COMPOSITIO MATHEMATICA

LAURENT DENIS

Problème de Lehmer en caractéristique finie

Compositio Mathematica, tome 98, nº 2 (1995), p. 167-175
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1995__98_2_167_0>

Compositio Mathematica **98:** 167–175, 1995.

Problème de Lehmer en caractéristique finie

LAURENT DENIS
Université Pierre et Marie Curie, U.F.R. 920. "Problèmes diophantiens", Institut de Math. Case 247, 4 Place Jussieu, Tour 45-46, 5-ième étage, 75252 Paris, France

Received 7 January 1994; accepted in final form 16 June 1994

Abstract. Let $\mathbb{F}_q(T)$ be the rational function field over the finite field $\mathbb{F}_q$ of characteristic $p > 0$. Let $\hat{h}_C(x)$ be the canonical height associated with the Carlitz module C. We prove an analog of the real Lehmer conjecture. Assume that x is algebraic of degree D over $\mathbb{F}_q(T)$, which is not a torsion point of C and possesses a conjugate in $\mathbb{F}_q((1/T))$ then $\hat{h}_C(x) \geqslant 1/(qD)$. For the canonical height $\hat{h}_\Phi$ of a general Drinfeld module with integral coefficients and good reduction everywhere we also obtain an estimate of the shape $\hat{h}_\Phi(x) \geqslant c_\Phi/D$ (where $c_\Phi > 0$ depends only on Φ). A similar answer is also given for the canonical height associated to certain quadratic polynomial of Douady-Hubbard in characteristic zero.

1. Situation

Rappelons brièvement quelques notions de hauteurs, on suivra ici la terminologie de Lang ([L]). Précisons qu'il s'agit ici de hauteurs logarithmiques et "absolues":

Soit k un corps possèdant un ensemble propre de valeurs absolues multiplicatives M_k satisfaisant à une formule du produit avec multiplicités 1(par exemple $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(T)$ ou $\mathbb{F}_q(T)$). Pour toute extension finie L de k, l'ensemble des valeurs absolues M_L de L prolongeant celles de k satisfait une formule du produit avec pour chaque $II_v \in M_L$ une multiplicité $[L_v : k_v]$ (voir. [L]). On notera encore par v la valuation additive définie par le logarithme de la valeur absolue II_v. On désigne par $\bar{k}$ une clôture algébrique de k et on dispose sur $\mathbb{P}^1(\bar{k})$ de la hauteur de Weil usuelle. Si L est une extension finie de k de degré D, la hauteur d'un point $\alpha = (x_0,\ x_1)$ de $\mathbb{P}^1(L)$ est donnée par:

$$h(\alpha) = \sum_{w \in M_L} \frac{[L_v : k_v] \max_{0 \leqslant i \leqslant 1}[-v(x_i)]}{D}.$$

Dans le cas où L est une extension finie de $\mathbb{F}_q(T)$ (corps des fractions rationnelles à coefficients dans le corps fini $\mathbb{F}_q$ de caractéristique $p > 0$) de degré D, la hauteur d'un point $\alpha = (x_0,\ x_1)$ de $\mathbb{P}^1(L)$ coïncide alors avec la formule:

$$h(\alpha) = \sum_{w} \frac{d(w)e(w) \max_{0 \leqslant i \leqslant 1}[-w(x_i)]}{D};$$

où $d(w)$ désigne le degré résiduel en la place w, $e(w)$ est l'indice de ramification, w est normalisée par $w(k) = \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ et $w(L)$ est un prolongement de $w(k)$.

Cette hauteur ne dépend pas du corps L choisit comme le montrent les propriétés usuelles des valuations (c.f. [S] pour les extensions de $\mathbb{F}_q(T)$). La hauteur d'un élément x de $\bar{k}$, notée $h(x)$ est par définition celle du point $(1,\ x)$.

Le problème de Lehmer usuel consiste à montrer qu'il existe un réel $c > 0$, tel que pour tout nombre algébrique x de degré D sur $\mathbb{Q}$, qui n'est pas une racine de 1:

$$h(x) \geqslant \frac{c}{D}.$$

Le meilleur résultat connu est celui de Dobrowolski ([Do]) qui démontre sous les hypothèses précédentes l'existence d'un réel $c > 0$, indépendant de x tel que:

$$h(x) \geqslant \frac{c}{D}\left(\frac{\operatorname{Log}\operatorname{Log} D}{\operatorname{Log} D}\right)^3. \tag{1}$$

Si on suppose qu'un des conjugués de x est réel, rien de meilleur n'est connu. La résolution de problème de Lehmer dans ce cas impliquerait en particulier l'existence d'un plus petit nombre de Salem (rappelons qu'un nombre de Salem est un nombre algébrique réel strictement plus grand que 1 dont tous les autres conjugués sont de module $\leqslant 1$ et qu'une conjecture standard affirme qu'il existe un plus petit nombre de Salem).

L'analogue de ce problème sur les courbes elliptiques est le suivant. Soit $\hat{h}_E$ la hauteur de Néron-Tate d'une courbe elliptique E définie sur $\mathbb{Q}$, associée à un diviseur très ample et symétrique de E. On conjecture alors l'existence d'une constante $c_E > 0$, ne dépendant que de la courbe elliptique telle que si x est un point algébrique de E, défini sur une extension de $\mathbb{Q}$ de degré D et n'est pas de torsion:

$$\hat{h}_E(x) \geqslant \frac{c_E}{D}.$$

La meilleure estimation connue est analogue au résultat (1) en supposant de plus que E a multiplication complexe ([La]). Dans les deux cas précédents, on dispose d'un morphisme F, tel que la hauteur qu'on veut minorer est la limite de $h(F^n(x))/(\deg F)^n$. Pour le groupe multiplicatif on peut prendre $F(x) = x^2$ et on a $h(F(x)) = 2h(x)$. Pour la hauteur de Néron-Tate, si P est un point algébrique de la courbe elliptique correctement plongée dans un espace projectif $F(P) = [2]P$ (la multiplication par 2 sur la courbe elliptique) est un morphisme de degré 4 et $h(F(P)) = 4h(P) + o(1)$.

Les points P de hauteur non nulle sont alors les points dont l'orbite $O_P = \{F^i(P)/i \geqslant 0\}$ sous les itérés de F est infinie. On demande alors une minoration pour la hauteur de ces points.

Si on regarde l'analogue du premier problème sur un corps de fonction ($\mathbb{Q}(T)$ ou $\mathbb{F}_q(T)$) le résultat est immédiat car au moins un des termes de la hauteur est $\geqslant 1/D$. Dans le cas de $\mathbb{F}_q(T)$ les point de torsion de la hauteur de Weil, sont les éléments de $\bar{\mathbb{F}}_q$. Cependant, les travaux de Hayes (donnant en particulier une version explicite du corps de classe [H]), de Carlitz (et de beaucoup d'autres) ont montré que les points de torsion intéressants sur ce corps étaient ceux donnés par le module de Carlitz. Ce dernier est défini par un homomorphisme injectif d'anneaux Φ de $\mathbb{F}_q[T]$ dans les endomorphismes algébriques du groupe additif et est déterminé par la donnée de $\Phi(T)x = Tx + x^q$.

On a défini dans ([D1]) la hauteur canonique sur le module de Carlitz. Maintenant k désigne $\mathbb{F}_q(T)$ et $\bar{k}$ désigne une clôture algébrique de k. Soit x un élément de $\bar{k}$, la hauteur de x est définie par:

$$\hat{h}_C(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{h((\Phi(T)^n)(x))}{q^n}.$$

Cette hauteur s'annule uniquement aux points de torsion du module de Carlitz, c'est à dire sur $C_{\text{tor}} = \{x/\exists a \in \mathbb{F}_q[T] - \{0\}, \Phi(a)(x) = 0\}$. L'analogie avec le cas des courbes elliptiques et le cas du groupe multiplicatif se poursuit. En effet, comme on l'a montré dans [D1] (Théorème 1) cet ensemble C_{tor} est le même que celui des points x dont l'orbite sous $\Phi(T)$: $O_x = \{\Phi(T^n)(x)/n \geqslant 0\}$ est finie.

On désigne encore par k_∞ le corps $\mathbb{F}_q((1/T))$, par $\bar{k}_\infty$ une clôture algébrique de k_∞ et par $\deg(x)$ l'opposé de la valuation à valeurs entières relatives d'un élément x de $k_\infty(\deg(0) = -\infty)$. On a a montré dans ([D1]) un résultat analogue à (1) (pour la hauteur $\hat{h}_C(x)$) quand x est un élément algébrique séparable de $\bar{k}_\infty$. On se propose de prouver l'analogue du problème de Lehmer quand au moins un conjugué de x est réel, c'est à dire le théotème suivant:

THEOREME 1. *Soit x un élément algébrique de $\bar{k}_\infty$ possédant au moins un conjugué dans k_∞. Si x n'est pas de torsion, est de degré D sur k:*

$$\hat{h}_C(x) \geqslant \frac{1}{qD}.$$

REMARQUE 1. L'ensemble des nombres considérés contient les analogues des nombres de Pisot et de Salem construit dans [G] (x est un analogue à un nombre de Salem si $x \in k_\infty$ est algébrique sur $k, \deg(x) > 0$, et si tous ses conjugués x_i vérifient $\deg(x_i) \leqslant 0$). De cette manière et suivant notre analogie, on peut considérer avoir montré l'analogue du fait qu'il n'y a pas de nombre de Salem trop proche de 1.

REMARQUE 2. Les points de torsion sur le module de Carlitz ont des propriétés arithmétiques similaires à ceux des courbes elliptiques et aux propriétés des racines de l'unité. Parmi les plus importantes signalons que dans une extension de degré fini du corps de base, ils sont en nombre fini.

REMARQUE 3. L'hypothèse faite sur le conjugué de x intervient techniquement dans notre démonstration. On peut penser que cette condition restrictive, n'est pas nécessaire et conjecturer l'existence d'une constante universelle $c > 0$, telle que si x n'est pas de torsion et est algébrique de degré D sur k alors $\hat{h}_C(x) \geqslant c/D$.

Après l'extension de ces résultats à des modules de Drinfeld de rang supérieur vérifiant une condition d'intégralité, on montre au paragraphe 4 un analogue réel à ce probléme qui est en relation avec les polynômes quadratiques de Douady-Hubbard. On remarque alors que certaines valeurs de l'exponentielle de la hauteur canonique attachée à ces polynômes de degré 2 sont transcendantes grâce aux travaux de Becker et Berkweiler. Par analogie, ceci peut être considéré comme un support à la conjecture stipulant la transcendance des valeurs non égales à 1 de l'exponentielle de la hauteur de Néron-Tate.

2. Démonstration

Soit donc x algébrique de degré D sur k, possédant au moins un conjugué dans k_∞. La hauteur de Weil est invariante par conjugaison. Comme le polynôme $\Phi(T)$ est à coefficients dans $\mathbb{F}_q[T]$, la hauteur canonique est également invariante par conjugaison. On peut donc supposer sans perte de généralité que x est dans k_∞. On part de la formule:

$$h(x) = \sum_w \frac{d(w)e(w)\max(0, -w(x))}{D}. \tag{2}$$

On va aussi utiliser l'expression:

$$\hat{h}_C(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{h((\Phi(T^n))(x))}{q^n}. \tag{3}$$

On rappelle également deux des propriétés obtenues au théorème 1 de [D1]):

PROPRIÉTÉS

(1) Pour tout $x \in \bar{k}, \hat{h}_C(\Phi(T)x) = q\hat{h}_C(x)$.
(2) Si t est un point de torsion de C, pour tout $x \in \bar{k}, \hat{h}_C(x+t) = \hat{h}_C(x)$.

Il y a un nombre fini de termes non nuls dans l'expression de droite de (2) et on sait d'après [P] que l'on peut passer à la limite terme à terme quand on utilise (3) (la preuve redémontre ce fait). Examinons d'abord une place w ne divisant pas la place à l'infini $1/T$. Si la valuation w satisfait $w(x) \geqslant 0$, alors:

$$w((\Phi(T)x) \geqslant \min\{w(T) + w(x), qw(x)\};$$

l'hypothèse sur w assure que $w(T) \geqslant 0$, donc pour tout entier n, $w(\Phi(T^n)x) \geqslant 0$ et $\max(0, -w(\Phi(T^n)x)) = 0$.

Si $w(x) < 0, w((\Phi(T)x) = qw(x)$ car $qw(x) < w(T) + w(x)$. On a alors $\max(0, -w(\Phi(T^n)x)) = -q^n w(x)$. Mais alors $-e(w)w(x) \geqslant 1$ et la hauteur canonique satisfait $\hat{h}_C(x) \geqslant 1/D$.

Reste donc à supposer que pour tout w ne divisant pas $1/T$ $w(x) \geqslant 0$, et à calculer la composante de la hauteur à l'infini. Comme x est dans k_∞, la formule de la somme montre que $\deg(x) = -w_{1/T} \geqslant 0$. Or:

$$\deg(Tx) = 1 + \deg(x), \qquad \deg(x^q) = q\deg(x).$$

Si $(q-1)\deg(x) > 1$ alors $\deg(\Phi(T)x) = q\deg(x)$ vérifie encore $(q-1)\deg(\Phi(T)x) > 1$. Dans ce cas, on trouve:

$$\hat{h}_C(x) \geqslant \frac{\deg(x)}{D} > \frac{1}{(q-1)D}.$$

Si $(q-1)\deg(x) \leqslant 1$ et $q \geqslant 3$, alors $\deg(x) = 0$ car il s'agit d'un entier, mais alors pour toute place w, $w(x) = 0$, donc x est dans $\mathbb{F}_q$.

On a $\hat{h}_C(x) = \hat{h}_C\ (1)$, qu'on calcule pour trouver $1/q$. D'où le théorème dans ce cas.

Si maintenant $q = 2, \deg(x) \leqslant 1$, si $\deg(x) = 0, x$ est dans $\mathbb{F}_q$ est un point de torsion car $\Phi(T^2)(x) = \Phi(T)x$. Reste le cas $\deg(x) = 1$. Quitte à translater x par un élément de $\mathbb{F}_q$ (ce qui ne change pas sa hauteur car ce sont des points de torsion), on peut supposer que $x = T + a_1/T + \cdots a_i/T^i \cdots$. Alors $\Phi(T)x$ a la forme: $\Phi(T)x = a_1 + u$ où $\deg(u) < 0$. La hauteur de $\Phi(T)x$ est le même que celle de u (car a_1 est de torsion). Comme $\deg(u) < 0$, il existe w ne divisant pas $1/T$ telle que $w(u) < 0$. Donc $\hat{h}_C(u) \geqslant 1/D$, enfin on conclut en utilisant que $\hat{h}_C(u) = \hat{h}_C(\Phi(T)x) = 2\hat{h}_C(x)$.

REMARQUE 4. Ici on a des exemples où la hauteur d'un point non de torsion est rationnelle.

3. Extensions des résultats

La hauteur canonique a également été définie dans ([D1]) sur les modules de Drinfeld et certains t-modules comprenant ceux de dimension 1.

DÉFINITION 1. Un t-module de dimension 1, Φ, défini sur une extension K de k, est la donnée du groupe additif $\mathbf{G}_a$ et d'un homomorphisme d'anneau $\Phi : \mathbb{F}_q[t] \hookrightarrow \mathrm{End}(\mathbf{G}_a)$, déterminé par la donnée de:

$$\Phi(t) = a_0F^0 + a_1F + \cdots + a_dF^d;$$

où les a_i sont dans K et $a_d \neq 0$.

REMARQUE 5. Cette définition est en fait identique à celle d'un module de Drinfeld sur K avec $A = \mathbb{F}_q[t]$ (voir Définition 2.3 de [D-H]). Le point de vue ici adopté est de s'intésser à la hauteur déterminée par le seul polynôme $\Phi(t)$ au sens de [C-S], cette hauteur est bien sûr la même que la hauteur du module de Drinfeld associé à $\Phi(t)$ comme on le voit dans le Théorème 1 de [D].

La hauteur canonique définie dans [D] est donnée par:

$$\hat{h}_\Phi(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{h(\Phi(t^n)(x))}{q^{nd}}.$$

On montre ici que le résultat du Théorème 1, s'étend au cas où Φ est défini sur $\mathbb{F}_q[T]$, et les a_i sont suffisamment petits.

THEOREME 2. *Soit* $\Phi(t) = a_0F^0 + a_1F + \cdots + a_dF^d$ *un t-module de dimension* 1 *vérifiant:*

(i) *pour* $0 \leqslant i \leqslant d, a_i \in \mathbb{F}_q[T]$;
(ii) *pour* $0 \leqslant i \leqslant d-1, \deg(a_i) < q^d - q^i, \deg(a_d) = 0$.

Soit x *un élément algébrique de* $\overline{k_\infty}$ *possédant au moins un conjugué dans* k_∞. *Si* x *n'est pas de torsion, est de degré* D *sur* k:

$$\hat{h}_\Phi(x) \geqslant \frac{1}{q^d(q^d-1)D}.$$

Preuve. Remarquons d'abord que les conditions (i) et (ii) entraînent que $w(a_d) = 0$, quel que soit w.

Si w est une place ne divisant pas $1/T$, alors comme dans la preuve de théorème précédent si $w(x) \geqslant 0$, alors $w(\Phi(t)(x)) \geqslant 0$ et la contribution de cettte place à la hauteur canonique est nulle. Si $w(x) < 0$, la condition $w(x) < \min\{w(a_i)/(q^d - q^i)\ (0 \leqslant i \leqslant (d-1)),\ 0\}$ étant réalisée on a : $w(\Phi(t)(x)) = q^d w(x)$. Mais alors la hauteur canonique est $\geqslant e(w)w(x)/D \geqslant 1/D$.

Reste donc à supposer que pour toute place w autre que les places à l'infini $w(x) \geqslant 0$. Comme au Théorème 1, la formule de la somme entraîne que $\deg(x) \geqslant 0$. Si $\deg(x) \geqslant \max\{\deg(a_i)/(q^d - q^i)\ (0 \leqslant i \leqslant (d-1)), 0\}$ alors $\deg(\Phi(t)(x))$ satisfait la même condition et est égal à $q^d \deg(x)$. Dans ce cas la hauteur canonique est $\geqslant 1/((q^d-1)D)$.

Enfin si $0 \leqslant \deg(x) \leqslant \max\{\deg(a_i)/(q^d - q^i)\ (0 \leqslant i \leqslant (d-1))\}$, l'hypothèse (ii) montre que $\deg(x) = 0$. Comme on a supposé $w(x) \geqslant 0$, pour toutes les places ne divisant pas l'infini, on a $w(x) = 0$, pour toutes les places ceci montre que x est dans $\mathbb{F}_q$. Reste donc à minorer la hauteur d'un élément de $\mathbb{F}_q$ ou ce qui est la même chose, de minorer la hauteur de 1. On regarde alors $\Phi(t)1$, si c'est un élément de degré 0, alors c'est que 1 est un point de torsion. Dans le cas contraire, le degré de $\Phi(t)1$ est $\geqslant 1$, les raisonnements précédents montrent que $\hat{h}_\Phi(\Phi(t)1) \geqslant 1/(q^d-1)$. Comme $\hat{h}_\Phi(\Phi(t)x) = q^d\hat{h}_\Phi(x)$, on en déduit le résultat annoncé.

Passons maintenant à un énoncé plus général sans souci de contrôle des constantes:

THEOREME 3. *Soit* $\Phi(t) = a_0F^0 + a_1F + \cdots + a_{d-1}F^{d-1} + F^d$ *un t-module de dimension* 1 *tel que pour* $0 \leqslant i \leqslant d-1, a_i \in k_\infty \cap \bar{k}$ *est entier sur* $\mathbb{F}_q[T]$. *Il existe* *un réel $c_\Phi > 0$, ne dépendant que de Φ, tel que si x est un élément algébrique de k_∞, qui n'est pas de torsion, et est de degré D sur k alors:*

$$\hat{h}_\Phi(x) \geqslant \frac{c_\Phi}{D}.$$

Preuve. Comme dans la preuve précédente, le fait que pour toute place w ne divisant pas $1/T$, $w(a_i) \geqslant 0$, montre qu'il suffit de regarder le cas $\deg(x) \geqslant 0$.

Si $\deg(x)$ est suffisamment grand alors $\deg(\Phi(t)x) = q^d \deg(x)$ est encore plus grand. On minore alors la hauteur comme précédemment. Par conséquent, il existe un réel $A > 0$ (dépendant du t-module mais pas de D) tel que $\deg(x) \geqslant A$ entraîne $\hat{h}_\Phi(x) \geqslant A/D$. Regardons alors l'ensemble $\{\Phi(a)x, \deg(a) < M\}$, si x n'est pas de torsion, cet ensemble contient q^M éléments. Prenons pour M le plus petit entier $\geqslant A + 2$. Le principe des tiroirs permet alors d'affirmer qu'il existe b non nul de degré $\leqslant M$ tel que $\deg(\Phi(b)x) \notin [0, A]$. Si $\deg(\Phi(b)x) < 0$, la hauteur de $\Phi(b)x$ est minorée par $1/D$ car on a au moins une place w ne divisant pas $1/T$ telle que $e(w)w(\Phi(b)x) \leqslant -1$. Si $\deg(\Phi(b)x) \geqslant A$, la hauteur de $\Phi(b)x$ est minorée par A/D. Mais alors $\hat{h}_\Phi(\Phi(b)x) \geqslant \min(1, A)/D$ et comme $\hat{h}_\Phi(\Phi(b)x) = q^{d \deg(b)}\hat{h}_\Phi(x)$, on a bien notre conclusion en majorant $\deg(b)$ par $A + 2$.

REMARQUE 6. Ces estimations conduisent à des raffinements des inégalités obtenues dans l'appendice de [D2] permettant de contrôler la hauteur de relations de dépendance linéaires de points algébriques. Notons que le cas où tous les a_i sont dans $\mathbb{F}_q$ est contenu dans le résultat précédent, dans ce cas la hauteur canonique est identique à la hauteur de Weil de départ (c.f. [D3]).

4. Un analogue réel

On prend ici $\mathbb{Q}$ comme corps de base. On va montrer que le même schéma de preuve que précédemment donne aussi des résultats pour le problème de Lehmer associé à quelques polynômes quadratiques de [D-H].

Soit e un nombre algébrique sur $\mathbb{Q}$, et $P_e(x) = x^2 + e$ le polynôme de degré 2. Ce polynôme défini un morphisme de $\mathbb{P}^1$ de degré 2, il existe donc (c.f. [C-S]) une unique fonction h_e de $\bar{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant:

(i) *pour tout $x \in \bar{\mathbb{Q}}$, $h_e(P_e(x)) = 2h_e(x)$;*
(ii) *$h_e - h_w$ est bornée sur $\bar{\mathbb{Q}}$.*

On démontre alors:

THEOREME 4. *Soit e un entier naturel positif, x un réel algébrique de degré D alors:*

$$h_e(x) \geqslant \frac{\operatorname{Log}(e+1)}{4D}.$$

REMARQUE 7. L'énoncé est trivial si $e = 0$, mais on a seulement dit que la hauteur usuelle est positive.

DÉMONSTRATION. On va utiliser que $h_e(x)$ est la limite de $h((P_e)^n(x))/2^n$ (où $(P_e)^n$ désigne le n-ième itéré de P_e) et regarder une composante locale de la hauteur à l'infini.

Or $P_e(x) \geqslant 1$ et comme $P_e(y) \geqslant y^2$ quand e est positif, on en déduit par récurrence $(P_e)^{n+1}(x) \geqslant (1+e)^{2^{n-1}}$, d'où l'estimation recherchée.

REMARQUE 8. Pour certaines valeurs de e les calculs de [Go] donnent des valeurs pour la hauteur de $h_e(x)$ pour des x algébriques bien choisis. En effet e est entier et si x est entier seule la composante à l'infini de la hauteur locale intervient. Quand x est entier et de la forme donnée dans [Go], les estimations de ce même texte fournissent alors un équivalent de $(P_e)^n(x)$ de la forme $\Theta(e)^{2^n}$. On en déduit $\Theta(e) = \exp(h_e(x))$. Les travaux de Becker et Bergweiler ([B-B] p. 4) montrent que dans les cas non triviaux ces valeurs sont transcendantes. C'est à ma connaissance la première valeur transcendante obtenue pour l'exponentielle d'une hauteur canonique, ceci confirmant des conjectures standards: on conjecture que l'exponentielle de la hauteur de Néron-Tate d'une courbe elliptique prend des valeurs uniquement transcendantes ou égales à 1.

REMARQUE 9. Comme me l'a suggéré l'arbitre, l'ensemble des résultats de ce texte et les résultats connus antérieurement permettent de poser la question suivante. Si k est un corps global (extension finie de $\mathbb{Q}$ ou de $\mathbb{F}_q(T)$), P un polynôme d'une variable de degré $\geqslant 2$ à coefficients dans k. On peut alors considérer $\hat{h}_P$ la hauteur associée au morphisme défini par P (voir [C-S]). Existe-t-il alors un réel $c_P > 0$, ne dépendant que de P tel que pour tout x algébrique de degré D sur k, dont l'orbite sous les itérés de P est infinie on ait $\hat{h}_P(x) \geqslant c_P/D$?

Remerciements

L'auteur remercie l'arbitre pour ses remarques lui ayant permis d'améliorer substantiellement la rédaction de ce texte ainsi que M. Langevin et P.G. Becker pour des commentaires sur une version antérieure.

Références

[B-B] Becker, P. G. and Bergweiler, W.: Transcendency of local conjugacies in complex dynamics and transcendency of their values, *Manuscripta Mathematica*, vol. 81, 329–337, 1993.

[C-S] Call, G. and Silverman, S.: Canonical height on varieties with morphisms, *Compositio Math.*, vol. 29, n. 2, novembre 1993, 163–205.

[C] Carlitz, L.: On certain functions connected with polynomials in a Galois field, *Duke Math. J.*, n. 1, 137–168, 1935.

[D-H] Deligne, P. and Husemöller, D.: Survey of Drinfeld modules, Current trends in arithmetical algebraic geometry, Contemporary Math., vol. 67, 25–91, 1987.

[D1] Denis, L.: Hauteurs canoniques et modules de Drinfeld. *Math. Annalen*, 294, 213–223, 1992.

[D2] Denis, L.: Géométrie diophantienne sur les modules de Drinfeld. Proceedings du 'Workshop on function fields' Ohio, D. Gross, D. Hayes, M. Rosen eds, 285–303, 1992.

[D3] Denis, L.: Problèmes diophantiens sur les t-modules, 'Publications de l'université P. et M. Curie' Paris 6, n. 103, 1993 et preprint (to appear in Journal de théorie des Nembres de Bordeaux).

[Do] Dobrowolski, E.: On a question of Lehmer and the number of irreducible factors of a polynomial, *Acta Arith.*, 34, 1979, 391–401.

[D-H] Douady, A. and Hubbard, J.: Itération des polynômes quadratiques complexes, C.R. Acad. Sci. Paris, 123–126, 1982.

[G] Grandet Hugot, M.: Eléments algébriques remarquables dans un corps de séries formelles, *Acta Arithmetica*, XIV, 1968, 177–184.

[Go] Golomb, S. W.: On certain nonlinear recurring sequences, *Amer. Math.* Monthly, 70, 403–405, 1963.

[H] Hayes, D.: Explicit class field theory for rational function fields, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 189, 1974, 77–91.

[L] Lang, S.: Fundamentals of Diophantine Geometry, *Springer verlag*, 1983.

[La] Laurent, M.: Minoration de la hauteur de Néron-Tate, *Progress in Math.*, 38, 1983; Birkhauser, 1981–1982, 213–222.

[P] Poonen, B.: Local height functions and the Mordell-Weil theorem for Drinfeld modules, à paraître dans *Compositio Math.*

[S] Stichtenoth, H.: Algebraic function fields and Codes, Springer-Verlag, 1993.

[Z] Zimmer, H.: On the difference of the Weil height and the Néron-Tate height, *Math. Z.*, 147, 1976, 35–51.