COMPOSITIO MATHEMATICA

AHMAD EL SOUFI

Indice de Morse des applications harmoniques de la sphère

Compositio Mathematica, tome 95, nº 3 (1995), p. 343-362

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1995__95_3_343_0>

Compositio Mathematica **95**: 343–362, 1995.

Indice de Morse des applications harmoniques de la sphère

AHMAD EL SOUFI
Université de Tours, Faculté des Sciences et Techniques, Laboratoire de Mathématiques et Applications, Parc de Grandmont, 37200 Tours, France

Received 11 October 1993; accepted in final form 9 March 1994

Introduction

Une application harmonique ϕ entre deux variétés riemanniennes est un point critique de la fonctionnelle *Energie*. Elle est dite stable si la variation seconde H_ϕ de l'énergie en ϕ est semi-positive sur l'espace $\Gamma(\phi)$ des champs de vecteurs le long de ϕ. Dans cet article nous nous intéresserons essentiellement au cas où la variété source est une sphère canonique $\mathbb{S}^m$ de dimension m (le cas où la variété but est une sphère avait été étudié dans un précédent article [4]). En effet, il est bien connu (depuis Xin [19]) que si $m \geqslant 3$, alors toute application harmonique stable de $\mathbb{S}^m$ dans une variété riemannienne (N, h) est constante. La question qui se pose alors naturellement est de savoir quelles sont les applications harmoniques non constantes les moins instables de $\mathbb{S}^m$ dans (N, h). Le degré d'instabilité d'une application harmonique ϕ étant mesuré par l'indice, noté $\mathrm{Ind}_E(\phi)$, de H_ϕ, i.e. la dimension des sous-espaces maximaux de $\Gamma(\phi)$ sur lesquels H_ϕ est définie négative.

Le premier résultat que nous obtenons dans cet article nous dit précisément que, parmi toutes les applications harmoniques non constantes définies sur $\mathbb{S}^m$, l'identité I de $\mathbb{S}^m$ possède l'indice le plus petit. Autrement dit, pour tout $\phi: \mathbb{S}^m \to (N, h)$ harmonique non constante, avec $m \geqslant 3$, on a

$$\mathrm{Ind}_E(\phi) \geqslant \mathrm{Ind}_E(I) = m + 1.$$

Noter que Eells et Lemaire avaient obtenus dans [2] la minoration $\mathrm{Ind}_E(\phi) \geqslant 1 + \mathrm{rang}(\phi)$.

Comme celles de Xin et de Eells–Lemaire, notre preuve est fondée sur le calcul explicite de la restriction de H_ϕ à l'espace A des champs gradients des premières harmoniques sphériques. Cependant, notre méthode ne passe pas par la formule générale de la variation seconde, mais s'appuie sur un calcul global de la variation première de l'énergie le long des courbes engendrées par les champs de A. Elle présente ainsi l'avantage de donner lieu à un résultat de type global. En effet, nous en déduisons que, non seulement la variation seconde de l'énergie est, pour $m \geqslant 3$, définie négative sur le sous-espace $d\phi(A)$, mais aussi qu'il existe une variété (instable) C_ϕ de dimension $m+1$ difféomorphe à $G(m)/0(m+1)$, où $G(m)$ est le groupe conforme de $\mathbb{S}^m$, et dont l'espace tangent en ϕ est précisément $d\phi(A)$, telle que la restriction de l'énergie à C_ϕ atteigne son maximum absolu strict en ϕ (cf. 1.2 et 1.5). Ceci s'exprime par le fait que, pour tout $\phi\colon \mathbb{S}^m \to (N, h)$ harmonique non constante ($m \geqslant 3$) et tout difféomorphisme conforme non isométrique γ de $\mathbb{S}^m$, on a l'inégalité stricte

$$E(\phi \circ \gamma) < E(\phi)$$

où $E(\phi)$ est l'énergie de ϕ.

L'existence d'applications holomorphes de $\mathbb{S}^2$ dans des variétés Kähleriennes explique pourquoi les résultats précédents ne sont pas valables en dimension 2. En effet, toute application holomorphe entre variétés Kähleriennes est une application harmonique stable (même minimisante) [11]. Cependant, dans le cas particulier où la variété but est l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^d$, Siu et Yau [16] avaient montré que les seules applications harmoniques stables de $\mathbb{S}^2$ dans $\mathbb{C}P^d$ sont les applications holomorphes ou antiholomorphes (cf. [1] et [12] pour un résultat plus général). Reste donc à savoir ce qui se passe pour l'indice des applications harmoniques non (anti-) holomorphes.

Dans la seconde partie de cet article, nous calculons l'indice de l'immersion canonique $j_m\colon \mathbb{S}^m \to \mathbb{R}P^m \to \mathbb{C}P^m$ (qui est totalement réelle), puis nous montrons que, parmi toutes les applications harmoniques non (anti-) holomorphes ϕ de $\mathbb{S}^2$ dans $\mathbb{C}P^d$, l'application j_2 possède l'indice le plus petit (cf. 2.2 et 2.11), i.e.

$$\mathrm{Ind}_E(\phi) \geqslant \mathrm{Ind}_E(j_2) = 6$$

Une catégorie intéressante d'applications de $\mathbb{S}^m$ dans $\mathbb{C}P^d$ est celle des applications totalement réelles. Notre théorème 2.3 montre que, parmi toutes les immersions harmoniques totalement réelles ϕ de $\mathbb{S}^m$ dans $\mathbb{C}P^d$, l'application j_m possède l'indice le plus petit, i.e.

$$\mathrm{Ind}_E(\phi) \geqslant \mathrm{Ind}_E(j_m) = (m+1)(m+4)/2.$$

Noter que, si ϕ est une application harmonique de $\mathbb{S}^m$ dans $\mathbb{S}^d$, alors $j_d \circ \phi$ est une application harmonique totalement réelle de $\mathbb{S}^m$ dans $\mathbb{C}P^d$.

Certaines applications harmoniques sont aussi des immersions minimales, i.e. des points critiques de la fonctionnelle *Volume*. La comparaison des variations secondes des fonctionnelles Energie et Volume en de tels points critiques communs permet d'avoir des résultats semblables aux précédents mais concernant l'indice, noté $\mathrm{Ind}_V(\phi)$, des immersions minimales ϕ de $\mathbb{S}^m$ dans $\mathbb{C}P^d$. Ainsi, nous montrons qu'on a (cf. 2.2 et 2.3), pour toute immersion minimale non (anti-) holomorphe ϕ de $\mathbb{S}^2$ dans $\mathbb{C}P^d$,

$$\mathrm{Ind}_V(\phi) \geqslant \mathrm{Ind}_V(j_2) = 6,$$

et, pour toute immersion minimale homothétique et totalement réelle ϕ de $\mathbb{S}^m$ dans $\mathbb{C}P^d$,

$$\mathrm{Ind}_V(\phi) \geqslant \mathrm{Ind}_V(j_m) = (m+1)(m+2)/2.$$

1. Le cas général

Tout au long de cet article on désignera par (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $m \geqslant 2$ et par (N, h) une variété riemannienne de dimension $n \geqslant 2$. Les produits scalaires associés à g et h seront tous notés $\langle\, ,\rangle$. Pour toute application différentiable ϕ de M dans N, on notera $E(\phi) = \frac{1}{2}\int_M |\mathrm{d}\phi|^2 \,\mathrm{d}v$ *l'énergie* de ϕ, où $|\mathrm{d}\phi|$ est la norme de Hilbert–Schmidt de $\mathrm{d}\phi$ et où $\mathrm{d}v$ est *l'élément de volume* canonique associé à g. Les *connexions de Levi–Civita* de (M, g) et (N, h) seront notées respectivement D et ∇. On désignera par $\Gamma(\phi)$ l'espace des champs de vecteurs le long de ϕ (i.e. les sections du fibré ϕ^*TN), par ∇^ϕ la *connexion induite* sur ϕ^*TN par ∇ et par $\tau(\phi) = \mathrm{tr}_g \nabla^\phi \mathrm{d}\phi$ la *tension* de ϕ. La variation première de l'énergie dans la direction d'un champ $V \in \Gamma(\phi)$ est donnée par la formule (cf. [3]).

$$(\delta E)_\phi(V) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E(\phi_t)|_{t=0} = -\int_M \langle \tau(\phi), V\rangle \,\mathrm{d}v, \tag{1}$$

où $(\phi_t)_t$ est une famille à un paramètre d'applications différentiables telle que $\phi_0 = \phi$ et $\mathrm{d}/(\mathrm{d}t)\phi_t|_{t=0} = V$. L'application ϕ sera dite *harmonique* si $\tau(\phi) = 0$.

A une application harmonique ϕ, on associe la forme quadratique définie pour tout $V \in \Gamma(\phi)$ par

$$H_\phi(V) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} E(\phi_t)|_{t=0},$$

et on appelle *indice* de ϕ la dimension, notée $\mathrm{Ind}_E(\phi)$, des sous-espaces maximaux de $\Gamma(\phi)$ sur lesquels la forme H_ϕ est définite négative,

$$\mathrm{Ind}_E(\phi) = \mathrm{Sup}\{\dim F; F \subset \Gamma(\phi) \text{ t.q. } H_\phi \text{ définite négative sur } F\}.$$

L'application ϕ sera dite *stable* si $\mathrm{Ind}_E(\phi) = 0$. On appellera *nullité* de ϕ la dimension, notée $\mathrm{Nul}_E(\phi)$, du noyau de H_ϕ.

Dans tout le reste de ce paragraphe, nous nous intéresserons exclusivement au cas où la variété source est la sphère $\mathbb{S}^m$ munie de sa métrique canonique notée can.

1.1. THEOREME. *Toute application harmonique non constante ϕ de la sphère $\mathbb{S}^m$ de dimension $m \geqslant 3$ dans une variété riemannienne (N, h) vérifie*

$$\mathrm{Ind}_E(\phi) \geqslant m + 1.$$

Cette minoration de l'indice est optimale. En effet, l'égalité $\mathrm{Ind}_E(\phi) = m + 1$ a lieu en particulier pour l'identité de $\mathbb{S}^m$, où $m \geqslant 3$ (cf. [17]), et pour la fibration de Hopf $\pi: \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ (cf. [18]).

Le théorème 1.1 montre en fait l'existence d'un sous-espace F de dimension $m + 1$ de $\Gamma(\phi)$ tel que, pour toute variation $(\phi_t)_t$ de ϕ telle que $(\mathrm{d}\phi_t/\mathrm{d}t)|_{t=0} \in F$, la restriction de l'énergie à $(\phi_t)_t$ admet un maximum local strict en ϕ. Une version globale de ce résultat est contenue dans le théorème 1.2 suivant.

Pour tout $x \in M$ et tout $V \in T_{\phi(x)}N$, on notera V^T et $V^\perp$ les projections orthogonales respectives de V sur $\mathrm{d}\phi(T_xM)$ et $\mathrm{d}\phi(T_xM)^\perp$. Si l'on désigne par $G(m)$ le *groupe des transformations conformes* de $\mathbb{S}^m$, i.e.

$$G(m) = \{\gamma \in \mathrm{Diff}(\mathbb{S}^m);\ \exists \alpha \in C^\infty(\mathbb{S}^m) \text{ t.q. } \gamma^* \mathrm{can} = \alpha\, \mathrm{can}\},$$

alors on a le

1.2. THEOREME. *Soit ϕ une application différentiable de $\mathbb{S}^m$ dans une variété riemannienne (N, h) telle que $\tau(\phi)^T = 0$. On a*

$$E(\phi) = \sup_{\gamma \in G(m)} E(\phi \circ \gamma).$$

De plus, si ϕ est non constante et $m \geqslant 3$, alors l'égalité $E(\phi \circ \gamma) = E(\phi)$ n'a lieu que si γ est une isométrie (i.e. $\gamma \in \mathrm{O}(m + 1)$).

Dans le cas particulier où (N, h) est une sphère canonique et où ϕ est non homotope à une application constante, la première partie de ce théorème avait été obtenue par Ramanathan [13].

1.3. REMARQUES. (i) L'hypothèse $\tau(\phi)^T = 0$, que vérifient en particulier les applications harmoniques, est vérifiée aussi par toutes les immersions homothétiques de $\mathbb{S}^m$ dans (N, h) qu'elles soient harmoniques ou non. En effet, la tension $\tau(\phi)$ d'une telle immersion est proportionnelle à sa courbure moyenne (qui est un champ normal).

(ii) Une conséquence du théorème 1.2 est que, si $\tau(\phi)^T = 0$ pour une application ϕ de $\mathbb{S}^m$ dans (N, h), alors il n'existe aucune transformation conforme non isométrique γ de $\mathbb{S}^m$ telle que $\tau(\phi \circ \gamma)^T = 0$. En particulier, l'orbite $G_m(\phi) = \{\phi \circ \gamma; \gamma \in G(m)\}$ d'une application différentiable ϕ de $\mathbb{S}^m$ dans (N, h) sous l'action du groupe $G(m)$, contient, modulo les isométries de $\mathbb{S}^m$, *au plus* une application harmonique.

1.4. *Preuve des théorèmes.* Pour tout $a \in \mathbb{R}^{m+1}$, on note $\bar{a}$ le champ conforme de $\mathbb{S}^m$ donné en tout point x de $\mathbb{S}^m$ par:

$$\bar{a}(x) = a - \langle x, a \rangle x. \tag{2}$$

On note $(\gamma_t^a)_t$ le groupe à un paramètre de difféomorphismes conformes de $\mathbb{S}^m$ engendré par le champ $\bar{a}$. On a alors (cf. [5]):

$$G(m) = \{r\gamma_t^a;\ r \in \mathrm{O}(m+1),\ t \in \mathbb{R}^+ \text{ et } a \in \mathbb{R}^{m+1} \backslash \{0\}\}. \tag{3}$$

Pour étudier la restriction de l'énergie à $G_m(\phi) = \{\phi \circ \gamma; \gamma \in G(m)\}$, il suffit donc de déterminer, pour tout $a \in \mathbb{R}^{m+1} \backslash \{0\}$, les variations de la fonction d'une variable réelle

$$f_a(t) = E(\phi \circ \gamma_t^a).$$

Or, la dérivée de f_a en un point $t \in \mathbb{R}$ est donnée par:

$$\begin{aligned} f_a'(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} E(\phi \circ \gamma_{t+s}^a)|_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} E(\phi \circ \gamma_t^a \circ \gamma_s^a)|_{s=0} \\ &= -\int_{\mathbb{S}^m} \langle \tau(\phi \circ \gamma_t^a), \mathrm{d}\phi(\mathrm{d}\gamma_t^a(\bar{a})) \rangle \, \mathrm{d}v \end{aligned} \tag{4}$$

où la dernière égalité provient de la formule de la variation première (1) appliquée à $\phi \circ \gamma_t^a$ et du fait que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} (\phi \circ \gamma_t^a \circ \gamma_s^a)|_{s=0} = \mathrm{d}\phi(\mathrm{d}\gamma_t^a(\bar{a})).$$

On a (cf. [3]):

$$\tau(\phi \circ \gamma_t^a) = \mathrm{d}\phi(\tau(\gamma_t^a)) + \mathrm{tr}_{\mathrm{can}} \nabla^\phi \mathrm{d}\phi(\mathrm{d}\gamma_t^a, \mathrm{d}\gamma_t^a), \tag{5}$$

Soit α_t^a la fonction positive sur $\mathbb{S}^m$ telle que $(\gamma_t^a)^* \mathrm{can} = \alpha_t^a \,\mathrm{can}$. On a alors

$$\mathrm{tr}_{\mathrm{can}} \nabla^\phi \mathrm{d}\phi(\mathrm{d}\gamma_t^a, \mathrm{d}\gamma_t^a) = \alpha_t^a \ \mathrm{tr}_{\mathrm{can}}(\nabla^\phi \mathrm{d}\phi) \circ \gamma_t^a = \alpha_t^a \tau(\phi) \circ \gamma_t^a. \tag{6}$$

D'autre part, γ_t^a est un difféomorphisme isométrique de $(\mathbb{S}^m, \alpha_t^a \,\mathrm{can})$ sur $(\mathbb{S}^m, \mathrm{can})$. On a donc, pour tous X, Y, champs de vecteurs sur $\mathbb{S}^m$:

$$\nabla_X^{\gamma_t^a} \mathrm{d}\gamma_t^a(Y) = D_{\mathrm{d}\gamma_t^a(X)}\, \mathrm{d}\gamma_t^a(Y) = \mathrm{d}\gamma_t^a(\tilde{D}_X Y),$$

où $\tilde{D}$ est la connexion de Levi–Civita de la métrique α_t^a can. Par suite, si $\{e_i\}$ est un repère orthonormé local au voisinage d'un point x de $\mathbb{S}^m$, alors on a

$$\tau(\gamma_t^a) = \sum_i \mathrm{d}\gamma_t^a(\tilde{D}_{e_i} e_i - D_{e_i} e_i).$$

Or, l'effet d'un changement conforme de la métrique sur la connexion de Levi–Civita est donné par:

$$\tilde{D}_X Y - D_X Y = \tfrac{1}{2}(\alpha_t^a)^{-1}(\langle X, \operatorname{grad} \alpha_t^a\rangle Y + \langle Y, \operatorname{grad} \alpha_t^a\rangle X - \langle X, Y\rangle \operatorname{grad} \alpha_t^a),$$

où grad α_t^a est le gradient de α_t^a pour la métrique can. D'où

$$\begin{aligned}\tau(\gamma_t^a) &= \tfrac{1}{2}(\alpha_t^a)^{-1}\, \mathrm{d}\gamma_t^a \left(2 \sum_i \langle e_i, \operatorname{grad} \alpha_t^a\rangle e_i - \sum_i \operatorname{grad} \alpha_t^a\right) \\ &= \frac{(2-m)}{2} (\alpha_t^a)^{-1}\, \mathrm{d}\gamma_t^a(\operatorname{grad} \alpha_t^a). \qquad (7)\end{aligned}$$

Le report de (6) et (7) dans (5) donne:

$$\tau(\phi \circ \gamma_t^a) = \frac{2-m}{2} (\alpha_t^a)^{-1}\, \mathrm{d}\phi(\mathrm{d}\gamma_t^a(\operatorname{grad} \alpha_t^a)) + \alpha_t^a \tau(\phi) \circ \gamma_t^a. \qquad (8)$$

D'après [6], on a pour tout $x \in \mathbb{S}^m$:

$$\alpha_t^a(x) = |a|^2(\operatorname{sh} t\langle x, a\rangle + |a| \operatorname{ch} t)^{-2}. \qquad (9)$$

D'où

$$\operatorname{grad} \alpha_t^a = -2|a|^2(\operatorname{sh} t\langle x, a\rangle + |a| \operatorname{ch} t)^{-3} \operatorname{sh} t\, \bar{a} = -\frac{2}{|a|}(\alpha_t^a)^{3/2} \operatorname{sh} t\, \bar{a}, \qquad (10)$$

et donc

$$\tau(\phi \circ \gamma_t^a) = \frac{(m-2)}{|a|} (\alpha_t^a)^{1/2} \operatorname{sh} t\, \mathrm{d}\phi(\mathrm{d}\gamma_t^a(\bar{a})) + \alpha_t^a \tau(\phi) \circ \gamma_t^a. \qquad (11)$$

Le report de (11) dans (4) donne, pour tout $a \in \mathbb{R}^{m+1} \backslash \{0\}$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f_a'(t) = \frac{(2-m)}{|a|} \operatorname{sh} t \int_{\mathbb{S}^m} (\alpha_t^a)^{1/2} |\mathrm{d}\phi(\mathrm{d}\gamma_t^a(\bar{a}))|^2 \, \mathrm{d}v$$
$$+ \int_{\mathbb{S}^m} \alpha_t^a \langle \tau(\phi) \circ \gamma_t^a, \mathrm{d}\phi(\mathrm{d}\gamma_t^a(\bar{a})) \rangle \, \mathrm{d}v. \tag{12}$$

Preuve de 1.1. On suppose $m \geqslant 3$ et ϕ harmonique non constante et on note $\mathrm{d}\phi(A)$ le sous-espace de $\Gamma(\phi)$ formé des champs $\mathrm{d}\phi(\bar{a})$, i.e.

$$\mathrm{d}\phi(A) = \{\mathrm{d}\phi(\bar{a});\, a \in \mathbb{R}^{m+1}\}.$$

Pour tout $a \in \mathbb{R}^{m+1}$, on a $\mathrm{d}\phi(\bar{a}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \phi \circ \gamma_t^a|_{t=0}$ et donc

$$H_\phi(\mathrm{d}\phi(\bar{a})) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} E(\phi \circ \gamma_t^a)|_{t=0} = f_a''(0).$$

La dérivée en $t = 0$ de (12) donne immédiatement (avec $\tau(\phi) = 0$):

$$H_\phi(\mathrm{d}\phi(\bar{a})) = f_a''(0) = \frac{(2-m)}{|a|} \int_{\mathbb{S}^m} |\mathrm{d}\phi(\bar{a})|^2 \, \mathrm{d}v. \tag{13}$$

(cette formule peut s'obtenir aussi à partir de la formule générale de la variation seconde et de la formule de Weitzenböck, cf. [2]). On en déduit que la forme H_ϕ est définie négative sur $\mathrm{d}\phi(A)$ et donc que

$$\mathrm{Ind}_E(\phi) \geqslant \dim \mathrm{d}\phi(A).$$

Si l'on considère l'application linéaire qui, à tout vecteur $a \in \mathbb{R}^{m+1}$ associe le champ $\mathrm{d}\phi(\bar{a}) \in \mathrm{d}\phi(A)$, on voit alors que

$$\dim \mathrm{d}\phi(A) = m + 1 - \dim\{a \in \mathbb{R}^{m+1}; \mathrm{d}\phi(\bar{a}) = 0\}.$$

Or, la condition $\mathrm{d}\phi(\bar{a}) = 0$ équivaut à dire que ϕ est constante sur les courbes intégrales de $\bar{a}$, i.e., pour tout $x \in \mathbb{S}^m$, l'application $t \mapsto \phi \circ \gamma_t^a(x)$ est constante. Cependant, si $a \neq 0$, alors, pour tout $x \in \mathbb{S}^m \backslash \{\pm a/|a|\}$, la limite de $\gamma_t^a(x)$ quand t tend vers l'infini est égale à $a/|a|$. Par suite, la nullité de $\mathrm{d}\phi(\bar{a})$ pour un $a \neq 0$, entraîne que ϕ est constante sur $\mathbb{S}^m$. En conclusion, on a $\{a; \mathrm{d}\phi(\bar{a}) = 0\} = \{0\}$, et donc $\dim \mathrm{d}\phi(A) = m + 1$, dès que ϕ est non constante.

Preuve de 1.2. L'hypothèse $\tau(\phi)^T = 0$ entraîne que le second terme de l'expression (12) donnant $f_a'(t)$ est nul et donc qu'on a, pour tout $a \in \mathbb{R}^{m+1}\backslash\{0\}$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f_a'(t) = \frac{(2-m)}{|a|} \operatorname{sht} \int_{\mathbb{S}^m} (\alpha_t^a)^{1/2} |\mathrm{d}\phi(\mathrm{d}\gamma_t^a(\bar{a}))|^2 \, \mathrm{d}v. \tag{14}$$

On en déduit que $f_a'(t) \leqslant 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et donc que f_a est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ (i.e. $f_a(t) = E(\phi \circ \gamma_t^a) \leqslant E(\phi) = f_a(0)$, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$). De plus, si ϕ est non constante et $m \geqslant 3$, alors f_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$. En effet, s'il existe $t_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que $f_a'(t_0) = 0$, alors on a (comme $\alpha_{t_0}^a \neq 0$ en tout point de $\mathbb{S}^m$) $\mathrm{d}\phi(\mathrm{d}\gamma_{t_0}^a(\bar{a})) = 0$. Mais, comme $(\gamma_t^a)_t$ est le flot de $\bar{a}$, on a $\mathrm{d}\gamma_{t_0}^a(\bar{a}) = \bar{a} \circ \gamma_{t_0}^a$. Cette dernière condition équivaut donc à $\mathrm{d}\phi(\bar{a} \circ \gamma_{t_0}^a) = 0$, c'est-à-dire à $\mathrm{d}\phi(\bar{a}) = 0$ ($\gamma_{t_0}^a$ est un difféomorphisme). Or, dans la preuve de 1.1, on a vu que si ϕ est non constante, alors il n'existe aucun vecteur non nul $a \in \mathbb{R}^{m+1}$ tel que le champ $\mathrm{d}\phi(\bar{a})$ soit identiquement nul sur $\mathbb{S}^m$. En conclusion, sous les hypothèses $m \geqslant 3$ et ϕ non constante, on a pour tout $a \in \mathbb{R}^{m+1}\backslash\{0\}$ et tout $t \in]0, +\infty[$, $E(\phi \circ \gamma_t^a) < E(\phi)$.

Soit maintenant une transformation conforme $\gamma = r\gamma_t^a \in G(m)$, où $r \in O(m+1)$, $t \in \mathbb{R}^+$ et $a \in \mathbb{R}^{m+1}\backslash\{0\}$. On a (comme $\tau(\phi \circ r) = \tau(\phi) \circ r$ et $E(\phi \circ r) = E(\phi)$):

$$E(\phi \circ \gamma) = E(\phi \circ r \circ \gamma_t^a) \leqslant E(\phi \circ r) = E(\phi).$$

De plus, si ϕ est non constante et $m \geqslant 3$, alors l'églité $E(\phi \circ \gamma) = E(\phi)$ ne peut avoir lieu, d'après ce qui précède, que si $t = 0$, c'est-à-dire si $\gamma = r \in O(m+1)$. □

1.5. REMARQUE. Les théorèmes 1.1 et 1.2 nous disent en fait que, sous les hypothèses $m \geqslant 3$ et ϕ harmonique non constante, la restriction de l'énergie à la variété $C_\phi = \{\phi \circ \gamma_1^a ; a \in \mathbb{R}^{m+1}\}$ de dimension $m+1$ et dont l'espace tangent en ϕ est précisément $\mathrm{d}\phi(A) = \{\mathrm{d}\phi(\bar{a}); a \in \mathbb{R}^{m+1}\}$, est une fonction qui admet ϕ pour *unique* point critique, que ce point critique est non dégénéré (le Hessien de la fonction est défini négatif sur $\mathrm{d}\phi(A)$), et qu'il correspond au maximum absolu et strict de l'énergie sur C_ϕ.

2. Applications harmoniques à valeurs dans l'espace projectif complexe

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser au cas particulier où la variété but est l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^d$ de dimension réelle $n = 2d$ muni de sa métrique canonique, dite de Fubini–Study, et de sa structure complexe canonique notée $\mathcal{J}$. Hormis les applications holomorphes de $\mathbb{S}^2$ dans $\mathbb{C}P^2$, l'application harmonique la plus naturelle de $\mathbb{S}^m$ dans $\mathbb{C}P^m$ est celle obtenue en composant l'injection canonique de l'espace projectif réel $\mathbb{R}P^m$ dans $\mathbb{C}P^m$ par le revêtement canonique de $\mathbb{R}P^m$ par $\mathbb{S}^m$. En effet, cette application, notée j_m, est une immersion homothétique, *totalement géodésique* (i.e. $\nabla^{j_m} \mathrm{d}j_m = 0$) et *totalement réelle* (une application $\phi: M \to \mathbb{C}P^d$ est dite totalement réelle si, pour tout $x \in M$, les sous-espaces $\mathrm{d}\phi(T_xM)$ et $\mathcal{J}\, \mathrm{d}\phi(T_xM)$ sont orthogonaux dans $T_{\phi(x)}\mathbb{C}P^d$).

Rappelons que toute application harmonique et homothétique ϕ entre deux variétés riemanniennes est aussi une *immersion minimale*, i.e. un point critique de la fonctionnelle "Volume" V. A ce titre, l'application ϕ possède un autre indice de Morse, noté $\mathrm{Ind}_V(\phi)$, et une autre nullité, $\mathrm{Nul}_V(\phi)$, définis de manière parallèle à $\mathrm{Ind}_E(\phi)$ et $\mathrm{Nul}_E(\phi)$.

Ainsi, pour l'application j_m qui fait partie de cette catégorie d'applications, nous avons la

2.1. PROPOSITION. *L'application canonique* $j_m: \mathbb{S}^m \to \mathbb{C}P^m$ *vérifie*

$$\mathrm{Ind}_E(j_m) = \begin{cases} (m+1)(m+4)/2 & si\ m \geqslant 3 \\ 6 & si\ m = 2, \end{cases} \qquad \mathrm{Nul}_E(j_m) = \begin{cases} m(m+2) & si\ m \geqslant 3 \\ 16 & si\ m = 2 \end{cases}$$

$$\mathrm{Ind}_V(j_m) = (m+1)(m+2)/2, \qquad \mathrm{Nul}_V(j_m) = \begin{cases} m(m+3)/2. & si\ m \geqslant 3 \\ 10 & si\ m = 2 \end{cases}$$

Il est bien connu (cf. [11] et [16]) qu'une application harmonique de $\mathbb{S}^2$ dans $\mathbb{C}P^2$ est stable si et seulement si elle est holomorphe ou antiholomorphe. Le théorème suivant montre que, parmi toutes les applications harmoniques non (anti-) holomorphes de $\mathbb{S}^2$ dans $\mathbb{C}P^2$, l'application $j_2: \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}P^2$ possède l'indice le plus petit.

2.2. THEOREME. *Toute application harmonique* ϕ *de* $\mathbb{S}^2$ *dans* $\mathbb{C}P^d$ *vérifiant* $\mathrm{Ind}_E(\phi) < 6$ (*ou* $\mathrm{Ind}_V(\phi) < 6$) *est holomorphe ou antiholomorphe.*

Rappelons à cet effet que toute application harmonique ϕ de $\mathbb{S}^2$ dans une variété riemannienne (N, h) est faiblement conforme (i.e. $\phi^*h = \frac{1}{2}|\mathrm{d}\phi|^2\,\mathrm{can}$), et que toute application harmonique et faiblement conforme d'une surface de Riemann compacte (M, g) dans (N, h) est une immersion minimale admettant au plus un nombre fini de points de branchement (cf. [3]).

Dans le cas où la dimension m est supérieure ou égale à 3, il est naturel de se poser la question suivante: parmi toutes les immersions harmoniques (resp. les immersions minimales homothétiques) de $\mathbb{S}^m$ dans $\mathbb{C}P^d$, l'application $j_m: \mathbb{S}^m \hookrightarrow \mathbb{C}P^m$ possède-*t*-elle l'indice le plus petit? Une réponse partielle à cette question est donnée par le

2.3. THEOREME. (i) *Toute immersion harmonique totalement réelle ϕ de $\mathbb{S}^m$, $m \geqslant 3$, dans $\mathbb{C}P^d$ vérifie*

$$\mathrm{Ind}_E(\phi) \geqslant \mathrm{Ind}_E(j_m) = (m+1)(m+4)/2.$$

(ii) *Toute immersion homothétique minimale et totalement réelle ϕ de $\mathbb{S}^m$ dans $\mathbb{C}P^d$ vérifie*

$$\mathrm{Ind}_V(\phi) \geqslant \mathrm{Ind}_V(j_m) = (m+1)(m+2)/2$$

La partie (ii) de ce théorème est un cas particulier du résultat suivant.

2.4. THEOREME. *Toute immersion homothétique minimale et totalement réelle ϕ d'une variété riemannienne compacte (M, g) dans $\mathbb{C}P^d$ vérifie*

$$\mathrm{Min}(\mathrm{Ind}_E(\phi), \mathrm{Ind}_V(\phi)) \geqslant \mathrm{Ind}_E(I) + \mathrm{Nul}_E(I),$$

où I est d'identité de M.

A toute application harmonique ϕ d'une variété riemannienne compacte (M, g) dans une variété riemannienne (N, h) est associé un opérateur noté J_ϕ, tel que, pour tous V, $W \in \Gamma(\phi)$, on ait

$$H_\phi(V, W) = \int_M \langle J_\phi V, W\rangle \, \mathrm{d}v.$$

Cet opérateur, dit *opérateur de Jacobi* de ϕ, est donné par la formule (cf. [3]):

$$J_\phi(V) = -\mathrm{tr}_g \nabla^\phi \nabla^\phi V - \mathrm{Ric}^\phi(V), \tag{15}$$

où $\mathrm{Ric}^\phi(V) = \mathrm{tr}_g R^N(\mathrm{d}\phi(\,.\,), V)\,\mathrm{d}\phi(\,.\,)$, R^N étant le tenseur de courbure de (N, h). Ainsi, si $N_-(J_\phi)$ et $N_0(J_\phi)$ désignent respectivement le nombre de valeurs propres strictement négatives de J_ϕ, comptées avec leurs multiplicités, et la dimension de $\mathrm{Ker}\, J_\phi$, on a alors

$$\mathrm{Ind}_E(\phi) = N_-(J_\phi) \quad \text{et} \quad \mathrm{Nul}_E(\phi) = N_0(J_\phi). \tag{16}$$

Les trois lemmes suivants nous seront utiles pour la suite.

2.5. LEMME (cf. [2]). *Pour tout champ de vecteurs X sur M on a*:

$$J_\phi(\mathrm{d}\phi(X)) = \mathrm{d}\phi(J_I(X)) - 2\,\mathrm{tr}_g \nabla^\phi \,\mathrm{d}\phi(D\,.\,X, .),$$

où I est l'identité de M.

La preuve de ce lemme est une application de la formule de Weitzenböck.

2.6. LEMME. *Si ϕ est totalement géodésique et homothétique, alors on a*:

$$\mathrm{Ind}_E(\phi) - \mathrm{Ind}_V(\phi) = \mathrm{Ind}_E(I)$$

et

$$\mathrm{Nul}_E(\phi) - \mathrm{Nul}_V(\phi) = \mathrm{Nul}_E(I),$$

où I est l'identité de M.

Preuve. Le lemme précédent nous dit, puisque ϕ est totalement géodésique, que le sous-espace $\Gamma^T(\phi) = \{V \in \Gamma(\phi);\ V^\perp = 0\}$ est stable par J_ϕ. Comme J_ϕ est auto-adjoint (pour le produit scalaire L^2), il en est de même du sous-espace $\Gamma^\perp(\phi) = \{V \in \Gamma(\phi);\ V^T = 0\}$, complémentaire orthogonal de $\Gamma^T(\phi)$, et on a donc

$$\mathrm{Ind}_E(\phi) = N_-(J_\phi) = N_-(J_\phi/\Gamma^T(\phi)) + N_-(J_\phi/\Gamma^\perp(\phi)) \tag{17}$$

et

$$\mathrm{Nul}_E(\phi) = N_0(J_\phi) = N_0(J_\phi/\Gamma^T(\phi)) + N_0(J_\phi/\Gamma^\perp(\phi)). \tag{18}$$

Or, pour tout champ $V = \mathrm{d}\phi(X) \in \Gamma^T(\phi)$, où X est un champ de vecteurs sur M, nous avons (par le lemme précédent)

$$J_\phi(\mathrm{d}\phi(X)) = \mathrm{d}\phi(J_I(X)).$$

Comme ϕ est une immersion, nous en déduisons que les spectres de $J_\phi|\Gamma^T(\phi)$ et de J_I sont identiques et donc que

$$N_-(J_\phi/\Gamma^T(\phi)) = N_-(J_I) = \mathrm{Ind}_E(I) \tag{19}$$

et

$$N_0(J_\phi/\Gamma^T(\phi)) = N_0(J_I) = \mathrm{Nul}_E(I). \tag{20}$$

Par ailleurs, l'opérateur de Jacobi K_ϕ de l'application ϕ considérée comme immersion minimale (cf. [14]), est proportionnel, dans le cas où ϕ est homothétique et totalement géodésique, à $J_\phi/\Gamma^\perp(\phi)$. D'où

$$N_-(J_\phi/\Gamma^\perp(\phi)) = N_-(K_\phi) = \mathrm{Ind}_V(\phi) \tag{21}$$

et

$$N_0(J_\phi/\Gamma^\perp(\phi)) = N_0(K_\phi) = \mathrm{Nul}_V(\phi). \tag{22}$$

Le report de (19), (20), (21), (22) dans (17) et (18) donne le résultat. □

2.7. LEMME. *Si ϕ est une application harmonique de (M, g) dans $\mathbb{C}P^d$, alors, pour tout $V \in \Gamma(\phi)$, on a*

$$J_\phi(\mathscr{J}V) = \mathscr{J}J_\phi(V) + \mathrm{tr}_g(\langle \mathscr{J}V, \mathrm{d}\phi(\,.\,)\rangle\, \mathrm{d}\phi(\,.\,) - \langle V, \mathrm{d}\phi(\,.\,)\rangle \mathscr{J}\, \mathrm{d}\phi(\,.\,)).$$

En particulier, si ϕ est faiblement conforme, alors, pour tout champ de vecteurs X sur M, on a

$$J_\phi(\mathscr{J}\,\mathrm{d}\phi(X)) = \mathscr{J}J_\phi(\mathrm{d}\phi(X)) - \frac{|\mathrm{d}\phi|^2}{m}\ (\mathscr{J}\,\mathrm{d}\phi(X))^\perp.$$

Preuve. Puisque $\mathscr{J}$ commute avec ∇^ϕ, on a donc pour tout $V \in \Gamma(\phi)$,

$$\begin{aligned} J_\phi(\mathscr{J}V) - \mathscr{J}J_\phi(V) &= -\mathrm{tr}_g\nabla^\phi\nabla^\phi\mathscr{J}V\text{-}\mathrm{Ric}^\phi(\mathscr{J}V) + \mathscr{J}(\mathrm{tr}_g\nabla^\phi\nabla^\phi V + \mathrm{Ric}^\phi(V)) \\ &= \mathscr{J}\,\mathrm{Ric}^\phi(V) - \mathrm{Ric}^\phi(\mathscr{J}V). \end{aligned} \tag{23}$$

Or, le tenseur de courbure de $\mathbb{C}P^d$ est donné par

$$R(X, Y)X = \tfrac{1}{4}(|X|^2 Y - \langle X, Y\rangle X - 3\langle X, \mathscr{J}Y\rangle \mathscr{J}X).$$

Il en découle:

$$\mathrm{Ric}^\phi(V) = \tfrac{1}{4}[|\mathrm{d}\phi|^2 V - \mathrm{tr}_g(\langle V, \mathrm{d}\phi(\,.\,)\rangle\, \mathrm{d}\phi(\,.\,) + 3\langle \mathscr{J}V, \mathrm{d}\phi(\,.\,)\rangle \mathscr{J}\,\mathrm{d}\phi(\,.\,))], \tag{24}$$

et donc

$$\mathscr{J}\,\mathrm{Ric}^\phi(V) - \mathrm{Ric}^\phi(\mathscr{J}V) = \mathrm{tr}_g(\langle \mathscr{J}V, \mathrm{d}\phi(\,.\,)\rangle\, \mathrm{d}\phi(\,.\,) - \langle V, \mathrm{d}\phi(\,.\,)\rangle \mathscr{J}\,\mathrm{d}\phi(\,.\,)). \tag{25}$$

D'où la première formule de l'énoncé. Supposons maintenant ϕ faiblement conforme et considérons un point x de M tel que $|\mathrm{d}\phi|^2(x) \neq 0$ et une base orthonormée $\{e_1, \ldots, e_m\}$ de T_xM. Comme ϕ est faiblement conforme, la famille $\{\sqrt{m}|\mathrm{d}\phi|^{-1}\mathrm{d}\phi(e_i)\}_{i\leqslant m}$ est une base orthonormée de $\mathrm{d}\phi(T_xM)$ et on a

$$\mathrm{tr}_g\langle \mathscr{J} V, \mathrm{d}\phi(\,.\,)\rangle\, \mathrm{d}\phi(\,.\,) = \sum_i \langle \mathscr{J} V, \mathrm{d}\phi(e_i)\rangle\, \mathrm{d}\phi(e_i) = \frac{|\mathrm{d}\phi|^2}{m} (\mathscr{J} V)^T. \tag{26}$$

De même, on a

$$\mathrm{tr}_g\langle V, \mathrm{d}\phi(\,.\,)\rangle \mathscr{J}\, \mathrm{d}\phi(\,.\,) = \mathscr{J} \sum_i \langle V, \mathrm{d}\phi(e_i)\rangle\, \mathrm{d}\phi(e_i) = \frac{|\mathrm{d}\phi|^2}{m} \mathscr{J}(V^T). \tag{27}$$

D'où, pour $V = \mathrm{d}\phi(X)$, on a

$$\begin{aligned} J_\phi(\mathscr{J}\, \mathrm{d}\phi(X)) - \mathscr{J} J_\phi(\mathrm{d}\phi(X)) &= \frac{|\mathrm{d}\phi|^2}{m} ((\mathscr{J}\, \mathrm{d}\phi(X))^T - \mathscr{J}\, \mathrm{d}\phi(X)) \\ &= -\frac{|\mathrm{d}\phi|^2}{m} (\mathscr{J}\, \mathrm{d}\phi(X))^\perp. \end{aligned}$$ □

2.8. *Preuve de 2.1.* L'application j_m est homothétique, totalement géodésique, totalement réelle et on a $\Gamma^\perp(j_m) = \mathscr{J}\Gamma^T(j_m)$. Nous avons donc (cf. (21) et (22))

$$\mathrm{Ind}_V(j_m) = N_-(J_j|\mathscr{J}\Gamma^T(j)) \quad \text{et} \quad \mathrm{Nul}_V(j_m) = N_0(J_j|\mathscr{J}\Gamma^T(j)).$$

Pour tout champ $V = \mathscr{J}\, \mathrm{d}j(X) \in \mathscr{J}\Gamma^T(j)$ on a (lemme 2.7)

$$J_j(\mathscr{J}\, \mathrm{d}j(X)) = \mathscr{J} J_j(\mathrm{d}j(X)) - 4\mathscr{J}\, \mathrm{d}j(X)$$

(en effet, on a $|\mathrm{d}j_m|^2 = 4m$). Comme $J_j(\mathrm{d}j(X)) = \mathrm{d}j(J_I(X))$, où I est l'identité de $\mathbb{S}^m$ (lemme 2.5), on a donc

$$J_j(\mathscr{J}\, \mathrm{d}j(X)) = \mathscr{J}\, \mathrm{d}j(J_I(X) - 4X).$$

Si l'on note Δ_1 le laplacien de Hodge-de Rham agissant sur les champs de vecteurs (ou les 1-formes) de $\mathbb{S}^m$, alors la formule de Weitzenböck donne

$$-\mathrm{tr}_{\mathrm{can}} D^2 X = \Delta_1 X - (m-1)X$$

et donc

$$J_I(X) = -\mathrm{tr}_{\mathrm{can}} D^2 X - (m-1)X = \Delta_1 X - 2(m-1)X \tag{28}$$

On en déduit

$$J_j(\mathscr{J}\,\mathrm{d}j(X)) = \mathscr{J}\,\mathrm{d}j(\Delta_1 X - 2(m+1)X)$$

et donc que

$$\mathrm{Ind}_V(j_m) = N_-(\Delta_1 - 2(m+1)) \quad \text{et} \quad \mathrm{Nul}_V(j_m) = N_0(\Delta_1 - 2(m+1)) \tag{29}$$

Or, pour $m \geqslant 3$, les premières valeurs propres de Δ_1 sont (cf. [8] et [9]): $\lambda_1(\Delta_1) = m$, de multiplicité $m+1$, l'espace propre associé étant celui des champs conformes purs (i.e. les gradients des premières harmoniques sphériques), $\lambda_2(\Delta_1) = 2(m-1)$ de multiplicité $m(m+1)/2$, l'espace propre associé étant celui des champs de Killing, et $\lambda_3(\Delta_1) = 2(m+1)$ de multiplicité $m(m+3)/2$, l'espace propre associé étant celui des gradients des deuxièmes harmoniques sphériques. Pour $\mathbb{S}^2$, on a $\lambda_1(\Delta_1) = 2$, de multiplicité 6, et $\lambda_2(\Delta_1) = 6$ de multiplicité 10. D'où

$$\mathrm{Ind}_V(j_m) = m + 1 + m(m+1)/2 = (m+1)(m+2)/2$$

et

$$\mathrm{Nul}_V(j_m) = m(m+3)/2 \ \textit{si}\ m \geqslant 3, \text{ et } \mathrm{Nul}_V(j_2) = 10.$$

Pour obtenir les valeurs de $\mathrm{Ind}_E(j_m)$ et $\mathrm{Nul}_E(j_m)$, il suffit d'appliquer le lemme 2.6 en remarquant qu'on a, d'après ce qui précède (cf. aussi [17]):

$$\mathrm{Ind}_E(I) = N_-(\Delta_1 - 2(m-1)) = \begin{cases} m+1 & \text{si } m \geqslant 3 \\ 0 & \text{si } m = 2 \end{cases}$$

$$\mathrm{Nul}_E(I) = N_0(\Delta_1 - 2(m-1)) = \begin{cases} m(m+1)/2 & \text{si } m \geqslant 3 \\ 6 & \text{si } m = 2. \end{cases} \qquad \square$$

2.9. *Preuve de 2.2.* Notons C l'espace des champs conformes de $\mathbb{S}^2$ et considérons le sous-espace $\mathscr{J}\,\mathrm{d}\phi(C) = \{\mathscr{J}\,\mathrm{d}\phi(X);\ X \in C\}$ de $\Gamma(\phi)$. La dimension de cet espace est donnée par la formule

$$\dim \mathscr{J}\,\mathrm{d}\phi(C) = \dim C - \dim\{X \in C;\ \mathscr{J}\,\mathrm{d}\phi(X) = 0\}.$$

Or, il est bien connu que toute application harmonique de $\mathbb{S}^2$ dans une variété riemannienne est faiblement conforme, i.e. pour tout champ X sur $\mathbb{S}^2$,

$$|\mathrm{d}\phi(X)|^2 = \tfrac{1}{2}|\mathrm{d}\phi|^2\,|X|^2.$$

De plus, l'ensemble $\{x \in \mathbb{S}^2; |\mathrm{d}\phi|^2(x) = 0\}$ des points de branchement de ϕ, i.e. les points où ϕ n'est pas une immersion, est fini. Par suite, $\mathcal{J}\,\mathrm{d}\phi(X) = 0$ entraîne $X = 0$ et donc $\{X \in C; \mathcal{J}\,\mathrm{d}\phi(X) = 0\} = \{0\}$. D'où

$$\dim \mathcal{J}\,\mathrm{d}\phi(C) = \dim C = 6. \tag{30}$$

Pour tout $X \in C$, on a (lemme 2.7)

$$J_\phi(\mathcal{J}\,\mathrm{d}\phi(X)) = \mathcal{J} J_\phi(\mathrm{d}\phi(X)) - \tfrac{1}{2}|\mathrm{d}\phi|^2(\mathcal{J}\,\mathrm{d}\phi(X))^\perp$$

Or, en dimension 2, les champs $\mathrm{d}\phi(X)$, $X \in C$, sont des champs de Jacobi de ϕ, i.e. $J_\phi(\mathrm{d}\phi(X)) = 0$. En effet, pour toute transformation conforme γ de la surface source, l'application $\phi \circ \gamma$ est encore harmonique. On en déduit,

$$J_\phi(\mathcal{J}\,\mathrm{d}\phi(X)) = -\tfrac{1}{2}|\mathrm{d}\phi|^2(\mathcal{J}\,\mathrm{d}\phi(X))^\perp \tag{31}$$

et

$$H_\phi(\mathcal{J}\,\mathrm{d}\phi(X)) = -\frac{1}{2}\int_{S^2} |\mathrm{d}\phi|^2\,|(\mathcal{J}\,\mathrm{d}\phi(X))^\perp|^2\,\mathrm{d}v \tag{32}$$

Deux cas seulement sont possibles. Ou bien H_ϕ est définie négative sur $\mathcal{J}\,\mathrm{d}\phi(C)$, auquel cas on a $\mathrm{Ind}_E(\phi) \geqslant \dim \mathcal{J}\,\mathrm{d}\phi(C) = 6$. Ou bien il existe un champ non nul $X \in C$ tel que $(\mathcal{J}\,\mathrm{d}\phi(X))^\perp = 0$. Or l'existence d'un tel champ entraîne que, pour tout $x \in \Omega = \{x \in \mathbb{S}^2; \mathrm{d}\phi(X(x)) \neq 0\}$, le sous-espace $\mathrm{d}\phi(T_x\mathbb{S}^2)$ est stable par $\mathcal{J}$. En effet, $(\mathcal{J}\,\mathrm{d}\phi(X))^\perp = 0$ entraîne que $\mathrm{d}\phi(T_x\mathbb{S}^2)$ est engendré par les vecteurs $\mathrm{d}\phi(X(x))$ et $\mathcal{J}\,\mathrm{d}\phi(X(x))$. Nous pouvons donc définir une structure complexe $\mathcal{J}_1$ sur Ω en posant pour tout $x \in \Omega$ et tout $v \in T_x\Omega$,

$$\mathcal{J}_1 v = (\mathrm{d}\phi_x)^{-1}\mathcal{J}\,\mathrm{d}\phi_x(v).$$

La restriction de ϕ à Ω est clairement holomorphe pour $\mathcal{J}_1$ (i.e. $\mathrm{d}\phi \circ \mathcal{J}_1 = \mathcal{J} \circ \mathrm{d}\phi$). Or, sur un espace de dimension 2, l'espace des structures complexes est de dimension 1, et comme $\mathcal{J}_1$ est isométrique (i.e. $|\mathcal{J}_1 v| = |v|$ pour tout $v \in T\Omega$), on a donc en notant $\mathcal{J}_0$ la structure complexe canonique de $\mathbb{S}^2$, $\mathcal{J}_1 = \pm\mathcal{J}_0$ sur chaque composante connexe de Ω. D'où, dans chacune de ces composantes connexes, ϕ est holomorphe ou antiholomorphe pour $\mathcal{J}_0$. Cependant, si une application harmonique ϕ est holomorphe ou antiholomorphe dans un ouvert non vide de $\mathbb{S}^2$, alors elle l'est en tout point de $\mathbb{S}^2$ (résultat connu de Siu [15]). En conclusion, le second cas ci-dessus correspond bien à celui où ϕ est holomorphe ou antiholomorphe. La seconde partie du théorème 2.2, celle concernant $\mathrm{Ind}_V(\phi)$, découle du lemme suivant

2.10. LEMME. *Soit M une surface de Riemann compacte. Pour toute application harmonique faiblement conforme ϕ de M dans une variété riemannienne (N, h), on a*

$$\mathrm{Ind}_V(\phi) \geqslant \mathrm{Ind}_E(\phi).$$

Preuve. En dimension 2, on a pour toute application ψ de M dans N,

$$V(\psi) \leqslant E(\psi)$$

où l'égalité a lieu si et seulement si ψ est faiblement conforme (ceci résulte de la simple application de la formule de Minkowski).

Ainsi, pour toute variation $(\phi_t)_t$ de ϕ on a

$$V(\phi_t) \leqslant E(\phi_t)$$

pour tout t. Le développement de Taylor à l'ordre 2 en $t = 0$ de $V(\phi_t)$ et de $E(\phi_t)$ donne, avec $V(\phi) = E(\phi)$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(\phi_t)|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E(\phi_t)|_{t=0} = 0$,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} V(\phi_t)|_{t=0} \leqslant \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} E(\phi_t)|_{t=0}.$$

On en déduit que, si l'on note Q_ϕ la variation seconde de la fonctionnelle volume en ϕ, on a alors, pour tout $V \in \Gamma(\phi)$

$$Q_\phi(V) \leqslant H_\phi(V),$$

le résultat en découle immédiatement. □

2.11. REMARQUE. Sans rien changer à la preuve du théorème 2.2, nous pouvons énoncer le résultat plus général suivant: Toute application harmonique faiblement conforme non (anti-) holomorphe ϕ d'une surface de Riemann compacte M dans $\mathbb{C}P^d$ vérifie.

$$\mathrm{Ind}_V(\phi) \geqslant \mathrm{Ind}_E(\phi) \geqslant \dim C$$

où C est l'espace des champs conformes de M.

2.12. *Preuve de 2.3.* Notons K l'espace des champs de Killing de $\mathbb{S}^m$. Le sous-espace $A = \{\bar{a}; a \in R^{m+1}\}$, défini au paragraphe précédent, n'est autre que le complémentaire orthogonal (pour le produit scalaire L^2) de K dans l'espace C des champs conformes de $\mathbb{S}^m$. Nous allons montrer que, pour toute application harmonique totalement réelle ϕ de $\mathbb{S}^m$, $m \geqslant 3$, dans $\mathbb{C}P^d$, la forme H_ϕ est définie négative sur le sous-espace $F = \mathrm{d}\phi(A) + \mathscr{J}\,\mathrm{d}\phi(A) + \mathscr{J}\,\mathrm{d}\phi(K)$. En effet, pour tous $\bar{a}, \bar{b} \in A$ et tout $X \in K$, on a ([2] et lemme 2.7):

$$J_\phi(\mathrm{d}\phi(\bar{a})) = \frac{(2-m)}{|a|}\,\mathrm{d}\phi(\bar{a}), \tag{33}$$

$$\begin{aligned} J_\phi(\mathscr{J}\,\mathrm{d}\phi(\bar{b})) &= \mathscr{J} J_\phi\,\mathrm{d}\phi(\bar{b}) \\ &\quad + \sum_i (\langle \mathscr{J}\,\mathrm{d}\phi(\bar{b}), \mathrm{d}\phi(e_i)\rangle\, \mathrm{d}\phi(e_i) - \langle \mathrm{d}\phi(\bar{b}), \mathrm{d}\phi(e_i)\rangle \mathscr{J}\,\mathrm{d}\phi(e_i)) \\ &= \frac{(2-m)}{|a|}\,\mathscr{J}\,\mathrm{d}\phi(\bar{b}) - \sum_i \langle \mathrm{d}\phi(\bar{b}), \mathrm{d}\phi(e_i)\rangle \mathscr{J}\,\mathrm{d}\phi(e_i) \end{aligned} \tag{34}$$

(car ϕ est totalement réelle),

$$\mathscr{J}_\phi(\mathscr{J}\,\mathrm{d}\phi(X)) = \cdots = -\sum_i \langle \mathrm{d}\phi(X), \mathrm{d}\phi(e_i)\rangle \mathscr{J}\,\mathrm{d}\phi(e_i) \tag{35}$$

(car $J_\phi\,\mathrm{d}\phi(X) = 0$ pour X de Killing), où $\{e_i\}$ est un repère orthonormé local de $\mathbb{S}^m$. D'où, si $V = \mathrm{d}\phi(\bar{a}) + \mathscr{J}\,\mathrm{d}\phi(\bar{b}) + \mathscr{J}\,\mathrm{d}\phi(X) \in F$, alors on a

$$\begin{aligned} \langle J_\phi(V), V\rangle = \frac{(2-m)}{|a|}\,|\mathrm{d}\phi(\bar{a})|^2 &+ \frac{(2-m)}{|a|}\,|\mathrm{d}\phi(\bar{b})|^2 - \sum_i \langle \mathrm{d}\phi(\bar{b}), \mathrm{d}\phi(e_i)\rangle^2 \\ &+ \frac{(2-m)}{|a|}\,\langle \mathrm{d}\phi(\bar{b}), \mathrm{d}\phi(X)\rangle \\ &- 2\sum_i \langle \mathrm{d}\phi(\bar{b}), \mathrm{d}\phi(e_i)\rangle\langle \mathrm{d}\phi(X), \mathrm{d}\phi(e_i)\rangle \\ &- \sum_i \langle \mathrm{d}\phi(X), \mathrm{d}\phi(e_i)\rangle^2. \end{aligned}$$

On a donc en fin de compte

$$\begin{aligned} \langle J_\phi(V), V\rangle = \frac{(2-m)}{|a|}\,(|\mathrm{d}\phi(\bar{a})|^2 + |\mathrm{d}\phi(\bar{b})|^2) - \sum_i \langle \mathrm{d}\phi(X) + \mathrm{d}\phi(\bar{b}), \mathrm{d}\phi(e_i)\rangle^2 \\ + \frac{(2-m)}{|a|}\,\langle \mathrm{d}\phi(\bar{b}), \mathrm{d}\phi(X)\rangle. \end{aligned} \tag{36}$$

Or, pour tout $\bar{b} \in A$ et tout $X \in K$ on a

$$\int_{\mathbb{S}^m} \langle \mathrm{d}\phi(\bar{b}), \mathrm{d}\phi(X) \rangle \, \mathrm{d}v = 0. \tag{37}$$

En effet, les sous-espaces $\mathrm{d}\phi(A)$ et $\mathrm{d}\phi(K)$ sont orthogonaux (pour le produit scalaire L^2) car ce sont des sous-espaces propres de l'opérateur symétrique J_ϕ associés respectivement aux valeurs propres $(2-m)$ et 0. Par suite, (36) donne

$$H_\phi(V) = \int_{\mathbb{S}^m} \langle J_\phi(V), V \rangle \, \mathrm{d}v \leqslant 0.$$

De plus, l'égalité $H_\phi(V) = 0$ entraîne qu'on a, en tout point de $\mathbb{S}^m$,

$$|\mathrm{d}\phi(\bar{a})|^2 = |\mathrm{d}\phi(\bar{b})|^2 = \sum_i \langle \mathrm{d}\phi(X), \mathrm{d}\phi(e_i) \rangle^2 = 0$$

et donc que

$$V = \mathrm{d}\phi(\bar{a}) = \mathrm{d}\phi(\bar{b}) = \mathrm{d}\phi(X) = 0.$$

En conclusion, la forme H_ϕ est bien définie négative sur F et on a donc

$$\mathrm{Ind}_E(\phi) \geqslant \dim F. \tag{38}$$

Or, les sous-espaces $\mathrm{d}\phi(A)$, $\mathscr{J}\,\mathrm{d}\phi(A)$ et $\mathscr{J}\,\mathrm{d}\phi(K)$ sont orthogonaux deux à deux (car ϕ est totalement réelle et $\mathrm{d}\phi(A)$ et $\mathrm{d}\phi(K)$ sont toujours orthogonaux comme nous venons de le voir), on a donc
$\dim F = 2 \dim \mathrm{d}\phi(A) + \dim \mathrm{d}\phi(K)$.

Au paragraphe 1, à la fin de la preuve de 1.1, nous avons montré que $\dim \mathrm{d}\phi(A) = \dim A = m + 1$ dès que ϕ est non constante. Par ailleurs, l'hypothèse "ϕ est une immersion" nous permet d'avoir $\dim \mathrm{d}\phi(K) = \dim K = m(m+1)/2$ et donc

$$\dim F = (m+1)(m+4)/2.$$

Ceci achève la preuve de la partie (i) du théorème 2.3. La partie (ii) de ce théorème découlera du théorème 2.4. □

2.13. *Preuve de 2.4.* Soit F un sous-espace de dimension $\mathrm{Ind}_E(I) + \mathrm{Nul}_E(I)$ de l'espace $\Gamma(I)$ des champs de vecteurs sur M tel que H_I soit négative sur

F (i.e. $H_I(X) \leqslant 0$ pour tout $X \in F$). Pour tout $X \in F$ on a (lemme 2.7)

$$J_\phi(\mathscr{I}\,\mathrm{d}\phi(X)) = \mathscr{I} J_\phi(\mathrm{d}\phi(X)) - \frac{|\mathrm{d}\phi|^2}{m}(\mathscr{I}\,\mathrm{d}\phi(X))^\perp,$$

et donc

$$\langle J_\phi(\mathscr{I}\,\mathrm{d}\phi(X)), \mathscr{I}\,\mathrm{d}\phi(X)\rangle = \langle J_\phi(\mathrm{d}\phi(X)), \mathrm{d}\phi(X)\rangle - \frac{|\mathrm{d}\phi|^2}{m}|(\mathscr{I}\,\mathrm{d}\phi(X))^\perp|^2. \tag{39}$$

Comme ϕ est homothétique, la 2-forme $\nabla^\phi \mathrm{d}\phi$ prend ses valeurs dans le fibré normal de ϕ et on a donc, d'après le lemme 2.5,

$$\langle J_\phi\,\mathrm{d}\phi(X), \mathrm{d}\phi(X)\rangle = \langle \mathrm{d}\phi(J_I(X)), \mathrm{d}\phi(X)\rangle = \frac{|\mathrm{d}\phi|^2}{m}\langle J_I(X), X\rangle. \tag{40}$$

De (39) et (40) on déduit

$$\begin{aligned} H_\phi(\mathscr{I}\,\mathrm{d}\phi(X)) &= \frac{|\mathrm{d}\phi|^2}{m}\left(H_I(X) - \int_M |(\mathscr{I}\,\mathrm{d}\phi(X))^\perp|^2\,\mathrm{d}v\right) \\ &\leqslant -\frac{|\mathrm{d}\phi|^2}{m}\int_M |(\mathscr{I}\,\mathrm{d}\phi(X))^\perp|^2\,\mathrm{d}v. \end{aligned} \tag{41}$$

Comme ϕ est totalement réelle, on a $(\mathscr{I}\,\mathrm{d}\phi(X))^\perp = \mathscr{I}\,\mathrm{d}\phi(X)$. La forme H_ϕ est donc définie négative sur le sous-espace $\mathscr{I}\,\mathrm{d}\phi(F)$ et on a

$$\mathrm{Ind}_E(\phi) \geqslant \dim \mathscr{I}\,\mathrm{d}\phi(F) = \dim F = \mathrm{Ind}_E(I) + \mathrm{Nul}_E(I).$$

Pour montrer que $\mathrm{Ind}_V(\phi)$ est lui aussi minorée par $\dim F$, il suffit de savoir que (cf. [7]), pour tout champ normal $V \in \Gamma^N(\phi)$, la variation seconde $Q_\phi(V)$ de la fonctionnelle volume en ϕ dans la direction de V est proportionnelle à $H_\phi(V) - 2\int_M |(\nabla^\phi V)^\perp|^2\,\mathrm{d}v$. □

2.14. REMARQUE. Dans l'assertion (i) du théorème 2.3, il suffit de supposer ϕ de rang m en au moins un point de $\mathbb{S}^m$ pour avoir la minoration de l'indice de ϕ par $(m+1)(m+4)/2$. En effet, d'après la preuve de 2.3, cette minoration de l'indice s'obtient dès que l'on a $\dim \mathrm{d}\phi(K) = \dim K$, où K est l'espace des champs de Killing de $\mathbb{S}^m$. Or, un champ $X \in K$ qui s'annule au voisinage d'un point x est identiquement nul sur $\mathbb{S}^m$. Par suite, on a $\{X \in K; \mathrm{d}\phi(X) = 0\} = \{0\}$, et donc $\dim \mathrm{d}\phi(K) = \dim K$, dès que ϕ est une immersion en un point x de $\mathbb{S}^m$.

References

[1] Burns, D., Burstall, F., de Bartolomeis, P. and Rawnsley, J., Stability of harmonic maps of Kähler manifolds, *J. Diff. Geom.* 30 (1989) 579–594.

[2] Eells, J. and Lemaire, L., Selected topics in harmonic maps, C.B.M.S. Regional Conf. Ser. 50, A.M.S., Providence (1983).

[3] Eells, J. and Lemaire, L., A report on harmonic maps, *Bull. London Math. Soc.* 10 (1978) 1–68.

[4] El Soufi, A., Applications harmoniques, immersions minimales et transformations conformes de la sphère, *Compositio Math.* 85(3) (1993).

[5] El Soufi, A. and Ilias S., Immersions minimales, première valeur propre du Laplacien et volume conforme, *Math. Ann.* 275 (1986) 257–267.

[6] El Soufi, A. and Ilias, S., Une inégalité du type "Reilly" pour les sous-variétés de l'espace hyperbolique, *Comment. Math. Helv.* 67 (1992) 167–181.

[7] Ferreira, M. J., Morse indices for certain harmonic maps of surfaces, *Bull Soc. Math. Belg.* B36 (1984) 131–153.

[8] Gallot, S. and Meyer, D., Opérateur de courbure et Laplacien des formes différentielles d'une variété riemannienne, *J. Math. Pures Appl.* 54 (1975) 259–289.

[9] Iwasaki, I. and Katase, K., On the spectra of Laplace operator on $\Lambda^*(\mathbb{S}^n)$, *Proc. Japan. Acad.* 55, A (1979) 141–145.

[10] Lawson, H. B. and Simons, J, On stable currents and their application to global problems in real and complex geometry, *Ann. of Math.* 98(2) (1973) 427–450.

[11] Lichnerowicz, A., Applications harmoniques et variétés Kählériennes, *Sympos. Math.* 3 (1970) 341–402.

[12] Ohnita, Y. and Udagawa, S., Stability of harmonic maps from Riemann surfaces to compact Hermitian symmetric spaces, *Tokyo J. Math.* 10 (1987) 385–390.

[13] Ramanathan, J., A remark on the energy of harmonic maps between spheres, *Roky Mountain J. Math.* 16 (1986) 783–790.

[14] Simons, J., Minimal varieties in Riemannian manifolds, *Ann. of Math.* 88 (1968) 62–105.

[15] Siu, Y. T., The complex analyticity of harmonic maps and the strong rigidity of compact Kähler manifolds, *Ann. of Math.* 112(2) (1980) 73–111.

[16] Siu, Y. T., Yau, S. T., Compact Kähler manifolds of positive bisectional curvature, *Invent. Math.* 59 (1980) 189–204.

[17] Smith, R. T., The second variation formula for harmonic mappings, *Proc. Am. Math. Soc.* 47 (1975) 229–236.

[18] Urakawa, H., Stability of harmonic maps and eigenvalues of the Laplacian, *Trans. Amer. Math. Soc.* 301 (1987) 557–589.

[19] Xin, Y. L., Some results on stable harmonic maps, *Duke Math. J.* 47 (1980) 609–613.