

COMPOSITIO MATHEMATICA

H. BOUALEM

**Feuilletages riemanniens singuliers
transversalement intégrables**

Compositio Mathematica, tome 95, n° 1 (1995), p. 101-125

http://www.numdam.org/item?id=CM_1995__95_1_101_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Feuilletages riemanniens singuliers transversalement intégrables

H. BOUALEM

*C.N.R.S.-U.R.A. 1407 et G.D.R. 144, Département de Mathématiques, Université Montpellier II,
Place Eugène-Bataillon 34095 Montpellier cedex 5*

Received 10 December 1993; accepted in final form 9 March 1994

Introduction

Ce travail trouve son origine dans deux situations géométriques, que nous avons cherché à rassembler dans une théorie unique:

(i) L'étude des sections globales pour les actions de groupes de Lie compacts d'isométries d'une variété riemannienne connexe et complète, une section étant une sous-variété plongée connexe et fermée qui rencontre toutes les orbites orthogonalement. Cette étude a donné lieu à de nombreux travaux, en particulier de L. Conlon [C2], [C3], J. Dadok [D], J. Szenthe [Sz1], [Sz2], R. Palais-C. Terng [P-T]. L'exemple le plus simple est l'action adjointe d'un groupe de Lie compact, et les auteurs cités ont généralisé les résultats connus dans ce cas, en particulier la notion de groupe de Weyl.

Bien entendu, dans l'ouvert "régulier" de la variété riemannienne considérée, réunion des orbites de dimension maximale, l'existence de sections suppose que la distribution orthogonale aux orbites [qui n'est définie et différentiable que dans cet ouvert] soit complètement intégrable. Dans [P-T], Palais-Terng ont conjecturé que, sous cette condition, existaient des sous-variétés immergées rencontrant toutes les orbites orthogonalement. L'étude de cette conjecture a été notre motivation initiale. En fait, dans [Sz2] on peut trouver esquissée une démonstration. Notre travail complète et généralise cette esquisse.

(ii) L'étude par Blumenthal–Hebda des feuilletages riemanniens transversalement intégrables, c'est-à-dire pour lesquels la distribution orthogonale aux feuilles est complètement intégrable. Dans [B-H], ces auteurs ont montré que, quand la variété riemannienne considérée est complète, par passage au revêtement universel on obtient une structure de produit global en relevant le feuilletage riemannien et le feuilletage géodésique orthogonal.

Le cadre naturel pour unifier ces deux situations est celui des *feuilletages riemanniens singuliers* [F.R.S.] décrits dans [Mo]: un F.R.S. \mathcal{F} sur une

variété riemannienne (M, g) est un feuilletage singulier au sens de H. Sussmann [Su] et P. Stefan [St] pour lequel toute géodésique perpendiculaire à une feuille reste perpendiculaire aux feuilles qu'elle rencontre. Les principales propriétés de ces feuilletages généralisent de près la géométrie des orbites d'un groupe d'isométries; en particulier, l'ensemble des feuilles de dimension maximale forme un "ouvert régulier" Ω connexe dense. Dans cet ouvert, le champ d'éléments de contact orthogonal aux feuilles définit une distribution différentiable H^0 . Ceci étant, nous dirons que (M, \mathcal{F}, g) est *transversalement intégrable* si la distribution H^0 est complètement intégrable. Le "lemme fondamental" de la première partie montre que l'intégrabilité de H^0 est équivalente à l'existence de *sections locales* au voisinage de chaque point. On montre que, dans ces conditions, on peut construire des *sections généralisées* pour le feuilletage, c'est-à-dire des sous-variétés immergées connexes rencontrant toutes les feuilles orthogonalement. C'est le résultat principal de la première partie. On notera que les "sections transverses généralisées" définies dans [M-P] pour les adhérences des feuilles de certains feuilletages riemanniens réguliers sont un peu l'analogue en géométrie transverse de nos "sections généralisées"; mais les hypothèses sont de nature tout à fait différente. La preuve de la conjecture de Palais–Terng est une application directe du résultat précédent.

La seconde partie est consacrée à l'étude générale des F.R.S. transversalement intégrables sur une variété riemannienne complète. En chaque point, on définit un groupe de Weyl transverse, puis on introduit le glissement local d'une section sur une autre. En vue d'obtenir un théorème de décomposition à la Blumenthal–Hebda, on est amené à construire un "éclatement minimal" $(\hat{M}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{g})$ du F.R.S. considéré (M, \mathcal{F}, g) . La propriété fondamentale est que les feuilles de $\hat{\mathcal{F}}$ sont exactement les pré-images des feuilles de \mathcal{F} , le feuilletage éclaté étant riemannien et régulier. Ceci étant, il suffit d'appliquer le résultat de Blumenthal–Hebda à $(\hat{M}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{g})$ pour obtenir un éclatement simplement connexe $(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{g})$ où le feuilletage relevé $\tilde{\mathcal{F}}$ et le feuilletage orthogonal décomposent la variété en produit global.

Je tiens à remercier Pierre Molino de son aide considérable le long de l'élaboration de ce travail.

1. Sections, sections locales et intégrabilité transverse d'un F.R.S.

Pour les propriétés des F.R.S., on donne la référence [Mo]. Dans cette partie on suppose que (M, \mathcal{F}, g) est un feuilletage riemannien singulier sur une variété connexe M , muni d'une métrique riemannienne g adaptée.

Sur l'ouvert Ω des feuilles régulières, on sait qu'on a un feuilletage riemannien régulier. On peut donc définir un champ d'éléments de contact sur Ω , noté H^0 , par: $H_x^0 = T_x F_x^\perp$ où $T_x F_x^\perp$ désigne l'orthogonal à la feuille F_x au point x . On appelle distribution horizontale la distribution H^0 . Si on suppose que la métrique g est complète, on note $\tau(x) = \text{Exp}_x H_x^0$ l'image par l'exponentielle de la distribution H^0 au point x . Soit k le rang de la distribution horizontale H^0 .

1.1. *Les sections et leurs propriétés élémentaires*

On adopte aux F.R.S. les définitions de Palais–Terng [P-T].

1.1.1. DEFINITION. Une k sous-variété plongée, fermée et connexe Σ de M est dite section si elle rencontre toutes les feuilles du feuilletage orthogonalement.

On suppose maintenant que par tout point régulier de M passe une section. On va voir dans la proposition suivante que cette dernière condition entraîne, dans le cas où la métrique g est complète, qu'une section est uniquement déterminée par la valeur de la distribution horizontale en l'un de ses points réguliers. La démonstration de cette proposition est évidente.

1.1.2. PROPOSITION. *Si par tout point régulier de M passe une section, on a les propriétés suivantes:*

- (1) H^0 est intégrable.
- (2) Si Σ est une section, alors les composantes connexes de $\Sigma^0 = \Omega \cap \Sigma$ sont des feuilles du feuilletage défini par la distribution horizontale H^0 .
- (3) Si Σ est une section, alors elle est totalement géodésique.
- (4) Si la métrique g est complète, alors il y a une unique section passant par un point régulier x , à savoir l'ensemble $\tau(x) = \text{Exp}_x H_x^0$.

La proposition ci-dessus fait apparaître le lien qui existe entre la condition d'existence de sections passant par chaque point régulier, l'intégrabilité de la distribution horizontale H^0 et les ensembles $\tau(x)$. Ces ensembles ne sont pas toujours des sous-variétés de M et ne rencontrent généralement les feuilles ni orthogonalement ni transversalement.

Il est naturel de se poser la question suivante: Si la distribution horizontale H^0 est intégrable passe-t-il par tout point régulier une section? On apporte un résultat dans cette direction: on montre l'existence, non d'une section, mais d'une section généralisée. Cette dernière notion sera précisée dans la suite.

1.2. *Lemme fondamental et sections locales*

Dans le but de donner une réponse à la question posée ci-dessus, on suppose que la distribution horizontale H^0 est intégrable. Dans une première partie, on montre à l'aide de l'intégrabilité de cette distribution, que localement sur une transversale (bien choisie) à une feuille donnée, on récupère un feuilletage riemannien singulier qui a H^0 comme distribution horizontale. Ensuite on fait apparaître la notion de section locale à l'aide de laquelle on construit dans la seconde partie une sous-variété immergée connexe qui rencontre toutes les feuilles orthogonalement.

Grâce à l'intégrabilité de H^0 , on commence par établir dans le lemme suivant une propriété importante pour la suite.

Si x est un point de M , on note $\mathcal{F}_x = \text{Exp}_x D(0, \rho)$ l'image par l'exponentielle d'un disque $D(0, \rho)$ de centre l'origine et de rayon ρ dans l'orthogonal à la feuille passant par le point x .

1.2.1. *Lemme fondamental*

Pour tout point y régulier de \mathcal{F}_x , la valeur H_y^0 de la distribution horizontale en y est contenue dans l'espace tangent en y à \mathcal{F}_x .

DEMONSTRATION. Soit y un point régulier de \mathcal{F}_x . On note $y(t) = \text{Exp}_x tv$ la géodésique tracée dans \mathcal{F}_x liant $y(0) = x$ et $y(1) = y$.

Comme le feuilletage est invariant par homothétie, voir lemme d'homothétie [Mo], la restriction de la géodésique $t \mapsto y(t)$ à l'intervalle $]0, 1[$ reste tracée dans l'ouvert Ω des points réguliers. Elle est donc contenue dans la feuille η_y de H^0 passant par y .

Soit Y_t l'unique vecteur de $H_{y(t)}^0$ voisin de l'origine tel que $\text{Exp}_{y(t)} Y_t = y$. Comme η_y est totalement géodésique dans l'ouvert Ω , alors pour tout t dans $]0, 1[$ on a :

$$[T_{Y_t} \text{Exp}_{y(t)}] T_{Y_t} H_{y(t)}^0 = T_y \eta_y$$

D'où on tire l'égalité suivante:

$$T_{Y_t} H_{y(t)}^0 = [T_{Y_t} \text{Exp}_{y(t)}]^{-1} \cdot H_y^0$$

Quand $t \rightarrow 0$, $y(t) \rightarrow x$, $Y_t \rightarrow v$, donc $T_{Y_t} H_{y(t)}^0$ tend vers un sous-espace vectoriel de $T_v(T_x F_x^\perp)$. Ce sous-espace est $[T_v \text{Exp}_x]^{-1} H_y^0$, d'où on déduit que H_y^0 est contenu dans $T_v \text{Exp}_x \cdot T_v(T_x F_x^\perp)$ qui n'est autre que l'espace tangent à \mathcal{F}_x en y . □

On va compléter ce lemme en remarquant que les modifications qui interviennent dans la démonstration du théorème de décomposition locale, donné dans [Mo], n'affectent en rien la distribution horizontale H^0 . On adapte en ce sens la démonstration de ce théorème dans [Mo].

1.2.2. PROPOSITION. Soient (M, \mathcal{F}, g) un F.R.S. pour lequel la distribution horizontale H^0 pour la métrique g est intégrable, et x_0 un point de M . Il existe au voisinage de x_0 une métrique adaptée g' , admettant la même métrique transverse que g et un voisinage tubulaire distingué $\beta_{\rho_0}^{P_{x_0}}$ de pour g' , tels que:

- (1) $(\beta_{\rho_0}^{P_{x_0}}, g')$ est le produit riemannien $(P_{x_0}, g'_{P_{x_0}}) \times (\mathcal{T}_{x_0}, g'_{\mathcal{T}_{x_0}})$ où \mathcal{T}_{x_0} est la fibre en x_0 du voisinage tubulaire $\beta_{\rho_0}^{P_{x_0}}$.
- (2) Les traces des plaques sur \mathcal{T}_{x_0} forment un F.R.S. admettant $g'_{\mathcal{T}_{x_0}}$ comme métrique adaptée.
- (3) Pour tout point régulier y de \mathcal{T}_{x_0} , H_y^0 reste l'orthogonal à la feuille passant par y , pour la nouvelle métrique g' .

DEMONSTRATION. On va suivre la démonstration du théorème de décomposition locale, donné dans [Mo], pas à pas tout en signalant les parties de cette démonstration où on a utilisé effectivement la propriété du Lemme 1.2.1.

On note $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$ le module des champs tangents à \mathcal{F} , g_T la métrique transverse associée à g , $\beta_{\rho_0}^{P_{x_0}}$ un voisinage tubulaire distingué en x_0 et \mathcal{T}_{x_0} la fibre en x_0 de ce voisinage. Si la dimension de la feuille F_{x_0} passant par x_0 est r , alors il existe X_1, \dots, X_r champs de vecteurs dans $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$ qui sont linéairement indépendants en x_0 . Soient $\varphi_1^1, \dots, \varphi_r^1$ leurs groupes locaux à un paramètre; on note φ l'application de $I^r \times \mathcal{T}_{x_0} \rightarrow M$ qui à (t^1, \dots, t^r, y) fait correspondre $\varphi_1^1 \circ \dots \circ \varphi_r^1(y)$ où I^r est un voisinage ouvert de $(0, \dots, 0)$ dans \mathbb{R}^r .

En restriction à un petit voisinage de x_0 dans \mathcal{T}_{x_0} φ est un difféomorphisme. Pour y dans \mathcal{T}_{x_0} et dans ce voisinage le difféomorphisme φ envoie un voisinage de $(0, \dots, 0, y)$ dans $I^r \times \{y\}$ dans la feuille F_y passant par y . On en déduit un feuilletage \mathcal{F}^1 régulier défini localement, dont les feuilles sont de dimension r et tracées dans les feuilles de \mathcal{F} . Au besoin en rapetissant le voisinage tubulaire, on peut supposer que \mathcal{F}^1 est défini dans $\beta_{\rho_0}^{P_{x_0}}$ tout entier. On peut remarquer que la projection $\pi: \beta_{\rho_0}^{P_{x_0}} \rightarrow P_{x_0}$ induit une application $\pi: P_y^1 \rightarrow P_{x_0}$ de la plaque de \mathcal{F}^1 passant par y sur P_{x_0} qui est un revêtement. En choisissant P_{x_0} simplement connexe, on peut donc s'arranger pour que $\pi: P_y^1 \rightarrow P_{x_0}$ soit un difféomorphisme pour tout y . Ceci étant, chaque plaque de \mathcal{F}^1 dans $\beta_{\rho_0}^{P_{x_0}}$ coupe chaque transversale $\mathcal{T}_x = \bar{\pi}^{-1}(x)$ en un point et un seul.

Si l'on observe que tout X de $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$ se décompose alors en un champ X_1 de $\mathcal{X}_{\mathcal{F}^1}$ et un champ X_2 tangent aux transversales \mathcal{T}_x , on voit que le feuilletage \mathcal{F} apparaît dans $\beta_{\rho_0}^{P_{x_0}}$ comme le produit par P_{x_0} du feuilletage singulier f_{x_0} défini sur \mathcal{T}_{x_0} par les traces des plaques. Le fait que c'est un feuilletage singulier au sens de H. Sussman et P. Stefan [Su], [St] résulte de ce qu'il est défini par les orbites dans \mathcal{T}_{x_0} de composantes X_2 , pour X dans $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$.

On commence par modifier g dans $\beta_{\rho_0}^{P_{x_0}}$ de la façon suivante: sur le fibré $T\mathcal{F}^1$ tangent aux feuilles de \mathcal{F}^1 , on modifie la structure euclidienne induite par g de façon à la rendre projetable par $\pi: \beta_{\rho_0}^{P_{x_0}} \rightarrow P_{x_0}$. D'autre part, sans changer la structure euclidienne sur le fibré transverse à \mathcal{F}^1 , on change le champ d'éléments de contact $T\mathcal{F}^{1\perp}$ de façon à le remplacer par le champ $T\mathcal{F}$ tangent aux fibres de π . D'après le lemme 1.2.1, pour tout point régulier y de \mathcal{T} , H_y^0 est contenue dans $T_y\mathcal{F}$ ce qui entraîne que la distribution horizontale H^0 est aussi la distribution horizontale pour la nouvelle métrique riemannienne g_1 obtenue dans $\beta_{\rho_0}^{P_{x_0}}$ et qui admet encore g_T pour métrique transverse associée.

Pour g_1 , les géodésiques perpendiculaires aux plaques restent dans les fibres de π . Par suite, le feuilletage f_{x_0} défini sur la fibre \mathcal{T}_{x_0} par les composantes connexes des traces des plaques admet la métrique induite $g_{1\mathcal{T}_{x_0}}$ comme métrique adaptée et comme distribution horizontale H^0 . Il ne reste plus alors qu'à modifier g_1 sur $T\mathcal{F}$ en la remplaçant par la pré-image de $g_{1\mathcal{T}_{x_0}}$ par la projection $T\mathcal{F} \rightarrow T\mathcal{T}_{x_0}$ le long des feuilles de \mathcal{F}^1 . La métrique riemannienne g' ainsi obtenue a bien les propriétés énoncées. \square

D'après la proposition précédente, les traces des plaques induisent sur la fibre \mathcal{T}_{x_0} un F.R.S. à distribution horizontale intégrable ayant une feuille ponctuelle réduite à x_0 .

On va établir dans la proposition suivante qu'au voisinage de x_0 dans \mathcal{T}_{x_0} un tel F.R.S. possède des sections.

1.2.3. PROPOSITION. *Soit $(\mathcal{T}, \mathcal{F}, g)$ un F.R.S. dont la distribution horizontale H^0 est intégrable. Si la feuille passant par un point x_0 de \mathcal{T} est ponctuelle, alors il existe un voisinage ouvert saturé de feuilles \mathcal{U} de x_0 tel que F.R.S. $(\mathcal{U}, \mathcal{F}_u, g_u)$ admet des sections. On désigne par \mathcal{F}_u (resp. g_u) le feuilletage (resp. la métrique) induit sur \mathcal{U} .*

DEMONSTRATION. On adapte la méthode de la proposition 6.5 dans [Mo]. Soit $\mathcal{U} = \text{Exp}_{x_0} D(0, \rho)$ un voisinage ouvert de x_0 image par l'exponentielle d'un disque de centre l'origine et de rayon ρ dans le tangent $T_{x_0}\mathcal{T}$ à \mathcal{T} en x_0 . On choisit ρ de telle sorte que l'exponentielle soit un difféomorphisme.

Pour $0 < \lambda < 1$, on note h_λ l'homothétie de rapport λ et de centre x_0 . On construit à l'aide des homothéties h_λ de nouvelles métriques $g_\lambda = 1/\lambda^2 h_\lambda^* g_u$ sur \mathcal{U} . Comme le feuilletage \mathcal{F}_u est invariant par ces homothéties h_λ , voir le lemme d'homothétie [Mo], et que les feuilles de H^0 sont totalement géodésiques dans l'ouvert Ω des points réguliers, alors H_y^0 et $T_y F_y$ restent orthogonaux pour la nouvelle métrique g_λ pour tout point régulier y et g_λ reste adaptée au feuilletage. F_y est la feuille passant par y .

Quand on fait tendre λ vers 0, g_λ converge uniformément au voisinage du point x_0 vers la métrique plate g_0 . Par passage à la limite, la distance entre les feuilles est localement constante pour la métrique euclidienne g_0 , donc

g_0 est adaptée. H_y^0 et $T_y F_y$ restent orthogonaux pour la métrique plate g_0 . On est ramené alors au cas d'un F.R.S. dont la distribution horizontale est intégrable et qui admet la métrique plate comme métrique adaptée. Bien entendu la distribution horizontale est prise maintenant par rapport à la métrique plate g_0 .

On va montrer dans le lemme suivant qu'un tel F.R.S. possède des sections. Plus précisément, on montre que pour tout point régulier y , avec les identifications nécessaires, l'intersection $H_y^0 \cap D(0, \rho)$ du sous-espace H_y^0 avec le disque $D(0, \rho)$ est bien une section dans $D(0, \rho)$ pour la métrique euclidienne.

1.2.4. LEMME. *Pour tout point y régulier de $D(0, \rho)$, $H_y^0 \cap D(0, \rho)$ est une section dans $D(0, \rho)$ pour la métrique euclidienne g_0 .*

DEMONSTRATION DU LEMME. Soit y un point régulier de $D(0, \rho)$. On note L l'intersection $H_y^0 \cap D(0, \rho)$ du sous-espace H_y^0 avec le disque $D(0, \rho)$. On commence par montrer que L rencontre les feuilles orthogonalement. On peut observer que H_y^0 passe par 0 , car la droite $0y$ est perpendiculaire en y à la feuille passant par ce point, donc est contenue dans H_y^0 .

Soient η_y la feuille de H^0 passant par y et $D'(y, \rho')$ un petit disque dans L centré en y et de rayon ρ' . Comme η_y est constituée de chemins d'origine y et tangents à H^0 , on a que $D'(y, \rho')$ est contenu dans η_y pour ρ' assez petit; on en déduit que pour tout point x de $D'(y, \rho')$, $T_x D'(y, \rho') = H_x^0$.

Soit x un élément de L ; l'ensemble $\mathcal{V} = \{v \in L/x + v \in D'(y, \rho')\}$ est un ouvert non vide de L . Pour un élément v de \mathcal{V} , on note σ_v le segment: $\sigma_v(t) = tv + x$ où $t \in [0, 1]$; comme $\sigma_v(1)$ est dans $D'(y, \rho')$ on a que $\sigma_v'(1)$ est tangent à $D'(y, \rho')$ donc orthogonale à la feuille passant par $\sigma_v(1)$ et puisque le feuilletage est un F.R.S. alors $\sigma_v'(0) = v$ est orthogonale à la feuille passant par x . Comme ceci est vrai pour tout élément de l'ouvert \mathcal{V} , alors $T_x L$ est orthogonale à la feuille passant par x .

Il reste à montrer que L rencontre toutes les feuilles. Soit F une feuille dans $D(0, \rho)$ d'adhérence \bar{F} . Si d est la distance euclidienne, on a $d(y, F) = d(y, \bar{F})$ et $d(y, \bar{F}) = d(y, x)$ où x est un certain point de \bar{F} . On peut réaliser la distance $d(y, x)$ par un segment d'origine y et d'extrémité x . Comme ce segment rencontre la feuille F_x passant par x orthogonalement, il va être forcément tracé dans L , ce qui entraîne que L rencontre la feuille F_x . Comme elle la rencontre orthogonalement, elle rencontre forcément les feuilles voisines, en particulier elle rencontre F . □

Les sections données par le lemme précédent restent aussi des sections pour la métrique initiale g puisque la valeur de la distribution horizontale H_y^0 en tout point régulier y n'a pas été changée. □

En résumé on a la proposition suivante:

1.2.5. PROPOSITION. Soient (M, \mathcal{F}, g) un F.R.S. dont la distribution horizontale H^0 est intégrable et x_0 un point de M . Alors il existe un voisinage tubulaire distingué $\beta_{\rho_0}^{P_{x_0}}$ de x_0 tel que le F.R.S. induit sur ce voisinage admette des sections.

La proposition précédente nous amène à donner la définition suivante d'une section locale en un point donné.

1.2.6. DEFINITION. Soient (M, \mathcal{F}, g) un F.R.S., s une sous-variété de M et x_0 un point de s . s est dite section locale en x_0 s'il existe un voisinage tubulaire distingué du point x_0 dans la variété feuilletée M , de telle sorte que s soit contenue dans ce voisinage et soit une section du feuilletage induit sur ce même voisinage.

On appellera désormais F.R.S. transversalement intégrable un F.R.S. (M, \mathcal{F}, g) admettant en chaque point une section locale. D'après la proposition 1.2.5 ceci équivaut à l'intégrabilité de la distribution horizontale H^0 .

On va aborder la seconde partie où on construit pour un F.R.S. transversalement intégrable (M, \mathcal{F}, g) dont les adhérences des feuilles sont compactes, une sous-variété connexe immergée dans M , qui rencontre toutes les feuilles orthogonalement.

1.3. Sections généralisées

Toute la suite est réservée à la démonstration du théorème suivant:

1.3.1. THEOREME. Soit (M, \mathcal{F}, g) un F.R.S. transversalement intégrable dont les adhérences des feuilles sont compactes. Par tout point de M il passe une sous-variété immergée connexe de M , qui rencontre toutes les feuilles orthogonalement.

Soit (M, \mathcal{F}, g) un F.R.S. transversalement intégrable. Si k est la codimension des feuilles régulières de \mathcal{F} , on désigne par $\mathfrak{G}(M, k)$, on appelle chaîne de sections locales d'origine E_x et d'extrémité $E_{x'}$, la donnée d'un chemin $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ différentiable par morceaux d'origine x et d'extrémité x' , d'une famille finie de sections locales s_0, s_1, \dots, s_{n-1} et de réels $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ vérifiant pour tout i $0 \leq i \leq n$ $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset s_i$, $E_x = T_x s_0$, $T_{\gamma(t_i)} s_{i-1} = T_{\gamma(t_i)} s_i$, $E_{x'} = T_{x'} s_{n-1}$.

Pour un point x_0 de M et un élément E_{x_0} de $\mathfrak{G}(M, k)$, on note $\Sigma_{E_{x_0}}$ l'ensemble de tous les k sous-espaces qu'on peut atteindre par une chaîne de sections locales d'origine le k sous-espace E_{x_0} .

REMARQUES. (1) D'après la proposition 1.2.5 on sait que par x_0 passe au moins une section locale s_{x_0} . Si on prend $E_{x_0} = T_{x_0} s_{x_0}$, on aura $\Sigma_{E_{x_0}}$ non vide.

(2) Si s est une section locale, alors $\tilde{s} = \{T_x s / x \in s\}$ est une k -sous-variété de $\mathfrak{G}(M, k)$ diffeomorphe à s , et $\Sigma_{E_{x_0}}$ est réunion de telles sous-variétés.

D'après les deux remarques précédentes et grâce au lemme suivant, on peut munir $\Sigma_{E_{x_0}}$ d'une structure de k -variété différentielle telle que les sous-variétés \tilde{s} soient des ouverts de $\Sigma_{E_{x_0}}$.

1.3.3. LEMME. Soient s_1 et s_2 deux sections locales, alors l'ensemble $\Omega = \{x \in s_1 \cap s_2 / T_x s_1 = T_x s_2\}$ est un ouvert de s_1 et s_2 .

La vérification de ce lemme est élémentaire.

DEMONSTRATION DU THEOREME. Soit $\pi: \mathfrak{G}(M, k) \rightarrow M$ la projection canonique qui à E_x fait correspondre le point x ; on note j la restriction de π à $\Sigma_{E_{x_0}}$. On remarque que pour toute section locale s telle que $\tilde{s} \subset \Sigma_{E_{x_0}}$, j restreinte à \tilde{s} est une immersion, d'où on peut conclure que j est une immersion. On note Σ l'ensemble $j(\Sigma_{E_{x_0}})$.

On va montrer que Σ rencontre toutes les feuilles orthogonalement.

Soit $C = \{x \in M / \Sigma \cap F_x \neq \emptyset\}$ ensemble des points de M dont la feuille F_x rencontre Σ .

(1) C est non vide car x_0 est dans C .

(2) C est un ouvert de M : Soit x un point de C , il existe un point y dans $F_x \cap \Sigma$. Pour ce point il existe une section locale s telle que y soit dans s et $\tilde{s} \subset \Sigma_{E_{x_0}}$. s est contenue dans un voisinage tubulaire β_ρ^y , en plus s est une section dans ce voisinage. D'où on déduit que le saturé $\hat{\beta}_\rho^F$ de β_ρ^F est contenu dans C .

(3) C est un fermé: soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de C qui converge vers x . Pour tout n dans \mathbb{N} , il existe y_n dans $F_{x_n} \cap \Sigma$. Comme les adhérences des feuilles sont compactes, on a $d(\bar{F}_x, y_n) = d(\bar{F}_{x_n}, x_n)$. Quand n tend vers l'infini $d(\bar{F}_x, y_n)$ tend vers zéro d'où on déduit que l'on peut trouver une sous-suite $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un élément y qui appartient nécessairement à l'adhérence \bar{F}_x de la feuille F_x passant par le point x .

On peut trouver un voisinage tubulaire $\beta_{\rho_0}^{P_y}$ de y vérifiant les deux propriétés de la proposition 1.2.5. Pour un certain m assez grand y_m est dans $\beta_{\rho_0}^{P_y}$. Comme y_m est dans Σ , alors il existe une section locale s_m telle que y_m soit dans s_m et \tilde{s}_m soit contenue dans $\Sigma_{E_{x_0}}$.

Il existe bien un point régulier z dans $s_m \cap \beta_{\rho_0}^{P_y}$. Si y_m appartient à la fibre \mathcal{F}_y du voisinage tubulaire $\beta_{\rho_0}^{P_y}$ au point y' de P_y , on peut faire passer une section locale s' par y' et z . Pour le point régulier z on a: $T_z s_m = T_z s'$ et comme s_m est contenue dans Σ , alors la section locale s' est contenue entièrement dans Σ .

En tenant compte du fait que la section locale s' rencontre toutes les feuilles de $\beta_{\rho_0}^{P_y}$, donc F_x , on peut conclure que le point x est dans C .

Soit maintenant un point x de Σ . Il existe une section locale s telle que x soit dans s et \tilde{s} soit contenue dans $\Sigma_{E_{x_0}}$. Comme $T_{T_x s} j T_{T_x s} \tilde{s} = T_x s$ est orthogonale à la feuille F_x passant par x , alors Σ rencontre les feuilles orthogonalement. \square

1.3.4. DEFINITION. Une k sous-variété immergée, connexe de M est dite section généralisée, si elle rencontre toutes les feuilles orthogonalement.

2. Structure des F.R.S. transversalement intégrables complets: éclatement minimal et éclatement décomposable

Dans cette partie, on étudie la structure générale d'un F.R.S. (M, \mathcal{F}, g) transversalement intégrable, où la métrique g est complète.

Dans le cas où \mathcal{F} est régulier, le résultat de Blumenthal–Hebda [B-H] dit que, sur le revêtement universel \tilde{M} de M , \mathcal{F} et le feuilletage orthogonal se relèvent en un bifeuilletage simple $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{S}})$ qui permet d'identifier \tilde{M} au produit du revêtement universel d'une feuille de \mathcal{F} par le revêtement universel d'une feuille du feuilletage orthogonal.

Notre résultat principal est le suivant: si \mathcal{F} est singulier, on peut construire de façon canonique un "éclatement" simplement connexe $\tilde{\pi}: \tilde{M} \rightarrow M$, les singularités se produisant au-dessus des strates singulières de \mathcal{F} , de sorte que:

- (i) Les composantes connexes des pré-images des feuilles de \mathcal{F} définissent sur \tilde{M} un feuilletage régulier $\tilde{\mathcal{F}}$.
- (ii) Les sections généralisées de \mathcal{F} se relèvent sur \tilde{M} suivant les feuilles d'un feuilletage $\tilde{\mathcal{S}}$. De plus le bifeuilletage $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{S}})$ est simple, c'est-à-dire que \tilde{M} s'identifie au produit $\tilde{F} \times \tilde{L}$ d'une feuille de $\tilde{\mathcal{F}}$ par une feuille de $\tilde{\mathcal{S}}$.
- (iii) Il existe sur \tilde{M} une métrique \tilde{g} adaptée à $\tilde{\mathcal{F}}$ et pour laquelle les feuilles de $\tilde{\mathcal{S}}$ sont perpendiculaires à celles de $\tilde{\mathcal{F}}$.
- (iv) La projection $\tilde{\pi}$ respecte les métriques transverses à $\tilde{\mathcal{F}}$ et \mathcal{F} définies par \tilde{g} et g .

Le résultat obtenu généralise à la fois le théorème de Blumenthal–Hebda et les résultats de Palais–Terng et Dadok sur les actions de groupes compacts de type "polaire".

2.1. Groupe de Weyl transverse d'un F.R.S. transversalement intégrable

L'objet de ce paragraphe est d'établir l'existence du groupe de Weyl transverse pour un F.R.S. transversalement intégrable à feuilles quelconques. Ce groupe peut être infini avec pour adhérence un groupe de Lie de dimension non nulle.

La démonstration de l'existence de ce groupe est basée essentiellement sur le fait qu'au voisinage d'une feuille ponctuelle n'importe quel glissement régulier local d'une section sur une autre se prolonge à toute la section en restant compatible avec l'appartenance aux feuilles.

Soient B une boule de \mathbb{R}^n centrée à l'origine et \mathcal{F} un feuilletage riemannien singulier sur B qui admet l'origine comme feuille ponctuelle et la métrique euclidienne g_0 comme métrique adaptée. On suppose de plus que, pour la métrique euclidienne g_0 , \mathcal{F} est transversalement intégrable.

Pour la suite on désigne par F_x la feuille de \mathcal{F} passant par x . Soient $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1$ deux sections de \mathcal{F} dans B , F une feuille régulière de \mathcal{F} et x_0, x_1 deux points respectivement de $\mathcal{S}_0 \cap F$ et $\mathcal{S}_1 \cap F$. On sait que la donnée d'un chemin γ tracé dans F et qui relie x_0 à x_1 fournit une isométrie φ d'un voisinage de x_0 dans \mathcal{S}_0 sur un autre de x_1 dans \mathcal{S}_1 . Ceci se justifie par le fait qu'au voisinage de la feuille F le feuilletage \mathcal{F} est riemannien régulier.

2.1.1. PROPOSITION. *L'isométrie φ se prolonge à \mathcal{S}_0 toute entière en une isométrie $\tilde{\varphi}$ qui vérifie*

$$\forall x \in \mathcal{S}_0 \quad \tilde{\varphi}(x) \in F_x.$$

Avant d'aborder la démonstration de cette proposition, on va établir un lemme et une proposition qui seront utiles pour la suite. La démonstration du lemme est immédiate.

2.1.2. LEMME. *Si B^0 est l'ouvert régulier de \mathcal{F} et \mathcal{S} une section, alors:*

- (1) *Toute composante connexe de $B^0 \cap \mathcal{S}$ rencontre chaque feuille de \mathcal{F} dans B^0 .*
- (2) *Les composantes connexes de $B^0 \cap \mathcal{S}$ sont en nombre fini.*

DEMONSTRATION DU LEMME. (1) Soit C une composante connexe de $B^0 \cap \mathcal{S}$. En montrant que l'ensemble non vide $\Delta = \{x \in B^0 / F_x \cap C \neq \emptyset\}$ est ouvert et fermé dans B^0 on établira que C rencontre toutes les feuilles de \mathcal{F} dans B^0 . Comme C rencontre les feuilles orthogonalement, alors Δ est un ouvert. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de Δ qui converge dans B^0 vers un point x . Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $y_n \in F_{x_n} \cap C$. Puisque la feuille F_x passant par x est relativement compacte, alors on peut extraire de la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite $(y_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ convergente vers un point y de \bar{F}_x . Ce point y appartient aussi à C car C est fermé dans B^0 . C rencontre donc l'adhérence \bar{F}_x de F_x , il rencontre alors forcément F_x . Ceci entraîne que Δ est fermé.

(2) Supposons que les composantes connexes de $B^0 \cap \mathcal{S}$ sont en nombre infini. On les notera $C_1, C_2, \dots, C_k, \dots$. Si on se donne une feuille F dans B^0 , alors F rencontre chaque $C_i, i \in \mathbb{N}$. Pour chaque $i \in \mathbb{N}$ on prendra un x_i dans $F \cap C_i$. Quitte à extraire une sous-suite de $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ on peut toujours supposer que cette suite est convergente, puisque l'adhérence \bar{F} de F est compacte. Si la limite de la suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est le point x , alors d'une part ce point appartient à B^0 car \bar{F} reste dans B^0 , et d'autre part il est dans \mathcal{S} comme limite de points de ce fermé.

En fait le point x est dans $\mathcal{S} \cap B^0$, donc il se trouve dans une composante connexe de $B^0 \cap \mathcal{S}$, que l'on notera C . Etant ouverte, C contient une infinité de points de la suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, donc rencontre une infinité de composantes connexes de $\mathcal{S} \cap B^0$ ce qui est absurde. \square

Soient $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ deux sections de \mathcal{F} dans B , F une feuille régulière et x_0, x'_0 deux points de F qui sont respectivement dans \mathcal{S} et \mathcal{S}' .

2.1.3. PROPOSITION. *Si φ est une isométrie d'un voisinage ouvert de x_0 dans \mathcal{S} sur un autre de x'_0 dans \mathcal{S}' définie par un glissement le long d'un chemin γ dans F qui relie x_0 à x'_0 , alors φ se prolonge en une isométrie $\tilde{\varphi}$ sur \mathcal{S} toute entière et vérifie sur la composante connexe C du point x_0 dans $B^0 \cap \mathcal{S}$ la relation suivante:*

$$\forall y \in C \quad \tilde{\varphi}(y) \in F_y$$

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.1.3. L'isométrie locale φ se prolonge à \mathcal{S} toute entière car c'est une isométrie locale entre deux espaces euclidiens, puisqu'on sait, voir le lemme 1.2.4, qu'une section est la trace sur B d'un certain sous-espace vectoriel et que φ est une isométrie pour la métrique euclidienne g_0 induite.

Ce qui reste à établir est la relation: $\forall y \in C \tilde{\varphi}(y) \in F_y$. Avant toute chose, on rappelle que sur B^0 on a un feuilletage \mathcal{H} défini par la distribution horizontale H^0 de \mathcal{F} et que les composantes connexes de $B^0 \cap \mathcal{S}$ sont des feuilles de ce feuilletage.

Dans le lemme qui va suivre on établit une propriété analogue à celle de Blumenthal et Hebda [B-H].

2.1.3.1. LEMME. *Soient C_0 une composante connexe de $B^0 \cap \mathcal{S}$, τ un chemin différentiable par morceaux (c.d.p.m.) tracé dans C_0 d'origine un point x_0 et σ un chemin tracé dans une feuille de \mathcal{F} et de même origine x_0 . Alors, il existe une unique application continue δ :*

$$[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow B^0 \text{ telle que}$$

- (1) $\forall t \in [0, 1] \delta(t, 0) = \sigma(t)$.
- (2) $\forall s \in [0, 1] \delta(0, s) = \tau(s)$.
- (3) $\forall s \in [0, 1] \delta(\cdot, s)$ est un chemin c.d.p.m. tangent à \mathcal{F} .
- (4) $\forall t \in [0, 1] \delta(t, \cdot)$ est un chemin c.d.p.m. tangent à \mathcal{H} .

DEMONSTRATION DU LEMME. Soit $s_0 = \text{Sup}\{s \in [0, 1] / \text{Il existe une unique application } \delta: [0, 1] \times [0, s] \rightarrow B^0 \text{ qui vérifie les conditions du lemme}\}$. On se propose de montrer que $s_0 = 1$.

Grâce à la compacité de l'adhérence $\bar{F}_{\tau(s_0)}$ de la feuille $F_{\tau(s_0)}$, on peut trouver un voisinage tubulaire $B_\rho(\bar{F}_{\tau(s_0)})$ de $\bar{F}_{\tau(s_0)}$ contenu dans B^0 .

Pour chaque $s < s_0$ et assez voisin de s_0 , le chemin $\delta(\cdot, s)$ est tracé

entièrement dans le tube de $B_\rho(\bar{F}_{\tau(s_0)})$. Soit $\hat{\delta}(\cdot, s)$ le chemin projeté de $\delta(\cdot, s)$ sur $\bar{F}_{\tau(s_0)}$. Le chemin $\hat{\delta}(\cdot, s)$ est tracé dans une feuille de \mathcal{F} dans $\bar{F}_{\tau(s_0)}$, puisque d'une part $\delta(\cdot, s)$ est tangente à \mathcal{F} et d'autre part la projection d'une feuille de \mathcal{F} sur $\bar{F}_{\tau(s_0)}$ est une feuille de \mathcal{F} .

Dans $\bar{F}_{\tau(s_0)}$ le feuilletage \mathcal{H} induit un feuilletage totalement géodésique, voir [Ca], [B-H]. Les deux points $\hat{\delta}(0, s)$ et $\tau(s_0)$ de $\bar{F}_{\tau(s_0)}$ se trouvent dans une même feuille de ce feuilletage. En effet, le chemin τ est perpendiculaire à \mathcal{F} et les fibres de la projection sur $\bar{F}_{\tau(s_0)}$ sont perpendiculaires à \mathcal{F} ; donc la projection du chemin τ reste tracée dans C_0 , et par suite on peut joindre $\hat{\delta}(0, 1)$ et $\tau(s_0)$ par un chemin $\hat{\tau}$ tracé dans $\bar{F}_{\tau(s_0)}$ en restant tangent à \mathcal{H} . La complétude de $\bar{F}_{\tau(s_0)}$ nous permet d'appliquer la proposition de Blumenthal et Hebda [B-H] aux deux chemins $\hat{\delta}(\cdot, s)$ et $\hat{\tau}$. Si $\Gamma_s: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \bar{F}_{\tau(s_0)}$ est l'application fournie par cette proposition, alors le chemin $\Gamma_s(\cdot, 1)$ est tracé dans la feuille $F_{\tau(s_0)}$. Quand on fait tendre vers s_0 , les deux chemins $\Gamma_s(\cdot, 1)$ et $\delta(\cdot, s)$ convergent vers un même chemin qui se trouve dans $F_{\tau(s_0)}$. En conclusion, on peut prolonger δ à $[0, 1] \times [0, s_0]$ en une application unique qui satisfait aux conditions du lemme.

Si on suppose que $s_0 < 1$, en considérant un glissement le long du chemin $\delta(\cdot, s_0)$, on peut prolonger δ sur $[0, 1] \times [0, s_0 + \varepsilon]$ ce qui contredit la maximalité de s_0 . □

Fin de la démonstration de la proposition 2.1.3.

On se fixe un point y de C et un chemin c.d.p.m. $\tau: [0, 1] \rightarrow C$ d'origine le point x_0 et d'extrémité y . On note $\delta: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow B^0$ l'application fournie par le lemme précédent en l'appliquant à la composante connexe C et aux deux chemins γ et τ .

Comme le feuilletage \mathcal{H} est totalement géodésique, alors dès qu'on se donne un chemin σ orthogonal à \mathcal{H} , on peut trouver une famille d'isométries $\varphi_t: D_0 \rightarrow D_t$ pour chaque t dans $[0, 1]$ où:

- (1) D_t est un disque ouvert centré en $\sigma(t)$ dans la feuille de \mathcal{H} passant par $\sigma(t)$.
- (2) $\varphi_t(\sigma(0)) = \sigma(t)$ pour chaque t .
- (3) Pour chaque x de D_0 , le chemin $t \mapsto \varphi_t(x)$ est orthogonal à \mathcal{H} .
- (4) φ_0 est l'identité de D_0 .

En appliquant cette observation au chemin $\delta(\cdot, s)$ pour chaque s de $[0, 1]$, on obtient une famille d'isométries $\varphi_t^s: D_0^s \rightarrow D_t^s$ où

- (1) D_t^s est un disque ouvert centré en $\delta(t, s)$ dans la feuille de \mathcal{H} passant par $\delta(t, s)$.
- (2) $\varphi_t^s(\delta(0, s)) = \delta(t, s)$ pour chaque t .
- (3) Pour chaque x de D_0^s , le chemin $t \mapsto \varphi_t^s(x)$ est orthogonal à \mathcal{H} .
- (4) φ_0^s est l'identité de D_0^s .

Comme $\delta(0, s) = \tau(s)$, alors il existe $s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_{k-1} < s_k = 1$ telle que $\tau([0, 1]) \subset \bigcup_{i=0}^k D_0^{s_i}$ avec $D_0^{s_i} \cap D_0^{s_{i+1}} \neq \emptyset$ pour $0 \leq i \leq k-1$.

Puisque d'une part, grâce aux propriétés des isométries φ_t^s , on a $\varphi_t^{s_i} = \varphi_t^{s_{i+1}}$ sur $D_0^{s_i} \cap D_0^{s_{i+1}}$ pour chaque t et d'autre part $\varphi = \varphi_1^0$ sur D_0^0 , car c'est le glissement le long du chemin $\delta(\cdot, 0) = \gamma$, alors $\varphi = \varphi_1^1$ sur D_0^1 . Le chemin $t \mapsto \varphi_t^1(y)$ étant orthogonal à \mathcal{H} , donc tangent à \mathcal{F} , reste tracé dans la feuille de \mathcal{F} passant par y . \square

On est en mesure maintenant d'établir la proposition 2.1.1 par récurrence sur l'entier n , dimension de la variété ambiante.

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.1.1. Pour $n = 1$ la proposition est triviale. On suppose que cette proposition est vraie pour tout $m \leq n$, on se propose à la montrer pour la dimension $(n + 1)$. On se donne pour cela, dans une boule B de \mathbb{R}^{n+1} centrée à l'origine, un feuilletage \mathcal{F} riemannien singulier qui admet l'origine comme feuille et la métrique euclidienne g_0 comme métrique adaptée pour laquelle il est transversalement intégrable, deux sections $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1$ de \mathcal{F} , une feuille régulière F de \mathcal{F} , et deux points x_0, x_1 respectivement de $\mathcal{S}_0 \cap F$ et $\mathcal{S}_1 \cap F$ pour lesquels on a une isométrie φ d'un voisinage de x_0 dans \mathcal{S}_0 sur un autre x_1 dans \mathcal{S}_1 définie par un glissement dans B^0 le long d'un chemin γ tracé dans F et joignant x_0 à x_1 .

On commence par traiter le cas où l'origine n'est pas isolée des autres feuilles de dimension nulle. Dans cette situation la strate minimale Σ_0 est de dimension non nulle, on sait de plus que c'est la trace d'un sous-espace vectoriel sur B .

Le feuilletage \mathcal{F} se décompose en un produit du feuilletage en points sur Σ_0 par le feuilletage \mathcal{F}_0 induit par \mathcal{F} sur l'orthogonal Σ_0^\perp de Σ_0 . Si S est une section, alors sa trace $S \cap \Sigma_0^\perp$ sur Σ_0^\perp est une section du F.R.S. \mathcal{F}_0 . Afin de montrer le résultat dans ce cas, il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence au F.R.S. \mathcal{F}_0 dans Σ_0^\perp et aux traces des sections sur Σ_0^\perp .

Il reste le cas où l'origine est la seule feuille ponctuelle. Puisqu'on sait, voir le lemme 1.2.4, qu'une section est la trace sur B d'un certain sous-espace vectoriel, alors φ est une isométrie locale entre deux espaces euclidiens. Grâce à ce qu'on vient de dire φ se prolonge en une isométrie $\tilde{\varphi}$ à \mathcal{S}_0 toute entière.

La proposition 2.1.3 assure que $\forall x \in C_0 \varphi(x) \in F_x$, en désignant par C_0 la composante connexe de x_0 dans $B^0 \cap \mathcal{S}_0$. Montrons que la dernière propriété se vérifie sur \bar{C}_0 .

Pour un point x de $\bar{C}_0 \setminus C_0$ on a $\tilde{\varphi}(x) \in \bar{F}_x$. Soit β_ρ^P un voisinage tubulaire de P dans B de rayon ρ assez petit où P désigne un voisinage tubulaire de \bar{F}_x dans la strate Σ_x contenant la feuille F_x .

Le voisinage tubulaire β_ρ^P est saturé de feuilles du feuilletage \mathcal{F} . Comme

ce feuilletage est invariant par les homothéties de β_ρ^P qui respectent la strate Σ_x , alors toute feuille de \mathcal{F} dans β_ρ^P se projette sur P en une feuille de \mathcal{F} .

On peut trouver un point x' régulier dans $C_0 \cap \beta_\rho^P$ qui se projette en x par la projection de β_ρ^P sur P . Si $\sigma: [0, 1] \rightarrow F_{x'}$ est un chemin tracé dans $F_{x'}$ avec $\sigma(0) = x'$ et $\sigma(1) = \tilde{\varphi}(x')$, alors il se projette sur P en un chemin $\bar{\sigma}: [0, 1] \rightarrow F_x$ tracé dans F_x et vérifiant $\bar{\sigma}(0) = x \cdot \bar{\sigma}(1)$ est forcément le point $\tilde{\varphi}(x)$, puisque l'isométrie $\tilde{\varphi}$ envoie l'unique géodésique joignant x' à x dans β_ρ^P sur la seule géodésique joignant $\tilde{\varphi}(x')$ à $\bar{\sigma}(1)$. Ce qui précède assure que $\forall x \in \bar{C}_0, \tilde{\varphi}(x) \in F_x$.

Soit C une composante connexe de $B^0 \cap \mathcal{S}_0$ telle que l'intersection $\bar{C} \cap \bar{C}_0$ contient un autre point que l'origine; soit \bar{x} un tel point. On désigne par $\sigma: [0, 1] \rightarrow F_{\bar{x}}$ un chemin tracé dans $F_{\bar{x}}$ et joignant \bar{x} à $\tilde{\varphi}(\bar{x})$. Grâce à la proposition 1.2.5, on peut recouvrir $\sigma([0, 1])$ par une chaîne d'ouverts simples distingués $\beta^{P_1}, \dots, \beta^{P_k}$ où chaque P_i pour $1 \leq i \leq k$ est simplement connexe.

On peut choisir une telle chaîne de façon qu'il existe un point régulier y de C_0 et un chemin $\tau: [0, 1] \rightarrow F_y$ tracé dans F_y , joignant y à $\tilde{\varphi}(y)$, recouvert successivement par $\beta^{P_1}, \dots, \beta^{P_k}$ et que le glissement dans B^0 le long de ce chemin définisse l'isométrie $\tilde{\varphi}$ au voisinage de y dans \mathcal{S}_0 . Soit $U_{\bar{x}}$ un voisinage ouvert de \bar{x} dans \mathcal{S}_0 contenant le point y et contenu dans la fibre $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ de β^{P_1} au-dessus du point \bar{x} . $U_{\bar{x}}$ sera une section locale du feuilletage induit sur cette fibre.

En faisant glisser $U_{\bar{x}}$ successivement dans les ouverts simples distingués $\beta^{P_1}, \dots, \beta^{P_k}$, on obtient une section locale $U_{\tilde{\varphi}(\bar{x})}$ pour le feuilletage induit sur la fibre $\mathcal{F}_{\tilde{\varphi}(\bar{x})}$ de β^{P_k} au-dessus du point $\tilde{\varphi}(\bar{x})$ et une isométrie ψ de $U_{\bar{x}}$ sur $U_{\tilde{\varphi}(\bar{x})}$ qui vérifie $\forall x \in U_{\bar{x}} \psi(x) \in F_x$.

On peut choisir un voisinage ouvert de $\tilde{\varphi}(\bar{x})$ dans \mathcal{S}_1 noté $V_{\tilde{\varphi}(\bar{x})}$, contenant le point $\tilde{\varphi}(y)$ et contenu dans la fibre $\mathcal{F}_{\tilde{\varphi}(\bar{x})}$. $V_{\tilde{\varphi}(\bar{x})}$ sera une section du feuilletage induit sur cette fibre.

L'isométrie locale $\tilde{\varphi} \circ \psi^{-1}$ d'un voisinage de $\psi(y)$ dans $U_{\tilde{\varphi}(\bar{x})}$ sur un autre de $\tilde{\varphi}(y)$ dans $V_{\tilde{\varphi}(\bar{x})}$ est définie par un glissement dans $\mathcal{F}_{\tilde{\varphi}(\bar{x})}$ le long d'un chemin joignant $\psi(y)$ à $\tilde{\varphi}(y)$ et tracé dans la feuille régulière du feuilletage induit sur $\mathcal{F}_{\tilde{\varphi}(\bar{x})}$ qui passe par $\psi(y)$ et $\tilde{\varphi}(y)$. Cette affirmation se vérifie en considérant le glissement qui définit $\tilde{\varphi}$ dans les différents ouverts simples distingués $\beta^{P_1}, \dots, \beta^{P_k}$: en effet, dans chacun de ces ouverts distingués, le glissement d'une transversale sur une autre envoie feuille sur feuille, ce qui entraîne qu'à la fin $\psi(y)$ et $\tilde{\varphi}(y)$ sont dans la même feuille régulière du feuilletage transverse.

On peut supposer que la fibre $\mathcal{F}_{\tilde{\varphi}(\bar{x})}$ est l'image par l'application exponentielle au point $\tilde{\varphi}(\bar{x})$ d'un petit disque D centrée à l'origine dans l'orthogonal à la feuille $F_{\tilde{\varphi}(\bar{x})}$ de telle manière que $U_{\tilde{\varphi}(\bar{x})}$ et $V_{\tilde{\varphi}(\bar{x})}$ soient des sections pour le feuilletage induit sur cette fibre.

L'application exponentielle en $\tilde{\varphi}(\bar{x})$, comme dans la démonstration de la proposition 1.2.5, transporte le feuilletage induit sur $\mathcal{F}_{\tilde{\varphi}(\bar{x})}$ en un feuilletage \mathcal{F}_0 riemannien singulier sur le disque D qui admet la métrique euclidienne comme métrique adaptée et pour laquelle il est transversalement intégrable. Les deux sections $U_{\tilde{\varphi}(\bar{x})}$, $V_{\tilde{\varphi}(\bar{x})}$ et l'isométrie locale $\tilde{\varphi} \circ \psi^{-1}$ se transportent à leur tour par l'exponentielle respectivement en deux sections du feuilletage \mathcal{F}_0 et en une isométrie locale entre ces deux sections. L'isométrie locale $\tilde{\varphi} \circ \psi^{-1}$ se transporte en une isométrie locale car elle est définie par un glissement le long d'un chemin tracé dans une feuille régulière du feuilletage induit sur $\mathcal{F}_{\tilde{\varphi}(\bar{x})}$. On désigne par Σ_1, Σ_2 et θ respectivement les deux sections transportées de $U_{\tilde{\varphi}(\bar{x})}$, $V_{\tilde{\varphi}(\bar{x})}$ et l'isométrie locale transportée de $\tilde{\varphi} \circ \psi^{-1}$.

L'hypothèse de récurrence nous permet de prolonger l'isométrie locale θ en une isométrie $\tilde{\theta}$ sur toute la section Σ_1 avec la condition que pour tout x de Σ_1 : x et $\tilde{\theta}(x)$ se trouvent dans la même feuille.

Par les mêmes arguments que précédemment, l'isométrie $\tilde{\theta}$ fournit, grâce à l'exponentielle, le prolongement de l'isométrie locale $\tilde{\varphi} \circ \psi^{-1}$ en une isométrie $\bar{\theta}$ globale sur $U_{\tilde{\varphi}(\bar{x})}$ telle que, pour tout x dans $U_{\tilde{\varphi}(\bar{x})}$, $\bar{\theta}(x)$ est dans la même feuille que x pour le feuilletage induit sur $\mathcal{F}_{\tilde{\varphi}(\bar{x})}$. En fait on a $\tilde{\varphi} \circ \psi^{-1} = \bar{\theta}$ sur $U_{\tilde{\varphi}(\bar{x})}$ c'est-à-dire que $\tilde{\varphi} = \bar{\theta} \circ \psi$ sur $U_{\bar{x}}$. D'après ce qui précède, on est en mesure d'affirmer que pour tout x dans $U_{\bar{x}} \cap C$ on a $\tilde{\varphi}(x) \in F_x$.

L'isométrie $\tilde{\varphi}$ au voisinage d'un point x de $U_{\bar{x}} \cap C$ est définie par un glissement le long d'un chemin tracé dans F_x et joignant x à $\tilde{\varphi}(x)$. La proposition 2.1.3 assure que pour tout y de C on a $\tilde{\varphi}(y) \in F_y$. Comme sur \bar{C}_0 on aura sur \bar{C} la propriété: $\forall y \in \bar{C}, \tilde{\varphi}(y) \in F_y$.

Puisque les composantes connexes de $B^0 \cap \mathcal{S}_0$ sont en nombre fini, voir le lemme 2.1.2, alors on vérifie la propriété précédente de proche en proche sur chaque composante connexe de $B^0 \cap \mathcal{S}_0$, donc sur son adhérence et enfin sur \mathcal{S}_0 toute entière, ce qui achève la démonstration de la proposition 2.1.1. □

On est en mesure, grâce à la proposition 2.1.1, de donner le résultat principal de ce paragraphe:

2.1.4. PROPOSITION. *Si \mathcal{S} est une section du feuilletage \mathcal{F} dans B , alors il existe un groupe $W(\mathcal{S})$ d'isométries de \mathcal{S} qui vérifie les propriétés suivantes:*

- (1) $\forall x \in \mathcal{S} \ W(\mathcal{S}) \cdot x = F_x \cap \mathcal{S}$
- (2) Si $\bar{W}(\mathcal{S})$ est l'adhérence de $W(\mathcal{S})$ dans le groupe de toutes les isométries de \mathcal{S} , alors $\forall x \in \mathcal{S} \ \bar{W}(\mathcal{S}) \cdot x = \bar{F}_x \cap \mathcal{S}$.
- (3) La composante neutre $\bar{W}(\mathcal{S})_0$ de $\bar{W}(\mathcal{S})$ est un tore.

DEMONSTRATION. (1) Soient x un point de $B^0 \cap \mathcal{S}$, x' un point de $F_x \cap \mathcal{S}$ et γ un chemin tracé dans F_x , joignant x à x' . On sait que le glissement le long du chemin γ définit une isométrie locale $\varphi_{(x,x',\gamma)}$ de \mathcal{S} . D'après la proposition 2.1.1 cette isométrie se prolonge en une isométrie $\tilde{\varphi}_{(x,x',\gamma)}$ sur \mathcal{S} toute entière et vérifie $\forall y \in \mathcal{S} \tilde{\varphi}_{(x,x',\gamma)}(y) \in F_y$. Si on note

$$\Phi = \{ \tilde{\varphi}_{(x,x',\gamma)} / x \in B^0 \cap \mathcal{S}, x' \in F_x \cap \mathcal{S} \text{ et } \gamma: [0, 1] \rightarrow F_x \text{ un chemin avec } \gamma(0) = x, \gamma(1) = x' \}$$

Alors le sous-groupe $W(\mathcal{S})$ d'isométries de \mathcal{S} engendré par Φ vérifie $\forall x \in \mathcal{S} W(\mathcal{S}) \cdot x = F_x \cap \mathcal{S}$.

(2) D'une manière évidente on a pour tout x de $\mathcal{S} \bar{W}(\mathcal{S}) \cdot x = \bar{F}_x \cap \mathcal{S}$.

(3) En appliquant le théorème de structure au feuilletage riemannien (B^0, \mathcal{F}_0) induit par \mathcal{F} sur B^0 , on obtient sur l'ouvert B^0 un faisceau $\mathcal{C}(B^0, \mathcal{F}_0)$ localement constant de germes de champs de Killing transverses locaux dont les orbites sont les adhérences des feuilles. On note \mathcal{G} l'algèbre de Lie structurale de (B^0, \mathcal{F}_0) .

On sait, voir [Mo], que ce faisceau $\mathcal{C}(B^0, \mathcal{F}_0)$ se prolonge à B en un faisceau localement constant de fibre l'algèbre opposée \mathcal{G}^- à l'algèbre de Lie \mathcal{G} . On note $\mathcal{C}(B, \mathcal{F})$ ce faisceau.

La simple connexité de B entraîne que le faisceau $\mathcal{C}(B, \mathcal{F})$ est constant. Cette dernière remarque implique que le faisceau $\mathcal{C}(B^0, \mathcal{F}_0)$ est aussi constant. D'où on peut déduire que l'algèbre de Lie structurale \mathcal{G} est abélienne.

Comme le pseudo-groupe d'holonomie du feuilletage \mathcal{F}_0 dans B^0 est le localisé sur $\mathcal{S} \cap B^0$ du groupe $W(\mathcal{S})$, alors l'algèbre de Lie de l'adhérence $W(\mathcal{S})$ de ce groupe s'identifie à l'algèbre de Lie structurale \mathcal{G} , voir [H-S].

En conclusion, la composante neutre $\bar{W}(\mathcal{S})_0$ du groupe compact $W(\mathcal{S})$ est commutative, donc c'est un Tore. □

Soient maintenant (M, \mathcal{F}, g) un F.R.S. transversalement intégrable, x_0 un point de M et $\beta_{\rho_{x_0}}^{P_{x_0}}$ un voisinage tubulaire distingué du point x_0 donné par la proposition 1.2.5. On sait que le feuilletage \mathcal{F} induit sur la fibre \mathcal{T}_{x_0} au-dessus du point x_0 de ce voisinage un F.R.S. $\mathcal{F}^{\mathcal{F}}$ transversalement intégrable pour une certaine métrique $g'_{\mathcal{T}_{x_0}}$ et qui admet le point x_0 comme feuille. On peut supposer que la fibre \mathcal{T}_{x_0} est l'image par l'application exponentielle, pour la métrique $g'_{\mathcal{T}_{x_0}}$, au point x_0 d'une petite boule B centrée à l'origine dans le tangent à \mathcal{T}_{x_0} au point x_0 .

Si \mathcal{S} est une section de $\mathcal{F}^{\mathcal{F}}$ dans \mathcal{T}_{x_0} et Σ la transportée par l'exponentielle de \mathcal{S} . Σ est une section de $\mathcal{F}_0^{\mathcal{F}}$ dans B . La proposition 2.1.4, appliquée à Σ et au feuilletage $\mathcal{F}_0^{\mathcal{F}}$ dans B , fournit un groupe d'isométries $W(\Sigma)$ de Σ avec les trois propriétés indiquées.

Grâce à l'exponentielle, le groupe $W(\Sigma)$ se transporte en un groupe $W(\mathcal{S})$ d'isométries de \mathcal{S} qui vérifie les trois propriétés suivantes:

- (1) $\forall x \in \mathcal{S} \ W(\mathcal{S}) \cdot x = F_x^{\mathcal{F}} \cap \mathcal{S}$, $F_x^{\mathcal{F}}$ est la feuille de \mathcal{F} passant par x .
- (2) Si $\bar{W}(\mathcal{S})$ est l'adhérence de $W(\mathcal{S})$ dans le groupe de toutes les isométries de \mathcal{S} , alors $\forall x \in \mathcal{S} \ \bar{W}(\mathcal{S}) \cdot x = \bar{F}_x^{\mathcal{F}} \cap \mathcal{S}$.
- (3) La composante neutre $\bar{W}(\mathcal{S})_0$ de $\bar{W}(\mathcal{S})$ est un tore.

2.1.5. DEFINITION. Le groupe $W(\mathcal{S})$ est appelé groupe de Weyl transverse du feuilletage \mathcal{F} associé à la section locale \mathcal{S} au point x_0 .

2.2. Existence du glissement d'une section locale sur une autre le long d'un chemin

Pour un F.R.S. (M, \mathcal{F}, g) transversalement intégrable, la proposition suivante assure l'existence du glissement d'une section locale sur une autre le long d'un chemin tracé dans une feuille.

2.2.1. PROPOSITION. Soient $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1$ deux sections locales du F.R.S. (M, \mathcal{F}, g) passant respectivement par x_0, x_1 dans une feuille F et γ un chemin différentiable par morceaux sur $[0, 1]$, tracé dans la feuille F , joignant x_0 à x_1 . Il existe alors un voisinage ouvert \mathcal{S}'_0 (resp. \mathcal{S}'_1) du point x_0 (resp. x_1) dans \mathcal{S}_0 (resp. \mathcal{S}_1) et une application continue $G: [0, 1] \times \mathcal{S}'_0 \rightarrow M$ qui vérifie pour tout t dans $[0, 1]$ les conditions suivantes:

- (1) $G(t, x_0) = \gamma(t)$.
- (2) Pour tout x dans \mathcal{S}'_0 $G(t, x)$ est dans la même feuille que x .
- (3) La fonction $G_t: \begin{matrix} \mathcal{S}'_0 \rightarrow M \\ x \mapsto G(t, x) \end{matrix}$ est différentiable.
- (4) $G(\{t\} \times \mathcal{S}'_0) = \mathcal{S}'_t$ est une section locale.

DEMONSTRATION. On peut trouver une subdivision de l'intervalle $[0, 1]$; $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ et des ouverts simples distingués $\beta^{p_0}, \dots, \beta^{p_{k-1}}$, donnés par la proposition 1.2.5 de telle sorte que l'image $\gamma([t_{i-1}, t_i])$ de $[t_{i-1}, t_i]$ par γ soit contenue dans P_{i-1} pour $1 \leq i \leq k$ et que la section locale \mathcal{S}_0 (resp. \mathcal{S}_1) soit contenue dans la fibre \mathcal{T}_{x_0} (resp. \mathcal{T}_{x_1}) de l'ouvert simple distingué β^{p_0} (resp. $\beta^{p_{k-1}}$) au-dessus du point x_0 (resp. x_1).

On fait glisser \mathcal{S}_0 dans β^{p_0} pour chaque t de $[0, t_1]$, on fait de même dans chaque $\beta^{p_{i-1}}$ pour chaque t de $[t_{i-1}, t_i]$. On arrive ainsi à faire glisser \mathcal{S}_0 jusqu'à la fibre \mathcal{T}_{x_1} . Dans cette fibre on a deux sections: \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}'_0 obtenue par glissement de \mathcal{S}_0 jusqu'à \mathcal{T}_{x_1} . En appliquant dans \mathcal{T}_{x_1} la proposition 2.1.1 aux deux sections précédentes, on fait glisser \mathcal{S}'_0 sur \mathcal{S}_1 . En composant le glissement de \mathcal{S}_0 jusqu'à \mathcal{S}'_0 avec celui de \mathcal{S}'_0 jusqu'à \mathcal{S}_1 on obtient un glissement de \mathcal{S}_0 jusqu'à \mathcal{S}_1 . □

REMARQUE. Le glissement de \mathcal{S}_0 sur \mathcal{S}_1 donné par la proposition ci-dessus fournit un isomorphisme entre les groupes de Weyl transverses associés aux deux sections locales \mathcal{S}_0 et \mathcal{S}_1 aux points respectifs x_0 et x_1 .

La remarque précédente nous amène à reformuler la définition 2.1.5 en définissant le groupe de Weyl transverse d'une feuille d'un F.R.S. transversalement intégrable.

2.2.2. DEFINITION. Soit F une feuille d'un feuilletage \mathcal{F} riemannien singulier transversalement intégrable. Si \mathcal{S} est une section locale passant par un point x de F , alors le groupe $W(\mathcal{S})$ est appelé groupe de Weyl transverse de la feuille F . Il est défini à isomorphisme près.

2.3. Eclatement minimal et théorème de décomposition

Pour un F.R.S. transversalement intégrable, on munit l'ensemble des espaces tangents aux sections locales d'une structure de variété différentielle pour laquelle le F.R.S. se relève en un feuilletage riemannien régulier transversalement intégrable. Cet ensemble sera appelé éclatement "minimal" de la variété feuilletée en ce sens que la pré-image d'une feuille du F.R.S. est une feuille du feuilletage relevé.

En appliquant le théorème de décomposition de Blumenthal et Hebda, sous la condition de la complétude de la métrique transverse, au feuilletage relevé dans l'éclatement minimal on aboutit au théorème de décomposition du F.R.S.

Soient (M, \mathcal{F}, g) un F.R.S. transversalement intégrable et $\mathfrak{G}(M, k)$ la grassmanienne de rang k sur M , où k désigne la codimension des feuilles régulières de \mathcal{F} . On désigne par \hat{M} l'ensemble des espaces tangents aux sections locales et par $\hat{\pi}$ la restriction à \hat{M} de la projection canonique π de la grassmanienne $\mathfrak{G}(M, k)$ sur M .

On se fixe un voisinage tubulaire distingué $\beta_{\rho_0}^{P_{x_0}}$ donné par la proposition 1.2.5 et une fibre \mathcal{T}_{x_0} de ce voisinage au-dessus du point x_0 . On note $\mathcal{F}^{\mathcal{F}}$ le feuilletage riemannien singulier transversalement intégrable induit par \mathcal{F} sur la fibre \mathcal{T}_{x_0} et $\hat{\mathcal{T}}_{x_0}$ l'ensemble des espaces tangents aux sections de $\mathcal{F}^{\mathcal{F}}$ dans \mathcal{T}_{x_0} .

On se propose dans la suite de munir \hat{M} d'une structure de variété différentielle. Pour cela, on commence par munir $\hat{\pi}^{-1}(\beta_{\rho_0}^{P_{x_0}})$ d'une structure de variété différentielle.

D'après les propriétés du voisinage tubulaire $\beta_{\rho_0}^{P_{x_0}}$, voir la proposition 1.2.2, $\hat{\pi}^{-1}(\beta_{\rho_0}^{P_{x_0}})$ s'identifie comme ensemble à $P_{x_0} \times \hat{\mathcal{T}}_{x_0}$. On est donc amené à munir $\hat{\mathcal{T}}_{x_0}$ d'une structure de variété différentielle.

On peut supposer que \mathcal{T}_{x_0} est l'image par l'exponentielle d'une petite boule B centrée à l'origine dans le tangent à \mathcal{T}_{x_0} en x_0 . On note $\mathcal{F}_0^{\mathcal{F}}$ le feuilletage transporté par l'exponentielle du feuilletage $\mathcal{F}^{\mathcal{F}}$ et \hat{B} l'ensemble des espaces

tangents aux sections de $\mathcal{F}_0^{\mathcal{F}}$ dans B . Si \hat{B} est muni d'une structure de variété différentielle, alors on peut la transporter à l'aide de l'exponentielle sur $\hat{\mathcal{T}}_{x_0}$.

En tenant compte de la remarque précédente, on va définir sur \hat{B} une structure de variété différentielle.

2.3.1. LEMME. Soient \mathcal{S}_0 une section de $\mathcal{F}_0^{\mathcal{F}}$ dans B , F_0 une feuille régulière de $\mathcal{F}_0^{\mathcal{F}}$ et y_0 un point de $F_0 \cap \mathcal{S}_0$. Alors, il existe un voisinage ouvert P de y_0 dans F_0 dont l'intersection $F_0 \cap \mathcal{S}$ avec chaque section \mathcal{S} de $\mathcal{F}_0^{\mathcal{F}}$ dans B contient au plus un point.

DEMONSTRATION. Si on suppose le contraire, alors il existe deux suites de points $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de F_0 qui convergent vers le point x_0 , avec pour chaque n de \mathbb{N} x_n et y_n sont distincts et se trouvent dans une même section \mathcal{S}_n .

Comme chaque section \mathcal{S}_n est la trace d'un certain sous-espace vectoriel sur B , alors le vecteur

$$V_n = \frac{y_n - x_n}{\|y_n - x_n\|}$$

reste tangent à \mathcal{S}_n . $\| \cdot \|$ désigne la norme euclidienne. Soit $(V_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une sous-suite de $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un vecteur V .

Ce vecteur est en même temps tangent en x_0 à \mathcal{S}_0 et à F_0 , donc il est nul. Ce qui est absurde puisqu'il est de norme un. \square

On se fixe pour toute la suite une feuille régulière F_0 de $\mathcal{F}_0^{\mathcal{F}}$. Soient \mathcal{S} une section de $\mathcal{F}_0^{\mathcal{F}}$ dans B , y un point de $F_0 \cap \mathcal{S}$ et P un voisinage ouvert simplement connexe de y dans F_0 donné par le lemme ci-dessus. Pour un point u de P , on note \mathcal{S}_u la section de $\mathcal{F}_0^{\mathcal{F}}$ passant par le point u et $\varphi_{(y,u)}$ l'isométrie globale de \mathcal{S} sur \mathcal{S}_u définie par la donnée du glissement le long d'un chemin tracé dans P et joignant y à u .

On définit l'application $\Phi_{(P,\mathcal{S})}$ de $P \times \mathcal{S}$ dans \hat{B} par:

$$\Phi_{(P,\mathcal{S})}(u, v) = T_{\varphi_{(y,u)}(v)} \mathcal{S}_u$$

pour (u, v) dans $P \times \mathcal{S}$.

$\Phi_{(P,\mathcal{S})}$ est visiblement injective.

On se donne maintenant une autre section \mathcal{S}' , un point y' de $F_0 \cap \mathcal{S}'$ et un voisinage ouvert simplement connexe de y' dans F_0 noté P' donné par le lemme 2.3.1. On a

$$P'' \times \mathcal{S} = \Phi_{(P,\mathcal{S})}^{-1}[\Phi_{(P,\mathcal{S})}(P \times \mathcal{S}) \cap \Phi_{(P',\mathcal{S}')} (P' \times \mathcal{S}')]$$

où

$$P'' = \{u \in P / \mathcal{S}_u \cap P' \neq \emptyset\}.$$

D'une manière analogue, si on note $P''' = \{u' \in P' / \mathcal{S}_{u'} \cap P \neq \emptyset\}$, alors

$$P''' \times \mathcal{S} = \Phi_{(P', \mathcal{S}')}^{-1} [\Phi_{(P, \mathcal{S})}(P \times \mathcal{S}) \cap \Phi_{(P', \mathcal{S}')} (P' \times \mathcal{S}')].$$

P'' et P''' sont visiblement des ouverts respectivement de P et P' .

2.3.2. LEMME. La fonction $\Phi_{(P', \mathcal{S}')}^{-1} \circ \Phi_{(P, \mathcal{S})}$ définie de $P'' \times \mathcal{S}$ sur $P''' \times \mathcal{S}'$ est un difféomorphisme.

DEMONSTRATION. On commence par expliciter la fonction $\Phi_{(P', \mathcal{S}')}^{-1} \circ \Phi_{(P, \mathcal{S})}$ définie de $P'' \times \mathcal{S}$ sur $P''' \times \mathcal{S}'$. Soit (u, v) un élément de $P'' \times \mathcal{S}$, on note u' l'unique élément de $\mathcal{S}_u \cap P'$. On a:

$$\Phi_{(P', \mathcal{S}')}^{-1} \circ \Phi_{(P, \mathcal{S})}(u, v) = (u', \varphi_{(y', u')}^{-1} \circ \varphi_{(y, u)}(v)).$$

Comme $\varphi_{(y', u')}^{-1} \circ \varphi_{(y, u)}(y)$ est dans la même feuille que y' , alors il existe un élément σ du groupe $W(\mathcal{S}')$ de Weyl de la section \mathcal{S}' tel que: $\varphi_{(y', u')}^{-1} \circ \varphi_{(y, u)}(y) = \sigma \cdot y'$. Par construction de $\varphi_{(y', u')}$ et $\varphi_{(y, u)}$, et puisque l'orbite $W(\mathcal{S}') \cdot y'$ est discrète, alors l'élément σ de $W(\mathcal{S}')$ ne dépend pas de u . En fait $\varphi_{(y', u')}^{-1} \circ \varphi_{(y, u)}$ est un glissement qui fait correspondre au point y le point y' et qui ne dépend pas de u ; on le notera ψ . En conclusion on a: $\varphi_{(y', u')}^{-1} \circ \varphi_{(y, u)} = \sigma \circ \psi$.

La dernière égalité suffit pour affirmer que la fonction $\Phi_{(P', \mathcal{S}')}^{-1} \circ \Phi_{(P, \mathcal{S})}$ est un difféomorphisme de $P'' \times \mathcal{S}$ sur $P''' \times \mathcal{S}'$. □

D'après le lemme ci-dessus l'ensemble \mathcal{A} des $(P \times \mathcal{S}, \Phi_{(P, \mathcal{S})}, y)$ définit un atlas de variété différentielle sur \hat{B} de dimension $\dim B$.

Si $\hat{\pi}_B$ est la projection canonique de \hat{B} sur B , alors $\hat{\pi}_B$ est différentiable. En effet: soit $(P \times \mathcal{S}, \Phi_{(P, \mathcal{S})}, y)$ un élément de \mathcal{A} . La fonction

$$\hat{\pi}_B \circ \Phi_{(P, \mathcal{S})}: \begin{cases} P \times \mathcal{S} \rightarrow B \\ (u, v) \mapsto \varphi_{(y, u)}(v) \end{cases}$$

est évidemment différentiable. Dans la proposition qui va suivre on va établir que le feuilletage $\mathcal{F}_0^{\mathcal{F}}$ se relève par $\hat{\pi}_B$ sur \hat{B} en un feuilletage riemannien régulier transversalement intégrable.

2.3.3. PROPOSITION. (1) Le feuilletage $\mathcal{F}_0^{\mathcal{F}}$ se relève par $\hat{\pi}_B$ sur \hat{B} en un feuilletage riemannien $\hat{\mathcal{F}}_0^{\mathcal{F}}$ régulier transversalement intégrable.

(2) Si \mathcal{S} une section de $\mathcal{F}_0^{\mathcal{F}}$ dans B , alors $\tilde{\mathcal{S}} = \{T_x \mathcal{S} / x \in \mathcal{S}\}$ est une section de $\hat{\mathcal{F}}_0^{\mathcal{F}}$ dans \hat{B} .

(3) Si F est une feuille de $\mathcal{F}_0^{\mathcal{F}}$ dans B , alors $\hat{\pi}_B^{-1}(F)$ est une feuille de $\hat{\mathcal{F}}_0^{\mathcal{F}}$ dans \hat{B} .

DEMONSTRATION. (1) Soient $(P \times \mathcal{S}, \Phi_{(P, \mathcal{S})}, y)$ et $(P' \times \mathcal{S}', \Phi_{(P', \mathcal{S}')}', y')$ deux éléments de \mathcal{A} . On garde les mêmes notations que le lemme 2.3.2. D'après la

démonstration de ce lemme on a:

$$\Phi_{(P',\mathcal{S}')}^{-1} \circ \Phi_{(P,\mathcal{S})} : \begin{cases} P'' \times \mathcal{S} \rightarrow P''' \times \mathcal{S}' \\ (u, v) \mapsto (u', \sigma \circ \psi(v)). \end{cases}$$

Ce changement de cartes envoie $P'' \times \{*\}$ sur $P''' \times \{*\}$ et $\{*\} \times \mathcal{S}$ sur $\{*\} \times \mathcal{S}'$, donc on peut affirmer que sur \hat{B} il existe deux feuilletages $\hat{\mathcal{F}}_0^{\mathcal{S}}$ et $\hat{\mathcal{G}}$ supplémentaires dont les plaques dans l'ouvert $\Phi_{(P,\mathcal{S})}(P \times \mathcal{S})$ sont respectivement $\Phi_{(P \times \mathcal{S})}(P \times \{*\})$ et $\Phi_{(P,\mathcal{S})}(\{*\} \times \mathcal{S})$.

Comme $\sigma \circ \psi$ est une isométrie de \mathcal{S} sur \mathcal{S}' , alors le feuilletage $\mathcal{F}_0^{\mathcal{S}'}$ est riemannien en prenant comme métrique transverse la métrique euclidienne de \mathcal{S} . On peut toujours trouver une métrique sur \hat{B} qui a la même métrique transverse que celle de $\hat{\mathcal{F}}_0^{\mathcal{S}}$ et qui rend $\hat{\mathcal{F}}_0^{\mathcal{S}}$ et $\hat{\mathcal{G}}$ orthogonaux.

(2) D'après ce qu'on vient de voir ci-dessus, si \mathcal{S} est une section de $\mathcal{F}_0^{\mathcal{S}}$ dans B , alors $\tilde{\mathcal{S}} = \{T_x \mathcal{S} / x \in \mathcal{S}\}$ est une section de $\mathcal{F}_0^{\mathcal{S}}$. Il suffit de le voir dans une carte de \mathcal{A} .

(3) Soit F une feuille de $\mathcal{F}_0^{\mathcal{S}}$ dans B . On commence par remarquer que $\hat{\pi}_B^{-1}(F) \cap \Phi_{(P,\mathcal{S})}(P \times \mathcal{S})$ s'identifie à $P \times W(\mathcal{S}) \cdot v$ où $(P \times \mathcal{S}, \Phi_{(P \times \mathcal{S})}, y)$ est une carte de \mathcal{A} et v un élément de $F \cap \mathcal{S}$. D'où on peut déduire que $\hat{\pi}_B^{-1}(F)$ est tangente aux feuilles de $\hat{\mathcal{F}}_0^{\mathcal{S}}$. On va montrer que $\hat{\pi}_B^{-1}(F)$ est incluse dans une feuille de $\hat{\mathcal{F}}_0^{\mathcal{S}}$, ce qui entraînera que $\hat{\pi}_B^{-1}(F)$ est une feuille de $\hat{\mathcal{F}}_0^{\mathcal{S}}$.

Soient $T_{x_0} \mathcal{S}_0, T_{x_1} \mathcal{S}_1$ deux éléments de $\hat{\pi}_B^{-1}(F)$ et γ un chemin tracé dans F , joignant x_0 à x_1 . On sait qu'il existe une application continue $G: [0, 1] \times \mathcal{S}'_0 \rightarrow B$ qui vérifie les conditions de la proposition 2.2.1.

Puisqu'on travaille sur B avec la métrique euclidienne, alors on peut supposer que pour chaque t de $[0, 1]$ \mathcal{S}'_t est une section de $\mathcal{F}_0^{\mathcal{S}}$ dans B . Soit y_0 un point de $F_0 \cap \mathcal{S}'_0$. On note y_1 le point $G(1, y_0)$.

Il existe une subdivision de $[0, 1]$ $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ et des voisinages P_{t_1}, \dots, P_{t_k} ouverts simplement connexes respectivement de

$$y_{t_0} = G(t_0, y_0), \dots, y_{t_{k-1}} = G(t_k, y_0)$$

dans F_0 donnés par le lemme 2.3.1, avec $G([t_{i-1}, t_i] \times \{y_0\}) \subset P_{t_i}$.

Pour chaque t de $[t_{i-1}, t_i]$ $T_{G(t, x_0)} \mathcal{S}'_t$ se trouve dans la plaque

$$\Phi_{(P_{t_i}, \mathcal{S}'_{t_{i-1}})}(P_{t_i} \times \{G(t_{i-1}, x_0)\})$$

de la carte

$$(P_{t_i} \times \mathcal{S}'_{t_{i-1}}, \Phi_{(P_{t_i}, \mathcal{S}'_{t_{i-1}})}, y_{t_{i-1}})$$

du feuilletage $\hat{\mathcal{F}}_0^{\mathcal{F}}$. Ceci nous permet d'affirmer que $T_{x_0}\mathcal{S}_0$ et $T_{x_1}\mathcal{S}_1$ sont dans une même feuille de $\hat{\mathcal{F}}_0^{\mathcal{F}}$. \square

On transporte à l'aide de l'exponentielle la structure différentielle de \hat{B} sur \mathcal{T}_{x_0} . Le feuilletage $\mathcal{F}^{\mathcal{F}}$ sur \mathcal{T}_{x_0} se relève aussi à $\hat{\mathcal{T}}_{x_0}$ et vérifie les mêmes propriétés que celles de $\hat{\mathcal{F}}_0^{\mathcal{F}}$ données dans la proposition ci-dessus.

Si on revient au voisinage tubulaire $\beta_{\rho_0^{x_0}}^P$, alors on peut munir $\hat{\pi}^{-1}(\beta_{\rho_0^{x_0}}^P)$ d'une structure de variété différentielle en rendant l'identification ensembliste avec $P_{x_0} \times \hat{\mathcal{T}}_{x_0}$ un difféomorphisme. Les deux structures de variétés différentielles induites par $\hat{\pi}^{-1}(\beta_{\rho_0^{x_0}}^P)$ et $\hat{\pi}^{-1}(\beta_{\rho_1^{x_1}}^P)$ sur $\hat{\pi}^{-1}(\beta_{\rho_1^{x_1}}^P) \cap \hat{\pi}^{-1}(\beta_{\rho_0^{x_0}}^P)$ sont les mêmes pour deux voisinages tubulaires distingués $\beta_{\rho_0^{x_0}}^P$ et $\beta_{\rho_1^{x_1}}^P$. Cette dernière affirmation vient du fait que l'ouvert $\beta_{\rho_0^{x_0}}^P \cap \beta_{\rho_1^{x_1}}^P$ s'identifie à la fois à un ouvert de $P_{x_0} \times \mathcal{T}_{x_0}$ et à un autre de $P_{x_1} \times \mathcal{T}_{x_1}$, tout en conservant les propriétés du feuilletage induit par \mathcal{F} .

Cette dernière remarque suffit pour munir \hat{M} d'une structure de variété différentielle en prenant comme domaines de cartes les ouverts $\hat{\pi}^{-1}(\beta_{\rho_0^{x_0}}^P)$ avec l'identification à $P_{x_0} \times \hat{\mathcal{T}}_{x_0}$ comme difféomorphismes de cartes.

La projection $\hat{\pi}$ de \hat{M} sur M devient différentiable pour cette structure de variété différentielle de \hat{M} .

Comme le feuilletage induit par \mathcal{F} sur un voisinage tubulaire distingué $\beta_{\rho_0^{x_0}}^P$ est le produit de P_{x_0} par le feuilletage $\mathcal{F}^{\mathcal{F}}$ induit par \mathcal{F} sur la fibre \mathcal{T}_{x_0} et grâce à la proposition 2.3.3, le feuilletage \mathcal{F} se relève par $\hat{\pi}$ sur \hat{M} en $\hat{\mathcal{F}}$, feuilletage riemannien régulier de métrique transverse la métrique induite par g sur les sections locales.

Grâce à l'existence du glissement d'une section locale sur une autre le long d'un chemin, voir la proposition 2.2.1 et la démonstration du point 3 de la proposition 2.3.3, le relevé $\hat{\pi}^{-1}(F)$ d'une feuille F de \mathcal{F} à \hat{M} est une feuille de $\hat{\mathcal{F}}$.

Soit E_{x_0} un élément de \hat{M} . On note $\Sigma_{E_{x_0}}$, voir définition 1.3.2, l'ensemble de tous les k sous-espaces qu'on peut atteindre par une chaîne de sections locales d'origine le k sous-espace E_{x_0} où k désigne la codimension des feuilles régulières de \mathcal{F} dans M .

Toutes les sous-variétés $\Sigma_{E_{x_0}}$ de \hat{M} sont les feuilles d'un feuilletage $\hat{\mathcal{S}}$ supplémentaire à $\hat{\mathcal{F}}$ dans \hat{M} .

On peut trouver une métrique \hat{g} sur \hat{M} qui a la même métrique transverse que celle de $\hat{\mathcal{F}}$ et qui rend les deux feuilletages orthogonaux. En résumé:

2.3.4. PROPOSITION. (1) *Le feuilletage \mathcal{F} se relève par $\hat{\pi}$ sur \hat{M} en un feuilletage riemannien $\hat{\mathcal{F}}$ régulier transversalement intégrable pour la métrique \hat{g} .*

(2) *Si F est une feuille de \mathcal{F} dans M , alors $\hat{\pi}^{-1}(F)$ est une feuille de $\hat{\mathcal{F}}$ dans \hat{M} .*

(3) *La distribution horizontale de $\hat{\mathcal{F}}$ dans \hat{M} pour la métrique \hat{g} définit un feuilletage $\hat{\mathcal{S}}$ dont les feuilles sont les sous-variétés $\Sigma_{E_{x_0}}$ de \hat{M} .*

2.3.5. DEFINITION. Le couple $(\hat{M}, \hat{\pi})$ est appelé éclatement minimal de la variété feuilletée M .

Si on suppose maintenant que la métrique g est complète, ce qui entraîne que les sous-variétés $\Sigma_{E_{x_0}}$ sont complètes pour la métrique \hat{g} , alors on peut appliquer le théorème de décomposition de Blumenthal et Hebda. D'où on tire le résultat suivant:

2.3.6. Théorème de décomposition

Le revêtement universel \tilde{M} de \hat{M} s'identifie au produit $\tilde{L} \times \tilde{F}$ où

- (1) \tilde{F} est le revêtement universel des feuilles de $\hat{\mathcal{F}}$.
- (2) \tilde{L} est le revêtement universel des feuilles de $\hat{\mathcal{S}}$.
- (3) Le relevé de $\hat{\mathcal{F}}$ sur \tilde{M} est le feuilletage dont les feuilles sont $\{*\} \times \tilde{F}$.
- (4) Le relevé de $\hat{\mathcal{S}}$ sur \tilde{M} est le feuilletage dont les feuilles sont $\tilde{L} \times \{*\}$.
- (5) La projection de \tilde{M} sur le premier facteur est une submersion riemannienne.

Finalement, à partir du F.R.S. (M, \mathcal{F}, g) , on a construit un feuilletage riemannien régulier $(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{g})$ sur la variété simplement connexe \tilde{M} , où $\tilde{\mathcal{F}}$ admet des sections globales coupant chaque feuille en un seul point, de telle sorte que \mathcal{F} est la projection de $\tilde{\mathcal{F}}$ par la projection naturelle $\tilde{\pi}: \tilde{M} \rightarrow M$, les sections de $\tilde{\mathcal{F}}$ se projetant suivant les sections généralisées de \mathcal{F} , et $\tilde{\pi}$ respectant les métriques transverses associées à g et \tilde{g} . Si l'on veut, $(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{g})$ apparaît comme un éclatement simplement connexe de (M, \mathcal{F}, g) sur lequel le feuilletage \mathcal{F} et la famille des sections généralisées se relèvent en un bifeuilletage simple, c'est à dire une structure de produit.

Références

- [B-H] R. A. Blumenthal and J. Hebda, De Rham decomposition theorem for foliated manifolds, *Ann. Inst. Fourier* 33(2) (1983) 133–198.
- [Ca] G. Cairns, A general description of totally geodesic foliation, *Tôhoku Math. J.* 38 (1986) 37–55.
- [C2] L. Conlon, Variational completeness and K -transversal domains, *J. Diff. Geom.* 5 (1971) 135–147.
- [C3] L. Conlon, A class of variationally complete representations, *J. Diff. Geom.* 7 (1972) 149–160.
- [D] J. Dadok, Polar coordinates induced by actions of compact Lie groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* 288 (1986) 125–137.
- [H-S] A. Haffliger and E. Salem, Pseudogroupes d'holonomie des feuilletages riemanniens sur des variétés compactes 1-connexes, preprint (1986).
- [Mo] P. Molino, *Riemannian Foliations*, Progress in Math. 73. Birkhäuser (1988).
- [M-P] P. Molino and M. Pierrot, Théorème de slice et holonomie des feuilletages riemanniens singuliers, *Ann. Inst. Fourier, Tome XXXVII, fascicule 4* (1987) 207–223.
- [P-T] R. S. Palais and C. L. Terng, Critical point theory and submanifold geometry. Lecture notes in Math, no. 1353, Springer (1988).

- [St] P. Stefan, Accessible sets, orbits and foliations with singularities, *Proc. London Math. Soc.* 29 (1974) 699–713.
- [Su1] H. Sussmann, Orbits of families of vector fields and integrability of distribution, *Trans. Amer. Math. Soc.* 180 (1973) 171–188.
- [Su2] H. Sussmann, A generalization of the closed subgroups theorem to quotients of arbitrary manifolds, *J. Diff. Geom.* 10 (1975) 151–166.
- [Sz1] J. Szenthe, A generalization of the Weyl group, *Acta Math. Hungar* 41 (1983) 347–357.
- [Sz2] J. Szenthe, Orthogonally transversal submanifolds and the generalizations of the Weyl group, *Period Math. Hungar* 15 (1984) 281–299.