

COMPOSITIO MATHEMATICA

ALAIN HÉNAUT

Caractérisation des tissus de C^2 dont le rang est maximal et qui sont linéarisables

Compositio Mathematica, tome 94, n° 3 (1994), p. 247-268

http://www.numdam.org/item?id=CM_1994__94_3_247_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Caractérisation des tissus de \mathbb{C}^2 dont le rang est maximal et qui sont linéarisables

ALAIN HÉNAUT

Centre de Recherche en Mathématiques de Bordeaux, Université Bordeaux I, C.N.R.S. U.A. 226,
U.F.R. de Mathématiques, 351 cours de la Libération, 33405 Talence Cedex, France

Received 30 July 1993; accepted in final form on 18 August 1993

0. Introduction

Un d -tissu \mathcal{W} de $(\mathbb{C}^2, 0)$ est défini par d feuilletages ($d \geq 2$) de courbes analytiques complexes lisses de $(\mathbb{C}^2, 0)$ en position générale; on s'intéresse à l'étude géométrique de telles configurations, c'est-à-dire à un isomorphisme local $\phi: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \phi(0))$ près (cf. le livre classique de W. Blaschke et G. Bol [B-B], et l'article de S. S. Chern [C]).

On rappelle que si $\{F_i(x, y) = \text{cste}\}$ sont les d feuilles de \mathcal{W} où $F_i \in \mathbb{C}\{x, y\}$ et $F_i(0) = 0$, le rang de \mathcal{W} , noté $\text{rg } \mathcal{W}$ est la dimension du \mathbb{C} -espace vectoriel \mathcal{A} des relations abéliennes de \mathcal{W} où

$$\mathcal{A} = \left\{ (g_i(F_i))_{1 \leq i \leq d}; g_i \in \mathbb{C}\{t\} \text{ et } \sum_{i=1}^d g_i(F_i) dF_i = 0 \right\};$$

on sait que $\text{rg } \mathcal{W}$ ne dépend pas du choix des F_i et que l'on a les inégalités suivantes:

$$0 \leq \text{rg } \mathcal{W} \leq \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

Un d -tissu est linéaire si ses d feuilles sont des (morceaux de) droites de \mathbb{C}^2 , non nécessairement parallèles; par exemple, le d -tissu de $(\mathbb{P}^2, 0)$ constitué par les tangentes issues d'un point générique à une courbe algébrique C de \mathbb{P}^2 de classe d est linéaire. Si le d -tissu \mathcal{W} est linéaire, l'existence d'une relation abélienne $\sum_{i=1}^d g_i(F_i) dF_i = 0$ avec $g_i(F_i) \neq 0$ pour $1 \leq i \leq d$ permet, grâce au théorème de Lie-Darboux-Griffiths (cf. [G], p. 367), de montrer que \mathcal{W} est associé, par dualité, à une courbe algébrique de \mathbb{P}^2 dont le degré est d ; dans ce cas, le théorème d'Abel entraîne que le rang de \mathcal{W} est maximal (i.e. $\text{rg } \mathcal{W} = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$) (en ce qui concerne les propriétés des tissus linéaires de $(\mathbb{C}^2, 0)$, cf. l'appendice ci-dessous).

On dit qu'un d -tissu \mathcal{W} est linéarisable s'il existe un isomorphisme local

$\phi: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \phi(0))$ qui transforme \mathcal{W} en un d -tissu linéaire. On sait depuis l'exemple de Bol (cf. remarque 1) qu'il existe des d -tissus de $(\mathbb{C}^2, 0)$ dont le rang est maximal et qui ne sont pas linéarisables.

Dans ce qui suit, on se propose de répondre à la question suivante de S. S. Chern (cf. [C], p. 6): *déterminer les d -tissus de $(\mathbb{C}^2, 0)$ dont le rang est maximal et qui sont linéarisables*. Plus précisément, on va caractériser ces derniers et décrire (pour $d \geq 4$) toutes les linéarisations possibles. Les résultats obtenus ci-dessous complètent et prolongent l'étude de cas particuliers faite dans le chapitre 3 du livre de W. Blaschke et G. Bol cité plus haut.

Si l'on désigne par $P_{\mathcal{W}} = \sum_{k=0}^{d-1} P_k b^k \in \mathbb{C}\{x, y\}[b]$ le polynôme associé à un d -tissu \mathcal{W} de $(\mathbb{C}^2, 0)$ introduit dans [Hé] (cf. §1 ci-dessous) (les d feuilles de \mathcal{W} vérifient l'équation différentielle du second ordre $y'' = P_{\mathcal{W}}(x, y; y')$), on a le résultat suivant:

Soit \mathcal{W} un d -tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$ dont le rang est maximal, alors \mathcal{W} est linéarisable si et seulement si $\deg P_{\mathcal{W}} \leq 3$.

La démonstration de ce résultat pour $d \geq 4$ (cf. §3) utilise fondamentalement les propriétés géométriques de l'espace des relations abéliennes de \mathcal{W} rappelées dans la Section 1 et complétées dans les Sections 2 et 3, et donne une description géométrique des linéarisations possibles de \mathcal{W} .

Pour la commodité du lecteur, on a regroupé dans un appendice les résultats essentiels (et leurs démonstrations) concernant la géométrie des tissus linéaires de $(\mathbb{C}^2, 0)$.

Pour terminer cette introduction, on se doit de rappeler que la classification des tissus de $(\mathbb{C}^2, 0)$ dont le rang est maximal et qui ne sont pas linéarisables reste à faire.

1. Rappels et introduction des notations

Soit \mathcal{W} un d -tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$; les d feuilles de \mathcal{W} sont les courbes de niveau $\{F_i = \text{cste}\}$ d'éléments $F_i \in \mathbb{C}\{x, y\}$ vérifiant $F_i(0) = 0$ et en position générale (i.e. $dF_i \wedge dF_j(0) \neq 0$ pour $1 \leq i < j \leq d$). On peut supposer, quitte à faire un changement linéaire de coordonnées, que les feuilles de \mathcal{W} sont les courbes intégrales des d champs de vecteurs suivants:

$$X_i = \partial_x + b_i \partial_y \quad \text{pour } 1 \leq i \leq d$$

où $b_i \in \mathbb{C}\{x, y\}$ avec $b_i(0) \neq b_j(0)$ pour $1 \leq i < j \leq d$.

On dit que \mathcal{W} est linéarisable s'il existe un isomorphisme local $\phi: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \phi(0))$ qui transforme \mathcal{W} en un d -tissu linéaire (i.e. un

d -tissu dont les feuilles sont des (morceaux de) droites de \mathbb{C}^2 , non nécessairement parallèles).

A. Polynôme associé à \mathcal{W} (cf. [Hé])

D'après l'hypothèse de position générale, il existe un unique élément $P_{\mathcal{W}} = \sum_{k=0}^{d-1} P_k b^k$ de $\mathbb{C}\{x, y\}[b]$, appelé le polynôme associé à \mathcal{W} , tel que l'on ait:

$$\deg P_{\mathcal{W}} \leq d - 1 \quad \text{et} \quad P_{\mathcal{W}}(x, y; b_i) = X_i(b_i) \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq d.$$

Les d feuilles de \mathcal{W} sont les graphes d'éléments $y_i \in \mathbb{C}\{x\}$ qui vérifient l'équation différentielle du second ordre:

$$y'' = P_{\mathcal{W}}(x, y; y'),$$

et l'on a le résultat suivant:

THÉORÈME 1. *Pour $d \geq 4$, \mathcal{W} est linéarisable si et seulement si, $\deg P_{\mathcal{W}} \leq 3$ et (P_0, P_1, P_2, P_3) vérifie le système différentiel non linéaire suivant:*

$$\begin{aligned} & \partial_x^2(P_2) - 2\partial_x\partial_y(P_1) + 3\partial_y^2(P_0) + 6P_0\partial_x(P_3) - 3P_2\partial_y(P_0) \\ & \quad - 3P_0\partial_y(P_2) + 3P_3\partial_x(P_0) + 2P_1\partial_y(P_1) - P_1\partial_x(P_2) = 0 \\ & 3\partial_x^2(P_3) - 2\partial_x\partial_y(P_2) + \partial_y^2(P_1) - 6P_3\partial_y(P_0) + 3P_1\partial_x(P_3) \\ & \quad + 3P_3\partial_x(P_1) - 3P_0\partial_y(P_3) - 2P_2\partial_x(P_2) + P_2\partial_y(P_1) = 0 \quad (*) \end{aligned}$$

REMARQUE 1. On désigne par \mathcal{B} le 5-tissu de Bol de \mathbb{C}^2 ; ce 5-tissu de rang maximal (cf. [Bo]) est constitué par 4 pinceaux de droites de \mathbb{C}^2 dont les sommets sont en position générale et de l'unique famille des coniques passant par ces sommets. Le 5-tissu \mathcal{B} n'est pas linéarisable; ce résultat connu est une conséquence immédiate de ce qui précède puisque $\deg P_{\mathcal{B}} = 4$.

B. Géométrie de l'espace des relations abéliennes (cf. [C-G])

Soit \mathcal{W} un d -tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$ avec $d \geq 4$ et dont le rang $r = \text{rg } \mathcal{W} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}$ est maximal (i.e. $r = \frac{1}{2}(d - 1)(d - 2)$) où

$$\mathcal{A} = \left\{ (g_i(F_i))_{1 \leq i \leq d}; g_i \in \mathbb{C}\{t\} \text{ et } \sum_{i=1}^d g_i(F_i) dF_i = 0 \right\}.$$

Soit $(\gamma_i^j(F_i))_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 1 \leq j \leq r}}$ une base de \mathcal{A} ; puisque le rang \mathcal{W} est maximal on peut définir, d'après une idée de H. Poincaré (cf. [P]), d germes d'applications de rang 1

$$Z_i: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{P}^{r-1}, Z_i(0))$$

en posant

$$Z_i \uparrow = [\gamma_i^1(F_i), \gamma_i^2(F_i), \dots, \gamma_i^r(F_i)].$$

Les d points Z_i ne dépendent que du tissu \mathcal{W} et non du choix des F_i , et un changement de base pour \mathcal{A} se traduit sur les Z_i par un automorphisme linéaire de \mathbb{P}^{r-1} .

Chaque Z_i définit un germe de courbe analytique complexe lisse $(C_i, Z_i(0))$ dans \mathbb{P}^{r-1} et l'on désigne par $Z'_i(x, y)$ un point (distinct de $Z_i(x, y)$) de la tangente à C_i en $Z_i(x, y)$.

Par construction on a $\sum_{i=1}^d Z_i dF_i = 0$ et puisque le rang \mathcal{W} est maximal, l'hypothèse de position générale permet de montrer que les d points $Z_i(x, y)$ engendrent un sous-espace linéaire $\mathbb{P}^{d-3}(x, y)$ de \mathbb{P}^{r-1} de dimension $d - 3$. De plus, par dérivation de la relation $\sum_{i=1}^d Z_i dF_i = 0$ on obtient que les $2d$ points $Z_i(x, y)$ et $Z'_i(x, y)$ engendrent un sous-espace linéaire $\mathbb{P}^{2d-6}(x, y)$ de \mathbb{P}^{r-1} de dimension $2d - 6$. Ce que l'on résume par

$$\begin{aligned} \{Z_i(x, y)\} &= \mathbb{P}^{d-3}(x, y) \\ \{Z_i(x, y); Z'_i(x, y)\} &= \mathbb{P}^{2d-6}(x, y). \end{aligned}$$

Les d points $Z_i(x, y)$ sont en position générale dans $\mathbb{P}^{d-3}(x, y)$ (i.e. $(d - 2)$ points quelconques pris parmi les $Z_i(x, y)$ ne sont pas dans un hyperplan de $\mathbb{P}^{d-3}(x, y)$), il existe donc *une unique courbe rationnelle normale de $\mathbb{P}^{d-3}(x, y)$, notée $E(x, y)$, qui passe par les $Z_i(x, y)$ pour $1 \leq i \leq d$* . Pour (x, y) fixé, et à un automorphisme linéaire près de $\mathbb{P}^{d-3}(x, y)$, la courbe algébrique $E(x, y)$ admet la paramétrisation suivante:

$$b \rightsquigarrow [1, b, b^2, \dots, b^{d-3}].$$

Chaque courbe $E(x, y)$ de $\mathbb{P}^{d-3}(x, y)$ est donc lisse, irréductible, non dégénérée si $d \geq 5$ (i.e. $E(x, y)$ n'est pas contenue dans un hyperplan de $\mathbb{P}^{d-3}(x, y)$) et de degré minimal, à savoir $d - 3$.

2. Application de Darboux-Blaschke pour les tissus de $(\mathbb{C}^2, 0)$ dont le rang est maximal

Soit \mathcal{W} un d -tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$ avec $d \geq 4$ et dont le rang $r = \text{rg } \mathcal{W}$ est maximal ($r = \frac{1}{2}(d - 1)(d - 2)$).

En s'inspirant de G. Darboux (cf. [D]) et W. Blaschke (cf. [B]), on pose avec les notations du §1:

$$E(x, y; b) = \Pi(x, y; b) \cdot \sum_{i=1}^d \frac{\partial_y(F_i)}{b - b_i} Z_i$$

où

$$\Pi(x, y; b) = \prod_{i=1}^d (b - b_i) = b^d + \sigma_1 b^{d-1} + \sigma_2 b^{d-2} + \dots + \sigma_d.$$

Grâce à la relation $\sum_{i=1}^d Z_i dF_i = 0$ et puisque l'on peut supposer que $\{Z_3(x, y), Z_4(x, y), \dots, Z_d(x, y)\} = \mathbb{P}^{d-3}(x, y)$, l'expression E définit une application

$$E : (\mathbb{C}^2, 0) \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^{r-1}$$

appelée *application de Darboux-Blaschke de \mathcal{W}* , qui représente la famille $\bigcup_{(x,y) \in (\mathbb{C}^2,0)} E(x, y)$ de \mathbb{P}^{r-1} des courbes rationnelles normales $E(x, y) \subset \mathbb{P}^{d-3}(x, y)$ au voisinage de $E(0) = E(0, 0)$.

En effet, on a

$$\begin{aligned} E(x, y; b) &= \Pi \cdot \left\{ \frac{1}{b} \sum_{i=1}^d \partial_y(F_i) Z_i + \frac{1}{b^2} \sum_{i=1}^d b_i \partial_y(F_i) Z_i + \frac{1}{b^3} \sum_{i=1}^d b_i^2 \partial_y(F_i) Z_i + \dots \right\} \\ &= b^{d-1} \left(\sum_{i=1}^d \partial_y(F_i) Z_i \right) + b^{d-2} \left(\sum_{i=1}^d b_i \partial_y(F_i) Z_i + \sigma_1 \sum_{i=1}^d \partial_y(F_i) Z_i \right) \\ &\quad + b^{d-3} \left(\sum_{i=1}^d b_i^2 \partial_y(F_i) Z_i + \sigma_1 \sum_{i=1}^d b_i \partial_y(F_i) Z_i + \sigma_2 \sum_{i=1}^d \partial_y(F_i) Z_i \right) + \dots \\ &= b^{d-3} \left(\sum_{i=1}^d b_i^2 \partial_y(F_i) Z_i \right) + b^{d-4} \left(\sum_{i=1}^d b_i^3 \partial_y(F_i) Z_i + \sigma_1 \sum_{i=1}^d b_i^2 \partial_y(F_i) Z_i \right) \\ &\quad + b^{d-5} \left(\sum_{i=1}^d b_i^4 \partial_y(F_i) Z_i + \sigma_1 \sum_{i=1}^d b_i^3 \partial_y(F_i) Z_i + \sigma_2 \sum_{i=1}^d b_i^2 \partial_y(F_i) Z_i \right) + \dots \\ &\quad + \sum_{i=1}^d b_i^{d-1} \partial_y(F_i) Z_i + \sigma_1 \sum_{i=1}^d b_i^{d-2} \partial_y(F_i) Z_i + \dots + \sigma_{d-3} \sum_{i=1}^d b_i^2 \partial_y(F_i) Z_i \end{aligned}$$

puisque la relation $\sum_{i=1}^d Z_i dF_i = 0$ entraîne

$$\sum_{i=1}^d \partial_y(F_i)Z_i = 0 = \sum_{i=1}^d b_i \partial_y(F_i)Z_i \tag{A}$$

(on a $X_i(F_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq d$ où $X_i = \partial_x + b_i \partial_y$). Ce qui montre que E est polynômiale en b de degré $d - 3$ et à coefficients dans $\mathbb{C}\{x, y\}$; de plus, on a

$$E(x, y; \infty) = \sum_{i=1}^d b_i^2 \partial_y(F_i)Z_i \quad \text{et} \quad E(x, y; b_i) = Z_i(x, y) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq d.$$

Ainsi, à (x, y) fixé, l'application $b \rightsquigarrow E(x, y; b)$ paramétrise la courbe rationnelle normale $E(x, y) \subset \mathbb{P}^{d-3}(x, y)$.

Le sous-espace linéaire $\{E, \partial_b(E), \partial_y(E)\}$ de \mathbb{P}^{d-1} est de dimension 2; en particulier $\text{rg}_{(x,y;b)} E \geq 2$.

En effet, chaque courbe $E(x, y)$ est lisse et si $\partial_y(E) \in \{E, \partial_b(E)\}$ alors

$$\begin{aligned} & b^{d-3} \left(\sum_{i=1}^d b_i^2 \partial_y(F_i)^2 Z'_i \right) + b^{d-4} \left(\sum_{i=1}^d b_i^3 \partial_y(F_i)^2 Z'_i + \sigma_1 \sum_{i=1}^d b_i^2 \partial_y(F_i)^2 Z'_i \right) \\ & + \dots + \sigma_{d-3} \sum_{i=1}^d b_i^2 \partial_y(F_i)^2 Z'_i = 0 \quad \text{modulo } \{Z_i\} \end{aligned}$$

ce qui est absurde puisque l'on peut supposer que

$$\{Z_3(x, y), \dots, Z_d(x, y); Z'_4(x, y), \dots, Z'_d(x, y)\} = \mathbb{P}^{2d-6}(x, y),$$

d'où le résultat.

LEMME. Si $P_{\mathcal{W}} = \sum_{k=0}^{d-1} P_k b^k$ est le polynôme associé à \mathcal{W} , alors l'application de Darboux-Blaschke E de \mathcal{W} vérifie la relation suivante:

$$\begin{aligned} & \partial_x \left(\frac{E}{\Pi} \right) + b \partial_y \left(\frac{E}{\Pi} \right) + \partial_b \left\{ [P_0 + P_1 b + P_2 b^2 + P_3 b^3] \cdot \frac{E}{\Pi} \right\} \\ & = P_4 \cdot \sum_{i=1}^d \frac{b_i^4 \partial_y(F_i)}{(b - b_i)^2} Z_i + \dots + P_{d-1} \sum_{i=1}^d \frac{b_i^{d-1} \partial_y(F_i)}{(b - b_i)^2} Z_i. \end{aligned}$$

En particulier, on a $\deg P_{\mathcal{W}} \leq 3$ si et seulement si, $\text{rg}_{(x,y;b)} E$ est constant et égal à 2.

DÉMONSTRATION. D'après (A), on a

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^d \partial_y(F_i)Z_i = \sum_{i=1}^d \frac{(b - b_i)\partial_y(F_i)}{b - b_i} Z_i \\ &= b \sum_{i=1}^d \frac{\partial_y(F_i)}{b - b_i} Z_i - \sum_{i=1}^d \frac{b_i\partial_y(F_i)}{b - b_i} Z_i \\ &= b \frac{E}{\Pi} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial_x(F_i)}{b - b_i} Z_i \end{aligned}$$

puisque $X_i(F_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq d$ où $X_i = \partial_x + b_i\partial_y$. Par définition on a

$$\begin{aligned} \partial_x \left(\frac{E}{\Pi} \right) &= \partial_x \left(\sum_{i=1}^d \frac{\partial_y(F_i)}{b - b_i} Z_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^d \frac{\partial_x\partial_y(F_i)}{b - b_i} Z_i + \sum_{i=1}^d \frac{\partial_x(F_i)\partial_y(F_i)}{b - b_i} Z_i + \sum_{i=1}^d \frac{\partial_x(b_i)\partial_y(F_i)}{(b - b_i)^2} Z_i. \end{aligned}$$

et d'après ce qui précède

$$\begin{aligned} \partial_y \left(b \frac{E}{\Pi} \right) &= -\partial_y \left(\sum_{i=1}^d \frac{\partial_x(F_i)}{b - b_i} Z_i \right) \\ &= -\sum_{i=1}^d \frac{\partial_x\partial_y(F_i)}{b - b_i} Z_i - \sum_{i=1}^d \frac{\partial_x(F_i)\partial_y(F_i)}{b - b_i} Z_i - \sum_{i=1}^d \frac{\partial_y(b_i)\partial_x(F_i)}{(b - b_i)^2} Z_i. \end{aligned}$$

Ce qui montre que l'on a

$$\begin{aligned} \partial_x \left(\frac{E}{\Pi} \right) + b\partial_y \left(\frac{E}{\Pi} \right) &= \sum_{i=1}^d \frac{X_i(b_i)\partial_y(F_i)}{(b - b_i)^2} Z_i \\ &= P_0 \cdot \sum_{i=1}^d \frac{\partial_y(F_i)}{(b - b_i)^2} Z_i + P_1 \cdot \sum_{i=1}^d \frac{b_i\partial_y(F_i)}{(b - b_i)^2} Z_i + \dots \\ &\quad + P_{d-1} \cdot \sum_{i=1}^d \frac{b_i^{d-1}\partial_y(F_i)}{(b - b_i)^2} Z_i \end{aligned}$$

par définition de $P_{\#}(P_{\#}(x, y; b_i) = X_i(b_i)$ pour $1 \leq i \leq d$).

D'après (A), on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d \frac{\partial_y(F_i)}{b - b_i} Z_i &= \frac{E}{\Pi}, \\ \sum_{i=1}^d \frac{b_i\partial_y(F_i)}{b - b_i} Z_i &= \sum_{i=1}^d \frac{(-(b - b_i) + b)\partial_y(F_i)}{b - b_i} Z_i = b \cdot \frac{E}{\Pi}, \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^d \frac{b_i^2 \partial_y(F_i)}{b - b_i} Z_i = \sum_{i=1}^d \frac{(-b_i(b - b_i) + bb_i) \partial_y(F_i)}{b - b_i} Z_i = b^2 \cdot \frac{E}{\Pi}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d \frac{b_i^3 \partial_y(F_i)}{b - b_i} Z_i &= \sum_{i=1}^d \frac{(-b_i^2(b - b_i) + bb_i^2) \partial_y(F_i)}{b - b_i} Z_i \\ &= - \sum_{i=1}^d b_i^2 \partial_y(F_i) Z_i + b^3 \cdot \frac{E}{\Pi}. \end{aligned}$$

Ce qui montre que l'on a

$$\begin{aligned} P_0 \cdot \sum_{i=1}^d \frac{\partial_y(F_i)}{(b - b_i)^2} Z_i + \dots + P_3 \cdot \sum_{i=1}^d \frac{b_i^3 \partial_y(F_i)}{(b - b_i)^2} Z_i \\ = -\partial_b \left\{ [P_0 + P_1 b + P_2 b^2 + P_3 b^3] \cdot \frac{E}{\Pi} \right\}, \end{aligned}$$

d'où la relation du lemme d'après ce qui précède. Enfin, si $\text{deg } P_{\mathcal{W}} \leq 3$, alors d'après la relation précédente $\partial_x(E) \in \{E, \partial_b(E), \partial_y(E)\}$ d'où $\text{rg } E = 2$ (on rappelle que par définition, on a $E(x, y; b_i) = Z_i(x, y)$ dans \mathbb{P}^{r-1} pour $1 \leq i \leq d$).

Inversement, si $\text{rg } E = 2$ alors $\partial_x(E) \in \{E, \partial_b(E), \partial_y(E)\}$ et la relation précédente montre que l'on a

$$P_4 \cdot \sum_{i=1}^d \frac{b_i^4 \partial_y(F_i)}{(b - b_i)} Z_i + \dots + P_{d-1} \cdot \sum_{i=1}^d \frac{b_i^{d-1} \partial_y(F_i)}{(b - b_i)^2} Z_i = 0 \text{ modulo } \{E, \partial_b(E)\}. \tag{R}$$

Comme auparavant, on a

$$\sum_{i=1}^d \frac{b_i^4 \partial_y(F_i)}{b - b_i} Z_i = - \sum_{i=1}^d b_i^3 \partial_y(F_i) Z_i + b \left[- \sum_{i=1}^d b_i^2 \partial_y(F_i) Z_i + b^3 \cdot \frac{E}{\pi} \right]$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d \frac{b_i^4 \partial_y(F_i)}{(b - b_i)^2} Z_i &= \sum_{i=1}^d b_i^2 \partial_y(F_i) Z_i \text{ modulo } \{E, \partial_b(E)\} \\ &= \frac{1}{(d - 3)!} \partial_b^{d-3}(E) \text{ modulo } \{E, \partial_b(E)\} \end{aligned}$$

par définition de E . De même,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d \frac{b_i^5 \partial_y(F_i)}{(b-b_i)^2} Z_i &= \sum_{i=1}^d b_i^3 \partial_y(F_i) Z_i + 2b \sum_{i=1}^d b_i^2 \partial_y(F_i) Z_i \text{ modulo } \{E, \partial_b(E)\} \\ &= \frac{1}{(d-4)!} \partial_b^{d-4}(E) \text{ modulo } \{E, \partial_b(E), \partial_b^{d-3}(E)\}. \end{aligned}$$

Plus généralement, on obtient ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d \frac{b_i^k \partial_y(F_i)}{(b-b_i)^2} Z_i \\ = \frac{1}{(d-k+1)!} \partial_b^{d-k+1}(E) \text{ modulo } \{E, \partial_b(E), \partial_b^{d-k+2}(E), \dots, \partial_b^{d-3}(E)\} \end{aligned}$$

pour $5 \leq k \leq d-1$. Ce qui montre, de proche en proche, que $P_{d-1} = \dots = P_4 = 0$ grâce à la relation (R) ci-dessus et puisque le sous-espace linéaire $\{E, \partial_b(E), \partial_b^2(E), \dots, \partial_b^{d-3}(E)\}$ de \mathbb{P}^{r-1} est de dimension $d-3$. Ce qui achève la démonstration du lemme. \square

COROLLAIRE. *On suppose que $\text{deg } P_{\#} \leq 3$, alors par tout point $E(x_0, y_0; b_0)$ de $E(x_0, y_0)$ passe exactement une famille à 1-paramètre d'éléments de $\bigcup_{(x,y) \in (\mathbb{C}^2, 0)} E(x, y)$, et chaque membre de cette famille différent de $E(x_0, y_0)$ ne rencontre $E(x_0, y_0)$ qu'au point $E(x_0, y_0; b_0)$.*

DÉMONSTRATION. Soient $(E_j)_{1 \leq j \leq r}$ les composantes de E , on peut supposer que l'on a $E_1(x_0, y_0; b_0) \neq 0$ et localement

$$E = \left[1, \frac{E_2}{E_1}, \dots, \frac{E_r}{E_1} \right].$$

D'après la relation du lemme précédent et puisque $P_{\#} = P_0 + P_1 b + P_2 b^2 + P_3 b^3$, chaque E_j/E_1 vérifie l'équation aux dérivées partielles du premier ordre suivante:

$$\partial_x(z) + b \partial_y(z) + P_{\#} \partial_b(z) = 0.$$

Ainsi, $E^{-1}(E(x_0, y_0; b_0))$ est la courbe caractéristique de l'équation ci-dessus qui passe par $(x_0, y_0; b_0)$, c'est-à-dire la solution du système différentiel

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{b} = \frac{db}{P_{\#}}$$

qui passe par $(x_0, y_0; b_0)$. Autrement dit, $E^{-1}(E(x_0, y_0; b_0))$ est la courbe

$x \rightsquigarrow (x, y(x); y'(x))$ où $y(x)$ est l'unique solution de l'équation différentielle du second ordre $y''(x) = P_{\mathscr{W}}(x, y(x); y'(x))$ telle que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = b_0$. Ce qui montre que la famille à 1-paramètre cherchée est

$$b \rightsquigarrow E(x, y(x); b)$$

(chaque membre de cette famille passe par $E(x_0, y_0; b_0)$ en $b = y'(x)$). De plus si $E(x_0, y_0; \beta_0) = E(x_1, y(x_1); \beta_1)$ pour $(x_0, y_0) \neq (x_1, y(x_1))$ suffisamment voisins, alors $\beta_0 = b_0$ et $\beta_1 = y'(x_1)$ puisqu'il existe une unique solution de $y'' = P_{\mathscr{W}}(x, y; y')$ qui passe par (x_0, y_0) et $(x_1, y(x_1))$, à savoir $y(x)$. □

3. Détermination des tissus de rang maximal de $(\mathbb{C}^2, 0)$ qui sont linéarisables

Soit \mathscr{W} un d -tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$ avec $d \geq 2$ et dont le rang est *maximal* (i.e. $\text{rg } \mathscr{W} = \frac{1}{2}(d - 1)(d - 2) = r$). Si $d = 2$ (resp. 3) alors il est bien connu que \mathscr{W} est linéarisable, et même *parallélisable* puisqu'il existe un isomorphisme local $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \phi(0))$ qui transforme \mathscr{W} en un tissu linéaire dont les feuilles sont $\xi = \text{cste}$, $\eta = \text{cste}$ (resp. $\xi = \text{cste}$, $\eta = \text{cste}$ et $\xi + \eta = \text{cste}$ puisque dans ce cas l'on a une relation abélienne non triviale:

$$g_1(F_1) dF_1 + g_2(F_2) dF_2 + g_3(F_3) dF_3 = 0 = d(\tilde{g}_1(F_1) + \tilde{g}_2(F_2) + \tilde{g}_3(F_3)).$$

On suppose désormais que l'on a $d \geq 4$.

On rappelle qu'une *surface de Veronese de \mathbb{P}^{r-1}* est une surface algébrique V de \mathbb{P}^{r-1} paramétrée, à un automorphisme linéaire près de \mathbb{P}^{r-1} , par

$$(b, t) \rightsquigarrow [1; b, t; b^2, bt, t^2; \dots, t^{d-3}];$$

autrement dit, V est déterminée par la donnée d'une base du \mathbb{C} -espace vectoriel des polynômes homogènes de degré $d - 3$ de $\mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]$. Une surface de Veronese de $\mathbb{P}^{r-1} = \mathbb{P}^{(1/2)d(d-3)}$ est lisse, irréductible, non dégénérée pour $d \geq 5$ (i.e. non contenue dans un hyperplan de \mathbb{P}^{r-1}) et de degré $(d - 3)^2$; pour $d = 5$, c'est "la" surface usuelle de Veronese de \mathbb{P}^5 qui de plus dans ce cas (et seulement dans ce dernier) est non dégénérée et de degré minimal, à savoir 4.

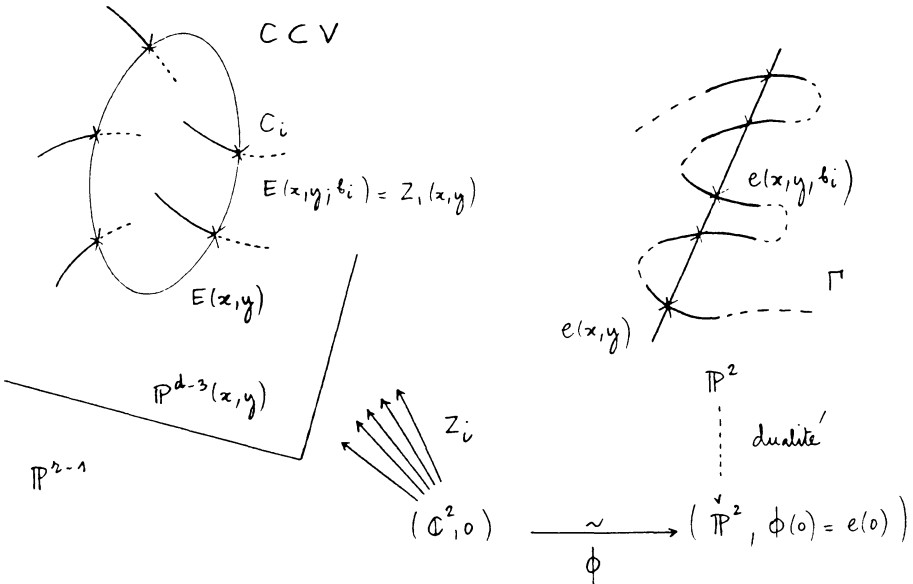
THÉORÈME 2. Soit \mathscr{W} un d -tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$ avec $d \geq 4$, de polynôme associé $P_{\mathscr{W}}$ et dont le rang r est maximal (i.e. $r = \frac{1}{2}(d - 1)(d - 2)$), alors les conditions suivantes sont équivalentes:

- (i) \mathcal{W} est linéarisable;
- (ii) la famille $\bigcup_{(x,y) \in (\mathbb{C}^2, 0)} E(x, y)$ est contenue dans une surface de Veronese V de \mathbb{P}^{r-1} ;
- (iii) $\deg P_{\mathcal{W}} \leq 3$.

DÉMONSTRATION. (i) \Rightarrow (iii). C'est une conséquence du théorème 1. (iii) \Rightarrow (i). Quitte à modifier l'ordre des composantes E_j de l'application de Darboux-Blaschke E de \mathcal{W} , on peut supposer d'après le lemme précédent que l'application

$$e = [E_1, E_2, E_3]: (\mathbb{C}^2, 0) \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$$

vérifie $\text{rg} = 2$; de plus, d'après le corollaire qui précède et le théorème de Bézout dans \mathbb{P}^2 , chaque courbe algébrique $e(x, y)$ de \mathbb{P}^2 (i.e. paramétrée par $b \rightsquigarrow e(x, y; b)$) est une droite ($e(x_0, y_0)$ et $e(x, y(x))$ ont exactement un point commun pour $(x_0, y_0) \neq (x, y(x))$). Par dualité, on obtient $\phi: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\check{\mathbb{P}}^2, \phi(0))$ en posant $\phi(x, y) = e(x, y)$, et par construction ϕ linéarise \mathcal{W} ; en effet $\phi(\{F_i(x, y) = \text{cste}\})$ est la droite de $\check{\mathbb{P}}^2$ qui correspond à $e(x, y; b_i(x, y))$ et l'hypothèse de position générale montre que ϕ est un isomorphisme local:



(ii) \Rightarrow (i). Soit $v: \mathbb{P}^2 \rightarrow v(\mathbb{P}^2) = V \subset \mathbb{P}^{r-1}$ le plongement de la surface de Veronese $V = \bigcup_{(x,y) \in (\mathbb{C}^2, 0)} E(x, y)$, alors $v^{-1}(E(x, y))$ est une droite de \mathbb{P}^2 puisque

$$d - 3 = \deg[v^{-1}(E(x, y))] = (d - 3) \cdot \deg[v^{-1}(E(x, y))]$$

et l'on conclut comme dans (iii)⇒(i) en posant $\phi(x, y) = v^{-1}(E(x, y)) \in \check{\mathbb{P}}^2$. (i)⇒(ii). On peut supposer que \mathcal{W} est linéaire, c'est-à-dire $F_i = y - x \cdot b_i$ où $X_i(b_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq d$ (cf. [Hé], §2), et l'on obtient d germes d'applications de rang 1

$$U_i: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{P}^2, U_i(0))$$

en posant $U_i(x, y) = [1, b_i(x, y), F_i(x, y)]$. Puisque \mathcal{W} est de rang maximal, il existe une relation abélienne d'algébrisation $\sum_{i=1}^d g_i(F_i) dF_i = 0$ où $g_i(F_i) \neq 0$ pour $1 \leq i \leq d$; grâce au théorème de Lie-Darboux-Griffiths (cf. [G], p. 367 et appendice §4) il existe une courbe algébrique réduite $\Gamma = \{f(s, t) = 0\}$ de \mathbb{P}^2 de degré d (non nécessairement irréductible et éventuellement singulière) contenant les d germes de courbes analytiques lisses de \mathbb{P}^2 définis par les U_i . Autrement dit, on a $\mathcal{W} = \mathcal{L}_\Gamma$ où \mathcal{L}_Γ est le d -tissu linéaire de $\check{\mathbb{P}}^2$ associé, par dualité, à la courbe algébrique $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$. Si ω_Γ est le faisceau dualisant de Γ , alors $H^0(\Gamma, \omega_\Gamma)$ est engendré sur \mathbb{C} par

$$\frac{s^i t^j}{\partial_i(f)(s, t)} ds \quad \text{où } 0 \leq i + j \leq d - 3.$$

Or d'après le théorème d'Abel (cf. appendice §3), $H^0(\Gamma, \omega_\Gamma)$ est \mathbb{C} -isomorphe à l'espace vectoriel \mathcal{A} des relations abéliennes de \mathcal{W} , ce qui montre que (dans ce cas) l'on peut supposer que l'on a

$$Z_i(x, y) = [1; b_i, y - x \cdot b_i; b_i^2, (y - x \cdot b_i)b_i, (y - x \cdot b_i)^2; \dots, (y - x \cdot b_i)^{d-3}]$$

pour $1 \leq i \leq d$. D'où le résultat, puisque dans ce cas on obtient

$$E(x, y; b) = [1; b, y - x \cdot b; b^2, (y - x \cdot b)b, (y - x \cdot b)^2; \dots, (y - x \cdot b)^{d-3}]. \quad \square$$

REMARQUE 2. Au cours de la démonstration du théorème 2, on a obtenu la description suivante d'un d -tissu \mathcal{W} de $(\mathbb{C}^2, 0)$ de rang maximal et linéarisable ($d \geq 4$), via l'espace vectoriel \mathcal{A} de ses relations abéliennes: la linéarisation ϕ définie par e est unique, à un automorphisme linéaire de \mathbb{P}^2 près (cf. [Hé]) et ϕ transforme \mathcal{W} en le d -tissu linéaire \mathcal{L}_Γ de $\check{\mathbb{P}}^2$ associé, par dualité, à une courbe algébrique réduite Γ de \mathbb{P}^2 de degré d . La description de la courbe $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$ est la suivante: chaque germe de courbe C_i défini par Z_i est contenu dans une courbe algébrique $C = v(\Gamma)$ de \mathbb{P}^{r-1} tracée sur la surface de Veronese

$$V \supset \bigcup_{(x,y) \in (\mathbb{C}^2,0)} E(x, y) \quad \text{où } v: \mathbb{P}^2 \rightarrow v(\mathbb{P}^2) = V \subset \mathbb{P}^{r-1}$$

est le plongement définissant V . La courbe algébrique C de \mathbb{P}^{r-1} contenant les

C_i est non nécessairement irréductible, éventuellement singulière, non dégénérée (i.e. non contenue dans un hyperplan de \mathbb{P}^{r-1} : le rang de \mathcal{W} est maximal!) et de degré $d(d - 3)$.

REMARQUE 3. On notera, d'après ce qui précède, que les relations abéliennes d'un d -tissu \mathcal{W} de $(\mathbb{C}^2, 0)$ dont le rang est maximal permettent de "résoudre géométriquement" le système différentiel non linéaire (*) du théorème 1.

REMARQUE 4. Pour $d = 4$, la condition (iii) du théorème 2 est toujours vérifiée et le résultat (resp. la démonstration) (iii) \Rightarrow (i) du théorème 2 est celui (resp. celle) classique de Poincaré:

Tout 4-tissu \mathcal{W} de $(\mathbb{C}^2, 0)$ dont le rang est maximal est linéarisable

(dans ce cas, $(x, y) \rightsquigarrow \phi(x, y) = e(x, y) = \mathbb{P}^1(x, y) \in \check{\mathbb{P}}^2$ est l'application de Poincaré de \mathcal{W} (cf. par exemple [C-G]))

Appendice

Dans cet appendice on a regroupé quelques résultats classiques sur la géométrie des courbes algébriques de \mathbb{P}^2 et détaillé les démonstrations des théorèmes de base concernant la géométrie des tissus linéaires de $(\mathbb{C}^2, 0)$.

On reconnaîtra l'influence de l'article "Variations on a theorem of Abel" de P. A. Griffiths [G], ainsi que la démonstration de G. Darboux du théorème de Lie concernant les surfaces de translation (cf. [D]).

1. Rappels sur la géométrie des courbes algébriques de \mathbb{P}^2 (cf. [B-P-V], [G-H], [H])

Soit $C = \{f(s, t) = 0\}$ une courbe algébrique *réduite* de \mathbb{P}^2 , non nécessairement irréductible et éventuellement singulière dont le degré est $d = \deg f$. Puisque C est réduite, le lieu singulier $\text{Sing}(C) = \{f = f_s = f_t = 0\}$ où $f_s = \partial f / \partial s$ et $f_t = \partial f / \partial t$ est constitué d'un nombre fini de points de C .

On désigne par $n: \tilde{C} \rightarrow C$ la normalisation de C ; \tilde{C} est une variété projective lisse non nécessairement connexe: si $\tilde{C} = \bigcup_{i=1}^k \tilde{C}_i$ est la décomposition (finie) de \tilde{C} en composantes connexes, alors $C = \bigcup_{i=1}^k n(\tilde{C}_i)$ est la décomposition de C en composantes irréductibles $C_i = n(\tilde{C}_i)$; de plus, $n_{i, C_i}: \tilde{C}_i \rightarrow C_i$ est la normalisation de C_i .

On note $\chi(C) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(C, \mathcal{O}_C) - \dim_{\mathbb{C}} H^1(C, \mathcal{O}_C)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré de C , et $p_a(C) = 1 - \chi(C)$ le *genre arithmétique* de C .

Si P_C est le polynôme de Hilbert de C (i.e. associé à $\mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]/$

$(F(z_0, z_1, z_2))$ où $f(s, t) = F(1, s, t)$, alors $P_C(v) = d \cdot v + \chi(C)$. Or

$$\begin{aligned} P_C(v) &= \binom{v+2}{2} - \binom{v+2-d}{2} \\ &= dv + 1 - \frac{1}{2}(d-1)(d-2) \end{aligned}$$

ce qui montre que l'on a

$$p_a(C) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

D'après l'additivité de χ , la normalisation de C donne

$$p_a(C) = p_a(\tilde{C}) + \sum_{p \in \text{Sing}(C)} \delta_p$$

d'où la formule suivante:

$$\frac{1}{2}(d-1)(d-2) = \sum_{i=1}^k g_i + 1 - k + \sum_{p \in \text{Sing}(C)} \delta_p$$

où $g_i = \dim_{\mathbb{C}} H^1(\tilde{C}_i, \mathcal{O}_{\tilde{C}_i}) = p_a(\tilde{C}_i)$ est le genre géométrique de C_i (i.e. le genre arithmétique de la normalisation de C_i).

On rappelle que

$$2\delta_p = \mu(C_i, p) + r_p - 1$$

où $\mu(C_i, p)$ est le nombre de Milnor de la singularité (isolée) p de C_i , et r_p est le nombre de branches locales en p de la courbe C_i .

Soit ω_C le faisceau dualisant de C ; les sections locales de ω_C sont de la forme

$$r \frac{ds}{f_t} = -r \frac{dt}{f_s} \quad \text{où } r \in \mathcal{O}_C.$$

Si C est lisse, $\omega_C = \Omega_C^1$. La dualité de Serre et la connexité de C impliquent:

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} H^0(C, \omega_C) &= \dim_{\mathbb{C}} H^1(C, \mathcal{O}_C) \\ &= p_a(C) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2). \end{aligned}$$

Soit $\Omega_{\mathbb{P}^2}^2(C)$ le faisceau des 2-formes méromorphes sur \mathbb{P}^2 à pôles simples le long de C ; les sections locales de $\Omega_{\mathbb{P}^2}^2(C)$ sont de la forme $r(ds \wedge dt)/f$ où $r \in \mathcal{O}_C$. Le résidu de Poincaré sur C , noté Res_C , donne la suite exacte sur \mathbb{P}^2 :

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^2}^2 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^2}^2(C) \rightarrow \omega_C \rightarrow 0$$

où l'on rappelle que

$$\text{Res}_C \left(r \frac{ds \wedge dt}{f} \right) = r \frac{ds}{f_t} = -r \frac{dt}{f_s} \text{ sur } C.$$

Puisque l'on a

$$\dim_{\mathbb{C}} H^i(\mathbb{P}^2, \Omega_{\mathbb{P}^2}^2) = \dim_{\mathbb{C}} H^{2-i}(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 2 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

la suite exacte précédente induit un isomorphisme:

$$H^0(\mathbb{P}^2, \Omega_{\mathbb{P}^2}^2(C)) \xrightarrow{\sim} H^0(C, \omega_C).$$

Toute fonction méromorphe sur \mathbb{P}^2 est rationnelle; ainsi tout élément de $H^0(\mathbb{P}^2, \Omega_{\mathbb{P}^2}^2(C))$ s'écrit localement $r(s, t) (ds \wedge dt)/f(s, t)$ où $r \in \mathbb{C}[s, t]$ avec la condition qu'il n'y ait pas de pôles à l'infini. Si $s = 1/s'$ et $t = t'/s'$ alors $f(s, t) = \tilde{f}(s', t')/(s')^d$, et l'on a

$$\frac{r(s, t) ds \wedge dt}{f(s, t)} = - \frac{\tilde{r}(s', t') ds' \wedge dt'}{(s')^{\text{deg } r - d + 3} \tilde{f}(s', t')}.$$

On doit donc avoir $\text{deg } r - d + 3 \leq 0$; or

$$\dim_{\mathbb{C}} \{r \in \mathbb{C}[s, t]; \text{deg } r \leq d - 3\} = \binom{2 + d - 3}{d - 3}$$

ce qui permet de retrouver l'égalité:

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(C, \omega_C) = \frac{1}{2}(d - 1)(d - 2).$$

2. Théorème d'Abel: version différentielle de P. A. Griffiths (cf. [G])

Une droite générale $H \in \check{\mathbb{P}}^2$ coupe transversalement C en d points lisses distincts, et l'on a *une correspondance d'incidence*

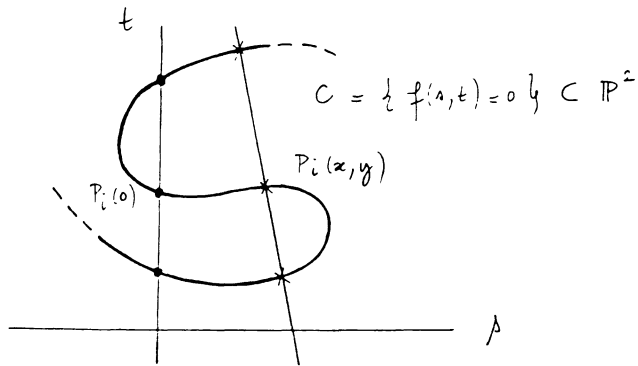
$$\{(H, c) \in \check{\mathbb{P}}^2 \times C; c \in H\} = I \subset \check{\mathbb{P}}^2 \times C;$$

$$\begin{array}{c} \pi \downarrow P_i \nearrow \\ \check{\mathbb{P}}^2 \end{array}$$

la première projection induit un morphisme $\pi: I \rightarrow \check{\mathbb{P}}^2$ génériquement fini, de branches locales

$$P_i(x, y) = (y - b_i(x, y) \cdot x, b_i(x, y))$$

où $(x, y = tx + s)$ sont des coordonnées locales sur $\check{\mathbb{P}}^2$.



$$\{s = 0\} = H_{[0,0,1]} \quad H_{[-y,x,1]} = \{[1, s, t]; -y + tx + s = 0\}$$

Pour toute 1-forme rationnelle ω sur C , il existe une 1-forme rationnelle $\text{Trace}(\omega)$ sur $\check{\mathbb{P}}^2$ définie par $\text{Trace}(\omega) = \sum_{i=1}^d P_i^*(\omega)$. Si localement sur C , on a $\omega = r(ds)/f_i = -r(dt)/f_s$ avec $r \in \mathbb{C}[s, t]$ alors

$$\text{Trace}(\omega) = \sum_{i=1}^d \frac{R[b_i(x, y)]}{F'[b_i(x, y)]} (dy - b_i(x, y) dx)$$

localement sur $\check{\mathbb{P}}^2$ où pour (x, y) fixé,

$$F(b) = f(y - bx, b) \quad \text{et} \quad R(b) = r(y - bx, b).$$

En effet, on a $f(y - b_i \cdot x, b_i) = 0$; d'où

$$\left(-b_i - \frac{\partial b_i}{\partial x} \cdot x\right) \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial b_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial t} = 0 = F'(b_i) \cdot \frac{\partial b_i}{\partial x} - b_i \cdot \frac{\partial f}{\partial s}$$

$$\left(1 - \frac{\partial b_i}{\partial y} \cdot x\right) \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial b_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial t} = 0 = F'(b_i) \cdot \frac{\partial b_i}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial s}$$

puisque $F'(b) = -x(\partial f/\partial s) + \partial f/\partial t$. Par suite:

$$F'(b_i) db_i = F'(b_i) \left(\frac{\partial b_i}{\partial x} dx + \frac{\partial b_i}{\partial y} dy \right) = -\frac{\partial f}{\partial s} (dy - b_i \cdot dx).$$

Ainsi:

$$\begin{aligned} \text{Trace}(\omega) &= \sum_{i=1}^d P_i^* \left[-\frac{r(s, t) dt}{\partial f/\partial s(s, t)} \right] \\ &= \sum_{i=1}^d \frac{R[b_i] db_i}{-\partial f/\partial s(y - b_i \cdot x, b_i)} = \sum_{i=1}^d \frac{R[b_i]}{F'[b_i]} (dy - b_i \cdot dx). \end{aligned}$$

Pour (x, y) fixé, le polynôme F à des zéros simples, à savoir les $b_i = b_i(x, y)$ et pour $k \geq 0$ d'après la formule des résidus:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d \frac{b_i^k R(b_i)}{F'(b_i)} &= \sum_{i=1}^d \text{res}_{b_i} \left(\frac{b^k R(b)}{F(b)} db \right) \\ &= -\text{res}_\infty \left(\frac{b^k R(b)}{F(b)} db \right) = \text{res}_0 \left(\frac{\tilde{R}(b')}{(b')^{k+\text{deg } r-d+2} \tilde{F}(b')} db' \right) \end{aligned}$$

où $\tilde{F}(0) \neq 0$ et $b = 1/b'$. Si de plus, $\text{deg } r \leq d - 3$ alors pour $k = 0$ ou 1 on a $k + \text{deg } r - d + 2 \leq 0$; ce qui montre que

$$\sum_{i=1}^d \frac{R(b_i)}{F'(b_i)} = \sum_{i=1}^d \frac{b_i R(b_i)}{F'(b_i)} = 0.$$

Ainsi, d'après l'écriture locale du morphisme Trace, on obtient le résultat suivant:

THÉORÈME 1. *Pour tout $\omega \in H^0(C, \omega_C)$,*

$$\text{Trace}(\omega) = \sum_{i=1}^d P_i^*(\omega) = 0.$$

3. Tissu linéaire associé à une courbe algébrique de \mathbb{P}^2

Soit $C = \{f(s, t) = 0\}$ une courbe réduite de \mathbb{P}^2 , de degré $d = \text{deg } f$. Avec les notations qui précèdent, toute droite $H_{[-y, x, 1]} = \{[1, s, t]; -y + tx + s = 0\}$ voisine de $H_{[0, 0, 1]}$ dans \mathbb{P}^2 coupe C en d points lisses distincts $P_i(x, y) = (y - b_i(x, y) \cdot x, b_i(x, y))$.

Par dualité on obtient un d -tissu linéaire \mathcal{L}_C de $(\mathbb{C}^2, 0) = (\check{\mathbb{P}}^2, H_{[0, 0, 1]})$ où

l'on regarde \mathbb{C}^2 dans $\check{\mathbb{P}}^2$ via le plongement $(x, y) \rightsquigarrow [-y, x, 1]$; les d feuilles de \mathcal{L}_C passant par (x_0, y_0) sont les droites distinctes

$$\{-y + b_i(x_0, y_0)x + y_0 - b_i(x_0, y_0)x_0 = 0\}.$$

On appelle \mathcal{L}_C "le" tissu linéaire associé à la courbe algébrique C de \mathbb{P}^2 .

Si l'une des composantes irréductibles de C est une droite projective D_i , alors la i -ième famille des feuilles de \mathcal{L}_C est le pinceau de droites passant par \check{D}_i où \check{D}_i est le point $\check{\mathbb{P}}^2$ qui correspond par dualité à la droite D_i de \mathbb{P}^2 . Si aucune composante irréductible de C est une droite projective alors les d feuilles de \mathcal{L}_C passant par (x_0, y_0) sont les d tangentes à la courbe duale $\check{C} \subset \check{\mathbb{P}}^2$ de C qui passent par (x_0, y_0) : on rappelle que \check{C} est l'adhérence de l'image du morphisme $C - \text{Sing}(C) \rightarrow \mathbb{P}^2$ défini par $c \rightsquigarrow T(C, c)$ où $T(C, c)$ est la tangente à la courbe C au point c ; de plus, la classe de C (i.e. le degré \check{d} de la courbe duale \check{C} de $\check{\mathbb{P}}^2$) est donnée par (cf. [T]):

$$\check{d} = d(d - 1) - \sum_{p \in \text{Sing}(C)} \{\mu(C, p) + m(C, p) - 1\}$$

où $\mu(C, p)$ (resp. $m(C, p)$) est le nombre de Milnor (resp. la multiplicité) de la singularité (isolée) p de C .

Par transversalité, on a des isomorphismes $n_i: (\mathbb{C}, 0) \xrightarrow{\sim} (C, P_i(0))$ où $n_i(s) = [1, s, \xi_i(s)]$, et l'on a $P_i = n_i \circ a_i$ avec $a_i(x, y) = y - b_i(x, y) \cdot x$, soit $b_i = \xi(a_i)$; en particulier le d -tissu linéaire \mathcal{L}_C est défini par les $\{a_i = \text{cste}\}$, et les champs de vecteurs associés à \mathcal{L}_C sont $X_i = \partial_x + b_i \partial_y$.

Soit $\omega \in H^0(C, \omega_C)$; localement sur $(C, P_i(0))$ on a $n_i^*(\omega) = g_i(s) ds$ où $g_i \in \mathbb{C}\{s\}$; d'après le théorème d'Abel (cf. §2) on obtient:

$$\begin{aligned} \text{Trace}(\omega) &= \sum_{i=1}^d P_i^*(\omega) = \sum_{i=1}^d a_i^*(g_i(s) ds) \\ &= \sum_{i=1}^d g_i(a_i) da_i = 0. \end{aligned}$$

On a ainsi construit une application \mathbb{C} -linéaire

$$\theta: H^0(C, \omega_C) \rightarrow \mathcal{A}$$

définie par $\theta(\omega) = (g_i(a_i))_i$ où \mathcal{A} est le \mathbb{C} -espace vectoriel des relations abéliennes du d -tissu linéaire \mathcal{L}_C de $(\mathbb{C}^2, 0) = (\check{\mathbb{P}}^2, H_{[0,0,1]})$.

On va montrer que θ est un isomorphisme. Soit $(g_i(a_i))_i \in \mathcal{A}$, il suffit d'après ce qui précède et le lemme d'extension de Griffiths (cf. [G], p. 385) de construire au voisinage de $H_{[0,0,1]}$ dans \mathbb{P}^2 une 2-forme $\Omega = (r(s, t)/$

$f(s, t) ds \wedge dt$ dont le résidu de Poincaré $\text{Res}_C(\Omega) = \omega$ vérifie localement sur $(C, P_i(0))$ l'égalité $n_i^*(\omega) = g_i(s) ds$; soit encore

$$r(a_i, b_i) = g_i(a_i) \cdot f_i(a_i, b_i)$$

au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$.

Le vecteur

$$DP_i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_y(a_i) \\ \partial_y(b_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - x\partial_y(b_i) \\ \partial_y(b_i) \end{bmatrix}$$

est non nul pour (x, y) voisin de $0 \in \mathbb{C}^2$, et est tangent à C en $P_i(x, y)$; d'où

$$(1 - x\partial_y(b_i)) f_s(a_i, b_i) + \partial_y(b_i) f_t(a_i, b_i) = 0.$$

Ce qui montre que si à (x, y) fixé, on pose $F(b) = f(y - bx, b)$ alors on a:

$$\begin{aligned} F'(b_i) \partial_y(a_i) &= (-x f_s(a_i, b_i) + f_t(a_i, b_i)) (1 - x\partial_y(b_i)) \\ &= f_t(a_i, b_i). \end{aligned}$$

D'après la formule d'interpolation de Lagrange, la fonction

$$h(b, x, y) = f(y - bx, b) \cdot \sum \frac{g_i(a_i) \partial_y(a_i)}{b - b_i(x, y)}$$

vérifie pour (x, y) fixé:

$$\begin{aligned} h(b_i, x, y) &= g_i(a_i) \partial_y(a_i) F'(b_i) \\ &= g_i(a_i) \cdot f_t(a_i, b_i). \end{aligned}$$

LEMME. On suppose que l'on a $\sum_{i=1}^d g_i(a_i) da_i = 0$, alors la fonction

$$\lambda(b, x, y) = \sum_{i=1}^d \frac{g_i(a_i) \partial_y(a_i)}{b - b_i(x, y)}$$

vérifie $\partial_x(\lambda) + b\partial_y(\lambda) = 0$.

DÉMONSTRATION. D'après l'hypothèse $\sum_{i=1}^d g_i(a_i) \partial_y(a_i) = 0$, ce qui montre que l'on a

$$b \sum_{i=1}^d \frac{g_i(a_i) \partial_y(a_i)}{b - b_i} - \sum_{i=1}^d \frac{b_i g_i(a_i) \partial_y(a_i)}{b - b_i} = \sum_{i=1}^d \frac{(b - b_i) g_i(a_i) \partial_y(a_i)}{b - b_i} = 0$$

d'où

$$b\partial_y(\lambda) = \partial_y \left(\sum_{i=1}^d \frac{b_i g_i(a_i) \partial_y(a_i)}{b - b_i} \right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \partial_x(\lambda) + b\partial_y(\lambda) &= \sum_{i=1}^d \frac{\partial_x[g_i(a_i)\partial_y(a_i)] + \partial_y[b_i g_i(a_i)\partial_y(a_i)]}{b - b_i} \\ &\quad + \sum_{i=1}^d \frac{g_i(a_i)\partial_y(a_i)\partial_x(b_i) + b_i g_i(a_i)\partial_y(a_i)\partial_y(b_i)}{(b - b_i)^2} = 0 \end{aligned}$$

puisque $X_i(a_i) = X_i(b_i) = 0$ où $X_i = \partial_x + b_i\partial_y$. Ce qui donne le résultat. \square

D'après le lemme ci-dessus, la fonction $\lambda(t, x, tx + s)$ ne dépend pas de x , ce qui montre que la fonction

$$\begin{aligned} r(s, t) &= f(s, t) \cdot \lambda(t, x, tx + s) \\ &= h(t, x, tx + s) \end{aligned}$$

est holomorphe au voisinage de $H_{[0,0,1]}$ dans \mathbb{P}^2 . Or

$$\begin{aligned} r(a_i, b_i) &= h(b_i, x, b_i \cdot x + a_i) \\ &= h(b_i, x, y) = g_i(a_i) \cdot f_i(a_i, b_i) \end{aligned}$$

ce qui prouve que θ est un isomorphisme. En particulier, d'après ce qui précède on a le résultat suivant:

THÉORÈME 2. *Soit C une courbe algébrique réduite de \mathbb{P}^2 dont le degré est d . Alors le rang du d -tissu linéaire \mathcal{L}_C associé à C est maximal et égal au genre arithmétique de la courbe C , ou encore*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A} = \dim_{\mathbb{C}} H^0(C, \omega_C) = p_a(C) = \frac{1}{2}(d - 1)(d - 2).$$

4. Algébrisation des tissus linéaires de $(\mathbb{C}^2, 0)$

Soit \mathcal{L} un d -tissu linéaire de $(\mathbb{C}^2, 0)$. Quitte à faire un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer que les champs de vecteurs associés à \mathcal{L} sont $X_i = \partial_x + b_i \cdot \partial_y$ avec $X_i(b_i) = 0$ (cf. [Hé], §2).

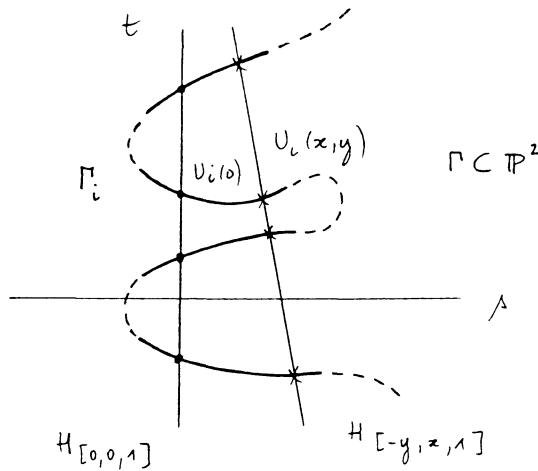
Les feuilles du d -tissu \mathcal{L} sont définies par $\{a_i = \text{cste}\}$ où $a_i(x, y) = y - b_i(x, y) \cdot x$ puisque $X_i(b_i) = 0$; de plus, on a $b_i = \xi_i(a_i)$ avec $\xi_i \in \mathbb{C}\{s\}$.

On pose $U_i(x, y) = [1, a_i(x, y), \xi_i[a_i(x, y)]]$, alors les U_i définissent d germes de courbes analytiques lisses $(\Gamma_i, U_i(0))$ dans \mathbb{P}^2 qui sont transverses à la droite $H_{[0,0,1]} \in \check{\mathbb{P}}^2$ en d points distincts $U_i(0) = [1, 0, b_i(0)]$; de plus, pour (x, y) voisin de $0 \in \mathbb{C}^2$, c'est-à-dire pour

$$H_{[-y,x,1]} = \{[1, s, t]; -y + tx + s = 0\}$$

voisin de $H_{[0,0,1]}$ dans $\check{\mathbb{P}}^2$, on a:

$$U_i(x, y) \in H_{[-y,x,1]} \text{ pour tout } 1 \leq i \leq d.$$



Par transversalité, on a des isomorphismes $n_i: (\mathbb{C}, 0) \xrightarrow{\sim} (\Gamma_i, U_i(0))$ où $n_i(s) = [1, s, \xi_i(s)]$ et des applications $P_i: (H_{[0,0,1]}, \check{\mathbb{P}}^2) \rightarrow (\Gamma_i, U_i(0))$ où $P_i(H) = H \cdot \Gamma_i = U_i(x, y) = n_i \circ a_i(x, y)$ avec $H = H_{[-y,x,1]}$.

THÉORÈME 3 (Lie, Darboux, ..., Griffiths). *On suppose qu'il existe une relation abélienne du d -tissu linéaire \mathcal{L} de la forme $\sum_{i=1}^d g_i(a_i) da_i = 0$ avec $g_i(a_i) \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq d$. Alors il existe une courbe algébrique réduite Γ de \mathbb{P}^2 , non nécessairement irréductible et éventuellement singulière dont le degré est d et qui contient les germes $(\Gamma_i, U_i(0))$, et un élément $\omega \in H^0(\Gamma, \omega_\Gamma)$ tel que localement sur $(\Gamma_i, U_i(0))$ on ait $n_i^*(\omega) = g_i(s) ds$. En particulier \mathcal{L} est le d -tissu linéaire associé à la courbe Γ de \mathbb{P}^2 (i.e. $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\Gamma$).*

DÉMONSTRATION. D'après le lemme d'extension de Griffiths (cf. [G], p. 385) et ce qui précède, il suffit de construire une 2-forme méromorphe Ω au voisinage de $H_{[0,0,1]}$ dans \mathbb{P}^2 dont la variété polaire est $\sum_{i=1}^d \Gamma_i$ et telle que $n_i^*[\text{Res}_{\Gamma_i}(\Omega)] = g_i(s) ds$ sur $(\Gamma_i, U_i(0))$. En effet, l'extension $\tilde{\Omega}$ de Ω s'écrit alors

localement $\tilde{\Omega} = (r(s, t)/f(s, t)) ds \wedge dt$ avec r et f dans $\mathbb{C}[s, t]$, $\deg r \leq d - 3$ où $d = \deg f$.

Soit $\lambda(b, x, y) = \sum_{i=1}^d g_i(a_i) \partial_y(a_i)/b - b_i(x, y)$, d'après le lemme du §3 la fonction $\lambda(t, x, tx + s)$ ne dépend pas de x . La 2-forme

$$\Omega = \lambda(t, x, tx + s) ds \wedge dt$$

est méromorphe au voisinage de $H_{[0,0,1]}$ dans \mathbb{P}^2 de variété polaire $\sum_{i=1}^d \Gamma_i$ puisque pour tout $1 \leq i \leq d$ on a $g_i(a_i) \neq 0$ et $a_i(x, y) = y - b_i(x, y) \cdot x$, soit $b_i(x, y) = b_i(x, b_i \cdot x + a_i)$. De plus, on a $n_i^*[\text{Res}_{\Gamma_i}(\Omega)] = g_i(s) ds$ sur $(\Gamma_i, U_i(0))$ puisque

$$\begin{aligned} a_i(x, tx + s) &= tx + s - b_i(x, tx + s) \cdot x \\ &= s \text{ sur } (\Gamma_i, U_i(0)), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \partial_t[t - b_i(x, tx + s)] &= 1 - x \cdot \partial_y(b_i)(x, tx + s) \\ &= \partial_y(a_i)(x, tx + s). \end{aligned}$$

Ce qui démontre le théorème. □

Références

- [B] W. Blaschke: Über die Tangenten einer ebenen Kurve fünfter Klasse, *Abh. Hamburg* 9 (1933) 313–317.
- [B-B] W. Blaschke und G. Bol: *Geometrie der Gewebe*, Springer, Berlin, 1938.
- [Bo] G. Bol: Über ein bemerkenswertes Fünfgewebe in der Ebene, *Abh. Hamburg* 11 (1936) 387–393.
- [B-P-V] W. Barth, C. Peters and A. van de Ven: *Compact Complex Surfaces*, Springer, 1984.
- [C] S. S. Chern: Web geometry, *Bull. Amer. Math. Soc.* 6 (1982) 1–8.
- [C-G] S. S. Chern and P. A. Griffiths: Abel's theorem and webs, *Jahresberichte der deut. Math. Ver.* 80 (1978) 13–110.
- [D] G. Darboux: *Leçons Sur la Théorie Générale Des Surfaces*, Livre I, 2ème édition, Paris, 1914.
- [G] P. A. Griffiths: Variations on a theorem of Abel, *Invent. Math.* 35 (1976) 321–390.
- [G-H] P. A. Griffiths and J. Harris: *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley, 1978.
- [H] R. Hartshorne: *Algebraic Geometry*, Springer, 1977.
- [Hé] A. Hénaut: Sur la linéarisation des tissus de \mathbb{C}^2 , *Topology* 32 (1993) 531–542.
- [P] H. Poincaré: Sur les surfaces de translation et les fonctions abéliennes, *Bull. Soc. Math. France* 29 (1901) 61–86.
- [T] B. Teissier: Résolution simultanée I, II in Sémin. sur les singularités des surfaces, *Lect. Notes Math.* 777, Springer, 1980.