k<q}\, \mathrm{e}(\rho_n^k) = 0\}$, on a $m' < m$.

En appliquant l'hypothèse de récurrence à la suite u', on obtient: il existe p' tel que, pour tout n,

$$\sum_{k<q} \mathrm{e}\left(\theta_n^k + kq^n \frac{r}{q^{m+1}} + kq^n \frac{p'}{q^{m'+1}}\right) \neq 0.$$

Il suffit de poser $p = r + p'.q^{m-m'}$ pour achever le raisonnement par récurrence.

Démonstration du Théorème 1. Commençons par montrer l'équivalence des Propriétés (1.1) et (1.2).

Etape 1. On montre que la suite $(V(q^N, \alpha))_{N\geqslant 0}$ est convergente pour tout nombre réel α si et seulement si la propriété (1.2) est vérifiée.

Remarquons tout d'abord que si α n'est pas un nombre rationnel q-adique alors $\lim V(q^N, \alpha) = 0$. En effet, on a

$$V(q^N, \alpha) = \prod_{n<N} \frac{1}{q} \sum_{k<q} \mathrm{e}(\theta_n^k + kq^n\alpha).$$

Donc, pour que le suite $(V(q^N, \alpha))$ ne converge pas vers 0, il faut que pour tout $k \in \{1, \ldots, q-1\}$ on ait $\lim_{n\to\infty} \|\theta_n^k + kq^n\alpha\| = 0$, ce qui implique $\lim_{n\to\infty} \|q^n\alpha\| = 0$, c'est-à-dire que α est un nombre rationnel q-adique.

Si α est un nombre rationnel q-adique, noté $\alpha = \frac{p}{q^m}$, on a

$$V(q^N, \alpha) = \prod_{i<m} \frac{1}{q} \sum_{k<q} \mathrm{e}\left(\theta_i^k + \frac{kp}{q^{m-i}}\right) \prod_{m\leqslant n<N} \frac{1}{q} \sum_{k<q} \mathrm{e}(\theta_n^k)$$

ce qui montre la convergence de la suite $(V(q^N, \alpha))$ dès que la Propriété (1.2) est vérifiée.

Réciproquement, supposons que la suite $(V(q^N,\alpha))$ soit convergente pour tout nombre réel α. En prenant pour α le nombre rationnel q-adique défini dans le lemme B1, on en déduit la propriété (1.2).

Etape 2. Montrons que si la suite $(V(q^N,\alpha))_{N\geqslant 0}$ converge, alors la suite $(V(N,\alpha))_{N>0}$ converge.

Si N s'écrit en base q, $N = \Sigma_{i=1}^{\ell} k_i q^{N_i}$ avec $N_1 > N_2 > \cdots > N_\ell \geqslant 0$ et $(k_1,\ldots,k_\ell) \in \{1,\ldots,q-1\}^\ell$, on vérifie que

$$\begin{aligned} &V(N,\alpha)\\ &\quad = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{\ell}\left(\prod_{j=1}^{i-1} \mathrm{e}(\theta_{N_j}^{k_j} + k_j q^{N_j}\alpha)\right)\sum_{k<k_i} \mathrm{e}(\theta_{N_i}^{k} + k q^{N_i}\alpha) q^{N_i} V(q^{N_i},\alpha). \end{aligned}$$

- Si α n'est pas un nombre rationnel q-adique, on a $\lim V(N,\alpha) = 0$ car

$$|V(N,\alpha)| \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{\ell} k_i q^{N_i} |V(q^{N_i},\alpha)|}{\sum_{i=1}^{\ell} k_i q^{N_i}} \quad \text{et} \quad \lim V(q^N,\alpha) = 0.$$

- Si $\alpha = \frac{p}{q^m}$, posons $v = \lim\ V(q^N,\alpha)$.

Fixons $\varepsilon > 0$ et considérons $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned} N \geqslant n_0 \Rightarrow \ &\bullet\ \forall k \in \{1,\ldots,q-1\}, |\mathrm{e}(\theta_N^k) - 1| \leqslant \varepsilon\\ &\bullet\ |V(q^N,\alpha) - v| \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

avec de plus $\frac{1}{q^{n_0}} \leqslant \varepsilon$ et $n_0 \geqslant m$.
Supposons $N_1 \geqslant 2n_0$ et posons

$$\begin{aligned} I_1 &= \{i \in \{1,\ldots,\ell\}/N_i \geqslant n_0\},\\ I_2 &= \{i \in \{1,\ldots,\ell\}/N_i < n_0\}. \end{aligned}$$

On a $|V(N,\alpha) - v| \leqslant V_1(N,\alpha) + V_2(N,\alpha)$ avec

$$V_1(N,\alpha) = \frac{1}{N}\sum_{i\in I_1} q^{N_i}\left|\prod_{j=1}^{i-1} \mathrm{e}(\theta_{N_j}^{k_j}) \sum_{k<k_i} \mathrm{e}(\theta_{N_i}^{k}) V(q^{N_i},\alpha) - k_i v\right|$$

et

$$\begin{aligned} &V_2(N,\alpha)\\ &\quad = \frac{1}{N}\sum_{i\in I_2} q^{N_i}\left|\prod_{j=1}^{i-1} \mathrm{e}(\theta_{N_j}^{k_j} + k_j q^{N_j}\alpha) \sum_{k<k_i} \mathrm{e}(\theta_{N_i}^{k} + k q^{N_i}\alpha) V(q^{N_i},\alpha) - k_i v\right| \end{aligned}$$

Pour $i \in I_1$, on a

$$\left|\prod_{j=1}^{i-1} \mathrm{e}(\theta_{N_j}^{k_j}) \sum_{k<k_i} \mathrm{e}(\theta_{N_i}^{k}) V(q^{N_i}, \alpha) - k_i v\right| \leqslant (i+1) k_i \varepsilon$$

d'où

$$\begin{aligned} V_1(N,\alpha) &\leqslant \frac{1}{N} \sum_{i \in I_1} (i+1) k_i q^{N_i} \varepsilon \leqslant \frac{q}{N} \sum_{i \in I_1} (i+1) q^{N_1 - i + 1} \varepsilon \\ &\leqslant \sum_{i \geqslant 1} (i+1) q^{-i+2} \varepsilon \leqslant 6 q \varepsilon. \end{aligned}$$

Pour $i \in I_2$, on a

$$\left|\prod_{j=1}^{i-1} \mathrm{e}(\theta_{N_j}^{k_j} + k_j q^{N_j} \alpha) \sum_{k<k_i} \mathrm{e}(\theta_{N_i}^{k} + k q^{N_i} \alpha) V(q^{N_i}, \alpha) - k_i v\right| \leqslant 2 k_i$$

d'où

$$V_2(N,\alpha) \leqslant \frac{2}{N} \sum_{i \in I_2} k_i q^{N_i} \leqslant \frac{2}{N} q^{n_0} \leqslant \frac{2}{q^{n_0}} \leqslant 2\varepsilon.$$

On a donc pour tout $N \geqslant n_0$, $|V(N,\alpha) - v| \leqslant 8 q \varepsilon$ ce qui démontre la convergence de la suite $(V(N,\alpha))$ et finalement l'équivalence des Propriétés (1.1) et (1.2).

Montrons maintenant l'équivalence des Propriétés (1.2) et (1.3).

Pour tout entier n, on a

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{q} \sum_{k<q} \mathrm{e}(\theta_n^k)\right|^2 &= \frac{1}{q^2} \sum_{\substack{i<q \\ j<q}} \cos 2\pi (\theta_n^i - \theta_n^j) \\ &= 1 - \frac{2}{q^2} \sum_{\substack{i<q \\ j<q}} \sin^2 \pi (\theta_n^i - \theta_n^j). \end{aligned}$$

Donc, si la série de terme général $\Sigma_{\substack{i<q \\ j<q}} (\theta_n^i - \theta_n^j)^2$ est divergente, la suite

$$\left(\prod_{n=m}^{N-1} \frac{1}{q} \sum_{k<q} \mathrm{e}(\theta_n^k)\right)_{N>m}$$

converge vers 0 pour tout m.

D'autre part, si la série de terme général $\Sigma_{\substack{i<q \\ j<q}}(\theta_n^i - \theta_n^j)^2$ est convergente et pour m assez grand, les suites

$$\left(\prod_{n=m}^{N-1}\left|\frac{1}{q}\sum_{k<q}\mathrm{e}(\theta_n^k)\right|\right)_{N>m}$$

convergent vers une limite non nulle.

La propriété (1.2) sera donc alors vérifiée si et seulement si la suite

$$\left(\arg\left(\prod_{n=m}^{N-1}\frac{1}{q}\sum_{k<q}\mathrm{e}\left(\theta_n^k\right)\right)\right)_{N>m}$$

converge modulo 2π pour tout m.

Or on a

$$\frac{1}{q}\sum_{k<q}\mathrm{e}(\theta_n^k) - \mathrm{e}\left(\frac{1}{q}\sum_{k<q}\theta_n^k\right) = O\left(\sum_{k<q}(\theta_n^k)^2\right) \quad \text{uniformément en } n, \text{ d'où}$$

$$\arg\left(\frac{1}{q}\sum_{k<q}\mathrm{e}(\theta_n^k)\right) = \frac{2\pi}{q}\sum_{k<q}\theta_n^k + O\left(\sum_{k<q}(\theta_n^k)^2\right) \quad \text{uniformément en } n.$$

Dans le cas où la série de terme général $\Sigma_{k<q}(\theta_n^k)^2$ est convergente, la suite

$$\left(\arg\left(\prod_{n=m}^{N-1}\frac{1}{q}\sum_{k<q}\mathrm{e}(\theta_n^k)\right)\right)_{N>m}$$

est donc convergente modulo 2π pour tout m si et seulement si la série de terme général $\Sigma_{k<q}\theta_n^k$ converge.

Au vu de la remarque, ceci achève la démonstration du théorème 1.

2. Convergence uniforme

Si la suite $(V(N,\alpha))_{N>0}$ converge alors, pour tout $m \geqslant 0$, la suite $(V(N,\alpha, m))_{N>0}$ converge vers la même limite. On se pose à présent la question de l'uniformité en m de cette convergence.

THÉORÈME 2. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

(2.1) *Pour tout nombre réel α, la suite $(V(N,\alpha,m))_{N>0}$ converge uniformément en m.*

(2.2) *La série de terme général* $\Sigma_{k<q}|\theta_n^k|$ *est convergente ou la série de terme général* $\Sigma_{k<q}(\theta_n^k)^2$ *est divergente.*

Remarquons que les deux conditions énoncées dans (2.2) sont exclusives l'une de l'autre.

Démonstration du Théorème 2. Commençons par montrer que la propriété (2.1) entraîne la propriété (2.2). Supposons que pour tout nombre réel α, la suite $(V(N,\alpha,m))$ converge uniformément en m et que la série de terme général $\Sigma_{k<q}(\theta_n^k)^2$ soit convergente. Grâce au Théorème 1, on sait que la série de terme général $\Sigma_{k<q}\theta_n^k$ est convergente et on veut montrer qu'il en est de même de la série de terme général $\Sigma_{k<q}|\theta_n^k|$.

Pour cela, on remarque qu'il existe un nombre réel α tel que $\lim V(N,\alpha) \neq 0$. En effet, d'après la démonstration du Théorème 1, la convergence de la série de terme général $\Sigma_{k<q}(\theta_n^k)^2$ nous assure que

$$\sum_{n\geqslant 0} 1 - \left|\frac{1}{q}\sum_{k<q} \mathrm{e}(\theta_n^k)\right| < +\infty.$$

Choisissons un nombre $\alpha = \frac{p}{2^j}$ vérifiant la conclusion du Lemme B1.

Pour tout $L \geqslant j$ et pour tout $N > L$, on a

$$V(q^N,\alpha) = V(q^L,\alpha)\cdot \prod_{n=L}^{N-1} \frac{1}{q}\sum_{k<q} \mathrm{e}(\theta_n^k).$$

Du fait que $V(q^L,\alpha) \neq 0$, et grâce aux propriétés des produits infinis, on en déduit que

$$\lim V(q^N,\alpha) \neq 0.$$

Si m est un nombre entier positif, on l'écrit en base q sous la forme

$$m = \sum_{i=1}^{\ell} k_i q^{m_i} \quad \text{avec } m_1 > m_2 > \cdots > m_\ell \quad \text{et}$$

$$k_i \in \{1,\ldots,q-1\} \text{pour tout } i.$$

On a alors

$$V(q^N,\alpha,mq^N) = u(mq^N)\,\mathrm{e}(mq^N\alpha)V(q^N,\alpha)$$

soit, si $N \geqslant j$,

$$V(q^N,\alpha,mq^N) = u(mq^N)V(q^N,\alpha).$$

Puisque la suite $V(q^N, \alpha, mq^N)$ converge uniformément en m vers une limite non nulle, on a

$$\lim u(mq^N) = 1 \quad \text{uniformément en } m.$$

Or

$$u(mq^N) = \mathrm{e}\left(\sum_{i=1}^{\ell} \theta_{N+m_i}^{k_i}\right)$$

et la convergence, quand N tend vers $+\infty$, de $\Sigma_{i=1}^{\ell}\theta_{N+m_i}^{k_i}$ uniformément en $(\ell, k_1, k_2, \ldots, k_\ell, m_1, m_2, \ldots, m_\ell)$ est équivalente à la convergence absolue de chacune des séries de terme général $(\theta_n^k)_{n\geqslant 0}$. L'implication (2.1) $\Rightarrow$ (2.2) est démontrée.

Pour démontrer la réciproque, nous allons utiliser quelques lemmes.

LEMME B2. *Pour toute suite q-multiplicative w, on a, pour tous $\lambda \in \mathbb{C}$, $(t, m) \in \mathbb{N}^2$ et $N > 0$:*

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n<N} w(n+m) - \lambda\right| \leqslant$$

$$\left|\frac{1}{q^t}\sum_{n<q^t} w(n) - \lambda\right| + q^t\frac{|\lambda|}{N}\left|\sum_{j=a}^{b-1} w(jq^t) - (b-a)\right| + 2\frac{1+|\lambda|}{N}q^t.$$

où l'on a posé $a = [mq^{-t}] + 1$ et $b = [(m+N)q^{-t}]$.

Démonstration du Lemme B2. On a d'une part

$$\left|\sum_{n=m}^{m+N-1}(w(n) - \lambda) - \sum_{n=aq^t}^{bq^t-1}(w(n) - \lambda)\right| \leqslant (1 + |\lambda|)2q^t,$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}\sum_{n=aq^t}^{bq^t-1} w(n) &= \sum_{j=a}^{b-1} w(jq^t)\sum_{n<q^t} w(n) \\ &= \sum_{j=a}^{b-1} w(jq^t)\sum_{n<q^t}(w(n) - \lambda) + q^t\lambda\sum_{j=a}^{b-1} w(jq^t).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=m}^{m+N-1}(w(n)-\lambda)\right| \leqslant$$

$$\frac{q^t(b-a)}{N}\left|\frac{1}{q^t}\sum_{n<q^t} w(n)-\lambda\right|$$

$$+\frac{q^t|\lambda|}{N}\left|\sum_{j=a}^{b-1} w(jq^t)-(b-a)\right| + \frac{1+|\lambda|}{N}2q^t.$$

Ce qui démontre le Lemme B2, puisque $q^t(b-a) < N$.

LEMME B3. *On suppose que* $\lim_{N\to\infty} V(N) \neq 0$.
Soient $\varepsilon > 0$, *et* $(t,a) \in \mathbb{N}^2$ *tels que*

$$\sum_{n<\log_q a}\sum_{k<q}|\theta_{t+n}^k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi}$$

et, pour tout $t' \geqslant t$,

$$\sum_{k<q}|\theta_{t'}^k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi} \quad \text{et} \quad \left|\frac{V(q^{t'})}{V(q^t)}-1\right| \leqslant \varepsilon.$$

Alors on a, pour tout entier N,

$$\left|\sum_{j=a}^{a+q^N-1} u(jq^t) - q^N\right| \leqslant 3\varepsilon q^N.$$

Démonstration du Lemme B3. Posons $S(m) = \Sigma_{j<m} u(jq^t)$.

On vérifie que si $m = \Sigma_{i=1}^{\ell} k_i q^{m_i}$ avec $m_1 > \cdots > m_\ell$ et $(k_1,\ldots,k_\ell) \in \{1,\ldots,q-1\}^\ell$, alors

$$S(m) = \sum_{i=1}^{\ell}\prod_{j=1}^{i-1} \mathrm{e}(\theta_{m_j+t}^{k_j}) \sum_{k<k_i} \mathrm{e}(\theta_{m_i+t}^{k}) S(q^{m_i}).$$

Soit N un entier fixé. L'entier a s'écrit en base q

$$\begin{aligned} a \;=\; & k_1q^{a_1}+\cdots+k_iq^{a_i}+k_0q^{N+L}+(q-1)q^{N+L-1} \\ & +\cdots+(q-1)q^N+k_{i+1}q^{a_{i+1}}+\cdots+k_\ell q^{a_\ell} \end{aligned}$$

avec $a_1 > \cdots > a_i > N+L \geqslant N > a_{i+1} > \cdots > a_\ell$,

$(k_1,\ldots,k_\ell) \in \{1,\ldots,q-1\}^\ell$) et $k_0 \in \{0,\ldots,q-2\}$

(avec éventuellement $i = 0$ ou $L = 0$).

On vérifie alors que

$$\begin{aligned}
S(a+q^N) - S(a) \;=\;& \mathrm{e}(\theta^{k_0}_{N+L+t}) \left(\prod_{j=1}^{i} \mathrm{e}(\theta^{k_j}_{a_j+t})\right) S(q^{N+L}) \\
& -\mathrm{e}(\theta^{k_0}_{N+L+t}) \left(\prod_{j=1}^{i} \mathrm{e}(\theta^{k_j}_{a_j+t})\right) \sum_{j<(q^L-1)q^N} u(j.q^t) \\
& + \left(\mathrm{e}(\theta^{k_0+1}_{N+L+t}) - \mathrm{e}(\theta^{k_0}_{N+L+t}) \prod_{j<L} \mathrm{e}(\theta^{q-1}_{N+j+t})\right) \\
& \times \sum_{i'=i+1}^{\ell} \left(\prod_{j=1}^{i'-1} \mathrm{e}(\theta^{k_j}_{a_j+t})\right) \sum_{k<k_{i'}} \mathrm{e}(\theta^{k}_{a_{i'}+t}) S(q^{a_{i'}}) \\
=\;& \mathrm{e}(\theta^{k_0}_{N+L+t}) \left(\prod_{j=1}^{i} \mathrm{e}(\theta^{k_j}_{a_j+t})\right) \left(\prod_{j<L} \mathrm{e}(\theta^{q-1}_{N+j+t})\right) S(q^N) \\
& + \left(\mathrm{e}(\theta^{k_0+1}_{N+L+t}) - \mathrm{e}(\theta^{k_0}_{N+L+t}) \prod_{j<L} \mathrm{e}(\theta^{q-1}_{N+j+t})\right) \\
& \times \left(\prod_{j=1}^{i} \mathrm{e}(\theta^{k_j}_{a_j+t})\right) S(a^{[i]})
\end{aligned}$$

où $a^{[i]} = \Sigma_{i'=i+1}^{\ell} k_{i'} q^{a_{i'}} < q^N$.

On en déduit, puisque

$$\left| \mathrm{e}(\theta^{k_0}_{N+L+t}) \left(\prod_{j=1}^{i} \mathrm{e}(\theta^{k_j}_{a_j+t})\right) \left(\prod_{j<L} \mathrm{e}(\theta^{q-1}_{N+j+t})\right) - 1 \right|$$

$$\leqslant 2\pi \left(|\theta^{k_0}_{N+L+t}| + \sum_{j=1}^{i} |\theta^{k_j}_{a_j+t}| + \sum_{j<L} |\theta^{q-1}_{N+j+t}| \right) \leqslant \varepsilon,$$

$$|S(q^N) - q^N| = \left| \frac{V(q^{N+t})}{V(q^t)} - 1 \right| q^N \leqslant \varepsilon q^N$$

et

$$\left| \mathrm{e}(\theta_{N+L+t}^{k_0+1}) - \mathrm{e}(\theta_{N+L+t}^{k_0}) \prod_{j<L} \mathrm{e}(\theta_{N+j+t}^{q-1}) \right|$$

$$\leqslant 2\pi \left(|(\theta_{N+L+t}^{k_0})| + |\mathrm{e}(\theta_{N+L+t}^{k_0+1})| + \sum_{j<L} |\theta_{N+j+t}^{q-1}| \right) \leqslant \varepsilon$$

que $|S(a+q^N) - S(a) - q^N| \leqslant 3\varepsilon q^N$.

LEMME B4. *On suppose que* $\lim V(N) \neq 0$.
Soient $\varepsilon > 0$, *et* $(t, a, N) \in \mathbb{N}^3$ *tels que*

$$\sum_{n \leqslant \log_q(a+N)} \sum_{k<q} |\theta_{t+n}^k| \leqslant \varepsilon/2\pi \text{ et, pour tout } t' \geqslant t,$$

$$\sum_{k<q} |\theta_{t'}^k| \leqslant \varepsilon/2\pi \quad et \quad \left| \frac{V(q^{t'})}{V(q^t)} - 1 \right| \leqslant \varepsilon.$$

Alors,

$$\left| \sum_{j=a}^{a+N-1} u(jq^t) - N \right| \leqslant 3\varepsilon N.$$

Démonstration du Lemme B4. Le Lemme B4 se démontre sans difficulté par récurrence sur la longueur ℓ du développement de N en base $q, N = \Sigma_{i=1}^{\ell} k_i q^N i$ où $(N_1 > N_2 > \cdots > N_\ell \geqslant 0$ et $(k_1, \ldots, k_\ell) \in \{1, \ldots, q-1\}^\ell)$.

En effet, si $\ell = 1$ on a

$$\left| \sum_{j=a}^{a+k_1 q^{N_1}-1} u(jq^t) - k_1 q^{N_1} \right| = \left| \sum_{i<k_1} \left(\sum_{j=a+iq^{N_1}}^{a+(i+1)q^{N_1}-1} u(jq^t) - q^{N_1} \right) \right|$$

$$\leqslant \sum_{i<k_1} 3\varepsilon q^{N_1} = 3\varepsilon k_1 q^{N_1}.$$

d'après le Lemme B3.

De plus, si la propriété est vérifiée pour ℓ on a pour $(\ell+1)$:

en posant $b_l = a + \Sigma_{i=1}^{\ell} k_i q^{N_i}$,

$$\left| \sum_{j=a}^{b_{\ell+1}-1} u(jq^t) - \sum_{i=1}^{\ell+1} k_i q^{N_i} \right|$$

$$\leqslant \left| \sum_{j=a}^{b_\ell - 1} u(jq^t) - \sum_{i=1}^{\ell} k_i q^{N_i} \right| + \left| \sum_{j=b_\ell}^{b_{\ell+1}-1} u(jq^t) - k_{l+1} q^{N_{\ell+1}} \right|$$

$$\leqslant 3\varepsilon \sum_{i=1}^{\ell} k_i q^{N_i} + 3\varepsilon k_{\ell+1} q^{N_{\ell+1}} = 3\varepsilon \sum_{i=1}^{\ell+1} k_i q^{N_i}.$$

De façon analogue, on montre le lemme suivant:

LEMME B5. *Soit* $\alpha = p/q^r$ *tel que* $\lim\ V(N,\alpha) \neq 0$.
Soient $\varepsilon > 0, t \in \mathbb{N}$ *et* $a \in \mathbb{N}$ *tels que*

$$t \geqslant r, \quad \sum_{n \leqslant \log_q(a+N)} \sum_{k<q} |\theta^k_{t+n}| \leqslant \varepsilon/2\pi \text{ et, pour tout } t' \geqslant t,$$

$$\sum_{k<q} |\theta^k_{t'}| \leqslant \varepsilon/2\pi \quad \text{et} \quad \left| \frac{V(q^{t'},\alpha)}{V(q^t,\alpha)} - 1 \right| \leqslant \varepsilon.$$

Alors on a pour tout entier N

$$\left| \sum_{j=a}^{a+N-1} u(jq^t) - N \right| \leqslant 3\varepsilon N.$$

Nous pouvons maintenant démontrer la réciproque du Théorème 2. Supposons donc la propriété (2.2) vérifiée.

D'après le théorème 1, la suite $(V(N,\alpha))$ est convergente pour tout nombre réel α.

Cas 1. $\lim V(N,\alpha) = 0$.

En appliquant le Lemme B2 à $w(n) = u(n)\,\mathrm{e}(n\alpha)$ et $\lambda = 0$, on a

$$|V(N,\alpha,m)| \leqslant |V(q^t,\alpha)| + \frac{2}{N} q^t$$

ce qui démontre la convergence uniforme en m de la suite $(V(N,\alpha,m))_{N>0}$.

Cas 2. $\lim V(N,\alpha) \neq 0$.

On a vu que α est alors nécessairement un nombre q-adique, noté $\alpha = p/q^r$. En appliquant le Lemme B2 à $w(n) = u(n)\,\mathrm{e}(n\alpha)$ et $\lambda = \lim\ V(N,\alpha)$, on a, dès que $t \geqslant r$:

$$|V(N,\alpha,m) - \lambda| \leqslant |V(q^t,\alpha) - \lambda| + \frac{q^t}{N} \left| \sum_{j=a}^{b-1} u(jq^t) - (b-a) \right| + \frac{4}{N} q^t.$$

D'après le Lemme B5, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc $t \geqslant r$, indépendant de m, tel que

$$\begin{aligned}|V(N,\alpha,m)-\lambda| &\leqslant \varepsilon + 3\varepsilon q^t\frac{(b-a)}{N} + \frac{4}{N}q^t \leqslant 4\varepsilon + \frac{4}{N}q^t \\ &\leqslant 5\varepsilon \text{ dès que } N \geqslant 4q^t/\varepsilon.\end{aligned}$$

Ceci conclut la démonstration du Théorème 2.

3. Convergence uniforme en moyenne

Dans le cas où la suite $(V(N,\alpha,m))_{N>0}$ est convergente non uniformément en m, nous allons voir que, en effectuant des moyennes de Césaro sur le paramètre m, nous obtenons une convergence uniforme.

THÉORÈME 3. *Si, pour tout nombre réel $\alpha, \lambda(\alpha) := \lim_{N\to\infty} V(N,\alpha)$ existe, alors la suite*

$$\left(\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}|V(N,\alpha,m)-\lambda(\alpha)|\right)_{N>0}$$

converge vers zéro uniformément en M.

D'après le Théorème 1, l'hypothèse de l'énoncé précédent est équivalent à: la série de terme général $\Sigma_{k<q}\theta_n^k$ converge ou la série de terme général $\Sigma_{k<q}(\theta_n^k)^2$ diverge.

Dans le cas où la série de terme général $\Sigma_{k<q}(\theta_n^k)^2$ diverge ou dans le cas où α n'est pas rationnel q-adique, on sait, d'après ce qui précède, que la limite $\lambda(\alpha)$ est nulle. Le Lemme B2 permet de démontrer que, si $\lambda(\alpha) = 0$, alors la suite $(V(N,\alpha,m))_{N>0}$ tend vers zéro uniformément en m.

Dans ce cas la conclusion du Théorème 3 est donc acquise. Il nous reste donc, pour démontrer le Théorème 3, à examiner le cas où $\alpha = p/q^r$, où les séries $\Sigma_n\Sigma_{k<q}(\theta_n^k)^2$ et $\Sigma_n\Sigma_{k<q}\theta_n^k$ convergent, et où $\lambda := \lim\ V(N,\alpha) \neq 0$.

Nous supposerons dorénavant ces conditions satisfaites et nous énoncerons trois lemmes pour baliser la démonstration du théorème.

LEMME B6. *Si κ est un nombre positif fixé, la suite $(V(N,\alpha,m))_{N>0}$ converge uniformément quand $m \in [0,\kappa N]$.*

Démonstration du Lemme B6. Commençons par une remarque: si (θ_n) est une suite réelle qui tend vers zéro, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite d'entiers (t_N) telle que

$$\lim t_N = +\infty,\ \lim\frac{1}{N}q^{t_N} = 0,$$

et

$$\sum_{t_N \leqslant n \leqslant \log_q((\kappa+1)N)} |\theta_n| \leqslant \varepsilon/2\pi \text{ pour tout } N > 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On note (t_N) une suite vérifiant les conditions précédentes pour $\theta_n = \Sigma_{k<q}\theta_n^k$. Si $t_N \geqslant r$, on a, d'après le Lemme B2 appliqué à la suite $w(n) = u(n)\,\mathrm{e}(n\alpha)$,

$$\begin{aligned} &|V(N,\alpha,m) - \lambda| \\ &\quad \leqslant |V(q^{t_N},\alpha) - \lambda| + q^{t_N}\frac{|\lambda|}{N}\left|\sum_{j=a}^{b-1} u(jq^{t_N}) - (b-a)\right| + 2\frac{1+|\lambda|}{N}q^{t_N}, \end{aligned}$$

où $a = [mq^{-t_N}] + 1$ et $b = [(m+N)q^{-t_N}]$.

On sait que $\lim |V(q^{t_N},\alpha) - \lambda| = 0$

et

$$\lim\ 2\frac{1+|\lambda|}{N}q^{t_N} = 0.$$

Le deuxième terme de la majoration va être contrôlé par l'estimation du Lemme B5. Pour N assez grand, on a:

$$\text{pour tout } t' \geqslant t_N,\quad \sum_{k<q}|\theta_{t'}^k| < \varepsilon/2\pi \quad \text{et} \quad \left|\frac{V(q^{t'},\alpha)}{V(q^{t_N},\alpha)} - 1\right| \leqslant \varepsilon.$$

D'autre part, si $m \in [0,\kappa N]$, on a:

$$\log_q\, b \leqslant \log_q(m+N) - t_N \leqslant \log_q((\kappa+1)N) - t_N \text{ d'où}$$

$$\sum_{0\leqslant n\leqslant \log_q b}\ \sum_{k<q}|\theta_{t_N+n}^k| \leqslant \varepsilon/2\pi.$$

D'après le Lemme B5, on a alors:

$$q^{t_N}\frac{|\lambda|}{N}\left|\sum_{j=a}^{b-1} u(jq^{t_N}) - (b-a)\right| \leqslant 3\varepsilon q^{t_N}\frac{|\lambda|}{N}(b-a) \quad \leqslant 3\varepsilon|\lambda|.$$

Le choix de N assez grand ayant été fait indépendamment de m, le Lemme B6 est démontré.

LEMME B7.

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{A}\sum_{a=0}^{A-1}|1 - u(aq^N)| = 0 \quad \text{uniformément en } A\ (A \in \mathbb{N}, A > 0).$$

Démonstration du Lemme B7. Etape 1. Montrons que

$$\lim_{N\to\infty} q^{-A} \sum_{a=0}^{q^A-1} |1-u(aq^N)| = 0 \text{ uniformément en } A.$$

D'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on a

$$\left(q^{-A} \sum_{a<q^A} |1-u(aq^N)|\right)^2 \leqslant q^{-A} \sum_{a<q^A} |1-u(aq^N)|^2.$$

Or

$$q^{-A} \sum_{a<q^A} |1-u(aq^N)|^2 = q^{-A} \sum_{a<q^A} (2-u(aq^N)-\overline{u(aq^N)})$$

et il suffit de montrer que

$$\lim_{N\to\infty} q^{-A} \sum_{a<q^A} u(aq^N) = 1 \quad \text{uniformément en } A.$$

Ceci est vrai car

$$q^{-A} \sum_{a<q^A} u(aq^N) = \prod_{n=N}^{N+A-1} \frac{1}{q} \sum_{k<q} \mathrm{e}(\theta_n^k)$$

et on sait, d'après la démonstration du Théorème 1, que le produit infini

$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q} \sum_{k<q} \mathrm{e}(\theta_n^k) \quad \text{converge.}$$

Etape 2. Montrons le résultat annoncé.

En utilisant de nouveau Cauchy–Schwarz, il nous suffit de démontrer que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{A} \sum_{a<A} u(aq^N) = 1 \quad \text{uniformément en } A.$$

On écrit

$$A = \sum_{i=1}^{d} k_i q^{A_i},$$

$$\text{avec} \quad A_1 > A_2 > \cdots > A_d \geqslant 0$$

$$\text{et} \quad (k_1, \ldots, k_d) \in \{1, \ldots, q-1\}^d.$$

On a

$$\sum_{a<A} u(aq^N) = \sum_{a<k_1q^{A_1}} u(aq^N) + \mathrm{e}(\theta_{A_1+N}^{k_1}) \sum_{a<k_2q^{A_2}} u(aq^N) + \cdots$$
$$+\mathrm{e}(\theta_{A_1+N}^{k_1} + \cdots + \theta_{A_{d-1}+N}^{k_{d-1}}) \sum_{a<k_dq^{A_d}} u(aq^N).$$

$$\left|\frac{1}{A}\sum_{a<A} u(aq^N) - 1\right| \leqslant \frac{1}{A}\sum_{j=1}^{d} k_jq^{A_j}\left|\frac{1}{k_jq^{A_j}}\sum_{a<k_jq^{A_j}} u(aq^N) - 1\right|$$
$$+\frac{1}{A}\sum_{j=1}^{d-1} k_{j+1}q^{A_{j+1}}|\mathrm{e}(\theta_{A_1+N}^{k_1} + \cdots + \theta_{A_j+N}^{k_j}) - 1|.$$

D'une part

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{A}\sum_{j=1}^{d} k_jq^{A_j}\left|\frac{1}{k_jq^{A_j}}\sum_{a<k_jq^{A_j}} u(aq^N) - 1\right| = 0$$

d'après la première étape.

D'autre part

$$\frac{1}{A}\sum_{j=1}^{d-1} k_{j+1}\, q^{A_{j+1}}|\mathrm{e}(\theta_{A_1+N}^{k_1} + \cdots + \theta_{A_j+N}^{k_j}) - 1|$$
$$\leqslant \frac{2\pi}{A}\sum_{j=1}^{d-1} k_{j+1}\, q^{A_{j+1}}(|\theta_{A_1+N}^{k_1}| + \cdots + |\theta_{A_j+N}^{k_j}|)$$
$$\leqslant \frac{2\pi}{A}\sum_{j=1}^{d-1} jk_{j+1}\, q^{A_{j+1}} \sup_{\substack{n\geqslant N\\ k<q}} |\theta_n^k|$$
$$\leqslant \frac{2\pi}{A}\sum_{j=1}^{d-1} j(q-1)q^{A_1-j} \sup_{\substack{n\geqslant N\\ k<q}} |\theta_n^k|$$
$$\leqslant 2\pi(q-1)\sum_{j=1}^{\infty} jq^{-j} \sup_{\substack{n\geqslant N\\ k<q}} |\theta_n^k| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Le Lemme B7 est démontré.

Rappelons que $\alpha = p/q^r$.

LEMME B8. *On considère un nombre $\kappa > 1$ et on pose $J_N = [\log_q(\kappa N)]$.*
On a alors, pour tout $A \in \mathbb{N}, A > 0$ et tout $N > q^r$,

$$\frac{1}{Aq^{J_N}} \sum_{a<Aq^{J_N}} |\lambda - V(N,\alpha,a)| \leqslant \frac{4}{\kappa} + S_\kappa(A,N)$$

où $\lim_{N\to\infty} S_\kappa(A,N) = 0$ *uniformément en* A.

Démonstration du Lemme B8. Notons $J = J_N$ et $w(n) = u(n)\,\mathrm{e}(n\alpha)$.
On a

$$\frac{1}{Aq^J} \sum_{a<Aq^J} |\lambda - V(N,\alpha,a)|$$

$$= \frac{1}{A}\sum_{a<A} \frac{1}{q^J} \sum_{j<q^J} \left|\lambda - \frac{1}{N}\sum_{n<N} w(n + aq^J + j)\right|.$$

Or $w(n + aq^J + j) = w(aq^J)w(n + j)$ quand $n + j < q^J$.
D'où

$$\frac{1}{Aq^J} \sum_{a<Aq^J} |\lambda - V(N,\alpha,a)|$$

$$\leqslant \frac{1}{A}\sum_{a<A} \frac{1}{q^J} \sum_{j<q^J} |\lambda - w(aq^J)V(N,\alpha,j)|$$

$$+\frac{1}{A}\sum_{a<A} \frac{1}{q^J} \sum_{j=q^J-N}^{q^J-1} \left|\frac{1}{N}\sum_{n<N} w(n + aq^J + j) - w(aq^J)w(n + j)\right|.$$

On pose

$$S_\kappa(A,N) = \frac{1}{A}\sum_{a<A} \frac{1}{q^J} \sum_{j<q^J} |\lambda - w(aq^J)V(N,\alpha,j)|.$$

On a

$$\frac{1}{Aq^j} \sum_{a<Aq^J} |\lambda - V(N,\alpha,a)| \leqslant S_\kappa(A,N) + \frac{2N}{q^J}.$$

On a $(2N/q^J) \leqslant (4/\kappa)$ et il nous reste à prouver que $\lim_{N\to\infty} S_\kappa(A,N) = 0$ uniformément en A.

Du fait que $q^{J+1} > N > q^r$ on déduit que $w(aq^J) = u(aq^J)$.

On a

$$S_\kappa(A,N) \leqslant$$
$$\frac{1}{A}\sum_{a<A}\frac{1}{q^J}\sum_{j<q^J}|\lambda||1-u(aq^J)| + \frac{1}{A}\sum_{a<A}\frac{1}{q^J}\sum_{j<q^J}|\lambda - V(N,\alpha,j)|.$$

$$S_\kappa(A,N) \leqslant \frac{|\lambda|}{A}\sum_{a<A}|1-u(aq^J)| + \frac{1}{q^J}\sum_{j<q^J}|\lambda - V(N,\alpha,j)|.$$

Quand N tend vers $+\infty$, le nombre J tend vers $+\infty$, et donc, d'après le Lemme B7,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{A}\sum_{a<A}|1-u(aq^J)| = 0 \text{ uniformément en } A.$$

D'autre part, on a $q^J \leqslant \kappa N$, et donc, d'après le Lemme B6,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{q^J}\sum_{j<q^J}|\lambda - V(N,\alpha,j)| = 0.$$

Ceci achève la démonstration du Lemme B8.

FIN DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3

Soit $\varepsilon \in]0,1[$ et $\kappa = \frac{1}{\varepsilon}$.

On note comme précédemment $J = [\log_q(\kappa N)]$, et on pose $A = \left[\frac{M}{q^J}\right]$.

On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{M}\sum_{m<M}|\lambda - V(N,\alpha,m)| &\leqslant \frac{1}{Aq^J}\sum_{m<Aq^J}|\lambda - V(N,\alpha,m)| \\ &\quad + \frac{1}{M}\sum_{m=Aq^J}^{M-1}|\lambda - V(N,\alpha,m)| \\ &\leqslant \frac{1}{Aq^J}\sum_{m<Aq^J}|\lambda - V(N,\alpha,m)| + 2\frac{q^J}{M} \\ &\leqslant S_\kappa(A,N) + \frac{4}{\kappa} + 2\frac{q^J}{M}\end{aligned}$$

d'après Lemme B8.

Si $M \geqslant \kappa^2 N$, alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{M}\sum_{m<M}|\lambda - V(N,\alpha,m)| &\leqslant S_\kappa(A,N) + \frac{4}{\kappa} + 2\frac{q^J}{\kappa^2 N}\\ &\leqslant S_\kappa(A,N) + \frac{6}{\kappa},\end{aligned}$$

et $\lim_{N\to\infty} S_\kappa(A,N) = 0$ uniformément en A.

Il existe donc N_0, ne dépendant que de ε, tel que

$$\text{si } N \geqslant N_0 \quad \text{et} \quad M \geqslant \kappa^2 N, \quad \text{alors} \quad \frac{1}{M}\sum_{m<M}|\lambda - V(N,\alpha,m)| < 7\varepsilon.$$

D'autre part, d'après le Lemme B6, il existe N_1, ne dépendant que de ε, tel que

$$\text{si } N \geqslant N_1 \quad \text{et} \quad M < \kappa^2 N, \quad \text{alors} \quad \frac{1}{M}\sum_{m<M}|\lambda - V(N,\alpha,m)| < \varepsilon.$$

Le Théorème 3 est ainsi démontré.

C. Théorème ergodique pondéré

Comme précédemment, on désigne par $u = (u(n))_{n\geqslant 0}$ une suite q-multiplicative. On note $\mathrm{e}(\theta_n^k) = u(kq^n)$ si $k < q, n \geqslant 0$ et $\mathcal{N}(u)$ est le noyau de u.

On appelle système dynamique mesuré un quadruplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mu, T)$ où $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est un espace probabilisé et T une transformation mesurable de $(\Omega, \mathcal{T})$ laissant invariante la mesure μ.

DÉFINITION C1. Une suite v de nombres complexes est une bonne suite de poids pour le théorème ergodique si, pour tout système dynamique mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mu, T)$ et pour toute fonction intégrable f sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$, la suite

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{n<N} v(n) f(T^n\omega)\right)_{N>0}$$

converge dans $L^1(\mu)$ et pour μ-presque tout ω.

THÉORÈME 4. *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes*:

(4.1) *Pour tout nombre réel α et tout nombre entier d,*

$$\textit{la suite} \left(\frac{1}{N}\sum_{n<N} u^d(n)\,\mathrm{e}(n\alpha)\right)_{N>0} \quad \textit{est convergente.}$$

(4.2) *Pour tout nombre entier d et tout* $\alpha \in \mathcal{N}(u^d)$, *la série de terme général* $\Sigma_{k<q}(\mathrm{d}\theta_n^k - kq^n\alpha)$ *est convergente modulo 1 ou la série de terme général* $\Sigma_{k<q}||\mathrm{d}\theta_n^k - kq^n\alpha||^2$ *est divergente.*

(4.3) *Pour toute fonction continue* ρ *sur* $\mathbb{U}$, *la suite* $\rho(u)$ *est une bonne suite de poids pour le théorème ergodique.*

REMARQUES (a) Si les noyaux de toutes les suites u^d, pour $d \in \mathbb{Z}, d \neq 0$, sont vides, alors la propriété (4.2) est vraie. Ceci est par exemple le cas des suites q-multiplicatives qui ne prennent qu'un nombre fini de valeurs.

Dans ce cas, la propriété (4.3) sera une conséquence simple du théorème suivant:

THÉORÈME [L-M-M]. *Si pour tout nombre réel* α *et tout nombre entier non nul d,*

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n<N} u^d(n)\,\mathrm{e}(n\alpha) = 0,$$

alors la suite u est une bonne suite de poids pour le théorème ergodique.

(b) Notons $C(\alpha)$ la condition:

$$\sum_{k<q}(\theta_n^k - kq^n\alpha) \quad \text{est le terme général d'une série convergente modulo 1}$$

ou

$$\sum_{k<q}||\theta_n^k - kq^n\alpha||^2 \quad \text{est le terme général d'une série divergente.}$$

Si le noyau $\mathcal{N}(u)$ est non vide, deux quelconques de ses éléments ne diffèrent que par un nombre rationnel q-adique. Si $\alpha_0 \in \mathcal{N}(u)$ il y a donc équivalence entre

- la condition $C(\alpha_0)$ est satisfaite
- pour tout $\alpha \in \mathcal{N}(u)$, la condition $C(\alpha)$ est satisfaite.

(c) Si $\alpha_0 \in \mathcal{N}(u)$ et $d \in \mathbb{Z}$, alors $\mathcal{N}(u^d) = \{\mathrm{d}\alpha_0 + \frac{p}{q^n} \mid p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$. On en déduit que si le noyau $\mathcal{N}(u)$ est non vide, la propriété (4.2) est équivalente à: il existe $\alpha \in \mathcal{N}(u)$ tel que la condition $C(\alpha)$ soit satisfaite.

EXEMPLES. Présentons, pour illustrer le Théorème 4, quelques exemples typiques parmi les suites 2-multiplicatives dont le noyau contient zéro. On note alors

$$\mathrm{e}(\theta_n) := \mathrm{e}(\theta_n^1) = u(2^n).$$

On suppose que $\lim_{n\to\infty}\theta_n = 0$.

On a alors: la suite 2-multiplicative u possède la propriété (4.3) sauf si la série $\Sigma_n \theta_n$ diverge et la série $\Sigma_n \theta_n^2$ converge.

Ainsi, pour $\theta_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{(-1)^n}{n}$ ou $\frac{1}{n^2}$, la suite u possède les propriétés énoncées dans le Théorème 4. Par contre, si $\theta_n = \frac{1}{n}$, la suite u ne les possède pas.

Nous allons voir au cours de la démonstration du Théorème 4 que les suites qui possèdent ces propriétés se répartissent en deux groupes: si la série $\Sigma_n \theta_n^2$ diverge alors la suite est à spectre vide, et le résultat annoncé est une conséquence du théorème [L-M-M]; si les séries $\Sigma_n \theta_n$ et $\Sigma_n \theta_n^2$ convergent, une nouvelle technique sera utilisée dans laquelle le Théorème 3 jouera un rôle essentiel.

Démonstration du Théorème 4: $1^{ère}$ partie. Montrons que (4.1)⇒(4.2).

Soit $\alpha \in \mathcal{N}(u^d)$. On définit une nouvelle suite q-multiplicative $\tilde{u}$ en posant

$$\tilde{u}(n) = u^d(n) \,.\, \mathrm{e}(-n\alpha).$$

Si l'on note $\mathrm{e}(\tilde{\theta}_n^k) = \tilde{u}(kq^n)$, on a, pour tout k entre 0 et $q-1$,

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{\theta}_n^k\| = 0.$$

Nous pouvons appliquer à la suite $\tilde{u}$ les résultats démontrés dans la partie II. Pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{1}{N} \sum_{n<N} u^d(n)\, \mathrm{e}(n(\beta-\alpha)) = \frac{1}{N} \sum_{n<N} \tilde{u}(n)\, \mathrm{e}(n\beta).$$

D'après l'implication (1.1)⇒(1.3) du Théorème 1, on a donc: si (4.1) est vrai alors $\Sigma_{k<q} \tilde{\theta}_n^k$ est le terme général d'une série convergente modulo 1 ou $\Sigma_{k<q} \|\tilde{\theta}_n^k\|^2$ est le terme général d'une série divergente.

Ceci prouve que (4.1) ⇒(4.2).

Etudions la réciproque. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{Z}$. Si $\alpha \notin \mathcal{N}(u^d)$ alors

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{q^N} \sum_{n<q^N} u^d(n)\, \mathrm{e}(-n\alpha)$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \prod_{n<N} \frac{1}{q} \sum_{k<q} \mathrm{e}(\mathrm{d}\theta_n^k - kq^n\alpha) = 0,$$

et en utilisant les mêmes arguments que dans le début de l'étape 2 de la démonstration du Théorème 1, on en déduit que

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n<N} u^d(n)\, \mathrm{e}(-n\alpha) = 0.$$

Si $\alpha \in \mathcal{N}(u^d)$, on considère la suite $\tilde{u}$ définie comme précédemment par $\tilde{u}(n) = u^d(n)\,\mathrm{e}(-n\alpha)$, et, en lui appliquant l'implication (1.3) $\Rightarrow$ (1.1) du Théorème 1, on remarque que la propriété (4.2) assure la convergence de la suite

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{n<N}\tilde{u}(n)\right)_{N>0},$$

ce qui donne la propriété (4.1).

Nous avons démontré que (4.2) $\Rightarrow$ (4.1).

L'implication (4.3) $\Rightarrow$ (4.1) est facile à établir.

En effet, si la propriété (4.3) est satisfaite, il suffit, pour établir (4.1), d'appliquer (4.3) au système dynamique $(\mathbb{U}, \mathcal{B}, \mu_u, T_\alpha)$, où $\mathcal{B}$ et μ_u désignent respectivement la tribu borélienne et la mesure de Lebesgue sur le cercle $\mathbb{U}$ et où $T_\alpha(z) = \mathrm{e}(\alpha)z$, et aux fonctions $\rho(z) = z^d$ et $f(z) = z$.

En fait, par un argument classique de théorie spectrale, on sait que, pour une suite u quelconque, la propriété (4.1) est équivalente au théorème ergodique pondéré en moyenne, c'est à dire à la propriété de convergence dans L^1 contenue dans la propriété (4.3). Il nous reste donc à démontrer que les propriétés (4.1) et (4.2), pour une suite q-multiplicative, entraînent le résultat de convergence presque sûre énoncé dans (4.3).

Avant de poursuivre la démonstration du Théorème 4, nous rappelons la notion de suite de Besicovitch, nous énonçons une condition pour qu'une suite q-multiplicative soit dans cette classe et nous étudions les propriétés de ces suites comme suites de poids dans le théorème ergodique.

SUITES DE BESICOVITCH

La définition suivante, due à Besicovitch, est présentée dans [B-L]. Le lien avec les notions de suites presque périodiques aux sens de Bohr, Weyl ou Eberlein y est discuté en détail.

On appelle polynôme trigonométrique toute suite $(p(m))_{m\geqslant 0}$ de la forme $p(m) = \Sigma_{k=1}^{K} a_k z_k^m$ où les a_k, z_k sont des nombres complexes, avec $|z_k| = 1$.

DÉFINITION C2. Une suite v de nombres complexes est une suite de Besicovitch si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique p tel que

$$\limsup_{M\to+\infty} \frac{1}{M}\sum_{m<M} |v(m) - p(m)| < \varepsilon.$$

PROPOSITION C1. *Si la suite q-multiplicative u est telle que la suite* $\left(\frac{1}{N}\Sigma_{n<N}u(n)\right)_{N>0}$ *converge vers une limite* λ non nulle *et si*

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{M}\sum_{m<M}\left|\lambda - \frac{1}{N}\sum_{n<N} u(n+m)\right| = 0$$

uniformément en M, alors la suite u est une suite de Besicovitch.

Démonstration de la Proposition C1. On considère le groupe $(\mathbb{Z}_{q,+})$ des entiers q-adiques ($\mathbb{Z}_q = \{0, 1, 2, \dots, q-1\}^{\mathbb{N}}$ est muni de l'addition avec retenue).

On plonge $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}_q$ par $m \to m\beta$ où $\beta = (1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$. On note e l'élément $(q-1, q-1, \dots, q-1, \dots)$ de $\mathbb{Z}_q$ et si $x = (x_m)_{m \geqslant 0} \in \mathbb{Z}_q$,

$$\text{on pose } x^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} x_k q^k.$$

Muni de la topologie produit, $\mathbb{Z}_q$ est un groupe compact abélien.

Si $x \in \mathbb{Z}_q \backslash \{e\}$, alors il existe m_0 tel que $x_{m_0} < q-1$ et, grâce à la propriété de q-multiplicativité, on a pour tout $m \geqslant m_0$,

$$u(x^{(m)})/u(x^{(m)}+1) = u(x^{(m_0)})/u(x^{(m_0)}+1).$$

On définit une fonction φ sur $\mathbb{Z}_q \backslash \{e\}$ en posant

$$\varphi(x) = u(x^{(m)})/u(x^{(m)}+1) \quad \text{si } m \geqslant \inf\{p \in \mathbb{N} \mid x_p < q-1\}.$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{Z}_q \backslash \{e\}$.

Remarquons que si $m \in \mathbb{N}$, on a simplement $\varphi(m\beta) = u(m)/u(m+1)$.

Si $N \in \mathbb{N}$, on note $F_N = \{x \in \mathbb{Z}_q \mid$ il existe n entre 0 et $N-1$ tel que $x + n\beta = e\}$. Pour tout $x \in \mathbb{Z}_q \backslash F_N$, on pose

$$\varphi^{(n)}(x) = \varphi(x)\varphi(x+\beta)\cdots\varphi(x+(n-1)\beta) \quad \text{pour } 0 \leqslant n < N \quad \text{et}$$

$$h_N(x) = (\bar{\lambda})^{-1} \frac{1}{N} \sum_{n<N} \varphi^{(n)}(x).$$

Si $x \in F_N$, on pose $h_N(x) = 0$.

La fonction h_N ainsi définie sur $\mathbb{Z}_q$ est continue sur le complémentaire de la partie finie F_N et est bornée par $|\lambda|^{-1}$.

D'autre part

$$\varphi^{(n)}(m\beta) = u(m)/u(m+n),$$

d'où

$$h_N(m\beta) = (\bar{\lambda})^{-1} \frac{u(m)}{N} \sum_{n<N} \overline{u(m+n)}$$

et donc

$$\frac{1}{M} \sum_{m<M} |u(m) - h_N(m\beta)| = \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{M} \sum_{m<M} \left| \lambda - \frac{1}{N} \sum_{n<N} u(m+n) \right|.$$

Et, par hypothèse, cette quantité tend vers zéro uniformément en M quand N tend vers l'infini.

Les fonctions h_N ainsi définies sont intégrables au sens de Riemann sur $\mathbb{Z}_q$ et les propriétés classiques des suites équiréparties nous permettent d'affirmer que si h est une fonction intégrable au sens de Riemann, alors

$$\lim_{M\to+\infty} \frac{1}{M} \sum_{m<M} h(m\beta) = \int h(g)\,\mathrm{d}g$$

où $\mathrm{d}g$ désigne la probabilité de Haar sur le groupe $\mathbb{Z}_q$.

Soit $\varepsilon > 0$. Fixons N tel que, pour tout $M > 0$,

$$\frac{1}{M} \sum_{m<M} |u(m) - h_N(m\beta)| < \varepsilon.$$

Il existe une fonction P sur $\mathbb{Z}_q$, combinaison linéaire finie de caractères du groupe telle que, $\int |h_N(g) - P(g)|\,\mathrm{d}g < \varepsilon$. La suite p définie par $p(m) = P(m\beta)$ est un polynôme trigonométrique et grâce à ce qui précède, on a:

$$\limsup_{M\to+\infty} \frac{1}{M} \sum_{m<M} |u(m) - p(m)| < 2\varepsilon.$$

Ceci prouve que u est une suite de Besicovitch.

COROLLAIRE C1. *Si le noyau de la suite q-multiplicative u est non vide, et si, pour $\alpha \in \mathcal{N}(u)$, la série de terme général $\Sigma_{k<q}(\theta_n^k - kq^n\alpha)$ est convergente modulo 1 et la série de terme général $\Sigma_{k<q}\|\theta_n^k - kq^n\alpha\|^2$ est convergente, alors la suite u est une suite de Besicovitch.*

EXEMPLES. Les suites 2-multiplicatives u_1 et u_2 définies par $u_1(2^n) = \frac{(-1)^n}{n}$ et $u_2(2^n) = \frac{1}{n^2}$ sont des suites de Besicovitch.

Démonstration du Corollaire C1. Commençons par remarquer que si la suite u est une suite de Besicovitch, alors la suite $(u(n)\,\mathrm{e}(n\alpha))_{n\geqslant 0}$ est encore une suite de Besicovitch. Montrons que, sous les hypothèses du corollaire, la suite $(\tilde{u}(n))_{n\geqslant 0} := (u(n)\,\mathrm{e}(-n\alpha))_{n\geqslant 0}$ est une suite de Besicovitch

Le noyau de la suite q-multiplicative $\tilde{u}$ contient 0 et on peut lui appliquer les résultats de la partie B. D'après le Lemme B1 et la démonstration du Théorème 1, et sous les hypothèses du Corollaire, il existe un nombre rationnel q-adique δ tel que:

$$\lambda := \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n<N} \tilde{u}(n)\,\mathrm{e}(n\delta) \neq 0.$$

D'après le Théorème 3, on a

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{M} \sum_{m<M} \left| \lambda - \frac{1}{N} \sum_{n<N} \tilde{u}(n+m)\,\mathrm{e}((n+m)\delta) \right| = 0 \quad \text{uniformément en } M.$$

La proposition C1 nous dit alors que la suite $(\tilde{u}(n)\,\mathrm{e}(n\delta))_{n\geqslant 0}$ est une suite de Besicovitch, ce qui permet de conclure. Le corollaire est démontré.

BONNES SUITES DE POIDS

LEMME C1. *Soit v une suite bornée de nombres complexes. Pour que v soit une bonne suite de poids pour le théorème ergodique il suffit que,*

> *pour tout système dynamique mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mu, T)$, pour toute fonction mesurable* bornée *f sur $(\Omega, \mathcal{T})$ et pour μ-presque tout ω,*
> *la suite $\left(\frac{1}{N}\Sigma_{n<N} v(n) f(T^n\omega)\right)_{N>0}$ converge.*

Démonstration du Lemme C1. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mu\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \sup_{N>0} \left|\frac{1}{N} \sum_{n<N} v(n) f(T^n\omega)\right| > \varepsilon \right\}\right)$$
$$\leqslant \mu\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \sup_{N>0} \frac{1}{N} \sum_{n<N} |f|(T^n\omega) > \frac{\varepsilon}{\|v\|_\infty} \right\}\right)$$

et d'après le théorème ergodique maximal, cette dernière quantité est majorée par $\frac{\|v\|_\infty}{\varepsilon}\|f\|_1$.

Cette inégalité maximale nous assure, par un argument classique, que l'ensemble des fonctions intégrables f telles que la suite $\left(\frac{1}{N}\Sigma_{n<N} v(n) f(T^n\omega)\right)_{N>0}$ converge presque partout est fermé dans $L^1(\mu)$.

Si cette propriété de convergence est satisfaite par les fonctions bornées elle est donc satisfaite par toutes les fonctions intégrables. Le lemme est démontré.

LEMME C2. *Soit v une suite de nombres complexes de module* 1. *Si, pour tout entier d, la suite v^d est une bonne suite de poids pour le théorème ergodique, alors pour toute fonction continue ρ sur $\mathbb{U}$, la suite $\rho(v)$ est une bonne suite de poids pour le théorème ergodique.*

Grâce au lemme précédent on vérifie sans difficulté qu'une suite uniformément approchée par des bonnes suites de poids est elle-même une bonne suite de poids. Le Lemme C2 est alors une conséquence immédiate du théorème de Stone–Weierstrass qui permet d'approcher uniformément la fonction ρ sur le cercle par des fonctions polynômes.

LEMME C3. *Soit v une suite de nombres complexes; si v est une bonne suite de poids pour le théorème ergodique alors, pour tout nombre réel α, la suite $(v(n)\,\mathrm{e}(n\alpha))_{n\geqslant 0}$ est une bonne suite de poids pour le théorème ergodique.*

Démonstration du Lemme C3. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu, T)$ un système dynamique mesuré et $f \in L^1(\mu)$. Pour vérifier que la suite

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{n<N} v(n)\,\mathrm{e}(n\alpha) f(T^n\omega)\right)_{N>0}$$

converge presque partout, il suffit d'appliquer le théorème ergodique pondéré par la suite v au système dynamique

$$(\Omega \times \mathbb{U}, \mathcal{T} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \lambda, T \times T_\alpha) \text{ et à la fonction } (\omega, z) \to z f(\omega).$$

PROPOSITION C2. *Le produit (terme à terme) d'une suite complexe bornée qui est une bonne suite de poids pour le théorème ergodique par une suite de Besicovitch est une bonne suite de poids pour le théorème ergodique.*

Démonstration de la Proposition C2. Soit w une suite complexe bornée qui est une bonne suite de poids pour le théorème ergodique. On déduit du Lemme C3 que le produit de la suite w par un polynôme trigonométrique p est une bonne suite de poids pour le théorème ergodique.

Soit v une suite de Besicovitch. Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mu, T)$ un système dynamique mesuré et f une fonction mesurable bornée sur Ω.

Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe un polynôme trigonométrique p tel que

$$\limsup_{M\to+\infty} \frac{1}{M}\sum_{m<M} |v(m) - p(m)| < \varepsilon.$$

On a alors, pour presque tout ω,

$$\begin{aligned}
&\limsup_{N, M\to+\infty} \left|\frac{1}{M}\sum_{m<M} w(m)v(m)f(T^m\omega) - \frac{1}{N}\sum_{n<N} w(n)v(n)f(T^n\omega)\right| \\
&\quad\leqslant 2\varepsilon\|f\|_\infty\|w\|_\infty + \\
&\limsup_{N,M\to+\infty} \times \left|\frac{1}{M}\sum_{m<M} w(m)p(m)f(T^m\omega) - \frac{1}{N}\sum_{n<N} w(n)p(n)f(T^n\omega)\right| \\
&\quad= 2\varepsilon\|f\|_\infty\|w\|_\infty.
\end{aligned}$$

Le critère de Cauchy et le Lemme C1 permettent de conclure que la suite wv est bonne pour le théorème ergodique. La Proposition C2 est démontrée.

FIN DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4

Montrons que (4.1) et (4.2) $\Rightarrow$ (4.3).

1-er cas. Supposons que, pour tout nombre entier non nul d et tout $\alpha \in \mathcal{N}(u^d)$ la série de terme général $\Sigma_{k<q}\|d\theta_n^k - kq^n\alpha\|^2$ est divergente.

Dans ce cas, on a, pour tout d et pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n<N} u^d(n)\,\mathrm{e}(n\alpha) = 0.$$

En effet, si le noyau de la suite q-multiplicative u^d est vide, ceci a déjà été utilisé pour prouver l'implication (4.1) $\Rightarrow$ (4.2); d'un autre côté, si $\alpha \in \mathcal{N}(u^d)$, on peut appliquer à la suite q-multiplicative $\tilde{u}(n) = u^d(n)\,\mathrm{e}(-n\alpha)$ les résultats du B, et on constate, en examinant la preuve du théorème 1, que, pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n<N} \tilde{u}(n)\,\mathrm{e}(n\gamma) = 0.$$

Le théorème [L-M-M] s'applique à la suite u et à toutes ses puissances entières non nulles. Grâce au Lemme C2, on peut alors affirmer que la condition (4.3) est satisfaite.

2-ème cas. Supposons que: il existe un nombre entier non nul d tel que le noyau $\mathcal{N}(u^d)$ soit non vide et, pour $\alpha \in \mathcal{N}(u^d)$,

le série de terme général $\Sigma_{k<q}\|d\theta_n^k - kq^n\alpha\|^2$ soit convergente et

le série de terme général $\Sigma_{k<q}(d\theta_n^k - kq^n\alpha)$ soit convergente modulo 1.

La suite $(d\theta_n^k - kq^n\alpha)_{n\geqslant 0}$ tend vers zéro modulo 1. Pour chaque k, il existe une suite $(a_n^k)_{n\geqslant 0}$ dans $\mathbb{Z}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \theta_n^k - kq^n\frac{\alpha}{d} + \frac{a_n^k}{d} = 0$.

On définit alors deux suites q-multiplicatives v et w par

$$w(kq^n) = \mathrm{e}\left(-\frac{a_n^k}{d}\right) \quad \text{et} \quad v(kq^n) = \mathrm{e}\left(\theta_n^k + \frac{a_n^k}{d}\right).$$

D'après [L-M-M], la suite w est une bonne suite de poids pour le théorème ergodique pondéré.

D'autre part, on a $\frac{\alpha}{d} \in \mathcal{N}(v)$, la série de terme général $(\Sigma_{k<q}\theta_n^k + \frac{a_n^k}{d} - kq^n\frac{\alpha}{d})$ converge et la série de terme général $(\Sigma_{k<q}\|\theta_n^k + \frac{a_n^k}{d} - kq^n\frac{\alpha}{d}\|^2)$ converge (car, pour n assez grand, $\|\theta_n^k + \frac{a_n^k}{d} - kq^n\frac{\alpha}{d}\| = \frac{1}{d}\|d\theta_n^k - kq^n\alpha\|$).

Le Corollaire C1 nous dit que v est une suite de Besicovitch.

Finalement, on a $u = v.w$ et la Proposition C2 nous permet d'affirmer que u est une bonne suite de poids pour le théorème ergodique. Le Théorème 4 est démontré.

REMARQUES. On peut compléter cette étude par quelques considérations sur la limite obtenue dans le théorème ergodique pondéré. Si u est une bonne suite de poids pour le théorème ergodique, il suffit, grâce au théorème pondéré dans L^2, d'étudier les propriétés spectrales de la suite u pour expliciter la limite des moyennes ergodiques pondérées. Si u est une suite q-multiplicative dans $\mathbb{U}$, qui vérifie les propriétés énoncées dans le Théorème 4, on peut distinguer trois cas.

(a) Si le noyau $\mathcal{N}(u)$ est vide alors, pour tout système dynamique mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mu, T)$ et tout $f \in L^1(\mu)$,
$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n<N} u(n) f(T^n\omega) = 0 \qquad \text{p.p}$$
(b) Si $\alpha \in \mathcal{N}(u)$ et si la série de terme général $\Sigma_{k<q}\|\theta_n^k - kq^n\alpha\|^2$ diverge, on a une conclusion identique au cas précédent.
(c) Si $\alpha \in \mathcal{N}(u)$ et si la série de terme général $\Sigma_{k<q}\|\theta_n^k - kq^n\alpha\|^2$ converge, alors, pour tout système dynamique mesuré ergodique $(\Omega, \mathcal{T}, \mu, T)$ on a: si $f \in L^1(\mu)$ et si f est orthogonale aux fonctions propres du système associées à des valeurs propres de la forme $\mathrm{e}(\alpha + \frac{p}{q^m})$ (où $p \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$) alors
$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n<N} u(n) f(T^n\omega) = 0 \qquad \text{p.p.}$$

QUESTION. La suite 2-multiplicative u définie par $u(2^n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$ est-elle une bonne suite de poids? Cette suite est le produit d'une mauvaise suite de poids par la suite de Morse.

D. Stricte ergodicité

Commençons par quelques rappels sur la notion de suite strictement ergodique. On note σ le décalage sur $\mathbb{U}^{\mathbb{N}}$; c'est l'application qui à la suite $(z_n)_{n\geqslant 0}$ associe la suite $(z'_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $z'_n = z_{n+1}$. L'ensemble $\mathbb{U}^{\mathbb{N}}$ est muni de la topologie produit qui en fait un espace métrisable compact, et, si $z \in \mathbb{U}^{\mathbb{N}}$, on note K_z la plus petite partie fermée de $\mathbb{U}^{\mathbb{N}}$ contenant z et stable par σ. On a $K_z = \overline{\{\sigma^k(z): k \in \mathbb{N}\}}$.

La suite z est dite strictement ergodique si le système dynamique (K_z, σ) est minimal et uniquement ergodique. On sait que ceci est équivalent au fait que, pour tout nombre entier k strictement positif, pour toute fonction continue positive f sur $\mathbb{U}^k$, si il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f(z_{n_0}, z_{n_0+1}, \ldots, z_{n_0+k-1}) > 0$ alors la suite
$$\left(\frac{1}{N} \sum_{n=m}^{m+N-1} f(z_n, z_{n+1}, \ldots, z_{n+k-1})\right)_{N>0}$$

converge uniformément en m vers une limite non nulle.

Revenons à présent à la suite q-multiplicative u. On note comme précédemment $e(\theta_n^k) = u(kq^n)$ si $k < q$ et $n \geqslant 0$. On désigne par $\mathcal{N}(u)$ le noyau de la suite u.

THÉORÈME 5. *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes:*

(5.1) *pour tout nombre rationnel q-adique α et pour tout nombre entier d, la suite*

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u^d(n+m)\,\mathrm{e}((n+m)\alpha)\right)_{N>0}$$

converge uniformément en $m \in \mathbb{N}$.

(5.2) *pour tout nombre entier d, si $0 \in \mathcal{N}(u^d)$ alors la série de terme général $\Sigma_{k<q}\|\mathrm{d}\theta_n^k\|$ est convergente ou la série de terme général $\Sigma_{k<q}\|\mathrm{d}\theta_n^k\|^2$ est divergente.*

(5.3) *la suite u est strictement ergodique.*

EXEMPLES. Si le noyau de u contient zéro, ces conditions sont plus restrictives que celles du Théorème 4; par exemple les suites 2-multiplicatives définies par $u(2^n) = \mathrm{e}(\frac{1}{n})$ ou $u(2^n) = \mathrm{e}(\frac{(-1)^n}{n})$ ne sont pas strictement ergodiques. Par contre les suites 2-multiplicatives définies par $u(2^n) = \mathrm{e}(\frac{1}{\sqrt{n}})$ ou $u(2^n) = \mathrm{e}(\frac{1}{n^2})$ sont strictement ergodiques.

Si le noyau d'une puissance de u contient un nombre réel non rationnel q-adique, alors la suite u est strictement ergodique; ici la condition de stricte ergodicité est plus faible que la condition de bonne suite pour le théorème ergodique pondéré.

REMARQUES. (a) La stricte ergodicité de suites q-multiplicatives a été, à notre connaissance, étudiée précédemment par M. Keane ([K]) et P. Liardet ([L1][L2]).

Les suites étudiées par M. Keane ne prennent qu'un nombre fini de valeurs; les suites q-multiplicatives de ce type sont étudiées dans [L-M-M].

Les critères de stricte ergodicité de suites q-multiplicatives donnés par P. Liardet sont différents des nôtres: ils portent sur le comportement ne moyenne de toutes les suites $(u_n^{\alpha_0}u_{n+1}^{\alpha_1}\cdots u_{n+k}^{\alpha_k})_{n\geqslant 0}$ pour $k \in \mathbb{N}, (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{Z}^{k+1}$.

(b) Le fait que la stricte ergodicité de la suite u entraine la convergence uniforme en m de la suite $(\frac{1}{N}\Sigma_{n<N}u^d(n+m))$ est bien sûr contenu dans la définition. Mais la stricte ergodicité ne suffit pas, dans le cas d'une suite quelconque, pour avoir la propriété (5.1).

On peut en effet construire une suite strictement ergodique z telle que la suite $(\frac{1}{N}\Sigma_{n<N}(-1)^n z(n))$ soit divergente (un tel exemple nous a été donné par Host, Maass et Rudolph).

(c) Suivant les arguments utilisés dans [L-M-M], on peut déduire des Théorèmes 4 et 5 un théorème ergodique pour sous-suites qui généralise le Théorème A de [L-M-M]: soit I un arc du cercle $\mathbb{U}$, et u une suite q-multiplicative satisfaisant les conditions du Théorème 4 et celles du Théorème 5; la suite $(n_k)_{k>0}$

des entiers $n \geqslant 0$ tels que $u(n) \in I$ est une bonne suite pour le théorème ergodique; autrement dit: si $(\Omega, \mathcal{T}, \mu, T)$ est un système dynamique mesuré et si $f \in L^1(\mu)$, alors la suite $(\frac{1}{K}\Sigma_{k=1}^{K} f \circ T^{n_k})_{K>0}$ converge dans $L^1(\mu)$ et presque partout.

Démonstration du Théorème 5. Commençons par démontrer l'implication (5.1) $\Rightarrow$ (5.2).

Soit d un nombre entier; supposons que $0 \in \mathcal{N}(u^d)$. Si α est un nombre réel non rationnel q-adique alors, d'après la démonstration du Théorème 1, la suite

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u^d(n)\, \mathrm{e}(n\alpha)\right)_{N>0}$$

converge vers zéro. De plus, grâce au Lemme B2, on sait que la suite

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u^d(n+m)\, \mathrm{e}((n+m)\alpha)\right)_{N>0}$$

converge uniformément en m.

Cette remarque étant faite, on constate que l'implication (5.1)$\Rightarrow$(5.2) est une conséquence du Théorème 2 appliqué à la suite q-multiplicative u^d.

Pour démontrer l'implication réciproque, fixons l'entier d et distingons deux cas.

Si $0 \in \mathcal{N}(u^d)$, le résultat est contenu dans le Théorème 2.

Si $0 \notin \mathcal{N}(u^d)$, alors ce noyau ne contient aucun nombre rationnel q-adique, et la propriété (5.1) est une conséquence d'arguments déja rappelés (Théorème 1 et Lemme B2).

Pour démontrer l'implication (5.1) et (5.2) $\Rightarrow$ (5.3), plongeons à nouveau le sous-shift (K_u, σ) dans une extension d'un odomètre par un groupe compact et utilisons la proposition suivante, dont la démonstration est donnée à la fin du paragraphe.

PROPOSITION D1. *Soient X un groupe compact abélien, muni d'une translation ergodique $x \mapsto x + \beta$, et φ une application mesurable de X dans $\mathbb{U}$. On suppose que l'ensemble des points de discontinuité de φ est négligeable dans X. On note T_φ la transformation de $X \times \mathbb{U}$ définie par*

$$T_\varphi(x, z) = (x + \beta, \varphi(x)z)$$

et, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\varphi^{(k)}(x) = \varphi(x)\varphi(x+\beta)\cdots\varphi(x+(k-1)\beta).$$

Pour tout $x \in X$, on note Ω_x l'adhérence de l'orbite de $(x, 1)$ sous T_φ:

$$\Omega_x = \overline{\{(x + k\beta, \varphi^{(k)}(x)) : k \in \mathbb{N}\}}.$$

On fixe un point x_0 dans X.

On a alors équivalence entre:

(a) *pour tout caractère γ du groupe X et pour tout nombre entier d, la suite*

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{n=m}^{m+N-1}\gamma(\beta)^n(\varphi^{(n)}(x_0))^d\right)_{N>0}$$

converge uniformément en m.

(b) *le système dynamique $(\Omega_{x_0}, T_\varphi)$ est uniquement ergodique et le support de l'unique probabilité invariante est Ω_{x_0}.*

Pour démontrer l'implication (5.3) $\Rightarrow$ (5.1) et (5.2), nous utiliserons le lemme suivant, dont la démonstration est donnée à la fin du paragraphe.

LEMME D1. *Soit u une suite q-multiplicative dont le noyau contient zéro et telle que, pour une infinité de couples (n,k) dans $\mathbb{N}\times\{0,1,\ldots,q-1\}$, on ait $u(kq^n)\neq 1$. Il existe une fonction continue f sur $\mathbb{U}^{\mathbb{N}}$ telle que,*

$$\textit{pour tout } n\in\mathbb{N},\qquad f(\sigma^n u)=\mathrm{e}\left(\frac{n}{q}\right).$$

REMARQUE. Dans ce lemme on peut choisir la fonction f ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées. On énonce ainsi une propriété de reconnaissabilité des suites q-multiplicatives non périodiques dont le noyau contient zéro (on trouvera dans [L-M-M] une définition de la reconnaissabilité).

Revenons à la démonstration du Théorème 5.

Nous reprenons ici la construction de produit gauche décrite et utilisée dans [L-M-M] ainsi que dans la démonstration de la Proposition C1. En appliquant la Proposition D1 à ce système dynamique nous allons prouver que, sous les conditions (5.1) et (5.2), la suite q-multiplicative u est strictement ergodique.

On note $(\mathbb{Z}_q,+)$ le groupe des entiers q-adiques, c'est à dire l'ensemble $\{0,1,\ldots,q-1\}^{\mathbb{N}}$ muni de l'addition avec retenue. On note β l'entier q-adique $(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ldots)$ et e l'entier q-adique $(q-1,q-1,q-1,\ldots)$. La topologie produit sur $\mathbb{Z}_q$ en fait un groupe compact métrisable.

On définit une application φ de $\{n\beta \mid n\in\mathbb{N}\}$ dans $\mathbb{U}$ par

$$\varphi(n\beta)=u(n+1)\,.\,u(n)^{-1}.$$

En utilisant la propriété de q-multiplicativité, on observe que cette application φ admet un unique prolongement continu à $\mathbb{Z}_q\backslash\{e\}$. Ce prolongement est encore noté φ. On définit également l'application φ au point e en lui attribuant une valeur arbitraire.

En notant X le groupe $\mathbb{Z}_q$, nous sommes à présent dans la situation décrite dans la proposition D1.

Le système dynamique $(\mathbb{Z}_q \times \mathbb{U}, T_\varphi)$ 'produit' la suite q-multiplicative en ce sens que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(k)}(0) = u(k)$. Nous allons appliquer la Proposition D1 au point $x_0 = 0$.

Si γ est un caractère de $\mathbb{Z}_q$, alors $\gamma(\beta)$ est de la forme $\mathrm{e}(r)$ où r est un nombre rationnel q-adique (en effet, $\lim_{k\to\infty} \mathrm{e}(q^{k_r}) = \lim_{k\to\infty} \gamma(q^k\beta) = 1$). La condition (5.1) assure donc que la propriété (a) de la Proposition D1 est satisfaite par la transformation T_φ et le point $x_0 = 0$. On suppose que cette condition est satisfaite.

On note Ω l'adhérence dans $\mathbb{Z}_q \times \mathbb{U}$ de l'orbite de $(\beta, 1)$ sous T_φ, et on note μ l'unique probabilité T_φ-invariante sur Ω.

Soit $k \in \mathbb{N}, k > 0$, et soit f une fonction positive continue sur $\mathbb{U}^k$.

On définit une fonction F sur $\mathbb{Z}_q \times \mathbb{U}$ en posant

$$F(x, z) = f(z, \varphi(x)z, \varphi^{(2)}(x)z, \dots, \varphi^{(k-1)}(x)z).$$

On a alors

$$\frac{1}{N}\sum_{n=m}^{m+N-1} f(u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+k-1}) = \frac{1}{N}\sum_{n=m}^{m+N-1} F(T_\varphi^n(\beta, 1)),$$

et cette suite converge vers $\int F\,\mathrm{d}\mu$ uniformément en m car le système dynamique (Ω, T_φ) est uniquement ergodique, la fonction F est bornée et l'ensemble de ses points de discontinuité est μ-négligeable. (cet argument est détaillé dans [L-M-M], Proposition 3.1 et preuve du Théorème 3.8).

Ceci prouve que la suite u est uniquement ergodique.

Supposons de plus qu'il existe un entier $n_0 \geqslant 0$ tel que

$$f(u_{n_0}, u_{n_0+1}, \dots, u_{n_0+k-1}) > 0.$$

On a $F(T_\varphi^{n_0}(\beta, 1)) > 0$; or $T_\varphi^{n_0}(\beta, 1) \in \Omega$, la fonction F est continue au point $T_\varphi^{n_0}(\beta, 1)$ et le support de μ coïncide avec Ω.

On a donc $\int F\,\mathrm{d}\mu > 0$, c'est à dire

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+k-1}) > 0.$$

Ceci prouve que la suite u est strictement ergodique.

Il nous reste à démontrer la réciproque. Remarquons tout d'abord que, si la suite u est strictement ergodique, alors pour tout nombre entier d, la suite u^d est strictement ergodique. Il nous suffit donc de démontrer que, si la suite u est strictement ergodique, et si, pour tout k entre 1 et $q-1$, $\lim_{n\to\infty} \theta_n^k = 0$, alors la série de terme général $\Sigma_{k<q}|\theta_n^k|$ est convergente ou la série de terme général $\Sigma_{k<q}(\theta_n^k)^2$ est divergente.

Supposons au contraire que la série de terme général $\Sigma_{k<q}|\theta_n^k|$ est divergente et la série de terme général $\Sigma_{k<q}(\theta_n^k)^2$ est convergente. D'après le Théorème 2, il existe un nombre rationnel q-adique $\alpha = p/q^t$ tel que la suite

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u^d(n+m)\,\mathrm{e}((n+m)\alpha)\right)_{N>0}$$

ne soit pas uniformément convergente.

On applique le Lemme D1 à la suite q^t-multiplicative u^d: il existe une fonction continue f sur $\mathbb{U}^{\mathbb{N}}$ telle que $f(\sigma^n u^d) = \mathrm{e}(n/q^t)$. Il existe donc une fonction continue g sur $\mathbb{U}^{\mathbb{N}}$ telle que $g(\sigma^n u) = \mathrm{e}(n\alpha)$. Le fait que la suite

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u^d(n+m) g(\sigma^{n+m}u)\right)_{N>0}$$

ne soit pas uniformément convergente prouve enfin que la suite u n'est pas strictement ergodique. Ceci achève la démonstration du Théorème 5.

Démonstration de la Proposition D1. L'implication (b) $\Rightarrow$ (a) est claire, et elle ne nous servira pas. Démontrons sa réciproque. Notre hypothèse est que, si la fonction f est définie sur Ω_{x_0} par $f(x,z) = \gamma(x)z^d$ avec $\gamma \in \hat{X}$ et $d \in \mathbb{Z}$, alors la suite

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{n<N} f(T_\varphi^{n+m}(x_0,1))\right)_{N>0}$$

converge uniformément en m.

Si g est une fonction continue sur Ω_{x_0}, on peut l'approcher uniformément par des combinaisons linéaires de fonctions de la forme précédente et, en utilisant le critère de Cauchy, on montre que la suite

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{n<N} g(T_\varphi^{n+m}(x_0,1))\right)_{N>0}$$

converge encore uniformément en m.

La limite de cette suite est bien sûr indépendante de m; on la note $\mu(g)$. Ceci définit une probabilité μ pur Ω_{x_0}.

La probabilité μ est T_φ-invariante (ceci nécessite une petite argumentation car φ n'est pas supposée continue; cette argumentation est présentée dans la preuve de la Proposition 3.1 de [L-M-M]).

Notons D l'ensemble des points de discontinuité de φ.

Soit $(x,z) \in \Omega_{x_0}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}, x + n\beta \notin D$.

Soit f une fonction continue sur Ω et soit $\varepsilon > 0$.
Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $N > N_0$, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\left|\mu(f) - \frac{1}{N}\sum_{n<N} f(T_\varphi^{n+m}(x_0, 1))\right| < \varepsilon.$$

On fixe un tel entier N_0. On a, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\left|\mu(f) - \frac{1}{N}\sum_{n<N} f(T_\varphi^n(x, z))\right| < \varepsilon + \frac{1}{N}\sum_{n<N}\left|f_0T_\varphi^n(T_\varphi^m(x_0, 1)) - f_0T_\varphi^n(x, z)\right|.$$

Il existe une suite d'entiers $(m_j)_{j\geqslant 0}$ telle que $\lim_{j\to+\infty} T_\varphi^{m_j}(x_0, 1) = (x, z)$, et la fonction $f_0T_\varphi^n$ est continue au point (x, z).

On en déduit que, pour tout $N > N_0$,

$$\left|\mu(f) - \frac{1}{N}\sum_{n<N} f(T_\varphi^n(x, z))\right| < \varepsilon.$$

Ceci prouve que

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n<N} f(T_\varphi^n(x, z)) = \mu(f).$$

Soit ν une probabilité T_φ-invariante sur Ω_{x_0}. D'après l'unique ergodicité de la translation par β sur le groupe X, on sait que la projection de ν sur X coincide avec la probabilité de Haar sur X. On en déduit que l'ensemble des couples (x, z) dans Ω_{x_0} tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ avec $x + n\beta \in D$, est ν-négligeable. On a alors, pour toute fonction continue f.

$$\nu(f) = \lim_{N\to+\infty} \int \frac{1}{N}\sum_{n<N} f(T_\varphi^n(x, z))\, \mathrm{d}\nu(x, z)$$

par invariance de ν, et

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n<N} f(T_\varphi^n(x, z)) = \mu(f)$$

pour ν-presque tout (x, z), d'après ce qui précède.

On en déduit, grâce au théorème de convergence dominée, que $\mu(f) = \nu(f)$. On a ainsi démontré que le système dynamique $(\Omega_{x_0}, T_\varphi)$ est uniquement ergodique.

Notons K le support de μ et montrons que $K = \Omega_{x_0}$. Pour tout $w \in \mathbb{U}$, on note $w\mu$ la probabilité image de μ par l'application

$$\begin{aligned} \tau_w\colon\ X \times \mathbb{U} &\to X \times \mathbb{U} \\ (x,z) &\mapsto (x,zw) \end{aligned}$$

Cette application commute avec T_φ.

En notant $\Omega_{(x_0,w)}$ l'adhérence de l'orbite de (x_0,w) sous T_φ, on déduit du fait que le système $(\Omega_{x_0}, \mu, T_\varphi)$ est uniquement ergodique le fait que, pour tout w dans $\mathbb{U}$, le système $(\Omega_{(x_0,w)}, w\mu, T_\varphi)$ est uniquement ergodique.

Le support de la probabilité $w\mu$ est égal à $\tau_w(K)$, et pour tout $w \in \mathbb{U}$ on a soit $w\mu = \mu$, soit $\tau_w(K) \cap \Omega_{x_0} = \emptyset$.

Ceci entraine que si $K \neq \Omega_{x_0}$, alors $\cup_{w\in\mathbb{U}}\tau_w(K)$ a un complémentaire non vide. Or cette réunion est une partie compacte de $X \times \mathbb{U}$, et, du fait que la projection de μ sur X est égale à la probabilité uniforme m_X sur X, on déduit que $m_X \otimes m_{\mathbb{U}} = \int_U w\mu \, dw$.

Finalement ceci montre que si $K \neq \Omega_{x_0}$, alors il y a dans $X \times \mathbb{U}$ on ouvert non vide $m_X \otimes m_{\mathbb{U}}$-négligeable, ce qui est impossible.

Démonstration du Lemme D1. Pour chaque $K \in \mathbb{N}$, on pose

$$b(K) := \left(\frac{u(K+j)}{u(K)}\right)_{0<j<q}.$$

On remarque tout d'abord que:

(1) si K est un multiple de q, alors $b(K) = b(0)$.

Montrons que:

(2) si $0 < k < q$, il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $b(k + \mathrm{d}q) \neq b(k)$.

Raisonnons par l'absurde; si $b(k + dq) = b(k)$, on a en particulier

$$\frac{u(k + dq + q - k)}{u(k + dq)} = \frac{u(k + q - k)}{u(k)},$$

c'est à dire $u(dq + q) = u(dq)u(q)$.

Si on suppose que ceci est vrai pour tout d, on a $u(dq) = u(q)^d$. Or on a supposé que le noyau de la suite u contenait zéro. En notant $u(q) = \mathrm{e}(\alpha)$, on a alors $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}(q^n\alpha) = 1$, ce qui entraine que le nombre α est rationnel q-adique, et que, pour tout n assez grand et tout k, on a $u(kq^{n+1}) = \mathrm{e}(kq^n\alpha) = 1$. Or ceci est exclu par hypothèse.

De (2) on déduit immédiatement que, si $0 < k < q$, il existe $d_k \in \mathbb{N}$ tel que $b(k + d_k q) \neq b(0)$. Pour chaque k entre 1 et $q - 1$ on fixe un tel nombre d_k, et on pose

$$B := \{b(k + d_k q), 0 < k < q\}.$$

On fixe un nombre entier $p \geqslant 2$ tel que, pour tout k, $d_k < q^{p-1}$.
Montrons que:

(3) si $K \in \mathbb{N}$ et si K n'est pas un multiple de q, alors il existe un nombre entier d entre 0 et q^p tel que $b(K + dq) \in B$.
Si $K = aq+k$ avec $0 < k < q$, il existe d entre 0 et $q^p - 1$ tel que $a+d \equiv d_k$ modulo q^p. On a alors $b(K + dq) = b(k + (a + d)q) = b(k + d_kq)$ par q-multiplicativité puisque si $0 \leqslant j < q$, $k + d_kq + j < q^{p+1}$. Ceci prouve l'affirmation (3).

Il existe une fonction continue F sur $\mathbb{U}^{\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $z \in \mathbb{U}^{\mathbb{N}}$:

si, pour tout entier d entre 0 et q^p, $\left(\dfrac{z(dq+j)}{z(dq)}\right)_{0<j<q} = b(0)$,

alors $F(z) = 1$;

si, il existe d entre 0 et q^p tel que $\left(\dfrac{z(dq+j)}{z(dq)}\right)_{0<j<q} \in B$,

alors $F(z) = 0$.

(l'existence de cette fonction F est assurée par le fait que les deux conditions précédentes définissent deux parties compactes disjointes de $\mathbb{U}^{\mathbb{N}}$)

D'après (1) et (3), on a

$$F(\sigma^n u) = 1 \ \text{ si le nombre } n \text{ est un multiple de } q, \ \text{ et } F(\sigma^n u) = 0 \ \text{ sinon.}$$

En posant

$$f(z) := \sum_{k<q} \mathrm{e}\left(-\frac{k}{q}\right) F(\sigma^k z)$$

on définit sur $\mathbb{U}^{\mathbb{N}}$ une fonction f satisfaisant les conditions énoncées dans Lemme D1.

Références

[B-S] Bellman, R. et Shapiro, H. N.: A problem in additive number theory, *Ann. of Math.*, 49 (1948), 333–340.

[B-L] Bellow, A. et Losert, V.: The weighted pointwise ergodic theorem and the individual ergodic theorem along subsequences, *Trans. Am. Math. Soc.*, 288 (1985), 307–345.

[Bes] Besineau, J.: Indépendance statistique d'ensembles liés à la somme des chiffres, *Acta Arithm.*, 20 (1972), 401–416.

[Coq] Coquet, J.: Contribution à l'étude harmonique des suites arithmétiques, *Thèse d'Etat*, Orsay (1978).

[C-K-M] Coquet, J., Kamae, T. et Mendès-France M.: Sur la mesure spectrale de certains suites arithmétiques, *Bull. Soc. Math. France*, 105 (1977), 369–384.

[Del] Delange, H.: Sur les fonctions q-additives ou q-multiplicatives, *Acta Arithm.*, 21(1972), 285–298.

[Gue] Guelfond, A. O.: Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données, *Acta Arithm.*, 13 (1968), 259–265.

[Kea] Keane, M.: Generalized Morse Sequences, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, 10 (1968), 335–353.

[Kre] Krengel, U.: Ergodic Theorems. *De Gruyter Studies in Mathematics* 6 (1985).

[L-M-M] Lesigne, E., Mauduit, C. et Mossé, B.: Le théorème ergodique le long d'une suite q-multiplicative, *Compositio Mathematica*, 93 (1994), 49–79.

[Lia 1] Liardet, P.: Regularities of distribution, *Compositio Mathematica*, 61 (1987), 267–293.

[Lia 2] Liardet, P.: Propriétés harmoniques de la numération, suivant Jean Coquet; Colloque de Théorie Analytique des Nombres J. Coquet, *Publications Mathématiques d'Orsay*, Orsay (1988).

[Mar] Martin, J. C.: Generalized Morse sequences on n symbols, *Proc. Am. Math. Soc.* 54 (1976), 379–383.

[Mos] Mossé, B.: q-adic spectral analysis of some arithmetic sequences, *Theoritical Computer Science* 65 (1989), 249–263.

[Que] Queffélec, M.: Mesures spectrales associées à certaines suites arithmétiques, *Bull. Soc. Math. France.* 107 (1979), 385–421.

[Rau] Rauzy, G.: Propriétés statistiques de suites arithmétiques. *Collection SUP, Presses Universitaires de France*, Paris (1976).