COMPOSITIO MATHEMATICA

BERNARD LANDREAU

Étude probabiliste des sommes des puissances *s*-ièmes

Compositio Mathematica, tome 99, nº 1 (1995), p. 1-31
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1995__99_1_1_0>

Compositio Mathematica **99:** 1–31, 1995.

Etude probabiliste des sommes de s puissances s-ièmes

BERNARD LANDREAU
Laboratoire d'Algorithmique Arithmétique Expérimentale, Unité Mixte de Recherche CNRS 9936, Université Bordeaux I, F. 33405 Talence Cedex, e-mail: landreau@math.u-bordeaux. fr

Received 11 January 1994; accepted in final form on 29 July 1994

Résumé. Etant donné un entier $s \geqslant 2$, on considère ici une suite aléatoire d'entiers modélisant la suite des puissances s-ièmes. On montre alors principalement que pour tout entier $r \geqslant 0$, l'ensemble des entiers admettant exactement r représentations en somme de s termes de cette suite aléatoire est presque sûrement de densité positive. En outre, ces densités forment une distribution de Poisson.

Abstract. For an integer $s \geqslant 2$, we consider a random sequence of integers which modelizes the sequence of s-th powers. We prove mainly here that for each integer $r \geqslant 0$, the set of integers which have exactly r representations as sum of s terms of this random sequence has almost surely a positive density. Moreover, these densities form a Poisson distribution.

On s'intéresse ici à l'étude de la répartition des sommes de deux carrés, trois cubes, quatre bicarrés, etc. Pour ce qui est des carrés, il est bien connu que le nombre d'entiers inférieurs ou égaux à x qui sont représentables comme somme de deux carrés est d'un ordre de grandeur égal à $x/\sqrt{\log x}$. Ceci implique en particulier que ces entiers forment une suite de densité nulle bien qu'il soit facile de voir qu'en moyenne chaque entier admet $\pi/4$ représentations. Ce fait étrange n'est pas dû à la trop grande rareté des carrés mais plutôt au fait que les sommes de deux carrés sont en quelque sorte trop régulièrement distribuées.

A partir des sommes de trois cubes, le problème reste ouvert; deux conjectures s'affrontent, celle donnant à ces sommes, par analogie aux carrés, une densité nulle (cf. P. Barrucand [2]) et celle leur donnant au contraire une densité positive (cf. C. Hooley [6]).

En 1960, P. Erdős et A. Rényi en construisant dans [4] des suites aléatoires d'entiers modélisant la suite des carrés (et plus généralement celle des puissances s-ièmes) montrent entre autres que l'ensemble des entiers admettant au moins une représentation comme somme de deux pseudo-carrés est presque sûrement de densité positive.

Plus précisément, en 1965 A.O.L. Atkin [1] démontre l'existence d'une suite de pseudo-carrés (b_ν) vérifiant $|b_\nu - \nu^2| \leqslant c \log \nu$ pour laquelle la suite constituée des sommes de deux termes b_ν est de densité positive.

P. Erdős et A. Rényi annoncent également dans [4] une généralisation de leurs résultats au cas des puissances supérieures mais sans en donner pour autant de preuve explicite. Malheureusement, il se trouve que leur démonstration pour le cas des carrés comporte une lacune technique sérieuse, qui nécessitera une reprise longue et détaillée du problème réalisée plus tard par H. Halberstam et K. F. Roth dans [5]. De plus, à partir des cubes, l'arrivée de nouvelles difficultés, relatives à l'indépendance des variables aléatoires considérées, laissait en suspens la validité des résultats annoncés.

En utilisant des inégalités élémentaires de corrélation que nous établissons en appendice, nous démontrons ici les résultats annoncés par Erdős et Rényi.

Dans la première partie, on rappelle le mode de construction des suites aléatoires d'entiers employée par P. Erdős et A. Rényi puis on expose dans la seconde les principaux lemmes utilisés par la suite. La partie 3 est consacrée au théorème sur la convergence en loi de la variable aléatoire R_n égale au nombre de représentations de l'entier n tandis que la partie 4 établit les résultats de densité pour les suites d'entiers admettant exactement r représentations ($r \geqslant 0$). La dernière partie est simplement la loi forte des grands nombres pour la variable aléatoire R_n.

NOTATIONS:

Dans tout ce qui suit s désignera un entier supérieur ou égal à 2 et r un entier positif ou nul.

Pour deux fonctions arithmétiques f et g à valeurs réelles (g positive), les notations

$$f = O(g) \quad \text{ou} \quad f \ll g,$$

signifient qu'il existe une constante C telle que $|f| \leqslant Cg$. Sans précision supplémentaire, la constante sera considérée comme absolue. Si elle dépend par exemple d'un paramètre k, on notera $f = O_k(g)$ ou encore $f \ll_k g$.

On utilisera les notations classiques suivantes: $P(A)$ désignera la probabilité de l'événement A; $\overline{A}$ désignera l'événement complémentaire de A; pour une variable aléatoire ξ, $E(\xi)$ désignera l'espérance mathématique de ξ et $V(\xi)$ sa variance.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier vivement le professeur J.-M. Deshouillers du laboratoire de Mathématiques Stochastiques de l'Université Bordeaux II pour ses nombreux conseils et ses encouragements.

1. Construction de suites aléatoires

Nous reprenons tout d'abord ici la construction décrite par Erdős et Rényi dans [4] ainsi que les premiers résultats qui en découlent. On se donne une suite $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ de variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ par la suite de probabilités $(\alpha_n)_{n \geqslant 1}$ grâce aux relations

$$P(\xi_n = 1) = \alpha_n \quad \text{et} \quad P(\xi_n = 0) = 1 - \alpha_n.$$

On prend ici $\alpha_n = 1/(sn^{1-1/s})$. En effet, pour un entier n situé entre N^s et $(N+1)^s$, la probabilité d'être une puissance s-ième est approximativement $1/((N+1)^s - N^s)$, ce qui est équivalent lorsque n tend vers l'infini à $1/(sN^{s-1})$, soit encore à $1/(sn^{1-1/s})$ puisque $N = [n^{1/s}]$.

A chaque épreuve, la suite $(\xi_n(\omega))_{n\geqslant 1}$ $(\omega \in \Omega)$, est une suite composée de 0 et de 1 et on obtient alors une suite aléatoire d'entiers notée $(\nu_l)_{l\geqslant 1}$ en prenant successivement en ordre croissant les entiers n tels que $\xi_n = 1$. On a donc

$$1 \leqslant \nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_l < \cdots,$$

et

$$\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{\nu_l} = l \quad \text{pour tout } \ l \geqslant 1. \tag{1}$$

On peut alors considérer l'application X de Ω dans l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites strictement croissantes d'entiers naturels non nuls qui à $\omega \in \Omega$ associe la suite (ν_l) construite au-dessus. Cela permet de munir $\mathcal{S}$ d'une mesure de probabilité en prenant la mesure image de la mesure P par X. Cette mesure est caractérisée par le fait que la probabilité qu'une suite de $\mathcal{S}$ prise au hasard contienne l'entier n vaut α_n.

La suite aléatoire $(\nu_l)_{l\geqslant 1}$ est censée modéliser la suite des puissances s-iémes, vérifions-le. On a en premier lieu la proposition suivante.

PROPOSITION 1. *Presque sûrement, la suite (ν_l) est infinie.*

Preuve. Par le Lemme de Borel–Cantelli.

On note E_i l'événement $\{\xi_i = 1\}$. Les événements E_i sont mutuellement indépendants. On a

$$\forall i \geqslant 1, \ \ P(E_i) = \alpha_i \quad \text{et} \quad \sum_{i\geqslant 1} P(E_i) = +\infty.$$

Donc presque sûrement, un nombre infini d'événements E_i sont réalisés simultanément. □

En second lieu, en notant $A(n) = \Sigma_{j=1}^n \alpha_j$, on a plus précisément le résultat suivant.

PROPOSITION 2. *Presque sûrement,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{A(n)} = 1.$$

Preuve. Cela résulte de la variante suivante de la loi forte des grands nombres (cf [5] Ch. III Théorème 11 ou [8] Ch. VII Ex. 17).

THÉORÈME. *Soit $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, des variables aléatoires mutuellement indépendantes d'espérance $M_n = E(\xi_n) > 0$ et d'écart-type $D_n = D(\xi_n)$, si les deux conditions,*

$$\text{(i)} \sum_{n\geqslant 1} M_n = +\infty, \quad \text{et} \quad \text{(ii)} \sum_{n\geqslant 1} \frac{D_n^2}{(\sum_{j=1}^n M_j)^2} < +\infty,$$

sont vérifiées, alors presque sûrement

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sum_{j=1}^n \xi_j}{\sum_{j=1}^n M_j} \right) = 1.$$

On a en effet ici,

$$M_n = \alpha_n = (sn^{1-1/s})^{-1} > 0,$$
$$\sum_{n\geqslant 1} \alpha_n = +\infty, \quad D_n^2 = \alpha_n(1-\alpha_n) \sim \alpha_n,$$
$$\text{et} \quad A(n) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \sim n^{1/s}.$$

D'où,

$$\frac{D_n^2}{A(n)^2} \sim (sn^{1+1/s})^{-1}, \quad \text{et donc} \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{D_n^2}{A(n)^2} < +\infty.$$

Il en résulte que $\left(\frac{\sum_{j=1}^n \xi_j}{A(n)}\right)$ converge presque sûrement vers 1, c'est à dire, presque sûrement, $\sum_{j=1}^n \xi_j \sim A(n)$, ce qui achève la preuve de la Proposition 2. □

En prenant $n = \nu_l$ et en utilisant (1), on a presque sûrement $l \sim A(\nu_l)$ ou encore, $l \sim (\nu_l)^{1/s}$ et finalement, $\nu_l \sim l^s$.

La suite (ν_l) est bien ainsi, au sens de l'équivalence, une suite de pseudo-puissances s-ièmes.

2. Lemmes préliminaires

Nous présentons ici les résultats techniques dont nous aurons besoin au cours de cette étude. Voici d'abord deux lemmes de probabilités.

En premier lieu, des inégalités de corrélation spécialement établies pour la circonstance mais en fait assez générales. La démonstration est donnée en appendice.

LEMME 1. *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé, et $E_1, E_2, \ldots, E_N$ des événements mutuellement indépendants. On considére une famille $A_1, A_2, \ldots, A_T$ et une famille*

$B_1, B_2, \ldots, B_K$ d'événements qui sont chacun une intersection d'éléments de la famille $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant N}$. Alors, on a les deux encadrements suivants

$$\text{(i)}\quad 0 \leqslant P\left(\bigcap_{t=1}^{T} \overline{A_t}\right) - \prod_{t=1}^{T} P(\overline{A_t}) \leqslant \sum_{1 \leqslant t < t' \leqslant T} P(A_t \cap A_{t'}) - P(A_t)P(A_{t'}),$$

$$\text{(ii)}\quad 0 \leqslant P\left(\bigcap_{t=1}^{T} \overline{A_t} \cap \bigcap_{k=1}^{K} \overline{B_k}\right) - P\left(\bigcap_{t=1}^{T} \overline{A_t}\right) P\left(\bigcap_{k=1}^{K} \overline{B_k}\right) \leqslant \sum_{\substack{1 \leqslant t \leqslant T \\ 1 \leqslant k \leqslant K}} P(A_t \cap B_k) - P(A_t)P(B_k).$$

En second lieu, voici un résultat qui donne des conditions suffisantes pour obtenir la loi forte des grands nombres pour une suite de variables aléatoires positives. Il apparaît implicitement dans [4] (preuve du Théorème 2), on trouve également sa démonstration dans [5] (Ch III Lemma 34).

LEMME 2. *Soit $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires positives. On considère la suite de variables aléatoires $(\zeta_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \xi_k)_{N \geqslant 1}$. Si les deux conditions suivantes sont satisfaites*

$$\text{(i)}\quad \lim_{n \to \infty} E(\xi_n) = M,$$

$$\text{(ii)}\quad V(\zeta_N) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{N^\delta}\right) \quad \textit{avec } \delta > 0,$$

alors la suite (ζ_N) converge presque sûrement vers M.

Le prochain lemme présente des estimations de différentes sommes multiples sur les probabilités α_i (définies en 1.) qui interviendront à plusieurs reprises par la suite. Il découle en fait de l'utilisation à répétition de l'inégalité suivante.

Pour tous réels β, γ, avec $0 < \beta, \gamma < 1$, on a

$$\sum_{h=1}^{N-1} \frac{1}{h^\beta (N-h)^\gamma} \ll_{\beta,\gamma} \frac{1}{N^{\beta+\gamma-1}}. \tag{2}$$

Cette inégalité se démontre aisément par une comparaison classique entre somme et intégrale en utilisant les variations sur]0,1[de la fonction associée. (cf. aussi [9]

Lemma 2.9)

LEMME 3.

(i) *Pour* $1 \leqslant k \leqslant s$ *et* $1 \leqslant l \leqslant s-1$,

$$S_k^l(n) := \sum_{\substack{1 \leqslant h_1 < \cdots < h_k \leqslant n \\ h_1 + \cdots + h_k = n}} \frac{1}{(h_1 \ldots h_{k-1})^{1-1/s} h_k^{l/s}} \ll_{k,l,s} \frac{1}{n^{\frac{l-k+1}{s}}};$$

(ii) *pour* $k = s$ *et* $l = s-1$, *on a plus précisément*

$$S_s^{s-1}(n) = \sum_{\substack{1 \leqslant h_1 < \cdots < h_s \leqslant n \\ h_1 + \cdots + h_s = n}} \frac{1}{(h_1 \ldots h_s)^{1-1/s}} \to \frac{\Gamma\left(\frac{1}{s}\right)^s}{s!} \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Preuve du Lemme 3.

★ Pour établir (i):

On supprime d'abord par majoration la condition de croissance sur les h_i puis la somme se décompose en $(k-1)$ sommes successives de la façon suivante

$$S_k^l(n) \leqslant \sum_{h_1=1}^{n-(k-1)} \frac{1}{(h_1)^{1-1/s}} \sum_{h_2=1}^{n-h_1-(k-2)} \frac{1}{(h_2)^{1-1/s}} \cdots$$

$$\cdots \sum_{h_{k-1}=1}^{n-h_1-\cdots-h_{k-2}-1} \frac{1}{h_{k-1}^{1-1/s}(n-h_1-\cdots-h_{k-1})^{l/s}}.$$

La dernière somme se majore avec l'inégalité (2). On obtient une majoration à une constante près en

$$\frac{1}{(n-h_1-\cdots-h_{k-2})^{(l-1)/s}}.$$

On itère à l'aide de (2) la même majoration jusqu'à la dernière somme sur h_1, ce qui produit finalement un terme en

$$\frac{1}{n^{(l-k+1)/s}}.$$

★ Pour établir (ii):

On peut en premier lieu montrer en utilisant à nouveau l'inégalité (2) à répétition que

$$\begin{aligned} S_s^{s-1}(n) &= \frac{1}{s!} \sum_{\substack{1\leqslant h_1,\dots,h_s\leqslant n \\ h_1+\dots+h_s=n}} \frac{1}{(h_1\dots h_s)^{1-1/s}} + O_s\left(\frac{1}{n^{1/s}}\right) \\ &= \frac{1}{s!} \sum_{\substack{1\leqslant h_1,\dots,h_{s-1}\leqslant n \\ h_1+\dots+h_{s-1}<n}} \frac{1}{(h_1\dots h_{s-1}(n-h_1-\dots-h_{s-1}))^{1-1/s}} \\ &\quad + O_s\left(\frac{1}{n^{1/s}}\right). \end{aligned}$$

On relie ensuite cette somme à une intégrale de Dirichlet notée I. On a

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{1\leqslant h_1,\dots,h_{s-1}\leqslant n \\ h_1+\dots+h_{s-1}<n}} \frac{1}{(h_1\cdots h_{s-1}(n-h_1-\dots-h_{s-1}))^{1-1/s}} \\ &= \underbrace{\int\cdots\int_D \frac{\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_{s-1}}{(x_1\cdots x_{s-1}(1-x_1-\dots-x_{s-1}))^{1-1/s}}}_{I}, \end{aligned}$$

où D est le domaine d'intégration défini par

$$D = \{(x_1,\dots,x_{s-1}) \in \mathbb{R}^{s-1}, 0 < x_1,\dots,x_{s-1} < 1, x_1+\dots+x_{s-1} < 1\}.$$

Il en résulte que

$$\lim_{n\to\infty} S_s^{s-1}(n) = \frac{1}{s!} I.$$

L'intégrale I s'exprime à l'aide de la fonction Gamma grâce à la formule de calcul suivante valable pour une fonction continue f sur le domaine D identique au précédent et des coefficients $\beta_i > 0$.

$$\begin{aligned} &\int\cdots\int_D f(x_1+x_2+\dots+x_k) x_1^{\beta_1-1} x_2^{\beta_2-1}\dots x_k^{\beta_k-1}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\dots\mathrm{d}x_k \\ &= \frac{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\dots\Gamma(\beta_k)}{\Gamma(\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_k)} \int_0^1 f(x) x^{\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_k-1}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Ceci donne ici

$$\begin{aligned} I &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{s}\right)^{s-1}}{\Gamma\left(\frac{s-1}{s}\right)} \int_0^1 x^{-(1/s)}(1-x)^{(1/s)-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{s}\right)^{s-1}}{\Gamma\left(\frac{s-1}{s}\right)} B\left(1-\frac{1}{s},\frac{1}{s}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{s}\right)^{s}, \end{aligned}$$

où $B(x,y)$ est la fonction Bêta d'Euler. Ceci achève la preuve de l'affirmation (ii) du Lemme 3. $\square$

Enfin pour terminer, citons un lemme combinatoire élémentaire dont on pourra trouver la démonstration dans [5] (Ch. III Lemma 13).

LEMME 4. *Soient $a_1,\dots,a_N$, N nombres réels positifs, alors pour tout entier $r, 1 \leqslant r \leqslant N$, on a*

$$\frac{\left(\sum_{k=1}^N a_k\right)^r}{r!}\left(1-\frac{\binom{r}{2}\sum_{k=1}^N a_k^2}{\left(\sum_{k=1}^N a_k\right)^2}\right)$$
$$\leqslant \sum_{1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_r\leqslant N} a_{k_1}a_{k_2}\dots a_{k_r} \leqslant \frac{\left(\sum_{k=1}^N a_k\right)^r}{r!}.$$

3. Convergence en loi du nombre de représentations

Soit R_n la variable aléatoire égale au nombre de représentations de l'entier n sous la forme

$$n=\nu_{l_1}+\nu_{l_2}+\cdots+\nu_{l_s} \quad \text{avec} \quad 1\leqslant l_1<l_2<\cdots<l_s, \tag{3}$$

où $(\nu_l)_{l\geqslant 1}$ est une suite aléatoire d'entiers construite selon la méthode exposée dans la première partie à l'aide d'une suite de variables aléatoires $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ et d'une suite de probabilités $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$.

REMARQUE. On considère ici le nombre de représentations où les termes de la somme sont ordonnés et tous distincts. Il sera facile de voir à l'issue de cette étude que le nombre de représentations en sommes ordonnées mais avec égalités possibles entre les sommants diffère en fait peu de R_n et qu'il aura en conséquence les mêmes propriétés. On s'intéressera donc ici exclusivement à la variable R_n pour laquelle les calculs sont beaucoup plus simples.

On a le résultat suivant concernant la loi de R_n.

THÉORÈME 1. *La suite de variables aléatoires $(R_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre $\lambda=\Gamma(\frac{1}{s})^s/(s^s s!)$.*

Preuve du Théorème 1. On note tout d'abord que R_n s'exprime sous la forme

$$R_n=\sum_{\underline{h}=(h_1,\dots,h_s)\in\mathcal{H}} \xi_{h_1}\cdots\xi_{h_s}$$

où

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(n) = \{\underline{h} = (h_1, \dots, h_s),\ 1 \leqslant h_1 < \dots < h_s \leqslant n,\\ h_1 + \dots + h_s = n\}.$$

Introduisons les différentes notations suivantes

$$\xi_{\underline{h}} = \xi_{h_1} \dots \xi_{h_s}, \quad A_{\underline{h}} \text{ l'événement } \{\xi_{\underline{h}} = 1\},\\ \text{et} \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}(n) = \{A_{\underline{h}}, \underline{h} \in \mathcal{H}(n)\}.$$

La lettre A désignera toujours dans ce qui suit un élément quelconque de $\mathcal{A}$.

REMARQUE. Pour $\underline{h} = (h_1, \dots, h_s) \in \mathcal{H}$, on a $P(A_{\underline{h}}) = \alpha_{h_1} \dots \alpha_{h_s}$. En conséquence, on a toujours $P(A \cap A') \geqslant P(A)P(A')$ pour tous A, A' éléments de $\mathcal{A}$.

En notant $P_{[r]} := P(R_n = r)$ pour $r \geqslant 0$, on a

$$P_{[r]} = \sum_{A_1, A_2, \dots, A_r} P\left(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_r \cap \bigcap_{A \neq A_1, \dots, A_r} \overline{A}\right),$$

où la sommation porte sur toutes les combinaisons à r éléments de $\mathcal{A}$.

Par analogie, définissons tout de suite

$$Q_{[r]} := \sum_{A_1, A_2, \dots, A_r} P(A_1)P(A_2)\dots P(A_r) \prod_{A \neq A_1, \dots, A_r} P(\overline{A}) \tag{4}$$

ce qui correspondrait à la valeur de $P_{[r]}$ si les événements A de $\mathcal{A}$ étaient mutuellement indépendants.

On note encore $\mu(n)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire R_n,

$$\mu(n) = E(R_n) = \sum_{\underline{h} \in \mathcal{H}} E(\xi_{\underline{h}}) = \sum_{\underline{h} \in \mathcal{H}} \alpha_{\underline{h}} = \sum_{A \in \mathcal{A}} P(A).$$

On constate rapidement que les événements A de $\mathcal{A}$ ne sont pas indépendants car deux s-uplets différents $\underline{h}$ et $\underline{h}'$ peuvent bien sûr avoir des éléments en commun dès que $s \geqslant 3$. C'est bien d'ailleurs là la principale difficulté qui justifie la reprise détaillée dans cet article des travaux d'Erdős et Rényi. Cependant, la dépendance qui en résulte est en fait faible et on pourra considérer les événements comme étant, en un certain sens, quasi-indépendants. En conséquence, la méthode consiste à se ramener au cas de l'indépendance pour lequel les calculs sont alors considérablement simplifiés en s'assurant que l'erreur commise est en fait petite.

Il s'agit pour cela d'estimer $|P_{[r]} - Q_{[r]}|$, pour $r \geqslant 0$ fixé. On introduit à cet effet, pour $r \geqslant 1$, les quantités

$$\Delta_r(n) := \sum_{A_1,\ldots,A_r} P(A_1 \cap \cdots \cap A_r) - P(A_1)\ldots P(A_r),$$

où la sommation porte à chaque fois sur toutes les combinaisons à r éléments de $\mathcal{A}$.

En particulier, $\Delta_1(n) = 0$ et

$$\Delta_2(n) = \sum_{A_1,A_2} P(A_1 \cap A_2) - P(A_1)P(A_2).$$

On montrera un peu plus loin que ces quantités qui sont positives ou nulles (cf. remarque précédente) sont petites.

★ Majoration de $|P_{[r]} - Q_{[r]}|$

Pour estimer la différence $|P_{[r]} - Q_{[r]}|$, nous allons utiliser les inégalités de corrélation introduites dans le Lemme 1.

Pour $r = 0$, on obtient directement un encadrement de $P_{[0]} - Q_{[0]}$ à partir de l'encadrement (i) du Lemme 1

$$0 \leqslant P_{[0]} - Q_{[0]} \leqslant \Delta_2(n). \tag{5}$$

Pour $r \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} P_{[r]} - Q_{[r]} = \sum_{A_1,\ldots,A_r} \Bigg\{ P\Bigg(A_1 \cap \cdots \cap A_r \cap \bigcap_{A \neq A_1,\ldots,A_r} \overline{A} \Bigg) \\ - P(A_1)\ldots P(A_r) \prod_{A \neq A_1,\ldots,A_r} P(\overline{A}) \Bigg\}. \end{aligned}$$

Pour chaque combinaison $\{A_1,\ldots,A_r\}$ à r éléments de $\mathcal{A}$, on peut décomposer l'expression précédente en une somme $W_1 + W_2 + W_3$ où

$$\begin{aligned} W_1 &:= P\Bigg(A_1 \cap \cdots \cap A_r \cap \bigcap_{A \neq A_1,\ldots,A_r} \overline{A} \Bigg) \\ &\quad - P(A_1 \cap \cdots \cap A_r) P\Bigg(\bigcap_{A \neq A_1,\ldots,A_r} \overline{A} \Bigg), \\ W_2 &:= P\Bigg(\bigcap_{A \neq A_1,\ldots,A_r} \overline{A} \Bigg) (P(A_1 \cap \cdots \cap A_r) - P(A_1)\ldots P(A_r)), \end{aligned}$$

et

$$W_3 := P(A_1)\dots P(A_r)\left(P\left(\bigcap_{A\neq A_1,\dots,A_r}\overline{A}\right) - \prod_{A\neq A_1,\dots,A_r} P(\overline{A})\right).$$

La première différence $W_1 = W_1(A_1,\dots,A_r)$ se majore grâce à l'encadrement (ii) du Lemme 1 (en prenant T ou $K=1$),

$$|W_1| \leqslant \sum_{A\neq A_1,\dots,A_r} P(A_1\cap\dots\cap A_r\cap A) - P(A_1\cap\dots\cap A_r)P(A).$$

On note tout de suite qu'en sommant sur toutes les combinaisons $\{A_1,\dots,A_r\}$, on obtient

$$\sum_{A_1,\dots,A_r} |W_1(A_1,\dots,A_r)| \leqslant \sum_{A_1,\dots,A_r}\sum_{A\neq A_1,\dots,A_r} \{P(A_1\cap\dots\cap A_r\cap A) \\ -P(A_1\cap\dots\cap A_r)P(A)\} \leqslant (r+1)\Delta_{r+1}(n).$$

Pour la somme de la seconde différence $W_2 = W_2(A_1,\dots,A_r)$, on majore comme suit

$$0 \leqslant \sum_{A_1,\dots,A_r} W_2(A_1,\dots,A_r) \leqslant \sum_{A_1,\dots,A_r} P(A_1\cap\dots\cap A_r) \\ -P(A_1)\dots P(A_r) = \Delta_r(n).$$

Enfin, la somme de la dernière différence $W_3 = W_3(A_1,\dots,A_r)$ se majore grâce à l'encadrement (i) du Lemme 1 et à l'inégalité de droite du Lemme 4,

$$0 \leqslant \sum_{A_1,\dots,A_r} W_3(A_1,\dots,A_r) \leqslant \sum_{A_1,\dots,A_r} P(A_1)\dots P(A_r)\Delta_2(n) \\ \leqslant \Delta_2(n)\frac{(\sum_A P(A))^r}{r!} = \Delta_2(n)\frac{\mu(n)^r}{r!}.$$

Finalement, on obtient pour $r \geqslant 1$

$$|P_{[r]} - Q_{[r]}| \leqslant (r+1)\Delta_{r+1}(n) + \Delta_r(n) + \Delta_2(n)\frac{\mu(n)^r}{r!}. \tag{6}$$

★ Evaluation de $\mu(n)$ et $\Delta_r(n)$

C'est l'objet du lemme suivant.

LEMME 5. *On a les trois propriétés suivantes*

(i) $\mu(n) \to \lambda$ *lorsque* $n \to \infty$, *où* $\lambda = \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{s}\right)^s}{s^s s!}$,

(ii) *pour tout événement* B *fixé du type* $\{\xi_{n_1} = \xi_{n_2} = \cdots = \xi_{n_k} = 1\}$, *on a*

$$\mu^B(n) := E(R_n \mid B) = \sum_{A \in \mathcal{A}} P(A \mid B) \ll_{k,s} 1,$$

(iii) $\Delta_r(n) = O_{r,s}\left(\dfrac{1}{n^{1/s}}\right)$ *pour* $r \geqslant 2$.

Preuve du Lemme 5.

★ Pour établir (i):

On a

$$\mu(n) = \sum_{\underline{h} \in \mathcal{H}} \alpha_{\underline{h}} = \sum_{\substack{1 \leqslant h_1 < \cdots < h_s \leqslant n \\ h_1 + \cdots + h_s = n}} \frac{1}{s^s (h_1 \ldots h_s)^{1-1/s}}.$$

Or, la seconde partie du Lemme 3 établit précisément que cette dernière somme tend vers $\lambda = \Gamma(\frac{1}{s})^s/(s^s s!)$.

★ Pour établir (ii):

Soit B un événement fixé, $B = \{\xi_{n_1} = \xi_{n_2} = \cdots = \xi_{n_k} = 1\}$ $(n_1 < n_2 < \cdots < n_k)$, il s'agit de montrer que l'espérance de R_n sachant B est bornée par une constante qui ne dépend que du nombre de variables k. En effet, intuitivement, lorsque l'événement B est connu, cela revient à remplacer dans le calcul des $P(A)$ pour $A \in \mathcal{A}$, chaque α_{n_i} par 1. Comme il n'y en a qu'un nombre fini k, le nombre d'événements A dépendants de B sera petit par rapport au nombre total d'événements, cela ne changera pas l'ordre de grandeur de la somme qui aura même limite que $\mu(n)$ et sera donc bornée. Démontrons cela précisément.

Si $k = 0$, alors $\mu^B(n) = \mu(n)$, or on sait déjà d'après l'assertion (i) que la somme $\mu(n)$ est bornée puisqu'elle converge vers λ.

Si $k \geqslant 1$, soit n un entier quelconque, on a

$$\mu^B(n) = \sum_{A \not\sim B} P(A|B) + \sum_{A \sim B} P(A|B),$$

où $A \sim B$ signifie que A et B sont dépendants.

Or, pour la première somme, pour $A \not\sim B$, on a $P(A|B) = P(A)$ et donc

$$\sum_{A \not\sim B} P(A|B) = \sum_{A \not\sim B} P(A) \leqslant \sum_{A} P(A) = \mu(n) \ll_s 1.$$

Ensuite, pour la seconde somme, il correspond à chaque événement A tel que $A \sim B$, un $\underline{h} = (h_1, \ldots, h_s)$ avec $1 \leqslant h_1 < \cdots < h_s \leqslant n$ et $h_1 + \cdots + h_s = n$, qui a au moins un élément en commun avec les $(n_j)_{1 \leqslant j \leqslant k}$.

Soit t le nombre d'éléments communs entre les $(h_i)_{1\leqslant i\leqslant s}$ et les $(n_j)_{1\leqslant j\leqslant k}$. On sait que $1 \leqslant t \leqslant s$. Fixons t et pour simplifier supposons que ces t éléments communs soit en tête dans $\underline{h}$ et que ce soit également précisément $n_1, \dots, n_t$. C'est à dire que l'on a $\underline{h} = (n_1, \dots, n_t, h_{t+1}, \dots, h_s)$. Sommons maintenant sur tous les événements A répondant à ce cas-là.

Pour $t < s$, on obtient une somme que l'on sait majorer grâce au Lemme 3

$$\sum_{\substack{1\leqslant h_{t+1}<\cdots<h_s\leqslant n \\ h_{t+1}+\cdots+h_s=n-n_1-\cdots-n_t}} \alpha_{h_{t+1}} \cdots \alpha_{h_s}$$
$$= \frac{1}{s^{s-t}} S_{s-t}^{s-1}(n - n_1 - \cdots - n_t) \ll_{t,s} \frac{1}{(n - n_1 - \cdots - n_t)^{t/s}} \ll_{t,s} 1.$$

Pour $t = s$, il y a au plus un seul événement A qui corresponde et on a alors $P(A|B) = 1$ (dès que n est assez grand, on a en fait $t < s$).

Il reste maintenant pour chaque t, à tenir compte du choix des t valeurs communes prises parmi les (n_j), puis du choix des places de ces valeurs dans $\underline{h}$, ce qui fait intervenir des coefficients binômiaux ne dépendant que de k, t et s. Il faut ensuite sommer pour t variant de 1 à s. On voit au passage que la seconde somme tend en fait vers 0 quand n tend vers l'infini.

Il résulte clairement de tout ceci l'existence d'une borne pour $\mu^B(n)$ qui ne dépend que de k.

REMARQUE. La majoration (ii) se généralise en fait aux sommes sur les combinaisons à r événements $(r \geqslant 1)$. On a pour tout événement B fixé

$$\sum_{A_1,\dots,A_r} P(A_1 \cap \cdots \cap A_r|B) \ll_{k,r,s} 1. \tag{7}$$

En effet,

$$\sum_{A_1,\dots,A_r} P(A_1 \cap \cdots \cap A_r|B) \leqslant \sum_{A_1} P(A_1|B) \sum_{A_2} P(A_2|A_1 \cap B)$$
$$\cdots \sum_{A_r} P(A_r|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{r-1} \cap B).$$

Le nombre d'événements $\{\xi_h = 1\}$ par lesquels on conditionne est majoré dans tous les cas par $(r-1)s + k$. Il suffit donc d'appliquer r fois l'assertion (ii). C'est en fait la majoration (7) que nous appliquerons plusieurs fois dans ce que suit.

★ Pour établir (iii):

Supposons tout d'abord que $r = 2$. On peut en fait dans $\Delta_2(n)$ se restreindre aux paires d'événements $\{A_1, A_2\}$ qui sont dépendants puis négliger les termes $P(A_1)P(A_2)$. On a

$$\begin{aligned}\Delta_2(n) &= \sum_{A_1,A_2} P(A_1 \cap A_2) - P(A_1)P(A_2)\\ &\leqslant \Delta_2'(n) := \sum_{A_1 \sim A_2} P(A_1 \cap A_2),\end{aligned}$$

où $A_1 \sim A_2$ signifie que A_1 et A_2 sont dépendants. On s'intéressera maintenant uniquement à $\Delta_2'(n)$.

Considérons deux événements différents A_1 et A_2 de $\mathcal{A}$, dépendants, c'est à dire en fait, deux s-uplets différents $\underline{h}$, $\underline{h}'$ ayant au moins un élément en commun. Supposons qu'ils aient exactement t éléments communs, $1 \leqslant t \leqslant s-2$, (si $t = s-1$, alors par la contrainte de la somme égale à n, on aura $\underline{h} = \underline{h}'$), et précisément pour simplifier dans un premier temps, quitte à effectuer ensuite des permutations, que ce soit les t premiers. On a donc explicitement

$$\underline{h} = (h_1, \ldots, h_t, h_{t+1}, \ldots, h_s) \quad \text{et} \quad \underline{h}' = (h_1, \ldots, h_t, h_{t+1}', \ldots, h_s'),$$

avec $h_j \neq h_k'$ pour $t + 1 \leqslant j, k \leqslant s$. Examinons alors la contribution totale relative à toutes les paires $\{\underline{h}, \underline{h}'\}$ d'éléments de $\mathcal{H}$ de cette forme dans $\Delta_2'(n)$. Cette contribution notée $W_t(n)$ peut être majorée à une constante près par

$$\sum_{\substack{1 \leqslant h_1 < \cdots < h_s \leqslant n \\ h_1 + \cdots + h_s = n \\ h_t < h_{t+1}' < \cdots < h_s' \leqslant n \\ h_{t+1}' + \cdots + h_s' = n - h_1 - \cdots - h_t}} \frac{1}{(h_1 \ldots h_t h_{t+1} \ldots h_s h_{t+1}' \ldots h_s')^{1-1/s}}.$$

On décompose la sommation générale en sommations successives sur les h_i et les h_j',

$$\begin{aligned}W_t(n) \ll_{t,s} &\sum_{\substack{1 \leqslant h_1 < \cdots < h_t < n \\ h_t < n - h_1 - \cdots - h_t}} \frac{1}{(h_1 \ldots h_t)^{1-1/s}} \sum_{\substack{h_t < h_{t+1} < \cdots < h_s \leqslant n \\ h_{t+1} + \cdots + h_s = n - h_1 - \cdots - h_t}} \\ &\times \frac{1}{(h_{t+1} \ldots h_s)^{1-1/s}} \sum_{\substack{h_t < h_{t+1}' < \cdots < h_s' \leqslant n \\ h_{t+1}' + \cdots + h_s' = n - h_1 - \cdots - h_t}} \frac{1}{(h_{t+1}' \ldots h_s')^{1-1/s}}.\end{aligned}$$

Les deux dernières sommes sont en fait identiques. Pour traiter ces sommes, on utilise les estimations (i) du Lemme 3. Avec les notations de ce lemme, les deux dernières sommes sont majorèes par $S_{s-t}^{s-1}(n - h_1 - \cdots - h_t)$. Ceci produit pour chaque somme une majoration en

$$\frac{1}{(n - h_1 - \cdots - h_t)^{t/s}}.$$

On arrive alors à la première somme

$$\sum_{\substack{1 \leqslant h_1 < \cdots < h_t < n \\ h_t < n - h_1 - \cdots - h_t}} \frac{1}{(h_1 \ldots h_t)^{1-1/s}(n - h_1 - \cdots - h_t)^{2t/s}}.$$

Pour pouvoir appliquer encore la partie (i) du Lemme 3, puisque $(s-2) \geqslant t \geqslant 1$, on minore grossièrement l'exposant $2t/s$ par $(t+1)/s$. La somme vaut alors en fait $S_{t+1}^{t+1}(n)$ et on obtient

$$W_t(n) \ll_{t,s} \frac{1}{n^{1/s}} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant t \leqslant s-2.$$

Il reste maintenant à regarder les cas où les t facteurs communs ne sont pas en première position dans $\underline{h}$ et $\underline{h}'$, mais cela ne fera qu'introduire un facteur binômial ne dépendant que de t et s dans $W_t(n)$. On fait varier ensuite t de 1 à $(s-2)$, ce qui ne change pas l'ordre de grandeur et donne finalement

$$\Delta_2'(n) = O_s\left(\frac{1}{n^{1/s}}\right).$$

On considère maintenant le cas où $r > 2$. Dans l'expression $\Delta_r(n)$, comme pour $\Delta_2(n)$, on ne conservera que les combinaisons d'événements qui contiennent au moins deux événements dépendants, on pourra alors négliger les termes égaux au produit des probabilités.

$$\begin{aligned} \Delta_r(n) &= \sum_{A_1, A_2, \ldots, A_r} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_r) - P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_r) \\ &\leqslant \sum_{A_1 \sim A_2} P(A_1 \cap A_2) \sum_{\substack{A_3, \ldots, A_r \\ A_3, \ldots, A_r \neq A_1, A_2}} P(A_3 \cap \cdots \cap A_r | A_1 \cap A_2). \end{aligned}$$

On utilise maintenant le fait que d'après la majoration (7) conséquence de l'assertion (ii) du lemme en cours, la dernière somme est majorée par une constante qui ne dépend que de r. En conséquence, on a

$$\Delta_r(n) \ll_{r,s} \Delta_2'(n).$$

Ceci achève la démonstration de l'assertion (iii) et donc celle du Lemme 5. □

Il résulte de (5), (6) et du Lemme 5 que

$$P_{[r]} = Q_{[r]} + O_{r,s}\left(\frac{1}{n^{1/s}}\right). \tag{8}$$

Nous pouvons maintenant à juste titre nous intéresser à $Q_{[r]}$, son évaluation se fait de façon classique en utilisant le Lemme 4. On a

$$Q_{[r]} = \sum_{\underline{h}^{(1)},\dots,\underline{h}^{(r)}\in\mathcal{H}} \alpha_{\underline{h}^{(1)}}\cdots\alpha_{\underline{h}^{(r)}} \prod_{\underline{h}\neq\underline{h}^{(1)},\dots,\underline{h}^{(r)}} (1-\alpha_{\underline{h}}),$$

où $\alpha_{\underline{h}} = \alpha_{h_1}\dots\alpha_{h_s}$ si $\underline{h} = (h_1,\dots,h_s)$.

★ Majoration de $Q_{[r]}$:

On utilise l'inégalité de droite du Lemme 4 et l'inégalité classique

$$1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-x} \quad \text{pour} \quad x \geqslant 0.$$

On a alors

$$\begin{aligned} Q_{[r]} &= \prod_{\underline{h}}(1-\alpha_{\underline{h}}) \sum_{\underline{h}^{(1)},\dots,\underline{h}^{(r)}} \frac{\alpha_{\underline{h}^{(1)}}\cdots\alpha_{\underline{h}^{(r)}}}{(1-\alpha_{\underline{h}^{(1)}})\cdots(1-\alpha_{\underline{h}^{(r)}})} \\ &\leqslant \frac{1}{r!}\left(\sum_{\underline{h}}\frac{\alpha_{\underline{h}}}{1-\alpha_{\underline{h}}}\right)^r \exp\left(-\sum_{\underline{h}}\alpha_{\underline{h}}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

★ Minoration de $Q_{[r]}$:

On utilise cette fois l'inégalité de gauche du Lemme 4 et l'autre inégalité classique

$$1 - x \geqslant \exp\left(-\frac{x}{1-x}\right) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Du coup,

$$\begin{aligned} Q_{[r]} &\geqslant \prod_{\underline{h}}(1-\alpha_{\underline{h}}) \sum_{\underline{h}^{(1)},\dots,\underline{h}^{(r)}} \alpha_{\underline{h}^{(1)}}\cdots\alpha_{\underline{h}^{(r)}} \\ &\geqslant \frac{1}{r!}\left(\sum_{\underline{h}}\alpha_{\underline{h}}\right)^r \left(1 - \frac{\binom{r}{2}\sum_{\underline{h}}\alpha_{\underline{h}}^2}{\left(\sum_{\underline{h}}\alpha_{\underline{h}}\right)^2}\right) \exp\left(-\sum_{\underline{h}}\frac{\alpha_{\underline{h}}}{1-\alpha_{\underline{h}}}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

★ Estimation de $\sum_{\underline{h}} \frac{\alpha_{\underline{h}}}{1-\alpha_{\underline{h}}}$:

On a

$$\sum_{\underline{h}} \alpha_{\underline{h}} \leqslant \sum_{\underline{h}} \frac{\alpha_{\underline{h}}}{1-\alpha_{\underline{h}}} \leqslant \frac{1}{(1-\sup_{\underline{h}} \alpha_{\underline{h}})} \sum_{\underline{h}} \alpha_{\underline{h}}.$$

Or

$$\sup_{\underline{h}} \alpha_{\underline{h}} = \sup_{\underline{h}=(h_1,\ldots,h_s)} \frac{1}{s^s (h_1 \ldots h_s)^{1-1/s}} = O_s\left(\frac{1}{n^{1-1/s}}\right),$$

puisque l'un des h_i est forcément supérieur à n/s.

Il en résulte que

$$\sum_{\underline{h}} \frac{\alpha_{\underline{h}}}{1-\alpha_{\underline{h}}} = \sum_{\underline{h}} \alpha_{\underline{h}} + O_s\left(\frac{1}{n^{1-1/s}}\right).$$

En reportant ceci dans la majoration (9) et la minoration (10) de $Q_{[r]}$ et en utilisant l'estimation (i) du Lemme 5, on obtient

$$Q_{[r]} = \frac{\lambda^r \mathrm{e}^{-\lambda}}{r!} + O_{r,s}\left(\frac{1}{n^{1-1/s}}\right),$$

et finalement à l'aide de l'égalité (8) reliant $P_{[r]}$ à $Q_{[r]}$

$$P(R_n = r) = \frac{\lambda^r \mathrm{e}^{-\lambda}}{r!} + O_{r,s}\left(\frac{1}{n^{1/s}}\right),$$

ce qui démontre le Théorème 1. □

4. Densité des entiers admettant r représentations

Après avoir démontré la convergence en loi de la variable aléatoire égale au nombre de représentations d'un entier, il s'agit maintenant d'étudier la répartition des entiers classés suivant leur nombre de représentations.

Soit r un entier positif ou nul, considérons l'ensemble noté S_r des entiers admettant exactement r représentations sous la forme (3). On a alors le théorème suivant.

THÉORÈME 2. *Presque sûrement l'ensemble S_r est de densité* $\mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^r}{r!}$.

En particulier,

COROLLAIRE. *La suite des entiers qui admettent au moins une représentation est presque sûrement de densité positive* $(1 - \mathrm{e}^{-\lambda})$.

La constante λ est bien sûr toujours celle définie au Théorème 1.

Preuve du Théorème 2. On introduit la variable aléatoire

$$\varepsilon_r(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } R_n = r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

puis la variable aléatoire

$$\zeta_r(N) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_r(n).$$

Il s'agit de montrer que pour tout $r \geqslant 0$, $\zeta_r(N)$ converge presque sûrement vers $\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^r}{r!}$ lorsque $N \to \infty$. Cela va découler du Lemme 2 énoncé dans les préliminaires. Il nous faut vérifier que la suite de variables aléatoires $(\varepsilon_r(n))$ satisfait les deux conditions de ce lemme.

La première condition se vérifie aisément car $E(\varepsilon_r(n)) = P(R_n = r)$ qui tend vers $\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^r}{r!}$ d'après le Théorème 1.

La seconde condition va nécessiter un résultat sur l'indépendance mutuelle des variables aléatoires $\varepsilon_r(n)$. Nous allons montrer précisément que

$$V(\zeta_r(N)) = O_{r,s}\left(\frac{1}{N^{1/s}}\right).$$

On a tout d'abord

$$\begin{aligned} &V(\zeta_r(N)) \\ &= E(\zeta_r^2(N)) - E(\zeta_r(N))^2 \\ &= \frac{1}{N^2}\left(\sum_{n=1}^{N} V(\varepsilon_r(n)) + 2\sum_{1\leqslant n<m\leqslant N} E(\varepsilon_r(n)\varepsilon_r(m)) - E(\varepsilon_r(n))E(\varepsilon_r(m))\right). \end{aligned} \tag{11}$$

La première somme de l'expression s'évalue facilement car d'après le Théorème 1,

$$V(\varepsilon_r(n)) = P(R_n = r)(1 - P(R_n = r)) = O_{r,s}(1),$$

donc

$$\frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N} V(\varepsilon_r(n)) = O_{r,s}\left(\frac{1}{N}\right). \tag{12}$$

La partie délicate est bien sûr l'estimation de la covariance de $\varepsilon_r(n)$ et $\varepsilon_r(m)$ pour $n < m$. On établit précisément le lemme suivant qui donne une estimation de l'indépendance des variables $\varepsilon_r(n)$ et $\varepsilon_r(m)$.

LEMME 6. *On a pour* $n < m$,

$$|E(\varepsilon_r(n)\varepsilon_r(m)) - E(\varepsilon_r(n))E(\varepsilon_r(m))| = O_{r,s}\left(\frac{1}{(m-n)^{1/s}}\right) + O_{r,s}\left(\frac{1}{n^{1/s}}\right).$$

Preuve du Lemme 6. Il s'agit de majorer la covariance des variables $\varepsilon_r(n)$ et $\varepsilon_r(m)$ qui vaut en fait

$$|P(R_n = R_m = r) - P(R_n = r)P(R_m = r)|. \tag{13}$$

On a

$$R_n = \sum_{\underline{h}\in\mathcal{H}(n)} \xi_{\underline{h}} \quad \text{et} \quad R_m = \sum_{\underline{h}'\in\mathcal{H}(m)} \xi_{\underline{h}'}.$$

Rappelons que pour tout entier n, $\mathcal{A}(n)$ désigne $\{A_{\underline{h}}, \underline{h} \in \mathcal{H}(n)\}$ et $\mathcal{H}(n)$ désigne $\{\underline{h} = (h_1, \dots, h_s), 1 \leqslant h_1 < \cdots < h_s \leqslant n, h_1 + \cdots + h_s = n\}$.

Dans tout ce qui suit, $\underline{h}$ désignera un élément de $\mathcal{H}(n)$ et $\underline{h}'$ un élément de $\mathcal{H}(m)$. De même, A désignera un élément de $\mathcal{A}(n)$ et A' un élément de $\mathcal{A}(m)$. On introduit à l'image de $\Delta_2(n)$ la quantité $\Delta(n,m) = \Sigma_{A\sim A'} P(A \cap A')$, où la somme porte sur toutes les paires $\{A, A'\}$, $A \in \mathcal{A}(n)$, $A' \in \mathcal{A}(m)$.

Nous allons établir de façon analogue au Lemme 5 la majoration

$$\Delta(n,m) = O_s\left(\frac{1}{(m-n)^{1/s}}\right). \tag{14}$$

On a en effet

$$\Delta(n,m) = \sum_{\underline{h}\sim\underline{h}'} P(A_{\underline{h}} \cap A_{\underline{h}'}),$$

où la relation $\underline{h} \sim \underline{h}'$ signifie que $\underline{h}$ et $\underline{h}'$ ont au moins un élément en commun. La méthode est identique à celle du Lemme 5. Supposons que $\underline{h}$ et $\underline{h}'$ aient exactement t éléments communs et précisément les t premiers, $1 \leqslant t \leqslant s-1$ (le cas $t = s$ est impossible par la contrainte de la somme égale respectivement à n et à m). On a donc explicitement

$$\underline{h} = (h_1, \dots, h_t, h_{t+1}, \dots, h_s) \quad \text{et} \quad \underline{h}' = (h_1, \dots, h_t, h'_{t+1}, \dots, h'_s),$$

avec $h_j \neq h'_k$ pour $t+1 \leqslant j, k \leqslant s$.

On examine alors la contribution totale relative à de telles paires $\{\underline{h}, \underline{h}'\}$ d'éléments respectifs de $\mathcal{H}(n)$ et $\mathcal{H}(m)$ dans la somme $\Delta(n,m)$. On obtient une première contribution notée $W_t(n,m)$ qui peut être majorée à une constante près comme suit

$$W_t(n) \ll_{t,s} \sum_{\substack{1\leqslant h_1<\cdots<h_s\leqslant n \\ h_1+\cdots+h_s=n \\ h_t<h'_{t+1}<\cdots<h'_s\leqslant m \\ h'_{t+1}+\cdots+h'_s=m-h_1-\cdots-h_t}} \frac{1}{(h_1\ldots h_t h_{t+1}\ldots h_s h'_{t+1}\ldots h'_s)^{1-1/s}}$$

$$= \sum_{\substack{1\leqslant h_1<\cdots<h_t\leqslant n \\ h_t<n-h_1-\cdots-h_t}} \frac{1}{(h_1\ldots h_t)^{1-1/s}} \sum_{\substack{h_t<h_{t+1}<\cdots<h_s\leqslant n \\ h_{t+1}+\cdots+h_s=n-h_1-\cdots-h_t}}$$

$$\times \frac{1}{(h_{t+1}\ldots h_s)^{1-1/s}} \sum_{\substack{h_t<h'_{t+1}<\cdots<h'_s\leqslant m \\ h'_{t+1}+\cdots+h'_s=m-h_1-\cdots-h_t}} \frac{1}{(h'_{t+1}\ldots h'_s)^{1-1/s}}.$$

Les deux dernières sommes se majorent de façon identique en suivant ce qui a déjà été fait au cours de la preuve de la partie (iii) du Lemme 5. Ceci produit une majoration en

$$\frac{1}{(n-h_1-\cdots-h_t)^{t/s}}\,\frac{1}{(m-h_1-\cdots-h_t)^{t/s}}.$$

On arrive alors à la somme

$$\sum_{\substack{1\leqslant h_1<\cdots<h_t\leqslant n \\ h_t<n-h_1-\cdots-h_t}} \frac{1}{(h_1\ldots h_t)^{1-1/s}(n-h_1-\cdots-h_t)^{t/s}(m-h_1-\cdots-h_t)^{t/s}}.$$

On minore maintenant grossièrement le dernier terme du dénominateur $(m-h_1-\cdots-h_t)^{t/s}$ par $(m-n)^{t/s}$. Ce terme se met alors en facteur devant la somme qui vaut alors en fait, avec les notations du Lemme 3, $S^t_{t+1}(n)$ et cette expression est bornée d'après ce lemme. On aboutit donc à la majoration

$$W_t(n,m) \ll_{t,s} \frac{1}{(m-n)^{t/s}} \quad \text{pour} \quad 1\leqslant t\leqslant s-1.$$

Encore une fois, le cas où les t facteurs communs ne sont pas en première position dans $\underline{h}$ et $\underline{h}'$, puis la sommation sur t de 1 à $(s-1)$ ne feront qu'introduire un facteur ne dépendant que de s qui ne changera donc pas l'ordre de grandeur de $\Delta(n,m)$. Ceci donne finalement en sommant toutes les contributions

$$\Delta(n,m) = O_s\left(\frac{1}{(m-n)^{1/s}}\right).$$

Revenons à l'estimation de la covariance (13) pour établir le Lemme 6. On a

$$
\begin{aligned}
&P(R_n = R_m = r)\\
&= P\left(\bigcup_{\substack{i_1<\cdots<i_r\\ k_1<\cdots<k_r}}\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_r}\cap\bigcap_{A\neq A_{i_1},\dots,A_{i_r}}\overline{A}\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.\cap A'_{k_1}\cap\cdots\cap A'_{k_r}\cap\bigcap_{A'\neq A'_{k_1},\dots,A'_{k_r}}\overline{A'}\right)\right),
\end{aligned}
$$

où la réunion porte sur toutes les combinaisons à r éléments de $\mathcal{A}(n)$ et toutes les combinaisons à r éléments de $\mathcal{A}(m)$. On a déjà

$$
\begin{aligned}
&P(R_n = r) = Q_{[r]}(n) + O_{r,s}\left(\frac{1}{n^{1/s}}\right)\\
&\text{et}\quad P(R_m = r) = Q_{[r]}(m) + O_{r,s}\left(\frac{1}{m^{1/s}}\right),
\end{aligned}
$$

où $Q_{[r]}(n)$ désigne la quantité introduite en (4). Du coup,

$$
\begin{aligned}
&P(R_n = R_m = r) - P(R_n = r)P(R_m = r)\\
&= P(R_n = R_m = r) - Q_{[r]}(n)Q_{[r]}(m) + O_{r,s}\left(\frac{1}{n^{1/s}}\right).
\end{aligned}
$$

Il suffit donc d'évaluer la différence $P(R_n = R_m = r) - Q_{[r]}(n)Q_{[r]}(m)$. On procède avec la même méthode qu'auparavant. Pour raccourcir les expressions, introduisons les notations suivantes: pour deux combinaisons $\{A_1,\dots,A_r\}$ et $\{A'_1,\dots,A'_r\}$ d'éléments respectifs de $\mathcal{A}(n)$ et $\mathcal{A}(m)$, on note

$$
\begin{aligned}
&A_{[1,r]} := A_1\cap\cdots\cap A_r \quad\text{et}\quad A'_{[1,r]} := A'_1\cap\cdots\cap A'_r,\\
&\bigcap_{[1,r]}\overline{A} := \bigcap_{A\neq A_1,\dots,A_r}\overline{A} \quad\text{et}\quad \bigcap_{[1,r]}\overline{A'} := \bigcap_{A'\neq A'_1,\dots,A'_r}\overline{A'},\\
&\prod_{[1,r]}P(\overline{A}) := \prod_{A\neq A_1,\dots,A_r}P(\overline{A}) \quad\text{et}\quad \prod_{[1,r]}P(\overline{A'}) := \prod_{A'\neq A'_1,\dots,A'_r}P(\overline{A'}).
\end{aligned}
$$

On a avec ces notations

$$
\begin{aligned}
&P(R_n = R_m = r) - Q_{[r]}(n)Q_{[r]}(m)\\
&= \sum_{\substack{A_1,\dots,A_r\\ A'_1,\dots,A'_r}}\left\{P\left(A_{[1,r]}\cap\bigcap_{[1,r]}\overline{A}\cap A'_{[1,r]}\cap\bigcap_{[1,r]}\overline{A'}\right)\right.
\end{aligned}
$$

$$-\prod_{i=1}^{r} P(A_i) \prod_{j=1}^{r} P(A'_j) \prod_{[1,r]} P(\overline{A}) \prod_{[1,r]} P(\overline{A}') \Bigg\} . \tag{15}$$

Pour chaque paire de combinaisons $\{A_1, \dots, A_r\}$ et $\{A'_1, \dots, A'_r\}$, l'expression à l'intérieur de la somme précédente se décompose en une somme $W_1 + W_2 + W_3$ où

$$\begin{aligned} W_1 &:= P\left(A_{[1,r]} \cap \bigcap_{[1,r]} \overline{A} \cap A'_{[1,r]} \cap \bigcap_{[1,r]} \overline{A}' \right) \\ &\quad -P(A_{[1,r]} \cap A'_{[1,r]}) P\left(\bigcap_{[1,r]} \overline{A} \cap \bigcap_{[1,r]} \overline{A}' \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2 &:= P\left(\bigcap_{[1,r]} \overline{A} \cap \bigcap_{[1,r]} \overline{A}' \right) \\ &\quad \times \left(P(A_{[1,r]} \cap A'_{[1,r]}) - \prod_{i=1}^{r} P(A_i) \prod_{j=1}^{r} P(A'_j) \right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} W_3 &:= \prod_{i=1}^{r} P(A_i) \prod_{j=1}^{r} P(A'_j) \\ &\quad \times \left(P\left(\bigcap_{[1,r]} \overline{A} \cap \bigcap_{[1,r]} \overline{A}' \right) - \prod_{[1,r]} P(\overline{A}) \prod_{[1,r]} P(\overline{A}') \right). \end{aligned}$$

La première différence $W_1 = W_1(A_1, \dots, A_r, A'_1, \dots, A'_r)$ se majore grâce à l'inégalité (ii) du Lemme 1 puis en sommant sur toutes les combinaisons, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{A_1,\dots,A_r \\ A'_1,\dots,A'_r}} |W_1(\,)| \leqslant \sum_{\substack{A_1,\dots,A_r \\ A'_1,\dots,A'_r}} \sum_{A} &\{P(A_{[1,r]} \cap A'_{[1,r]} \cap A) \\ &-P(A_{[1,r]} \cap A'_{[1,r]}) P(A)\} \\ + \sum_{\substack{A_1,\dots,A_r \\ A'_1,\dots,A'_r}} \sum_{A'} &\{P(A_{[1,r]} \cap A'_{[1,r]} \cap A') \\ &-P(A_{[1,r]} \cap A'_{[1,r]}) P(A')\}. \end{aligned}$$

La première somme se majore par

$$\begin{aligned}&\sum_{A,A_1,A\sim A_1} P(A\cap A_1)\sum_{\substack{A_2,\dots,A_r\\A'_1,\dots,A'_r}} P(A_{[2,r]}\cap A'_{[1,r]}|A\cap A_1)\\&+\sum_{A,A'_1,A\sim A'_1} P(A\cap A'_1)\sum_{\substack{A_1,\dots,A_r\\A'_2,\dots,A'_r}} P(A_{[1,r]}\cap A'_{[2,r]}|A\cap A'_1)\\&\ll_{r,s}\Delta'_2(n)+\Delta(n,m),\end{aligned}$$

car encore une fois on peut montrer grâce à la remarque qui suit la majoration (ii) du Lemme 5 que les sommes de probabilités conditionnelles qui interviennent sont bornées par une constante qui ne dépend que de r.

La seconde somme se traite de la même façon et on obtient

$$\sum |W_1(\ )| \ll_{r,s} \Delta'_2(n)+\Delta(n,m)+\Delta'_2(m). \tag{16}$$

La somme de la seconde différence $W_2 = W_2(A_1,\dots,A_r,A'_1,\dots,A'_r)$ se majore comme suit

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{A_1,\dots,A_r\\A'_1,\dots,A'_r}} |W_2(\ )| &\leqslant \sum_{\substack{A_1,\dots,A_r\\A'_1,\dots,A'_r}} P(A_{[1,r]}\cap A'_{[1,r]})-\prod_{i=1}^{r}P(A_i)\prod_{j=1}^{r}P(A'_j)\\&\leqslant \sum_{A_1,A_2,A_1\sim A_2} P(A_1\cap A_2)\sum_{\substack{A_3,\dots,A_r\\A'_1,\dots,A'_r}} P(A_{[3,r]}\cap A'_{[1,r]}|A_1\cap A_2)+\\&\quad+\sum_{A_1,A'_1,A_1\sim A'_1} P(A_1\cap A'_1)\sum_{\substack{A_2,\dots,A_r\\A'_2,\dots,A'_r}} P(A_{[2,r]}\cap A'_{[2,r]}|A_1\cap A'_1)\\&\quad+\sum_{A'_1,A'_2,A'_1\sim A'_2} P(A'_1\cap A'_2)\sum_{\substack{A_1,\dots,A_r\\A'_3,\dots,A'_r}} P(A_{[1,r]}\cap A'_{[3,r]}|A'_1\cap A'_2)\\&\ll_{r,s}\Delta'_2(n)+\Delta(n,m)+\Delta'_2(m).\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\sum |W_2(\ )| \ll_{r,s} \Delta'_2(n)+\Delta(n,m)+\Delta'_2(m). \tag{17}$$

La somme de la dernière différence $W_3 = W_3(A_1,\dots,A_r,A'_1,\dots,A'_r)$ se majore grâce à l'encadrement (i) du Lemme 1,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{A_1,\dots,A_r\\A'_1,\dots,A'_r}} |W_3(\,)| &\leqslant \sum_{\substack{A_1,\dots,A_r\\A'_1,\dots,A'_r}} \prod_{i=1}^{r} P(A_i) \prod_{j=1}^{r} P(A'_j)\\ &\quad\times(\Delta'_2(n)+\Delta(n,m)+\Delta'_2(m))\\ &\leqslant (\Delta'_2(n)+\Delta(n,m)+\Delta'_2(m))\\ &\quad\times\frac{(\sum_A P(A))^r}{r!}\frac{(\sum_{A'} P(A'))^r}{r!}\\ &= (\Delta'_2(n)+\Delta(n,m)+\Delta'_2(m))\frac{\mu(n)^r}{r!}\frac{\mu(m)^r}{r!}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\sum |W_3(\,)| \ll_{r,s} \Delta'_2(n)+\Delta(n,m)+\Delta'_2(m). \tag{18}$$

En utilisant maintenant (14), (15), (16), (17), et (18) on obtient la majoration suivante

$$\begin{aligned}|P(R_n = R_m = r) - Q_{[r]}(n)Q_{[r]}(m)| &\ll_{r,s} \Delta'_2(n)+\Delta(n,m)+\Delta'_2(m)\\ &\ll_{r,s} \frac{1}{(m-n)^{1/s}} + \frac{1}{n^{1/s}},\end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned}&P(R_n = R_m = r) - P(R_n = r)P(R_m = r)\\ &= O_{r,s}\left(\frac{1}{(m-n)^{1/s}}\right) + O_{r,s}\left(\frac{1}{n^{1/s}}\right),\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve du Lemme 6. □

Revenons à l'expression (11) de $V(\zeta_r(N))$, en utilisant (12) et le Lemme 6, on a

$$\begin{aligned}V(\zeta_r(N)) &= O\left(\frac{1}{N}\right) + \frac{2}{N^2}\sum_{1\leqslant n<m\leqslant N} O\left(\frac{1}{n^{1/s}} + \frac{1}{(m-n)^{1/s}}\right)\\ &= O\left(\frac{1}{N}\right) + \frac{2}{N}O\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{1/s}}\right) + \frac{2}{N^2}O\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{N-k}{k^{1/s}}\right)\\ &= O_{r,s}\left(\frac{1}{N^{1/s}}\right).\end{aligned}$$

La seconde condition du Lemme 2 est satisfaite, ceci achève la démonstration du Théorème 2 et nous assure de la convergence presque sûre de $\zeta_r(N)$ vers $\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^r}{r!}$. □

5. Loi forte des grands nombres pour R_n

On peut encore établir la loi forte des grands nombres pour la variable aléatoire R_n. Cela signifie en fait qu'en moyenne R_n converge vers λ.

THÉORÈME 3. *Soit*

$$\zeta_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} R_n,$$

alors $(\zeta_N)_{N \geqslant 1}$ *converge presque sûrement vers* $\lambda = \frac{\Gamma(1/s)^s}{s^s s!}$.

Preuve du Théorème 3. On va de nouveau utiliser le Lemme 2 appliqué cette fois à la suite de variables aléatoires (R_n).

La première condition est satisfaite puisque l'on a vu que

$$E(R_n) = \mu(n) \to \lambda \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Pour la seconde condition, on exprime d'abord

$$\zeta_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} R_n = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{\underline{h} \in \mathcal{H}(n)} \xi_{\underline{h}} = \sum_{\underline{h}} \xi_{\underline{h}},$$

où dans la dernière somme, $\underline{h} \in \mathcal{H}(n)$, $1 \leqslant n \leqslant N$, puis on calcule la variance de ζ_N

$$V(\zeta_N) = \frac{1}{N^2} \left(\sum_{\underline{h}} E(\xi_{\underline{h}}^2) - E(\xi_{\underline{h}})^2 + \sum_{\underline{h} \neq \underline{h}'} E(\xi_{\underline{h}} \xi_{\underline{h}'}) - E(\xi_{\underline{h}}) E(\xi_{\underline{h}'}) \right). \tag{19}$$

On a alors d'une part,

$$E(\xi_{\underline{h}}^2) - E(\xi_{\underline{h}})^2 = \alpha_{\underline{h}} - \alpha_{\underline{h}}^2 \leqslant \alpha_{\underline{h}}.$$

Or,

$$\frac{1}{N} \sum_{\underline{h}} \alpha_{\underline{h}} = E(\zeta_N) \to \lambda \quad \text{quand } N \to \infty,$$

puisque $E(R_n) \to \lambda$. Donc la première somme est un $O(N)$.

D'autre part, en remarquant que si $\underline{h}$ et $\underline{h}'$ n'ont pas d'éléments communs alors la différence correspondante est nulle, la seconde somme peut se restreindre aux paires $\{\underline{h}, \underline{h}'\}$ où $\underline{h}$ et $\underline{h}'$ ont des éléments en commun.

$$\begin{aligned}\sum_{\underline{h}\neq\underline{h}', \underline{h}\sim\underline{h}'} E(\xi_{\underline{h}}\xi_{\underline{h}'}) &= \sum_{n=1}^{N} \sum_{\substack{A_1, A_2 \in \mathcal{H}(n) \\ A_1 \sim A_2}} P(A_1 \cap A_2) \\ &\quad + \sum_{1 \leqslant n < m \leqslant N} \sum_{\substack{A \in \mathcal{H}(n), A' \in \mathcal{H}(m) \\ A \sim A'}} P(A \cap A') \\ &= \sum_{n=1}^{N} \Delta_2'(n) + \sum_{1 \leqslant n < m \leqslant N} \Delta(n, m).\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à utiliser les estimations de $\Delta_2'(n)$ et $\Delta(n, m)$ déjà établies au Lemme 5 et en (14) pour obtenir une majoration de la seconde somme de la variance (19) en

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \frac{1}{n^{1/s}} + \sum_{1 \leqslant n < m \leqslant N} \frac{1}{(m-n)^{1/s}} = O_s(N^{2-1/s}).$$

D'où finalement, en reportant dans (19) on a, $V(\zeta_N) = O_s\left(\frac{1}{N^{1/s}}\right)$ et on peut appliquer à nouveau le Lemme 2. □

Appendice. Inégalités élémentaires de corrélation

Nous présentons ici séparément à cause de leur intérêt propre et de leurs applications ultérieures possibles des inégalités permettant d'estimer différentes probabilités d'intersections d'événements ayant une faible corrélation.

Le lecteur pourra noter quelques analogies (qui nous ont aimablement été signalées par N. Nathanson et J. Spencer) entre ces inégalités et les inégalités de corrélation de S. Janson ([3] and [7]).

On utilisera les notations classiques suivantes: $P(A)$ désignera la probabilité de l'événement A; $\overline{A}$ désignera l'événement complémentaire de A.

THÉORÈME. *Soit* $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ *un espace probabilisé, et* $E_1, E_2, \dots, E_N$ *des événements mutuellement indépendants qui ne sont ni presque sûrs, ni presque impossibles. On considère trois familles* $A_1, A_2, \dots, A_T$, $B_1, B_2, \dots, B_S$, *et* $B_1', B_2', \dots, B_S'$ *d'événements qui sont chacun une intersection d'éléments de la* *famille* $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$, *avec la condition* $B_s \subset B'_s$ *pour tout* s *de* 1 *à* S. *Alors, on a successivement*

$$\text{(i)}\quad 0 \leqslant P\left(\bigcap_{t=1}^{T}\overline{A}_t \mid B'_1\cup\cdots\cup B'_S\right) - P\left(\bigcap_{t=1}^{T}\overline{A}_t \mid B_1\cup\cdots\cup B_S\right)$$

$$\leqslant \sum_{t=1}^{T} P(A_t \mid B_1\cup\cdots\cup B_S) - P(A_t \mid B'_1\cup\cdots\cup B'_S),$$

$$\text{(ii)}\quad 0 \leqslant P\left(\bigcap_{t=1}^{T}\overline{A}_t \cap \bigcap_{s=1}^{S}\overline{B}_s\right) - P\left(\bigcap_{t=1}^{T}\overline{A}_t\right)P\left(\bigcap_{s=1}^{S}\overline{B}_s\right)$$

$$\leqslant \sum_{\substack{1\leqslant t\leqslant T\\ 1\leqslant s\leqslant S}} P(A_t\cap B_s) - P(A_t)P(B_s),$$

$$\text{(iii)}\quad 0 \leqslant P\left(\bigcap_{t=1}^{T}\overline{A_t}\right) - \prod_{t=1}^{T} P(\overline{A_t})$$

$$\leqslant \sum_{1\leqslant t<t'\leqslant T} P(A_t\cap A_{t'}) - P(A_t)P(A_{t'}).$$

Preuve.

Pour (i). Il suffit en fait de démontrer (i) pour $B'_1,\ldots,B'_S$ quelconques et $B_1 = B'_1\cap E_n$ où $1\leqslant n\leqslant N$, et $B_s = B'_s$ pour $s\geqslant 2$. En effet, chaque B_s étant égal à l'intersection de B'_s avec un nombre fini d'événements E_i, la différence évaluée dans l'inégalité (i) est une somme finie de différences correspondant au cas simple envisagé précédemment.

On fait alors une récurrence sur T.

Si $T = 1$, il y a égalité à droite et pour l'inégalité de gauche on considère deux cas.

1er cas. Si $A_1 \not\subset E_n$, alors, par indépendance, il y a égalité entre les deux probabilités conditionnelles et c'est fini.

2ème cas. Si $A_1\subset E_n$, alors en notant que $A_1\cap B_1 = A_1\cap B'_1$, on a

$$\begin{aligned}
&P(\overline{A}_1 \mid B'_1\cup\cdots\cup B'_S) - P(\overline{A}_1 \mid B_1\cup\cdots\cup B_S)\\
&\quad = P(A_1 \mid (B'_1\cap E_n)\cup\cdots\cup B'_S) - P(A_1 \mid B'_1\cup\cdots\cup B'_S)\\
&\quad = P(A_1\cap(B'_1\cup\cdots\cup B'_S))\\
&\qquad \times\left(\frac{1}{P((B'_1\cap E_n)\cup\cdots\cup B'_S)} - \frac{1}{P(B'_1\cup\cdots\cup B'_S)}\right)\geqslant 0,
\end{aligned}$$

ce qui résoud le cas $T = 1$; considérons maintenant T quelconque, on a encore une fois deux cas.

1er cas. Si pour tout t, avec $1 \leqslant t \leqslant T$, on a $A_t \not\subset E_n$, alors, par indépendance, il y a égalité entre $P(\,.\,|B'_1 \cup \cdots \cup B'_S)$ et $P(\,.\,|B_1 \cup \cdots \cup B_S)$.

2ème cas. Il existe au moins un t tel que $A_t \subset E_n$; sans perte de généralité supposons pour simplifier que $t = T$. On peut alors décomposer

$$P\left(\bigcap_{t=1}^{T} \overline{A}_t \,|\, B'_1 \cup \cdots \cup B'_S\right) - P\left(\bigcap_{t=1}^{T} \overline{A}_t \,|\, B_1 \cup \cdots \cup B_S\right)$$

en une somme $W_1 + W_2$ où

$$W_1 := P\left(\bigcap_{t=1}^{T-1} \overline{A}_t \,|\, B'_1 \cup \cdots \cup B'_S\right) - P\left(\bigcap_{t=1}^{T-1} \overline{A}_t \,|\, B_1 \cup \cdots \cup B_S\right),$$

et

$$\begin{aligned} W_2 \;:=\; & P\left(\bigcap_{t=1}^{T-1} \overline{A}_t \cap A_T \,|\, B_1 \cup \cdots \cup B_S\right) \\ & -P\left(\bigcap_{t=1}^{T-1} \overline{A}_t \cap A_T, \,|\, B'_1 \cup \cdots \cup B'_S\right). \end{aligned}$$

Le premier terme W_1 se traite par récurrence. On a

$$0 \leqslant W_1 \leqslant \sum_{t=1}^{T-1} P(A_t \,|\, B_1 \cup \cdots \cup B_S) - P(A_t \,|\, B'_1 \cup \cdots \cup B'_S). \tag{20}$$

Le second vérifie

$$\begin{aligned} W_2 \;=\; & \frac{P(\bigcap_{t=1}^{T-1} \overline{A_t} \cap A_T \cap (B'_1 \cup \cdots \cup B'_S))}{P((B'_1 \cap E_n) \cup \cdots \cup B'_S)} \\ & -P\left(\bigcap_{t=1}^{T-1} \overline{A_t} \cap A_T |\, B'_1 \cup \cdots \cup B'_S\right) \\ =\; & P\left(\bigcap_{t=1}^{T-1} \overline{A_t} \cap A_T |\, B'_1 \cup \cdots \cup B'_S\right) \\ & \times \left(\frac{P(B'_1 \cup \cdots \cup B'_S)}{P((B'_1 \cap E_n) \cup \cdots \cup B'_S)} - 1\right). \end{aligned}$$

Cette expression est d'une part positive et d'autre part majorée par

$$\begin{aligned}
&P(A_T \mid B'_1 \cup \cdots \cup B'_S)\left(\frac{P(B'_1 \cup \cdots \cup B'_S)}{P((B'_1 \cap E_n) \cup \cdots \cup B'_S)} - 1\right) \\
&\quad = P(A_T \mid B_1 \cup \cdots \cup B_S) - P(A_T \mid B'_1 \cup \cdots \cup B'_S).
\end{aligned}$$

En utilisant l'encadrement précédent (20) de W_1, et celui de W_2 que l'on vient d'obtenir on a alors l'encadrement (i).

Pour (ii). L'encadrement (i) est valable en particulier dans le cas où les B'_s sont tous l'intersection d'aucun élément des (E_i), c'est à dire $B'_1 = \cdots = B'_S = \Omega$ et $B_1, \ldots, B_S$ sont quelconques. On obtient alors

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant P\left(\bigcap_{t=1}^{T} \overline{A_t}\right) P(B_1 \cup \cdots \cup B_S) - P\left(\bigcap_{t=1}^{T} \overline{A_t} \cap (B_1 \cup \cdots \cup B_s)\right) \\
&\leqslant \sum_{t=1}^{T} P(A_t \cap (B_1 \cup \cdots \cup B_S)) - P(A_t)P(B_1 \cup \cdots \cup B_S), \qquad (21)
\end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant P\left(\bigcap_{t=1}^{T} \overline{A_t} \cap \bigcap_{s=1}^{S} \overline{B_s}\right) - P\left(\bigcap_{t=1}^{T} \overline{A_t}\right) P\left(\bigcap_{s=1}^{S} \overline{B_s}\right) \\
&\leqslant \sum_{t=1}^{T} P(A_t \cap (B_1 \cup \cdots \cup B_S)) - P(A_t)P(B_1 \cup \cdots \cup B_S). \qquad (22)
\end{aligned}$$

Or, pour tout A_t, on a

$$\begin{aligned}
&P(A_t \cap (B_1 \cup \cdots \cup B_S)) - P(A_t)P(B_1 \cup \cdots \cup B_S) \\
&\quad = P(A_t)P\left(\bigcap_{s=1}^{S} \overline{B_s}\right) - P\left(A_t \cap \bigcap_{s=1}^{S} \overline{B_s}\right).
\end{aligned}$$

On applique alors convenablement l'encadrement (21) qui donne

$$\begin{aligned}
&P(A_t \cap (B_1 \cup \cdots \cup B_S)) - P(A_t)P(B_1 \cup \cdots \cup B_S) \\
&\quad \leqslant \sum_{s=1}^{S} P(B_s \cap A_t) - P(B_s)P(A_t).
\end{aligned}$$

En composant cette inégalité avec l'encadrement (22), on obtient finalement (ii).

Pour (iii).

$$
\begin{aligned}
&P\left(\bigcap_{t=1}^{T}\overline{A}_t\right)-\prod_{t=1}^{T}P(\overline{A}_t)\\
&\quad = P\left(\bigcap_{t=1}^{T}\overline{A}_t\right)-P\left(\bigcap_{t=1}^{T-1}\overline{A}_t\right)P(\overline{A}_T)\\
&\qquad +P(\overline{A}_T)\left[P\left(\bigcap_{t=1}^{T-1}\overline{A}_t\right)-P\left(\bigcap_{t=1}^{T-2}\overline{A}_t\right)P(\overline{A}_{T-1})\right]\\
&\qquad +\cdots+P(\overline{A}_T)P(\overline{A}_{T-1})\ldots P(\overline{A}_3)[P(\overline{A}_2\cap\overline{A}_1)-P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_1)],
\end{aligned}
$$

et en utilisant (ii) pour chaque différence, on obtient

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant P\left(\bigcap_{t=1}^{T}\overline{A}_t\right)-\prod_{t=1}^{T}P(\overline{A}_t)\\
&\leqslant \sum_{t=1}^{T-1}P(A_t\cap A_T)-P(A_t)P(A_T)+\sum_{t=1}^{T-2}P(A_t\cap A_{T-1})\\
&\quad -P(A_t)P(A_{T-1})+\cdots+P(A_2\cap A_1)-P(A_2)P(A_1).
\end{aligned}
$$

C'est l'encadrement (iii).

REMARQUE. On peut maintenant affiner la démonstration de (i) au niveau du traitement de l'expression W_2 en utilisant l'inégalité de gauche de (21) que l'on vient d'établir. Du coup, les trois inégalités du théorème deviennent

$$
\begin{aligned}
\text{(i)}\quad 0 &\leqslant P\left(\bigcap_{t=1}^{T}\overline{A}_t\,|\,B_1'\cup\cdots\cup B_S'\right)-P\left(\bigcap_{t=1}^{T}\overline{A}_t\,|\,B_1'\cup\cdots\cup B_S\right)\\
&\leqslant \sum_{t=1}^{T}P\left(\bigcap_{j=1}^{t-1}\overline{A}_j\right)[P(A_t\,|\,B_1\cup\cdots\cup B_S)\\
&\quad -P(A_t\,|\,B_1'\cup\cdots\cup B_S')],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(ii)}\quad 0 &\leqslant P\left(\bigcap_{t=1}^{T}\overline{A}_t\cap\bigcap_{s=1}^{S}\overline{B}_s\right)-P\left(\bigcap_{t=1}^{T}\overline{A}_t\right)P\left(\bigcap_{s=1}^{S}\overline{B}_s\right)\\
&\leqslant \sum_{\substack{1\leqslant t\leqslant T\\1\leqslant s\leqslant S}}P\left(\bigcap_{j=1}^{t-1}\overline{A}_j\right)P\left(\bigcap_{k=1}^{s-1}\overline{B}_k\right)[P(A_t\cap B_s)-P(A_t)P(B_s)],
\end{aligned}
$$

$$(\text{iii})\ 0 \leqslant P\left(\bigcap_{t=1}^{T} \overline{A_t}\right) - \prod_{t=1}^{T} P(\overline{A_t})$$

$$\leqslant \sum_{1 \leqslant t < t' < \leqslant T} P\left(\bigcap_{j=1}^{t-1} \overline{A_j}\right)\left(\prod_{k=t'+1}^{T} P(\overline{A_k})\right)$$

$$\times [P(A_t \cap A_{t'}) - P(A_t)P(A_{t'})].$$

Bibliographie

1. Atkin, A.O.L.: "On pseudo-squares", Proc. London Math. Soc., 14A (1965), 22–27.
2. Barrucand, P.: "Sur la distribution empirique des sommes de trois cubes ou de quatre bicarrés", *Note au C.R. Acad. Sc. Paris*, A 267 (1968), 409–411.
3. Boppona, R. B. and Spencer, J. H.: "A Useful Elementary Correlation Inequality", J. on Combinatorial Theory, Series A, 50 (1989) 305–307.
4. Erdős, P. et Rényi, A.: "Additive properties of random sequences of positive integers", Acta Arith. 6 (1960), 83–110.
5. Halberstam, H. et Roth, R.F.: "Sequences", Springer-Verlag (1983), Chap. III.
6. Hooley, C.: "On some topics connected with Waring's problem", *J. Reine Angew. Math.* 369 (1986), 110–153.
7. Janson, S., Luczak, T., and Rucinski, A.: "An exponential bound for the probability of nonexistence of a specified subgraph in a random graph", Random Graphs' 87 (Poznan, 1987), Wiley Chichester 1990, 73–87.
8. Rényi, A.: "Calcul des probabilités", Dunod (1966) chap. 7.
9. Vaughan R.C.: "The Hardy–Littlewood method", Cambridge University Press (1981).