COMPOSITIO MATHEMATICA

ANTOINE DOUAI

Équations aux différences finies, intégrales de fonctions multiformes et polyèdres de Newton

Compositio Mathematica, tome 87, n° 3 (1993), p. 311-355

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1993__87_3_311_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (http://http://www.compositio.nl/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Compositio Mathematica **87**: 311–355, 1993.
© 1993 *Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.*

Equations aux différences finies, intégrales de fonctions multiformes et polyèdres de Newton

ANTOINE DOUAI

Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France

Received 23 January 1992; accepted in revised form 28 January 1993

Introduction

Dans un article récent, [L-S], F. Loeser et C. Sabbah ont donné une formule générale pour le déterminant d'une matrice dont les éléments sont du type

$$I(s) = \int_\gamma f^s \omega$$

où f est un polynôme sur $\mathbf{C}^n$, ω est une n-forme algébrique sur $\mathbf{C}^n$ et γ un n-cycle à coefficients dans un système local dont la monodromie est telle que la fonction I soit uniforme. Pour cela ils démontrent que ce déterminant est solution d'un système *d'équations aux différences finies* (EDF), qui s'obtient comme le déterminant de la cohomologie du complexe (appelé par la suite "complexe d'Aomoto")

$$\cdots \to \mathbf{C}(s) \otimes_{\mathbf{C}} \Omega^p \xrightarrow{d_s} \mathbf{C}(s) \otimes_{\mathbf{C}} \Omega^{p+1} \to \cdots$$

muni de la différentielle $d_s(1 \otimes \omega) = 1 \otimes \mathrm{d}\omega + s \otimes (\mathrm{d}f/f) \wedge \omega$.

Le travail consistait alors à exprimer la classe de ce système d'EDF dans le groupe hypergéométrique et à remarquer que deux solutions d'un même système d'EDF (de rang 1), satisfaisant des conditions de croissance raisonnables, peuvent différer d'une fonction périodique, la formule obtenue pour le déterminant d'intégrales s'écrivant

$$h(s)\varphi(\exp 2i\pi s)c^s \prod_\beta \Gamma(s-\beta)^{\gamma(\beta)}. \tag{$*$}$$

Ici, h et φ sont des fractions rationnelles de leurs arguments, c une constante non nulle, β (resp. $\gamma(\beta)$) parcourant un ensemble fini de nombres complexes (resp. d'entiers). Il faut néanmoins remarquer que l'on ne peut pas donner d'informations sur la fraction h, les bases dans lesquelles sont effectués les calculs n'étant pas spécifiées. (Précisions que la formule ($*$) ne dépend que des différentes monodromies locales en $f = 0$ et $f = \infty$.)

L'objectif de ce travail est de calculer un tel déterminant dans une base de formes fixées (notée $B(s)$) lorsque f est un polynôme non dégénéré par rapport à son polyèdre de Newton à l'infini (l'hypersurface $f^{-1}(0)$ est supposée lisse) et d'obtenir

$$\det\left(\int_{\gamma_i} \omega_j f^s\right) = \varphi(\exp 2i\pi s)c^s \prod_{\beta} \Gamma(s+\beta)^{\gamma(\beta)} \qquad (**)$$

($\omega_j \in B(s)$) φ étant définie comme plus haut, c le produit des valeurs critiques de f (avec multiplicités), les nombres β, rationnels en l'occurence, étant déterminés par le spectre de le filtration de Newton définie sur $\Omega^n/\mathrm{d}f \wedge \Omega^{n-1}$ (Ω^p désigne l'espace des p-formes à coefficients polynomiaux). Il convient de noter (il s'agit là d'une des motivations essentielles de ce travail) que dans la formule (**) l'indétermination h est levée.

Chemin faisant, nous avons été amenés à étudier en détail la structure de l'opérateur de translation t, agissant sur la cohomologie du complexe d'Aomoto, dans les bases considérées et à introduire la notion de "bonnes bases": $B(s)=\{\omega_1,\ldots,\omega_\mu\}$ est une bonne base de la cohomologie si l'on a (en notant $\omega = {}^t(\omega_1,\ldots,\omega_\mu)$)

$$(s+1)t\omega = (s+1)A_0\omega + A_1 t\omega \qquad (***)$$

où A_0 est la matrice de la multiplication par f sur $\Omega^n/\mathrm{d}f \wedge \Omega^{n-1}$ et A_1 est une matrice triangulaire inférieure dont la diagonale est formée par les éléments du spectre défini plus haut. (Une notion similaire était apparue dans le travail de M. Saito [Sa]).

En les déterminant explicitement, nous montrons que de telles bases existent toujours en dimension 2 (moyennant une hypothèse sur la partie initiale du polynôme f), et en toutes dimensions lorsque f est un polynôme quasi homogène ou semi quasi homogène. Nous montrons alors un tel résultat lorsque les éléments du spectre ne diffèrent pas d'un entier.

Une fois (***) vérifiée, il est facile de donner une formule pour le déterminant de la cohomologie du complexe d'Aomoto (système d'EDF de rang 1), non plus seulement dans le groupe hypergéométrique, mais simplement dans $\mathbf{C}(s)^*$ (signalons que cette formule peut s'interpréter comme un quotient de deux polynômes indiciels, en 0 et à l'∞, d'une équation différentielle à points singuliers réguliers). En nous appuyant sur le travail de F. Loeser et C. Sabbah, nous montrons alors (**) en remarquant que les deux membres de l'égalité sont solutions, dans la base où (***) est valide, du même système d'EDF de rang 1.

Pour mener à bien notre entreprise nous utilisons des techniques reposant, pour la plus grande part, sur les travaux d'A. G. Kouchnirenko ([K]) et de J. Briançon, M. Granger, P. Maisonobe et M. Miniconi ([B-G-M-M]).

Notons, pour finir, que dans le cas particulier où le polyèdre de Newton à l'infini du polynôme f n'a qu'une seule face, le résultat obtenu est similaire à un résultat de A. N. Varchenko ([V]).

Quelques mots quant à l'organisation de ce travail: En section 0 nous rappelons des résultats relatifs au polyèdre de Newton. La section 1 est consacrée à une brève revue des systèmes d'EDF. En section 2 nous énonçons une proposition de division et en section 3 nous explicitons les "bonnes bases" de la cohomologie en dimension 2. La section 4 réunit les outils techniques nécessaires aux sections 5, 6 et 7 dans lesquelles nous étudions l'action de l'opérateur de translation (dans les bases déterminées précédemment). En section 8 nous définissons les intégrales que nous considérons, et nous calculons le déterminant d'une matrice dont les éléments sont de telles intégrales en section 9.

0. Notations et hypothèses

0.1. Polyèdre de Newton

Soit $f:\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}$ un polynôme, $f(x)=\Sigma_{k\in A}\, a_k x^k$; $A\subset\mathbf{N}^n$.

0.1.1. Soit $\operatorname{supp}(f)$ l'ensemble $\{k\in\mathbf{N}^n/a_k\neq 0\}$. On définit $\Gamma_-(f)$ comme étant l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{0\}\cup\operatorname{supp}(f)$ dans $\mathbf{R}^n_+$. $\Gamma_-(f)$ est appelé *polyèdre de Newton* à l'infini du polynôme f. On note $\Gamma(f)$ la réunion des faces fermées de $\Gamma_-(f)$ qui ne passent pas à l'origine.

0.1.2. Le polynôme f est dit *commode* si, pour chaque i compris entre 1 et n, il existe $k_i\geqslant 1$ tel que le monôme $x_i^{k_i}$ figure dans l'expression de f avec un coefficient non nul.

0.1.3. Soit Δ une face de $\Gamma(f)$. On pose $f_\Delta=\Sigma_{k\in\Delta}\, a_k x^k$. On dit que f est *non dégénéré* par rapport à son polyèdre de Newton si, pour chaque face de $\Gamma(f)$, les polynômes $(x_i\partial f/\partial x_i)_\Delta$, $i=1,\dots,n$, ne s'annulent pas simultanément sur $(\mathbf{C}\backslash 0)^n$.

0.1.4. On pose

$$\nu(f)=n!\,V_n-(n-1)!\,V_{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}V_1+(-1)^n,$$

V_n étant le volume de dimension n de $\Gamma_-(f)$ et V_q la somme des volumes de dimension q des intersections de $\Gamma_-(f)$ avec tous les plans de coordonnées de dimension q. L'entier $\nu(f)$ est appelé *nombre de Newton* du polynôme f.

On a alors le théorème suivant, dû à Kouchnirenko ([K], théorème 2).

0.1.5. THEOREME. *Soit $\mu(f)$ la somme des nombres de Milnor de tous les points* *critiques de f. Supposons le polynôme f commode. Alors*:

(i) *Si* $\mu(f) < \infty$, $\mu(f) \leqslant \nu(f)$.

(ii) *Supposons de plus f non dégénéré. On a l'égalité* $\mu(f) = \nu(f)$. *En particulier* $\mu(f) < \infty$.

0.1.6. NOTATIONS

(i) Soit Δ une face du polyèdre. On désigne par cône (Δ) le cône convexe de sommet l'origine et de base Δ, c'est-à-dire la réunion de toutes les demi-droites de $\mathbf{R}^n$ d'origine 0 qui passent par Δ.

(ii) Dans tout ce qui suit, $\mathscr{J}(f)$ désigne l'idéal $(\partial f/\partial x)$ et $\mathscr{L}(f)$ l'idéal $(x\partial f/\partial x)$.

On note $F_j = (x_j(\partial f/\partial x_j))_{\Gamma(f)}$.

0.1.7 REMARQUE. Soit A_Δ la $\mathbf{C}$-algèbre engendrée par les monômes x^a, $a \in$ cône (Δ), $F_{i,\Delta} = x_i \partial f_\Delta/\partial x_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, et $B_\Delta = A_\Delta/\Sigma\, A_\Delta F_{i,\Delta}$. La condition de non dégénerescence est alors équivalente à la suivante: dim B_Δ est finie pour toute face Δ de $\Gamma(f)$.

0.1.8. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des faces de $\Gamma(f)$ de codimension 1 et P_Δ, $\Delta \in \mathscr{F}$, l'unique vecteur de $\mathbf{Q}^n$ vérifiant $\langle B, P_\Delta \rangle = -1$ pour tout point B de Δ. On définit:

(i) le poids d'un élément $g = \Sigma\, g_A x^A$ par rapport à la face Δ comme $\phi_\Delta(g) = \inf\{\langle A, P_\Delta \rangle, g_A \neq 0\}$,

(ii) le poids de g par rapport à $\Gamma(f)$ comme $\phi(g) = \inf\{\phi_\Delta(g), \Delta \in \mathscr{F}\}$.

0.1.9. REMARQUES

(i) $\phi(x^a x^b) = \phi(x^a) + \phi(x^b)$ si et seulement si a et b appartiennent à un même ensemble cône $(\Delta) \cap \mathbf{N}^n$. (Sinon $\phi(x^a x^b) > \phi(x^a) + \phi(x^b)$.)

(ii) Soient $\Delta \in \mathscr{F}$, $\Sigma\, a_{i,\Delta} x_i = m_\Delta$ une équation de l'hyperplan supportant la face Δ, et b un élément de cône$(\Delta) \cap \mathbf{N}^n$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$. Alors $\phi(x^b) = -1/m_\Delta(\Sigma\, a_{i,\Delta} b_i)$.

0.1.10. Soit V la filtration décroissante de l'anneau $\mathbf{C}[x]$, définie par

$$V^\beta \mathbf{C}[x] = \{g \in \mathbf{C}[x]/\phi(g) \geqslant \beta\}, \quad \beta \in \mathbf{Q}.$$

Cette filtration est appelée *filtration de Newton*. Dans tout ce qui suit, on note $gr_V^\beta \mathbf{C}[x] = V^\beta \mathbf{C}[x] / \bigcup_{\alpha > \beta} V^\alpha \mathbf{C}[x]$. On construit la filtration de Newton sur Ω^n (espace des n-formes à coefficients polynomiaux) de la façon suivante: si $\omega = h\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ appartient à Ω^n, le poids de ω par rapport à $\Gamma(f)$ est défini comme étant égal au poids de $hx_1 \ldots x_n$ par rapport à $\Gamma(f)$.

0.1.11. HYPOTHESES. Dorénavant, nous choisissons le polynôme f *commode*, *non dégénéré* par rapport à son polyèdre de Newton. Le polynôme f est donc à singularités isolées; nous supposerons de plus *l'hypersurface* $f^{-1}(0)$ *lisse*.

0.1.12. Soit f comme ci-dessus, P_i un point critique de f et μ_i le nombre de Milnor associé à ce point critique. On pose $R(f) = \Pi_i f(P_i)^{\mu_i}$, le produit étant étendu à l'ensemble des points critiques de f.

1. Systèmes d'équations aux différences. Le complexe d'Aomoto

1.1. Systèmes d'équations aux différences finies

1.1.1. Soit $\mathbf{C}[s] = \mathbf{C}[s_1, \ldots, s_p]$ l'anneau des polynômes à p variables et $\mathbf{C}(s)$ le corps des fractions rationnelles correspondant. Un *système rationnel holonome d'EDF* est un $\mathbf{C}(s)$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'automorphismes $\mathbf{C}$-linéaires $\tau_1, \ldots, \tau_p$ qui commutent entre eux et qui satisfont les relations

$$\tau_i s_j = s_j \tau_i \quad \text{si } i \neq j$$

$$\tau_i s_i = (s_i + 1)\tau_i, \quad i = 1, \ldots, p.$$

1.1.2. Soit $\mathfrak{M}(s)$ un systéme d'EDF de rang r. Fixonsune $\mathbb{C}(s)$ base de $\mathfrak{M}(s)$ et notons $A_i(s)$ la matrice $(r \times r)$ de τ_i dans cette base. Les éléments de $A_i(s)$ sont dans $\mathbf{C}(s)$ et les matrices des différents opérateurs vérifient la relation:

$$A_i(s)A_j(s + 1_i) = A_j(s)A_i(s + 1_j) \quad i, j = 1, \ldots, p.$$

Dans tout ce qui suit, on suppose $p = 1$.

1.1.3. Soit $\mathfrak{M}(s)$ un système d'EDF de rang r muni de l'automorphisme τ. On définit le déterminant de ce système par la formule

$$\det \mathfrak{M}(s) = \bigwedge^{r} \mathfrak{M}(s).$$

Clairement, $\det \mathfrak{M}(s)$ est un système d'EDF de rang 1.

1.1.4. Comme en 1.1.2, choisissons une $\mathbf{C}(s)$-base m de $\mathfrak{M}(s)$ et notons $A(s)$ la matrice de τ dans cette base. Le déterminant de l'automorphisme τ, *calculé dans la base m* (on le note $\det_m \mathfrak{M}(s)$), appartient à $\mathbf{C}(s)^*$. De plus, après un changement de base de matrice $B(s) \in GL(r, \mathbf{C})$), la matrice de τ dans la nouvelle base m' est $A'(s) = B(s+1)A(s)B(s)^{-1}$. Il en résulte que le déterminant de τ, calculé dans la base m', s'écrit

$$\det_{m'} \mathfrak{M}(s) = (h(s+1)/h(s)) \det_m \mathfrak{M}(s)$$

avec $h \in \mathbf{C}(s)^*$. Ceci motive les définitions suivantes:

1.1.5. *Classification des systèmes d'EDF de rang* 1: le groupe hypergéométrique.

Une classe d'isomorphisme de systèmes rationnels holonomes d'EDF de rang 1 est la donnée d'un élément φ de $\mathbf{C}(s)^*$ modulo l'action de changements de base de la forme $\psi(s)=h(s+1)/h(s)\varphi(s)$, $h\in\mathbf{C}(s)^*$. On appelle *groupe hypergéométrique* le groupe $\mathbf{C}(s)^*/\sim$, où $\sim$ est la relation d'équivalence définie par les changements de base ci-dessus. Notons que les éléments du groupe hypergéométrique sont en correspondance bijective avec les équations satisfaites par les fonctions $c^s\prod_{\beta\in\mathbf{C}/\mathbf{Z}}\Gamma(s+\beta)^{\gamma_\beta}$ où γ_β est nul sauf pour un nombre fini de β et où c est une constante non nulle. Un élément du groupe hypergéométrique s'écrit donc de manière unique sous la forme $c^s\prod_\beta\Gamma(s+\beta)^{\gamma_\beta}$.

1.1.6. Le déterminant $\det\mathfrak{M}(s)$, défini en 1.1.3, est clairement un élément du groupe hypergéométrique.

1.2. *Le complexe d'Aomoto*

Dans tout ce qui suit, f est un polynôme comme en 0.1.11.

1.2.1. Soient $X=\mathbf{C}^n-f^{-1}(0)$, $\mathcal{O}_X$ le faisceau des germes des fonctions régulières sur X et $\mathscr{D}_X$ le faisceau des opérateurs algébriques sur X. On pose $\mathscr{D}_X(s)=\mathbf{C}(s)\otimes\mathscr{D}_X$, et on note $\mathcal{O}_X(s)f^s$ le $\mathscr{D}_X(s)$-module $\mathcal{O}_X(s)$ obtenu par torsion par f^s. Si $p\colon X\times\operatorname{spec}\mathbf{C}(s)\to\operatorname{spec}\mathbf{C}(s)$ désigne l'application constante, on appelle *complexe d'Aomoto* le complexe $p_+\mathcal{O}_X(s)f^s$, noté aussi $A_f(\mathcal{O}_X)(s)$. Sa cohomologie est de dimension finie sur $\mathbf{C}(s)$ (c'est un résultat de Bernstein montré dans le cadre plus général des $\mathscr{D}$-modules holonomes, cf. [B]).

Le déterminant $\det(A_f(\mathcal{O}_X)(s))\overset{\text{def}}{=}\prod_i(\det H^i(A_f(\mathcal{O}_X)(s)))^{(-1)^i}$ est un système d'EDF de rang 1, élément du groupe hypergéométrique. Comme X est affine, le complexe $A_f(\mathcal{O}_X)(s)$ est quasi-isomorphe au complexe (décalé de $n=$ dimension X)

$$\to\mathbf{C}(s)\otimes_{\mathbf{C}}\Omega^p(X)\to\mathbf{C}(s)\otimes_{\mathbf{C}}\Omega^{p+1}(X)\to$$

muni de la différentielle

$$d_s(\varphi(s)\otimes\omega)=\varphi(s)\otimes\mathrm{d}\omega+s\varphi(s)\otimes(\mathrm{d}f/f)\wedge\omega$$

($\Omega^p(X)$ désigne ici l'espace des p-formes régulières sur X).

1.2.2. On construit un opérateur de translation τ, $\mathbf{C}$-linéaire, *inversible*, agissant sur le complexe d'Aomoto comme suit:

$$\tau(\varphi(s)\otimes\omega)=\varphi(s+1)\otimes\omega f$$

si $\varphi(s)\otimes\omega$ appartient à $\mathbf{C}(s)\otimes_{\mathbf{C}}\Omega^p(X)$. L'opérateur τ commute avec la différentielle d_s et induit donc une action, notée pareillement τ, sur la cohomologie. Nous considérons aussi le complexe $\mathbf{C}[s] \otimes_{\mathbf{C}} \Omega^{\cdot}(X)$ qui est un module sur $\mathbf{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$ et dont la cohomologie est de dimension finie sur $\mathbf{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$.

1.2.3. Dans tout ce qui suit, *on note $H^i(s)$ le* i-ème *groupe de cohomologie du complexe d'Aomoto.* D'après ce qui précède, le calcul de $\det(A_f(\mathcal{O}_X)(s))$ (qui est un système d'EDF de rang 1) se ramène au calcul des différents déterminants $\det H^i(s)$, c'est-à-dire au calcul des déterminants de l'opérateur de translation τ sur les groupes de cohomologie du complexe d'Aomoto.

1.2.4. Soit $B_i(s)$ une $\mathbf{C}(s)$-base de $H^i(s)$ et $\det_{B_i(s)} H^i(s)$ le déterminant de l'opérateur de translation τ (agissant sur $H^i(s)$), calculé dans cette base. Alors, comme en (1.1.4), $\det_{B_i(s)} H^i(s)$ est un élément de $\mathbf{C}(s)^*$. C'est ce cas de figure que nous retrouverons par la suite.

1.2.5. LEMME. *Soit f un polynôme comme en* (0.1.11). *Alors*:

(i) *$H^i(s)$ est nul pour $i \neq n$.*
(ii) *$H^n(s)$ est de dimension μ sur* $\mathbf{C}(s)$.

DEMONSTRATION. (i) Cette première assertion est montrée par F. Loeser et C. Sabbah ([L-S], 1.3.5, exemple 2) (cf. aussi [A]) dans le cas où f est à singularités isolées (y compris à l'infini). La démonstration repose essentiellement sur le théorème de comparaison de Deligne, [D]. Nous la reprenons ici.

Soit $\mathscr{L}_a$ le système local de rang 1 sur $\mathbf{C}$, de monodromie a^{-1} autour de $t = 0$. Alors le complexe d'Aomoto n'a de cohomologie qu'en degré n si et seulement si $H^i(X, f^{-1}\mathscr{L}_a) = 0$ pour $i \neq n$. Soit en effet β assez général et $i_\beta: \{\beta\} \to \mathbf{C}$ l'inclusion. Si le complexe $i_\beta^* \mathbf{C}[s] \otimes_{\mathbf{C}} \Omega^{\cdot}(X)$ n'a de cohomologie qu'en degré n, il en est de même du complexe $\mathbf{C}(s) \otimes_{\mathbf{C}} \Omega^{\cdot}(X)$ (cf. [L-S], 1.3.5 (1)). De plus, le théorème de comparaison montre que, si $a = \exp 2i\pi\beta$, $H^i(X, f^{-1}\mathscr{L}_a)$ est isomorphe au i-ème groupe de cohomologie du complexe $i_\beta^* \mathbf{C}[s] \otimes_{\mathbf{C}} \Omega^{\cdot}(X)$. Maintenant, les faisceaux $R^j f_* \mathbf{C}$ sont des sytèmes locaux sur $\mathbf{C}^*$ pour $0 \leqslant j \leqslant n-2$ d'après ([Br] theorem 1.2). Dès lors, $H^q(\mathbf{C}^*, R^p f_* C \otimes \mathscr{L}_a) = 0$ pour $0 \leqslant p \leqslant n-2$ et pour tout q lorsque a n'est pas valeur propre du système local $R^p f_* \mathbf{C}$. La suite spectrale de Leray

$$E_2^{pq} = H^p(\mathbf{C}^*, R^q f_* \mathbf{C} \otimes \mathscr{L}_a) \Rightarrow H^{p+q}(\mathbf{C}^n - f^{-1}(0), f^{-1}\mathscr{L}_a)$$

dégénère

$$(H^1(\mathbf{C}^*, R^{n-1} f_* \mathbf{C} \otimes \mathscr{L}_a) = H^n(X, f^{-1}\mathscr{L}_a))$$

et

$$H^i(X, f^{-1}\mathscr{L}_a) = 0 \text{ pour } i < n.$$

Comme X est de Stein, $H^j(X, f^{-1}\mathscr{L}_a)=0$ pour $j > n$, et la première assertion est montrée.

(ii) Le résultat sur la dimension se déduit d'un résultat de Kouchnirenko ([K] théorème 5), qui affirme que si t est valeur régulière d'un polynôme non dégénéré et commode, la variété $f^{-1}(t)$ a le type d'homotopie d'un bouquet de μ sphères de dimension $n-1$.

En effet, soit $\Omega^{\cdot}_{X^{an}}$ le faisceau des germes des formes holomorphes sur X. Puisque X est affine, le théorème de comparaison assure que $H^n(s)=H^n(X, \mathscr{L})$ où $\mathscr{L}$ est le faisceau des germes de sections horizontales de la connexion holomorphe, intégrable sur $\Omega^{\cdot}_{X^{an}}$, $\nabla_w=d+w$ où l'on a posé $w=s\,\mathrm{d}f/f$: $\mathscr{L}$ est un système local de rang 1 sur $\mathbf{C}(s)$ et l'on a, en utilisant (i),

$$(-1)^n \dim_{\mathbf{C}(s)} H^n(s) = \operatorname{rang}(\mathscr{L})\chi(X) = \chi(X).$$

Le résultat s'en déduit immédiatement.

2. Bases de la cohomologie du complexe d'Aomoto. Une proposition de division

Nous gardons les notations de la section 0.

2.1. Pour tout u de $\mathbf{C}[x](=\mathbf{C}[x_1,\dots,x_n])$, on pose

(a) $\phi^*(u)=\phi(ux_1\dots x_n)$,
(b) $V^\alpha\mathbf{C}[x]^*=\{u\in\mathbf{C}[x]/\phi^*(u)\geqslant\alpha\}$,
(c) $E=\bigoplus E^*_\alpha$ où E^*_α est un supplémentaire de $gr^\alpha_V\mathbf{C}[x]^*\bigcap in^*\mathscr{J}(f)$ dans $gr^\alpha_V\mathbf{C}[x]^*$ et où $in^*(g)$ désigne la classe de g dans $gr^{\phi^*(g)}_V\mathbf{C}[x]^*$. (Nous verrons que E est isomorphe à $\mathbf{C}[x]/\mathscr{J}(f)$).

On note alors

(a) $\operatorname{spec}(f)=\{\alpha\in\mathbf{Q}^-, E^*_\alpha\neq 0\}$,
(b) $\Delta^*(f)=\inf\{\alpha, \alpha\in\operatorname{spec}(f)\}$,
(c) $\delta^*(f)=\sup\{\alpha, \alpha\in\operatorname{spec}(f)\}$.
(d) $g(\alpha)=\dim_{\mathbf{C}} E^*_\alpha$.

2.1.1. REMARQUES

(i) en dimension 2, $\Delta^*(f)=-2-\delta^*(f)$ et en dimension $n(\geqslant 2)$, $\Delta^*(f)\geqslant -n$,
(ii) $g(\alpha)$ et $\operatorname{spec}(f)$ ne dépendent que de $\Gamma_-(f)$.

2.2. PROPOSITION. *Pour tout monôme x^a, $a\in\mathbf{N}^n$, il existe $B\subset E$ unique tel que*

$$fx^a\,\mathrm{d}x = \sum_{x^b\in B} A_{ab}(s)x^b\,\mathrm{d}x \quad (\mathrm{mod}\,.\,d_s)$$

avec $\phi^*(x^b) \geqslant \phi^*(x^a) - 1$ pour tout $x^b \in B$, les A_{ab} étant des fractions rationnelles de s.

DEMONSTRATION. La démonstration repose sur le lemme suivant, adaptation de la proposition (B.1.2.6) de [B-G-M-M], adaptée au cas polynomial (ce lemme est montré en (2.4)):

2.2.1. LEMME. *Soit $u \in \mathbf{C}[x]$. Il existe $v \in E$ unique et $(a_1, \ldots, a_n)$ un élément de $(\mathbf{C}[x])^n$ tels que*

$$u = v + \sum_{i=1}^{n} a_i \partial f / \partial x_i$$

avec les conditions sur le poids suivantes:

(i) $\phi^*(v) \geqslant \phi^*(u)$,
(ii) $\phi^*(a_i \partial f / \partial x_i) \geqslant \phi^*(u)$,
(iii) $\phi^*(\partial a_i / \partial x_i) \geqslant \phi^*(u) + 1$,
(iv) $\phi^*(a_i) \geqslant \phi^*(u) + \phi(x_i) + 1$.

Puisque f est de poids -1, nous pouvons réécrire le lemme (2.2.1) de la façon suivante:

2.2.2. LEMME. *Soit x^a un mônome tel que $\phi^*(x^a) = \alpha$. Il existe une $(n-1)$-forme $\omega = \Sigma(-1)^{j+1} a_j \mathrm{d}x_1 \ldots \widehat{\mathrm{d}x_j} \ldots \mathrm{d}x_n$ et une n-forme v (unique) à coefficients dans E telles que*

$$f x^a \mathrm{d}x = v + \mathrm{d}f \wedge \omega$$

avec de plus

(i) $\phi^*(a_j) \geqslant \phi(x_j) + \alpha$,
(ii) $\phi^*(\partial a_j / \partial x_j) \geqslant \alpha$.

Dès lors, pour $j = 1, \ldots, n$, on peut écrire

$$\partial a_j / \partial x_j = \sum_{\phi^*(x^i) = \alpha} b_{ij} x^i + \sum_{\phi^*(x^l) > \alpha} c_{lj} x^l$$

où les b_{ij} et c_{lj} sont des constantes, éventuellement nulles. Si ω est la $(n-1)$ forme du lemme (2.2.2), on a alors

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{\phi^*(x^i) = \alpha} b_{ij} x^i + \sum_{\phi^*(x^l) > \alpha} c_{lj} x^l \right) \mathrm{d}x$$

et comme $d_s(f\omega) = f\,\mathrm{d}\omega + (s+1)\,\mathrm{d}f \wedge \omega$, on déduit du lemme (2.2.2) le

2.2.3 LEMME. *Avec les notations du lemme* (2.2.2), *on a*

$$(s+1)fx^a\,dx + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{\phi^*(x^i)=\alpha} b_{ij}fx^i\,dx\right)$$
$$= -\sum_{j=1}^{n}\sum_{\phi^*(x^l)>\alpha} c_{lj}fx^l\,dx + (s+1)v \quad (\mathrm{mod}\,.\,d_s).$$

Pour montrer la proposition (2.2), nous utilisons une récurrence sur le poids. Examinons le cas $\alpha=\delta^*(f)$. Notons x^{δ_i}, $1\leqslant i\leqslant l$, les monômes vérifiant $\phi^*(x^{\delta_i})=\delta^*(f)$ et posons $\omega_i=fx^{\delta_i}\,dx$. Le lemme (2.2.3) montre que, pour $a=\delta_1$, on a,

$$(s+g_{11}+1)\omega_1+g_{12}\omega_2+\cdots+g_{1l}\omega_l=(s+1)v_1 \quad (\mathrm{mod}\,.\,d_s)$$

où les g_{1i}, $1\leqslant i\leqslant l$, sont des constantes, v_1 est une n-forme à coefficients dans E, $\phi(v_1)\geqslant\delta^*(f)-1$ (ici, on a posé $\phi(v_1)\overset{\mathrm{def}}{=}\phi^*(w)$ si $v_1=w\,dx$). De même, en écrivant la formule (2.2.3) pour $a=\delta_i$, $2\leqslant i\leqslant l$, on a

$$g_{i1}\omega_1+\cdots+(s+g_{ii}+1)\omega_i+\cdots+g_{il}\omega_l=(s+1)v_i \quad (\mathrm{mod}\,.\,d_s)$$

g_{ij} et v_i sont définies de la même manière que ci-dessus. La matrice $l\times l$ des coefficients du système ainsi obtenu est

$$\begin{pmatrix} (s+g_{11}+1) & g_{12} & \cdots & g_{1l} \\ g_{21} & (s+g_{22}+1) & \cdots & g_{2l} \\ \vdots & & & \vdots \\ g_{l1} & \cdots & \cdots & (s+g_{ll}+1) \end{pmatrix}$$

et il est clair que son déterminant, pour s générique, est non nul si bien que dans ce cas la proposition (2.2) est montrée.

Supposons maintenant la proposition (2.2) vérifiée pour les monômes x^l tels que $\phi^*(x^l)>\alpha$. Notons x^{α_i}, $1\leqslant i\leqslant k$, les monômes tels que $\phi^*(x^{\alpha_i})=\alpha$ et posons $\omega_i=fx^{\alpha_i}\,dx$. L'hypothèse de récurrence et le lemme (2.2.3) indiquent que, pour $a=\alpha_1$,

$$(s+d_{11}+1)\omega_1+d_{12}\omega_2+\cdots+d_{1k}\omega_k=\sum_q h_q^1(s)r_q^1 \quad (\mathrm{mod}\,.\,d_s)$$

où les d_{1i}, $1\leqslant i\leqslant k$, sont des constantes, h_q^1 des fractions rationnelles de s et r_q^1 des n-formes à coefficients dans E telles que $\phi(r_q^1)\geqslant\alpha-1$ (avec, comme plus haut, $\phi(r_q^1)\overset{\mathrm{def}}{=}\phi^*(\omega_q^1)$ si $r_q^1=\omega_q^1\,dx$). En écrivant la formule (2.2.3) pour $a=\alpha_i$, $2\leqslant i\leqslant k$

on obtient aussi

$$d_{i1}\omega_1+\cdots+(s+d_{ii}+1)\omega_i+\cdots+d_{ik}\omega_k=\sum_q h_q^i(s)r_q^i \quad (\mathrm{mod}\,.\,d_s)$$

d_{ij}, h_q^i et r_q^i étant définies de la même manière que ci-dessus. Pour conclure, il ne nous reste plus qu'à réitérer le raisonnement effectué dans le cas $\alpha=\delta^*(f)$.

De ce qui précède, on déduit aussi:

2.3. PROPOSITION. *Soit* $\{x^{a_i}\}$, $1\leqslant i\leqslant\mu$, *une base de E. L'ensemble des classes des éléments* $x^{a_i}\,\mathrm{d}x$ *dans* $H^n(s)$ *forme une* $\mathbf{C}(s)$*-base de* $H^n(s)$.

2.4. DEMONSTRATION DU LEMME 2.2.1. Elle est tout-à-fait similaire à celle de la proposition B.1.2.6 de [B-G-M-M]. Nous en rappelons les grandes lignes.

On utilise de façon essentielle les deux théorèmes suivants dûs à Kouchnirenko ([K], (2.8) et (4.1)).

Théorème (2.8):

(i) Le complexe de Koszul $K^{\bullet}(gr_V\mathbf{C}[x],F_i)$ des éléments $F_1,\ldots,F_n$ de l'anneau gradué $gr_V\mathbf{C}[x]$ est acyclique en dimensions positives.

(ii) $K^{\bullet}(gr_V\mathbf{C}[x],F_i)$ est une résolution de $gr_V\mathbf{C}[x]/(F_1,\ldots,F_n)$.

Théorème (4.1):

(i) $\mathbf{C}[x]/\mathscr{L}(f)$ étant muni de la filtration induite par V, on a un isomorphisme de $\mathbf{C}-ev$ gradués $gr_V(\mathbf{C}[x]/\mathscr{L}(f))\cong gr_V\mathbf{C}[x]/(F_1,\ldots,F_n)$.

(ii) Tout élément g de l'idéal $\mathscr{L}(f)$ peut s'écrire $g=\Sigma\, g_jx_j\partial f/\partial x_j$ avec, pour tout j, $\phi(g_j)\geqslant\phi(g)+1$.

Venons-en à la démonstration du lemme: la démarche consiste à trouver un analogue au théorème (4.1) pour les multiples de $x_1\ldots x_n$ dans $\mathbf{C}[x]$. Soit donc $I\subset\{1,\ldots,n\}$ une suite d'indices, p un entier, compris entre 1 et n. On pose $f_0=f-f(0)$ et on note K_I^p le sous-espace de $K^p(\mathbf{C}[x],x_i\partial f_0/\partial x_i)$ défini par

$$K_I^p=\left\{\omega_{i_1\ldots i_p}\mathrm{d}x_{i_1}\ldots\mathrm{d}x_{i_p},\ \omega_{i_1\ldots i_p}\in\mathbf{C}[x]\left(\prod_{j\in I\cap\{i_1\ldots i_p\}}x_j\right)\right\}.$$

Par récurrence sur le nombre d'éléments de I, le cas $I=\phi$ étant donné par le théorème (4.1) de Kouchnirenko, on montre que, pour tout p compris entre 1 et n, $w\in\ker d_p\cap K_I^p$ il existe $\beta\in K_I^{p-1}$ telle que $\omega=d_{p-1}(\beta)$ et $\phi(\beta)\geqslant\phi(\omega)+1$ (d_p est la différentielle de K^p). Pour $I=\{1,\ldots,n\}$ on obtient donc (de la même manière que l'on déduit (4.1) de (2.8)):

LEMME. (i) $K^{\bullet}_{\{1,\ldots,n\}}$ *est une résolution filtrée par* V *de* $\mathbf{C}[x]x_1\ldots x_n/\mathscr{L}(f_0)\cap\mathbf{C}[x]x_1\ldots x_n$.

(ii) $gr_V K^{\bullet}_{\{1,\dots,n\}}$ *est une résolution de* $gr_V(\mathbf{C}[x]x_1\dots x_n/\mathscr{L}(f_0)\cap\mathbf{C}[x]x_1\dots x_n)$.

(iii) *si* $gx_1\dots x_n$ *est élément de* $\mathscr{L}(f_0)$, *g peut s'écrire* $g=\Sigma g_j\partial f_0/\partial x_j$ *avec, pour* tout j, $\phi(g_jx_1\dots\hat{x}_j\dots x_n)\geqslant\phi^*(g)+1$.

On en déduit que la multiplication par $x_1\dots x_n$ induit un isomorphisme $\lambda\colon\mathbf{C}[x]/\mathscr{J}(f_0)\to\mathbf{C}[x]x_1\dots x_n/\mathscr{L}(f_0)\cap\mathbf{C}[x]x_1\dots x_n$ et que l'on a un isomorphisme de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels gradués

$$gr_V(\mathbf{C}[x]/\mathscr{J}(f_0))^*\to gr_V(\mathbf{C}[x]x_1\dots x_n/\mathscr{L}(f_0)\cap\mathbf{C}[x]x_1\dots x_n).$$

Le point (iii) du sous-lemme montre que si $g\in\mathscr{J}(f_0)$, on peut choisir dans l'écriture $g=\Sigma g_i\partial f_0/\partial x_i$ les g_i tels que

$$\phi^*(g_i)\geqslant\phi^*(g)+\phi(x_i)+1$$

et

$$\phi(x_j\partial g_j/\partial x_j\quad x_1\dots\hat{x}_j\dots x_n)\geqslant\phi^*(g)+1$$

c'est-à-dire $\phi^*(\partial g_j/\partial x_j)\geqslant\phi^*(g)+1$. Puisque

$$\phi^*\left(g_j\frac{\partial f_0}{\partial x_j}\right)=\phi\left(g_jx_1\dots\hat{x}_j\dots x_nx_j\frac{\partial f_0}{\partial x_j}\right)\geqslant\phi(g_jx_1\dots\hat{x}_j\dots x_n)-1$$

on a, d'après (iii) $\phi^*(g_j(\partial f_0/\partial x_j))\geqslant\phi^*(g)$.

Comme E est isomorphe à $\mathbf{C}[x]/\mathscr{J}(f_0)$, le lemme (2.2.1) est démontré pour f_0 (appliquer les résultats précédents à $g=u-v$) et donc pour f puisque $\partial f/\partial x_i=\partial f_0/\partial x_i$ et que les conditions sur le poids concernant f_0 donnent lieu à de mêmes conditions pour le polynôme f.

3. Bases de la cohomologie en dimension 2: les bases $\mathscr{B}(s)$ et $\mathscr{B}'(s)$

Dans cette section nous donnons deux méthodes qui permettent de déterminer, à partir de $\Gamma_-(f)$, des $\mathbf{C}(s)$-bases de $H^n(s)$. Dans tout ce qui suit, nous supposerons que la partie initiale du polynôme f est uniquement constituée par les sommets du polyèdre $\Gamma_-(f)$.

3.1. *La base* $\mathscr{B}(s)$

On note

(a) Les sommets de $\Gamma_-(f)$:

$$A_k=(a_k^1,a_k^2),\ 0\leqslant k\leqslant K,\ a_0^1=0<a_1^1<\dots<a_K^1,\ a_0^2>a_1^2>\dots>a_K^2=0.$$

(b) Les faces de codimension 1 de $\Gamma_-(f)$:

$$\Delta_k = [A_k A_{k+1}],\ 0 \leqslant k \leqslant K-1.$$

(c) Les parallélogrammes ouverts

$$L_k = \{mA_k + lA_{k+1},\ 0 < m < 1 \text{ et } 0 < l < 1\},\ 0 \leqslant k \leqslant K-1.$$

(d) Les segments:

$$T_k = \{mA_k,\ 0 < m < 2\},\ 1 \leqslant k \leqslant K-1.$$

(e) La famille d'indices:

$$B = \left[\bigcup_{0 \leqslant k \leqslant K-1} L_k \cap \mathbf{N}^2\right] \cup \left[\bigcup_{1 \leqslant k \leqslant K-1} T_k \cap \mathbf{N}^2\right].$$

3.1.1. PROPOSITION. *Les classes des formes* $(x^b/x_1x_2)\,\mathrm{d}x$, $b \in B$, *dans* $H^n(s)$ *forment une* $\mathbf{C}(s)$*-base de cet espace. On la note* $\mathscr{B}(s)$.

DEMONSTRATION. D'après la proposition (2.3), et compte tenu des résultats de la section (2.4), il suffit de vérifier que la famille des monômes $\{x^b, b \in B\}$ fournit une base de $\mathbf{C}[x]x_1x_2/\mathscr{L}(f) \cap (x_1x_2)$, avec $f = \Sigma_{k=0}^K x^{A_k}$. Pour cela, ajoutons à cette famille les monômes $\{x^b, b \in (T_0 \cap \mathbf{N}^2) \cup (T_K \cap \mathbf{N}^2)\}$ où l'on a posé $T_0 = \{mA_0, 0 < m \leqslant 1\}$ et $T_K = \{mA_K, 0 < m \leqslant 1\}$, et montrons que l'on obtient une base de $\mathbf{C}[x]/\mathscr{L}(f)$.

On vérifie que

(i) Le nombre de monômes est le bon (rappelons que, d'après [K] théorème B.1 $\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[x]/\mathscr{L}(f) = 2!\,V_2$ cf. aussi [K] 2.13).

(ii) Les classes de ces monômes dans $\mathbf{C}[x]/\mathscr{L}(f)$ sont indépendantes: en utilisant le théorème 4.1 de Kouchnirenko nous pouvons supposer, dans le gradué de degré $p-1$, la relation

$$\sum S_A x^A = ux_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + vx_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

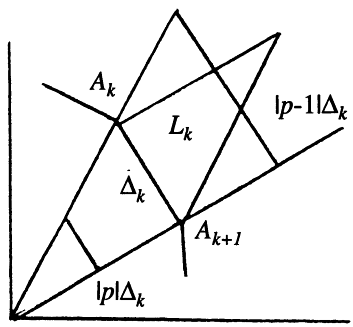
avec $\phi(x^A) = p-1$, $\phi(u) = \phi(v) = p$, A décrivant l'ensemble

$$\left[\bigcup_{0 \leqslant k \leqslant K-1} L_k \cap \mathbf{N}^2\right] \cup \left[\bigcup_{0 \leqslant k \leqslant K} T_k \cap \mathbf{N}^2\right].$$

Pour chaque face Δ_k, $0 \leqslant k \leqslant K-1$, on a la relation

$$\sum S_A x^A = u_{|p|\Delta_k}(a_k^1\, x^{A_k} + a_{k+1}^1 x^{A_{k+1}}) + v_{|p|\Delta_k}(a_k^2 x^{A_k} + a_{k+1}^2 x^{A_{k+1}}) \tag{1}$$

($u_{|p|\Delta_k}$ (resp. $v_{|p|\Delta_k}$) désignant la restriction de u (resp. v) à $|p|\Delta_k$) où le multiindice A appartient à $(L_k \cup T_k \cup T_{k+1}) \cap (|p-1|\Delta_k)$.



Posons $u_{|p|\Delta_k} = x^{C_k}$, $C_k \in |p|\Delta_k \cap \mathbf{N}^2$. Alors

$$u_{|p|\Delta_k} x^{A_k} = x^{C_k + A_k}, \qquad u_{|p|\Delta_k} x^{A_{k+1}} = x^{C_k + A_{k+1}}$$

et il est clair que $A_k + C_k$ et $A_{k+1} + C_k$ n'appartiennent pas à $L_k \cap \mathbf{N}^2$. Donc, dans l'égalité (1), on a $S_A = 0$ pour $A \in L_k \cap \mathbf{N}^2$ et l'expression $\Sigma S_A x^A$ se réduit à

$$S_{|p-1|A_k} x^{(|p|+1)A_k} + S_{|p-1|A_{k+1}} x^{(|p|+1)A_{k+1}}.$$

L'égalité (1) donne alors lieu au système

$$\begin{cases} a_k^1 u_{|p|\Delta_k} + a_k^2 v_{|p|\Delta_k} = S_{|p-1|A_k} x^{|p|A_k} \\ a_{k+1}^1 u_{|p|\Delta_k} + a_{k+1}^2 v_{|p|\Delta_k} = S_{|p-1|A_{k+1}} x^{|p|A_{k+1}} \end{cases}$$

En particulier, on obtient

$$(a_{k+1}^2 a_k^1 - a_k^2 a_{k+1}^1) u_{|p|\Delta_k} = a_{k+1}^2 S_{|p-1|A_k} x^{|p|A_k} - a_k^2 S_{|p-1|A_{k+1}} x^{|p|A_{k+1}}$$

et aussi à partir de la face Δ_{k-1},

$$(a_k^2 a_{k-1}^1 - a_{k-1}^2 a_k^1) u_{|p|\Delta_{k-1}} = a_k^2 S_{|p-1|A_{k-1}} x^{|p|A_{k-1}} - a_{k-1}^2 S_{|p-1|A_k} x^{|p|A_k}.$$

En considérant le coefficient de $x^{|p|A_k}$ dans u, on voit que

$$-a_{k-1}^2 S_{|p-1|A_k} d_k = a_k^2 S_{|p-1|A_k} d_{k-1}$$

(on a posé $d_k = a_{k+1}^2 a_k^1 - a_k^2 a_{k+1}^1$). Comme d_k, d_{k-1}, a_{k-1}^2 sont strictement positifs et a_k^2 est positif ou nul, on obtient $S_{|p-1|A_k} = 0$. D'où le résultat.

Note: Cette démonstration est la même que celle donnée par [B-G-M-M] lorsque f est un germe de fonction analytique (preuve de la proposition B.4.1.1.1).

De la démonstration ci-dessus, on déduit aussi

3.1.2. PROPOSITION. *L'ensemble* spec(f) *défini en* (2.1) *se déduit de* $\Gamma_-(f)$ *de la façon suivante*

$$\operatorname{spec}(f) = \left[\bigcup_{0 \leqslant k \leqslant K-1} \phi_k(L_k \cap \mathbf{N}^2) \right] \cup \left[\bigcup_{1 \leqslant k \leqslant K-1} \phi_k(T_k \cap \mathbf{N}^2) \right]$$

ϕ_k *étant le poids relatif à la face* Δ_k, $\phi_k(A) = \langle A, P_{\Delta_k} \rangle$ (cf. 0.1.8).

3.2. *La base* $\mathscr{B}'(s)$

On définit

(a) les segments $(1 \leqslant k \leqslant K-1)$

$$\bar{T}_k = \{mA_k,\ 0 < m \leqslant 1\}$$

$$\bar{T}'_k = \bar{T}_k - \{A_k\}$$

$$\bar{\bar{T}}_k = \{mA_k,\ 1 < m < 2\}$$

(b) la famille d'indices

$$B' = \left[\bigcup_{0 \leqslant k \leqslant K-1} L_k \cap \mathbf{N}^2 \right] \cup \left[\bigcup_{1 \leqslant k \leqslant K-1} \bar{T}_k \cap \mathbf{N}^2 \right] \cup \left[\bigcup_{1 \leqslant k \leqslant K-1} (\bar{T}'_k \cap \mathbf{N}^2 + \{A_{k+1}\}) \right].$$

3.2.1. PROPOSITION. *Les classes des formes* $(x^b/x_1x_2)\,\mathrm{d}x$, $b \in B'$, *dans* $H^n(s)$ *forment une* $\mathbf{C}(s)$*-base de cet espace. On la note* $\mathscr{B}'(s)$.

DEMONSTRATION. On définit le polynôme f, les segments T_0 et T_K comme dans la démonstration de la proposition 3.1.1. il suffit de montrer que la famille de monômes $\{x^b, b \in B' \cup (T_0 \cap \mathbf{N}^2) \cup (T_K \cap \mathbf{N}^2)\}$ fournit une base de $\mathbf{C}[x]/\mathscr{L}(f)$.

Nous allons déterminer les relations, modulo $\mathscr{L}(f)$, entre les monômes $x^{b'}$, $b' \in \bar{T}'_k \cap \mathbf{N}^2 + \{A_{k+1}\}$, et les monômes x^b, $b \in \bar{\bar{T}}_k \cap \mathbf{N}^2$, ou encore, si l'on choisit $p > -1$ ($p \in \operatorname{spec}(f)$) et k, $1 \leqslant k \leqslant K-1$, entre $x^{|p|A_k + A_{k+1}}$ et $x^{(|p|+1)A_k}$. En posant $u = a^2_{k-1} x^{|p|A_k}$ et $v = -a^1_{k-1} x^{|p|A_k}$ on obtient

$$ux_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + vx_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = (a^2_{k-1}a^1_{k+1} - a^1_{k-1}a^2_{k+1}) x^{|p|A_k + A_{k+1}}$$

$$+ (a^2_{k-1}a^1_k - a^1_{k-1}a^2_k) x^{|p|A_k + A_k} + \text{combinaison linéaire de monômes de poids} > p-1$$

(remarquer que $|p|A_k$ et A_j n'appartiennent pas à un même cône (Δ) pour j différent de k, $k-1$, $k+1$ et utiliser la remarque 0.1.9). Donc, dans le gradué de degré $p-1$ (et modulo $\mathscr{L}(f)$) on obtient l'égalité

$$x^{|p|A_k + A_{k+1}} = -\frac{c_k}{d_k}\, x^{|p|A_k + A_k} \tag{2}$$

avec $c_k = a_{k-1}^2 a_k^1 - a_{k-1}^1 a_k^2$ et $d_k = a_{k-1}^2 a_{k+1}^1 - a_{k-1}^1 a_{k+1}^2$ (c_k et d_k sont évidemment non nuls). On peut donc exprimer les monômes $x^{b'}$, $b' \in B'$, en fonction des monômes x^b, $b \in B$, (modulo $\mathscr{L}(f)$) par le biais de la matrice

$$\begin{array}{cccc}
 & x^{b'},\ b' \in \bigcup_k (L_k \cap \mathbf{N}^2) & x^{b'},\ b' \in \bigcup_k (\bar{T}_k \cap \mathbf{N}^2) & x^{b'},\ b' \in \bigcup_k (\bar{T}'_k \cap \mathbf{N}^2 + \{A_{k+1}\}) \\
x^b \left(b \in \bigcup_k (L_k \cap \mathbf{N}^2)\right) & \mathrm{Id} & 0 & A \\
x^b \left(b \in \bigcup_k (\bar{T}_k \cap \mathbf{N}^2)\right) & 0 & \mathrm{Id} & B \\
x^b \left(b \in \bigcup_k (\bar{\bar{T}}_k \cap \mathbf{N}^2)\right) & 0 & 0 & C
\end{array}$$

où C est une matrice carré triangulaire supérieure (pourvu que les éléments de

$$\left\{x^{b'},\ b \in \bigcup_k (\bar{T}'_k \cap \mathbf{N}^2 + \{A_{k+1}\})\right\}$$

et de

$$\left\{x^b,\ b \in \bigcup_k (\bar{\bar{T}}_k \cap \mathbf{N}^2)\right\}$$

soient rangés selon le poids décroissant) telle que det $C \neq 0$ en vertu de l'égalité (2). D'où le résultat.

4. Outils techniques

Dans cette section nous exposons les outils nécessaires à la démonstration des résultats des sections suivantes. Certains sont analogues à ceux utilisés dans l'article [B-G-M-M].

4.0. Pour des raisons de commodité, nous adopterons désormais les notations suivantes:

(a) $\mathscr{D}$ l'anneau des opérateurs différentiels en $\partial/\partial x_i$, à coefficients dans $K = \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$.
(b) M le $\mathscr{D}$-module $K[s, 1/f]f^s$
(c) $H^n(M)$ le n-ième groupe de cohomologie de de Rham du $\mathscr{D}$-module M $(H^n(M) = M/\Sigma\, \partial/\partial x_i M)$
(d) $M(s)$ le $\mathscr{D}(s)$-module $\mathbf{C}(s) \otimes_{\mathbf{C}[s]} M$, où $\mathscr{D}(s) = \mathbf{C}(s) \otimes_{\mathbf{C}} \mathscr{D}$
(e) $H^n(s)$ le n-ième groupe de cohomologie de $M(s)$.

On définit alors sur $M(s)$ (et donc sur $H^n(s)$) l'opérateur t,

$$t(g(s)f^s) = g(s+1)f^{s+1}.$$

4.1. NOTATIONS. Pour $i \in \mathbf{N}$, on pose

$$L^i = s(s-1)\cdots(s-i+1)f^{s-i}$$

$$L^0 = f^s$$

$$L^{-1} = \frac{1}{(s+1)} f^{s+1}$$

$$L^{-i} = \frac{1}{(s+i)\cdots(s+1)} f^{s+i} \quad (i \geqslant 2)$$

4.1.1. REMARQUES:

(i) $\partial/\partial x_j L^i = \partial f/\partial x_j L^{i+1}$
(ii) $fL^i = (s-i+1)L^{i-1}$
(iii) $tL^i = (s+1)L^{i-1}$.

4.2. Soit $\Delta \in \mathscr{F}$, $P_\Delta = (p_{1,\Delta}, \ldots, p_{n,\Delta})$ le vecteur associé (cf. section 0). On définit

(i) $|P_\Delta| = -(p_{1,\Delta} + \cdots + p_{n,\Delta})$
(ii) $\chi_\Delta = -\Sigma_{j=1}^n p_{j,\Delta} x_j \partial/\partial x_j$
(iii) $h_\Delta = f - \chi_\Delta(f)$.
(iv) $\forall u \in \mathbf{C}[x]$, $\phi_\Delta^*(u) = \phi_\Delta(ux_1 \ldots x_n)$.

4.2.1. LEMME. *Pour toute constante ϕ, toute face Δ de $\mathscr{F}$ et tout u de $\mathbf{C}[x]$ on a*

$$(s+|P_\Delta|+\phi)uL^i = \left[\left(-\sum_{j=1}^n p_{j,\Delta}\partial/\partial x_j . x_j\right)u + (\phi+i)u - \chi_\Delta(u)\right] L^i + uh_\Delta L^{i+1}. \tag{4.2.1.1}$$

De plus, si Δ est une face de $\mathscr{F}$ telle que $\phi_\Delta^*(u) = \phi^*(u)$ et $\phi = -(\phi^*(u)+i+|P_\Delta|)$, on a

(i) $\phi_\Delta^*(uh_\Delta) > \phi^*(u) - 1$

(ii) $\phi_\Delta^*((\phi+i)u - \chi_\Delta(u)) > \phi^*(u)$.

DEMONSTRATION: On a

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} (-p_{j,\Delta}\partial/\partial x_j(x_j u L^i)) &= |P_\Delta| u L^i + \sum_{j=1}^{n} (-p_{j,\Delta} x_j\, \partial u/\partial x_j L^i) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} (-p_{j,\Delta} x_j \partial L^i/\partial x_j u) \\ &= |P_\Delta| u L^i + \sum_{j=1}^{n} (-p_{j,\Delta} x_j \partial u/\partial x_j) L^i + \sum_{j=1}^{n} (-p_{j,\Delta} x_j \partial f/\partial x_j) u L^{i+1}\end{aligned}$$

(d'après (4.1.1)(i)).

Donc

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n} (-p_{j,\Delta}\partial/\partial x_j(x_j u L^i)) + (\phi+i)uL^i - \chi_\Delta(u)L^i \\ &\quad = |P_\Delta| u L^i + \chi_\Delta(u)L^i + u\chi_\Delta(f)L^{i+1} + (\phi+i)uL^i - \chi_\Delta(u)L^i \\ &\qquad + fuL^{i+1} - fuL^{i+1} \\ &\quad = (s+|P_\Delta|+\phi)uL^i - uh_\Delta L^{i+1} \quad \text{(d'après (4.1.1)(ii)).}\end{aligned}$$

D'où l'égalité (4.2.1.1).

Montrons (i): si le polyèdre n'a qu'une seule face, c'est évident. Sinon, on a $\phi_\Delta^*(uh_\Delta) = \phi_\Delta(ux_1 \dots x_n h_\Delta) = \phi_\Delta(ux_1 \dots x_n) + \phi_\Delta(h_\Delta)$ (ϕ_Δ est évidemment linéaire). Mais il est clair que $in(h_\Delta) \notin$ cône (Δ), donc $\phi_\Delta(h_\Delta) > \phi(h_\Delta)$, et comme $\phi(h_\Delta) = -1$, on obtient l'inégalité voulue.

Montrons (ii): soit $w = in^*(u)$. En particulier $\phi^*(u) = \phi^*(w)$ et avec les choix faits $\chi_\Delta(w) = -\phi(w)w = (\phi+i)w$. Alors, dans l'expression $(\phi+i)u - \chi_\Delta(u)$ il ne reste que des éléments différents de w, donc de poids strictement plus grand. □

4.2.2. COROLLAIRE. (i) *Si u est un monôme, Δ une face de $\mathscr{F}$ telle que $\phi_\Delta^*(u) = \phi^*(u)$ on a l'égalité, dans $H^n(s)$,*

$$(s - \phi^*(u) - i)[uL^i] = [uh_\Delta L^{i+1}] \tag{4.2.2.1}$$

avec

$$\phi^*(uh_\Delta) \geqslant \phi^*(u) - 1.$$

(Si $g \in M(s)$, $[g]$ désigne la classe de g dans $H^n(s)$.)

Pour $i = 0$, on a en particulier

$$(s - \phi^*(u))[uf^s] = \left[uh_\Delta \frac{s}{f} f^s \right]. \tag{4.2.2.2}$$

(ii) *Si u est quelconque, Δ une face de $\mathscr{F}$ telle que $\phi^*_\Delta(u) = \phi^*(u)$, on a l'égalité, dans $H^n(s)$,*

$$(s - \phi^*(u) - i)[uL^i] = [uh_\Delta L^{i+1} + vL^i] \tag{4.2.2.3}$$

avec

$$\phi^*(uh_\Delta) \geqslant \phi^*(u) - 1$$
$$\phi^*(v) \geqslant \phi^*(u).$$

DEMONSTRATION: (i) Remarquer qu'avec les choix du lemme (4.2.1) on a

$$\chi_\Delta(u) = -(\phi^*(u) + |P_\Delta|).$$

(ii) Conséquence directe du lemme (4.2.1). □

4.3. NOTATION. Pour un monôme u, on désigne par $\alpha(u)$ le nombre de faces Δ de $\mathscr{F}$ pour lesquelles $\phi^*_\Delta(u) = \phi^*(u)$.

4.3.1. LEMME. (i) *Pour tout monôme u on a*

$$(s - \phi^*(u))^{\alpha(u)}[uf^s] = \left[\sum_{1 \leqslant j \leqslant \alpha(u)} u_j L^j \right] \tag{4.3.1.1}$$

avec

$$u_j \in \mathbf{C}[x], \quad \phi^*(u_j) > \phi^*(u) - j.$$

(ii) *Si u est quelconque, on a*

$$(s - \phi^*(u))^{\alpha(u)}[uf^s] = \left[\sum_{0 \leqslant j \leqslant \alpha(u)} u_j L^j \right] \tag{4.3.1.2}$$

avec

$$u_j \in \mathbf{C}[x], \quad \phi^*(u_j) > \phi^*(u) - j.$$

DEMONSTRATION. (i) Pour simplifier, on suppose $n = 2$ et $\alpha(u) = 2$.

Soit u un monôme, Δ_1 et Δ_2 les deux faces pour lesquelles $\phi^*_{\Delta_1}(u)=\phi^*_{\Delta_2}(u)=\phi^*(u)$. D'après (4.2.2.2) on a

$$(s-\phi^*(u))uf^s = uh_{\Delta_1}L^1. \tag{1}$$

Soit $v=\mathrm{in}^*(uh_{\Delta_1})$. On suppose que v est un monôme. D'après (4.2.2.1), on a

$$(s-\phi^*(v)-1)vL^1 = vh_{\Delta}L^2 \tag{2}$$

Δ étant telle que $\phi^*_{\Delta}(v)=\phi^*(v)$. En utilisant 0.1.9(i), on voit que $\Delta=\Delta_2$ et donc

$$(s-\phi^*(v)-1)vL^1 = vh_{\Delta_2}L^2 \tag{3}$$

ou encore

$$(s-\phi^*(u))vL^1 = vh_{\Delta_2}L^2 \tag{4}$$

puisque $\phi^*(uh_{\Delta_1}) = \phi^*(u)-1$.

(1) Se réécrit sous la forme

$$(s-\phi^*(u))uf^s = vL^1+wL^1 \tag{5}$$

où w est tel que $\phi^*(w) > \phi^*(u)-1$ et on a, en appliquant $(s-\phi^*(u))$ à cette égalité

$$(s-\phi^*(u))^2uf^s = (s-\phi^*(u))vL^1+(s-\phi^*(w))wL^1+qwL^1 \tag{6}$$

où $q=\phi^*(u)-\phi^*(w)$. En utilisant (4), on obtient alors

$$(s-\phi^*(u))^2uf^s = vh_{\Delta_2}L^2+(s-\phi^*(w))wL^1+qwL^1. \tag{7}$$

D'après (4.2.2)(ii) $(s-\phi^*(w))wL^1$ s'exprime en fonction de w_2L^2 et w_1L^1 où w_2 et w_1 sont des polynômes vérifiant

$$\phi^*(w_2) \geqslant \phi^*(w)-1 > \phi^*(u)-2$$
$$\phi^*(w_1) \geqslant \phi^*(w) > \phi^*(u)-1$$

(rappelons que $\phi^*(w) > \phi^*(u)-1$). D'après (0.1.9)(i), on a

$$\phi^*(vh_{\Delta_2}) > \phi^*(v)+\phi^*(h_{\Delta_2}) \geqslant \phi^*(u)-2$$

et donc (7) se réécrit

$$(s-\varphi^*(u))^2uf^s = u_2L^2 + u_1L^1 \tag{8}$$

avec

$$\phi^*(u_2) > \phi^*(u)-2$$
$$\phi^*(u_1) > \phi^*(u)-1$$

et le lemme est alors montré dans ce cas.

Si v n'est pas un monôme, on reitère le raisonnement ci-dessus pour chaque monôme initial de v.

(ii) Se montre de la même manière que (i) en considérant chaque monôme initial de u. □

4.3.2. PROPOSITION. *Soit B une base de E (cf. section 2). Pour tout u de B on a:*

si $\phi^*(u) < -1$

$$(s-\phi^*(u))^{\alpha(u)}[uL^0] = \sum_{-n+1 \leqslant j \leqslant \alpha(u)} [v_jL^j] \tag{4.3.2.1}$$

avec $v_j \in E$, $\phi^*(v_j) > \phi^*(u) - j$

si $\phi^*(u) \geqslant -1$

$$(s-\phi^*(u))^{\alpha(u)}[uL^0] = \sum_{0 \leqslant j \leqslant \alpha(u)} [v_jL^j] \tag{4.3.2.2}$$

avec $v_j \in E$, $\phi^*(v_j) > \phi^*(u) - j$.

DEMONSTRATION. Le point de départ est le lemme (4.3.1) dont on garde les notations. On posera $p=\phi^*(u)$. Du lemme de division (2.2.1) on déduit

$$u_j = v_j^0 + \sum_{k=1}^{n} v_j^k \partial f/\partial x_k$$

avec $v_j^0 \in E$, $\phi^*(v_j^0) > p-j$ et $\phi^*(\partial v_j^k/\partial x_k) > p-j+1$, d'où

$$u_jL^j = v_j^0 L^j + \sum_{k=1}^{n} v_j^k \partial f/\partial x_k L^j.$$

Mais, d'après (4.1.1)(i), on a

$$v_j^k \partial f/\partial x_k L^j = \partial/\partial x_k (v_j^k L^{j-1}) - \partial v_j^k/\partial x_k L^{j-1}$$

et donc

$$[u_jL^j] = [v_j^0L^j] - \left[\sum_{k=1}^{n} \partial v_j^k/\partial x_k L^{j-1}\right]$$

avec $v_j^0 \in E$, $\phi^*(v_j^0) > p-j$ et $\phi^*(\partial v_j^k/\partial x_k) > p-j+1$. Si $\partial v_j^k/\partial x_k \notin E$, on réitère le processus de division et, en remarquant que $\Delta^*(f) \geqslant -n$ et que si v est tel que $\phi(v) \geqslant -1$, alors $v \in E$, on obtient le résultat annoncé. □

4.3.3. REMARQUES. (i) En appliquant $t^{\alpha(u)}$ à (4.3.2.2), on obtient

$$\begin{aligned}&(s-\phi^*(u)+\alpha(u))^{\alpha(u)}[(f^{\alpha(u)}u)f^s]\\ &\quad = [(s+\alpha(u))\cdots(s+1)v_{\alpha(u)}f^s] + \cdots + [(f^{\alpha(u)}v_0)f^s].\end{aligned}$$

(ii) Les résultats de la proposition (4.3.2) subsistent pour u quelconque.

4.3.4. Notation (élimination de f^s): on pose, pour $v = (v_1, \ldots, v_n) \in (\mathbf{C}[x])^n$,

$$\partial_s(v) = \sum_{i=1}^{n} (\partial v_i/\partial x_i + s\partial f/\partial x_i v_i/f).$$

L'égalité précédente est alors équivalente à

$$(s-\phi^*(u)+\alpha(u))^{\alpha(u)}f^{\alpha(u)}u = (s+\alpha(u))\cdots(s+1)v_{\alpha(u)} + \cdots + f^{\alpha(u)}v_0 \quad (\mathrm{mod}.\,\partial_s).$$

Nous adopterons désormais cette écriture.

4.4. Le cas $\phi^*(u) = -1$: un raffinement de la proposition (4.3.2) dans le cas de la dimension 2.

Nous supposons que le polynôme f s'écrit $\Sigma_{k=0}^{K} x^{A_k} + f(0)$, $A_k = (a_k^1, a_k^2)$, et que $\Gamma_-(f)$ a exactement pour sommets les points A_k. Soit B la base de E déterminée en (3.1), et u l'élément de B tel que $x_1x_2u = x^{A_k}(k \in \{1, \ldots, K-1\})$. Alors $\phi^*(u) = -1$, et $\alpha(u) = 2$. Dans ce cas, on dispose du résultat suivant:

4.4.1. LEMME. *Avec les notations précédentes, on a*

$$(s+1)u = v\frac{s}{f} \quad (\mathrm{mod}.\,\partial_s)$$

où $v \in \mathbf{C}[x]$, $\phi^*(v) > -2$.

DEMONSTRATION. Le corollaire (4.2.2) montre que, modulo ∂_s,

$$(s+1)u = uh_{\Delta_{k-1}}\frac{s}{f}$$

$$(s+1)u = uh_{\Delta_k}\frac{s}{f}$$

avec $\phi^*(uh_{\Delta_{k-1}}) \geqslant -2$ et $\phi^*(uh_{\Delta_k}) \geqslant -2$. Il nous suffit donc de montrer que

$uh_{\Delta_{k-1}}$ s'écrit (modulo ∂_s) comme combinaison linéaire d'éléments de poids* strictement supérieur à -2. (La démarche est la même pour uh_{Δ_k}). Remarquons tout d'abord que $in^*(uh_{\Delta_{k-1}})=ux^{A_{k+1}}$ et notons $x^{A_k-(i,j)}$ le monôme tel que $x_1^i x_2^j x^{A_k-(i,j)}=x^{A_k}$.

Avec ces notations, il nous faut donc exprimer $x^{A_k-(1,1)}x^{A_{k+1}}$ en fonction d'éléments de poids* > -2. Remarquons que:

$$\text{(i)}\quad x^{A_{k+1}-(0,1)}\frac{\partial f}{\partial x_1}=\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant K\\ j\neq k}} a_j^1 x^{A_j-(1,0)}x^{A_{k+1}-(0,1)} + a_k^1 x^{A_k}x^{A_{k+1}-(1,1)}(=Q_1)$$

$$\text{(ii)}\quad x^{A_{k+1}-(1,0)}\frac{\partial f}{\partial x_2}=\sum_{\substack{0\leqslant j\leqslant K-1\\ j\neq k}} a_j^2 x^{A_j-(0,1)}x^{A_{k+1}-(1,0)} + a_k^2 x^{A_k}x^{A_{k+1}-(1,1)}(=Q_2).$$

On en déduit:

$$-a_{k+1}^1 x^{A_{k+1}-(1,1)}=\frac{s}{f}Q_1 \quad (\mathrm{mod}\,.\,\partial_s)$$

$$-a_{k+1}^2 x^{A_{k+1}-(1,1)}=\frac{s}{f}Q_2 \quad (\mathrm{mod}\,.\,\partial_s)$$

d'où

$$\left(\frac{a_k^1}{a_{k+1}^1}-\frac{a_k^2}{a_{k+1}^2}\right)x^{A_k}x^{A_{k+1}-(1,1)}=-\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant K\\ j\neq k}}\frac{a_j^1}{a_{k+1}^1}x^{A_j}x^{A_{k+1}-(1,1)} + \sum_{\substack{0\leqslant j\leqslant K-1\\ j\neq k}}\frac{a_j^2}{a_{k+1}^2}x^{A_j}x^{A_{k+1}-(1,1)} \quad (\mathrm{mod}\,.\,\partial_s).$$

Dans le membre de droite de cette égalité, les termes de poids* -2 sont

$$\frac{a_{k+2}^1}{a_{k+1}^1}x^{A_{k+2}}x^{A_{k+1}-(1,1)} \quad \text{et} \quad \frac{a_{k+2}^2}{a_{k+1}^2}x^{A_{k+2}}x^{A_{k+1}-(1,1)}$$

(utiliser la remarque (0.1.9)(i)). En itérant les calculs précédents, on voit qu'en fin de compte il suffit d'exprimer (mod ∂_s) $x^{A_{K-1}}x^{A_K-(1,1)}$ en fonction d'éléments de poids∗ > −2. Mais

$$x^{A_K-(1,0)}\frac{\partial f}{\partial x_2}=\sum_{0\leqslant j\leqslant K-1} a_j^2 x^{A_j-(0,1)}x^{A_K-(1,0)}$$

et par conséquent

$$-a_{K-1}^2 x^{A_{K-1}}x^{A_K-(1,1)}=\sum_{0\leqslant j\leqslant K-2} a_j^1 x^{A_j}x^{A_K-(1,1)}\,\mathrm{mod}(\partial_s).$$

Or les points A_j, $0\leqslant j\leqslant K-2$, et A_K n'appartiennent pas à un même cône (Δ), donc $\phi^*(x^{A_j}x^{A_K-(1,1)})>-2$, $0\leqslant j\leqslant K-2$. D'où le résultat. □

4.4.2. COROLLAIRE. *Soit* u *le monôme défini par* $x_1x_2u=x^{A_k}$, $k\in\{1,\dots,K-1\}$. *Alors*

$$(s+1)u=v_1\frac{s}{f}+v_0\quad(\mathrm{mod}\,.\,\partial_s)$$

$$v_1,\ v_0\in E,\ \phi^*(v_1)>-2\quad et\quad \phi^*(v_0)>-1.$$

DEMONSTRATION. Se montre de la même manière que (4.3.2) se déduit de (4.3.1). □

5. Structure de l'opérateur *t*. Cas semi quasi homogène (en toutes dimensions)

Dans cette section, nous précisons les matrices de l'opérateur t, agissant sur une base donnée, dans les cas spécifiés ci-dessous.

5.1. DEFINITIONS

5.1.1. Nous dirons du polynôme f qu'il est (BP) s'il admet une expression de la forme

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{k_i}+f(0)$$

avec

(i) $k_i\geqslant 2$ pour tout $1\leqslant i\leqslant n$,
(ii) $f(0)$ constante non nulle,
(iii) a_i, $1\leqslant i\leqslant n$, constantes non nulles.

Note: la restriction (ii) (resp. (iii)) est dûe au fait que l'hypersurface $f^{-1}(0)$ est lisse (resp. que $\Gamma_{-}(f)$ est commode).

5.1.2. Nous dirons du polynôme $\tilde{f}$ qu'il est (*SBP*) s'il admet une expression de la forme

$$\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{k_i} + \sum_{(i_1, \ldots, i_n) \in A} b_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$$

avec

(i) $k_i \geqslant 2$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$,
(ii) a_i constantes non nulles,
(iii) A ensemble de multiindices $(i_1, \ldots, i_n)$ vérifiant $i_1/k_1 + \cdots + i_n/k_n < 1$,
(iv) $b_{i_1 \ldots i_n}$ constantes assez générales pour que l'hypersurface $\tilde{f}^{-1}(0)$ soit lisse. On supposera évidemment qu'il existe $(i_1, \ldots, i_n) \neq (0, \ldots, 0)$ tels que $b_{i_1 \ldots i_n} \neq 0$.

5.2. *Structure de t: cas* (*BP*)

On garde les notations de (5.1.1).

5.2.1. LEMME (Une base de $H^n(s)$). (i) *Les classes des monômes $x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$ dans $H^n(s)$, pour $0 \leqslant i_1 \leqslant k_1 - 2, \ldots, 0 \leqslant i_n \leqslant k_n - 2$, forment une* $\mathbf{C}(s)$*-base.*

(ii) *On a* $spec(f) = -\{(i_1+1)/k_1 + \cdots + (i_n+1)/k_n, 0 \leqslant i_j \leqslant k_j - 2, j = 1, \ldots, n\}$ *et* $\mu = (k_1 - 1) \ldots (k_n - 1)$.

DEMONSTRATION. (i) En divisant par l'idéal $\mathscr{L}(f)$, on obtient un système de générateurs de $\mathbf{C}[x]/\mathscr{L}(f): x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$ avec $0 \leqslant i_j \leqslant k_j - 1$, $j = 1, \ldots, n$. D'après [*K*], théorème B.1, on a $\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[x]/\mathscr{L}(f) = n!V_n$. Or $n!V_n = k_1 \ldots k_n$ est exactement le nombre d'éléments de la famille génératrice obtenue ci-dessus: nous avons donc une base de $\mathbf{C}[x]/\mathscr{L}(f)$. Otons de cette base les monômes non multiples de $x_1 \ldots x_n$: nous obtenons une base de $\mathbf{C}[x]x_1 \ldots x_n/\mathscr{L}(f) \cap (x_1 \ldots x_n)$. Divisions par $x_1 \ldots x_n$: il en résulte une base d'un supplémentaire de $\mathscr{J}(f)$ dans $\mathbf{C}[x]$. On conclut à l'aide de la proposition (2.3).

(ii) Résulte de (i).

5.2.2. NOTATIONS. On note $B(s)$ la base de $H^n(s)$ obtenue en (5.2.1)(i), $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant \mu}$ les élements de cette base ordonnés selon le poids décroissant, i.e. $\phi^*(u_1) = \delta^*(f)(= \phi^*(1)), \ldots, \phi^*(u_\mu) = \Delta^*(f)$ (on a écrit $\phi^*(u_i) \overset{\text{déf}}{=} \phi^*(x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n})$ si $[x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}] = u_i$), et on pose $u = {}^t(u_1, \ldots, u_\mu)$.

5.2.3. PROPOSITION. *On a l'égalité, dans* $H^n(s)$,

$$(s+1)tu = (s+1)A_0 u + A_1 tu \tag{5.2.3.1}$$

où (i) A_0 *est la matrice diagonale* $\mu \times \mu$

$$\begin{pmatrix} f(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(0) \end{pmatrix}$$

(ii) A_1 *est la matrice diagonale* $\mu \times \mu$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_\mu \end{pmatrix}$$

avec $\beta_i = \phi^*(u_i)(\in \operatorname{spec}(f))$.

DEMONSTRATION. Soit u_i, $1 \leqslant i \leqslant \mu$, comme ci-dessus, $u_i = [x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}]$. Du corollaire (4.2.2), on tire

$$(s - \phi^*(x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}))x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} = x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} h_\Delta \frac{s}{f} \quad (\operatorname{mod} . \partial_s).$$

Le polyèdre $\Gamma_-(f)$ n'a qu'une seule face Δ, et $h_\Delta = f(0) . (\neq 0)$. En appliquant t à cette égalité (t commute avec ∂_s), on obtient

$$(s - \phi^*(u_i) + 1)tu_i = f(0)(s+1)u_i$$

$(\phi^*(u_i) \overset{\text{déf}}{=} \phi^*(x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}))$, d'où le résultat. □

5.2.4. COROLLAIRE (*Calcul de* $\det_{B(s)} H^n(s)$): *Dans la base* $B(s)$, *on a*

$$\det_{B(s)} H^n(s) = f(0)^\mu (s+1)^\mu \Big/ \prod_{\beta \in \operatorname{spec}(f)} (s - \beta + 1)^{g(\beta)}. \qquad \square$$

5.3. *Structure de t: cas (SBP)*

5.3.1. On note $\tilde{H}^n(s)$ le groupe de cohomologie associé à $\tilde{f}$ (polynôme défini en (5.1.2)) et on suppose que les entiers k_i, définis en (5.1.2) sont les mêmes que ceux définis en (5.1.1). f et $\tilde{f}$ ont alors le même polyèdre de Newton: $\tilde{H}^n(s)$ et $H^n(s)$ ont même dimension et $\operatorname{spec}(f) = \operatorname{spec}(\tilde{f})$. Nous gardons donc les notations et les résultats de la section (5.2).

5.3.2. PROPOSITION. *Soit* $u = {}^t(u_1, \dots, u_\mu)$ *comme en* (5.2.2). *Alors*

$$(s+1)tu = (s+1)A_0 u + A_1 tu \tag{5.3.2.1}$$

où

(i) A_0 *est la matrice* (*constante,* $\mu \times \mu$) *transposée de la matrice de la multiplication par* f *sur* $\mathbf{C}[x]/\mathscr{J}(f)$ *dans la base de* $\mathbf{C}[x]/\mathscr{J}(f)$ *déterminée lors de la démonstration du lemme* (5.2.1). *En particulier* $\det A_0 = R(f) \neq 0$.

(ii) A_1 *est une matrice* $\mu \times \mu$, *triangulaire inférieure, les éléments sur la diagonale étant les* $\beta_i \in \operatorname{spec}(\tilde{f})$ (*définis comme en* (5.2.3)(ii)). *Les éléments sous la diagonale sont soit des constantes, soit de la forme* $1/P(s)$ *où* P *est un polynôme de* s *dont les zéros sont contenus dans l'ensemble* $\{\operatorname{spec}(f) - k, 2 \leqslant k \leqslant n\}$.

DEMONSTRATION. Soit $u_i \in B(s)$, $u_i = [x^i]$ ($x^i \in B$, base de E induisant $B(s)$). On utilise de manière essentielle la proposition (4.3.2).

Si $\phi^*(x^i) \geqslant -1$, l'égalité (4.3.2.1) fournit ($\Gamma_-(f)$ n'a qu'une seule face)

$$(s - \phi^*(x^i))x^i = t^{-1}(s+1)v_i^1 + v_i^0 \quad \mathrm{mod}\,.\,\partial_s$$

avec $\phi^*(v_i^1) > \phi^*(x^i) - 1$, $\phi^*(v_i^0) > \phi^*(x^i)$, v_i^1 et v_i^0 appartenant à E. En appliquant t à cette égalité, on obtient

$$(s - \phi^*(x^i) + 1)tx^i = (s+1)v_i^1 + tv_i^0 \quad \mathrm{mod}\,.\,\partial_s.$$

Si $\phi^*(x^i) < -1$, l'égalité (4.3.2.1) indique

$$(s - \phi^*(x^i))x^i = t^{-1}(s+1)v_1^i + v_0^i + \sum_{1 \leqslant j \leqslant n-1} \left(\frac{1}{(s+1)}\, t\right)^j v_{-j}^i \quad \mathrm{mod}\,.\,\partial_s.$$

avec $\phi^*(v_j^i) > \phi^*(x^i) - j$, $v_j^i \in E$ pour $j = 1, \dots, -n+1$.

En appliquant t à cette égalité, on obtient

$$(s - \phi^*(x^i) + 1)tx^i = (s+1)v_1^i + tv_0^i + t\left[\sum_{1 \leqslant j \leqslant n-1} \left(\frac{1}{(s+1)}\, t\right)^j v_{-j}^i\right] \mathrm{mod}\,.\,\partial_s$$

et, en utilisant une récurrence sur le poids de v_{-j}^i, on voit que

$$I^i \left(= \sum_{1 \leqslant j \leqslant n-1} \left(\frac{1}{(s+1)}\, t\right)^j v_{-j}^i \right)$$

s'exprime en fonction d'éléments de E de poids strictement supérieurs à $\phi^*(x^i)$. Plus précisément,

$$I^i = \sum_j \frac{1}{P_{ij(s)}}\, w_j^i \quad \text{où} \quad w_j^i \in E,\ \phi^*(w_j^i) > \phi^*(x^i),$$

et où les P_{ij} sont des polynômes de s dont les racines sont contenues dans l'ensemble $\{\mathrm{spec}(f)-k, 1 \leqslant k \leqslant n-1\}$. Ceci détermine A_1. L'assertion sur A_0 est facile à vérifier, l'égalité $\det A_0 = R(f)$ se déduisant du théorème des zéros de Hilbert.

5.3.3. COROLLAIRE. (*Calcul de* $\det_{B(s)} \tilde{H}^n(s)$): *dans la base* $B(s)$, *on a*

$$\det_{B(s)} \tilde{H}^n(s) = R(f)(s+1)^\mu \Big/ \prod_{\beta \in \mathrm{spec}(f)} (s-\beta+1)^{g(\beta)}.$$

5.4. REMARQUES

(i) Les matrices des opérateurs t correspondant aux cas (5.2) et (5.3) sont différentes bien que leurs déterminants, à un produit de valeurs critiques près, soient les mêmes (en effet, $\mathrm{spec}(f)$ ne dépend que du polyèdre à l'infini du polynôme f).

(ii) Les résultats des propositions (5.3.2) et (5.2.3) doivent être comparés avec le théorème 1 de [Sa].

5.5. *Exemple* (*cas* (*SBP*))

Soit $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^2 + x_1 x_2 + 1$. On a $\mu = 2$, $B(s) = \{[1], [x_1]\}$ $\mathrm{spec}(f) = \{-\frac{5}{6}, -\frac{7}{6}\}$ et on vérifie que, à l'aide des méthodes exposées en section 4,

$$(s+1)t[1] = (s+1)[1] - \frac{1}{72}(s+1)[x_1] - \frac{5}{6}t[1]$$

$$(s+1)t[x_1] = (6 \times 72 - 1)/6 \times 72(s+1)[x_1] + 1/36t[1] - \frac{7}{6}t[x_1].$$

On retrouve ainsi le résultat de la proposition (5.3.2) avec

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1/72 \\ 0 & (6 \times 72 - 1)/6 \times 72 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_1 = \begin{pmatrix} -5/6 & 0 \\ 1/36 & -7/6 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que le produit des valeurs critiques de f (ses points critiques sont $(0, 0)$ et $(1/6, -1/72)$) est bien égal à $(6 \times 72 - 1)/6 \times 72$.

5.6. THEOREME. (*Cas semi quasi homogène*): *soit f un polynôme semi quasi homogène* ($f^{-1}(0)$ *étant supposée lisse*), *B une base de E*, $B(s) = \{\omega_1, \ldots, \omega_\mu\}$ *la base de* $H^n(s)$ *induite par B, les éléments de $B(s)$ étant rangés selon le poids décroissant. Alors*

$$(s+1)t\omega = (s+1)A_0\omega + A_1 t\omega$$

les matrices A_0 *et* A_1 *étant définies de la même manière qu'en* (5.3.2) (*on a noté* $\omega = {}^t(\omega_1, \ldots, \omega_\mu)$).

DEMONSTRATION. Tout à fait similaire au cas (SPB).

6. Le système d'EDF $H''(s)$ et son déterminant: le cas de la dimension 2

Dans cette section on considère un polynôme f défini sur $\mathbf{C}^2$ (avec les coordonnées x_1 et x_2) satisfaisant les hypothèses 0.1.11. On suppose de plus que la partie initiale du polynôme f est donnée uniquement par les sommets du polyèdre $\Gamma_-(f)$.

6.1. Nous gardons les notations de la section 3. Soit $\mathscr{B}(s) = \{u_1, \ldots, u_\mu\}$ la base de $H''(s)$ définie en (3.1.1), les u_i, $1 \leqslant i \leqslant \mu$, étant ordonnés selon le poids décroissant (comme en (5.2.2)) et notons $u = {}^t(u_1, \ldots, u_\mu)$.

6.1.1. PROPOSITION. *Supposons que, pour tout* $1 \leqslant k \leqslant K-1$, *on ait* $T_k \cap \mathbf{N}^2 - \{A_k\} = \phi$. *Alors*

$$(s+1)tu = (s+1)A_0 u + A_1 tu \tag{6.1.1.1}$$

où

(i) A_0 *est la matrice* (*constante*, $\mu \times \mu$) *transposée de la matrice de la multiplication par* f *sur* $\mathbf{C}[x]/\mathscr{J}(f)$ *dans la base de* $\mathbf{C}[x]/\mathscr{J}(f)$ *déterminée lors de la démonstration de la proposition* (3.1.1). *En particulier* $\det A_0 = R(f) \neq 0$.

(ii) A_1 *est une matrice triangulaire inférieure, les éléments sur la diagonale étant les* $\beta_i \in \operatorname{spec}(f)$. *D plus*:

(a) A_1 *est constante si* $\delta^*(f) \leqslant -\frac{1}{2}$.

(b) A_1 *est une matrice dont les termes sont éventuellement de la forme* $1/P(s)$ *où* P *est un polynôme dont les racines sont contenues dans* $\{\operatorname{spec}(f) - 2\}$ *sinon.*

6.1.2. COROLLAIRE. *Dans la base* $\mathscr{B}(s)$ *on a*

$$\det_{\mathscr{B}(s)} H''(s) = R(f)(s+1)^\mu \Big/ \prod_{\beta \in \operatorname{spec}(f)} (s - \beta + 1)^{g(\beta)}.$$

6.1.3. EXEMPLE. Soit $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1^2 x_2 + x_2^2 + 1$. On a $\mu = 3$, $\mathscr{B} = \{1, x_1, x_2\}$, $\mathscr{B}(s) = \{[1], [x_1], [x_2]\}$, $\operatorname{spec}(f) = \{-\frac{3}{4}, -1, -\frac{5}{4}\}$ et $\delta^*(f) = \phi^*(1) = -\frac{3}{4} < -\frac{1}{2}$ ($\mathscr{B}$ est la base de E qui induit $\mathscr{B}(s)$).

On vérifie que

(a) $(s+1)t[1] = (s+1)[1] - \frac{3}{2}(s+1)[x_2] - \frac{3}{4}t[1]$

(b) $(s+1)t[x_1] = (s+1)[x_1] - \frac{9}{2}(s+1)[x_2] + \frac{1}{4}t[1] - t[x_1]$

(c) $(s+1)t[x_2] = \frac{31}{4}[x_2] - \frac{3}{8}t[1] - \frac{1}{4}t[x_1] - \frac{5}{4}t[x_2]$

ou encore, en posant $u = {}^t([1], [x_1], [x_2])$

$$(s+1)tu = (s+1)A_0u + A_1tu$$

avec

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 31/4 \end{pmatrix} \left(\det A_0 = \frac{31}{4}\right) \quad \text{et} \quad A_1 = \begin{pmatrix} -3/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & -1 & 0 \\ -3/8 & -1/4 & -5/4 \end{pmatrix}$$

Les points critiques de f sont $(0,0)$ et $(3, -\frac{9}{2})$, ses valeurs critiques $f((0,0)) = 1$, $f((3, -9/2)) = 31/4$ et donc $R(f) = 31/4$.

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION (6.1.1). Soit $\mathscr{B}$ la base de E induisant $\mathscr{B}(s)$, $u_j \in \mathscr{B}(s)$ et $x^i (= x_1^{i_1} x_2^{i_2})$ l'élément de $\mathscr{B}$ tel que $u_j = [x^i]$.

(i) On suppose que $\phi^*(x^i) \geqslant -1$. Il résulte de la proposition (4.3.2) et du corollaire (4.4.2) qu'avec les hypothèses de la proposition on a (en utilisant la notation (4.3.4))

$$(s - \phi^*(x^i))x^i = v_1^i \frac{s}{f} + v_0^i \quad (\text{mod}\,.\,\partial_s) \tag{1}$$

avec $\phi^*(v_1^i) > \phi^*(x^i) - 1$, $\phi^*(v_0^i) > \phi^*(x^i)$, v_1^i et v_0^i appartenant à E. En appliquant t à (1), on obtient

$$(s - \phi^*(x^i) + 1)tx^i = (s+1)v_1^i + tv_0^i \quad (\text{mod}\,.\,\partial_s). \tag{2}$$

(ii) On suppose maintenant $\phi^*(x^i) < -1$. D'après la proposition (4.3.2), on a

$$(s - \phi^*(x^i))x^i = v_1^i \frac{s}{f} + v_0^i + \frac{f}{s} v_{-1}^i \quad (\text{mod}\,.\,\partial_s) \tag{3}$$

avec $\phi^*(v_1^i) > \phi^*(x^i) - 1$, $\phi^*(v_0^i) > \phi^*(x^i)$, $\phi^*(v_{-1}^i) > \phi^*(x^i) + 1$ v_1^i, v_0^i et v_{-1}^i appartenant à E.

Si $\delta^*(f) \leqslant -\frac{1}{2}$, on a $\Delta^*(f) + 1 = -1 - \delta^*(f) \geqslant \delta^*(f)$ et par conséquent $\phi^*(x^i) + 1 \geqslant \delta^*(f)$. Ceci montre que $v_{-1}^i = 0$. On obtient donc, en multipliant l'égalité (3) par t

$$(s-\phi^*(x^i)+1)tx^i = (s+1)v_1^i + tv_0^i \quad (\mathrm{mod}\,.\,\partial_s) \tag{4}$$
$$\phi^*(v_1^i) > \phi^*(x^i)-1, \quad \phi^*(v_0^i) > \phi^*(x^i).$$

La proposition (6.1.1) est alors montrée si $\delta^*(f) \leqslant -\frac{1}{2}$.

Si $\delta^*(f) > -\frac{1}{2}$, en appliquant t à l'égalité (3), on obtient

$$(s-\phi^*(x^i)+1)tx^i = (s+1)v_1^i + tv_0^i + t\left[\frac{1}{(s+1)}\, tv_{-1}^i\right] \quad (\mathrm{mod}\,.\,\partial_s), \tag{5}$$

(remarquons ici que l'on peut avoir $v_{-1}^i = 0$, auquel cas on retrouve la situation précédente), avec $\phi^*(v_{-1}^i) > \phi^*(x^i)+1 > -1$. On a donc

$$(s-\phi^*(v_{-1}^i)+1)tv_{-1}^i = (s+1)w_1 + tw_0 \tag{6}$$

avec

$$\phi^*(w_1) > \phi^*(v_1^i) - 1 > \phi^*(x^i)$$
$$\phi^*(w_0) > \phi^*(x^i)+1.$$

Il faut montrer que $\frac{1}{(s+1)}\, tv_{-1}^i$ s'écrit sous la forme $\Sigma_j \frac{1}{P_{ij}(s)}\, v_j$ où les P_{ij} sont des polynômes dont les racines sont contenues dans $\mathrm{spec}(f)-1$ et v_j des éléments de E tels que $\phi^*(v_j) > \phi^*(x^i)$.

Pour cela on utilise une récurrence sur le poids:

si $\phi^*(v_{-1}^i) = \delta^*(f)$, on a

$$(s-\phi^*(v_{-1}^i)+1)tv_{-1}^i = (s+1)w$$

où $w \in E$, $\phi^*(w) > \phi^*(v_{-1}^i) - 1 > \phi^*(x^i)$ et on a bien le résultat annoncé.

Supposons maintenant que, pour les éléments w de E tels que $\phi^*(w) > \phi^*(v_{-1}^i)$ on ait

$$\frac{1}{(s+1)}\, tw = \sum_j \frac{1}{P_j(s)}\, w_j$$

où les P_j sont des polynômes dont les racines sont contenues dans $\mathrm{spec}(f)-1$ et

w_j les éléments de E tels que $\phi^*(w_j) > \phi^*(x^i)$. D'après (6), on a

$$\frac{1}{(s+1)} tv^i_{-1} = \frac{1}{(s-\phi^*(v^i_{-1})+1)} w_1 + \frac{1}{(s-\phi^*(v^i_{-1})+1)(s+1)} tw_0$$

et comme $\phi^*(w_0) > \phi^*(v^i_{-1})$, cette égalité, combinée avec l'hypothèse de récurrence montre que $\frac{1}{(s+1)} tv^i_{-1}$ a bien la forme cherchée. Le résultat sur la matrice A_0 est clair. □

6.1.4. THEOREME. *Soit f un polynôme comme en* (6.1.1), *B une base de E quelconque, $B(s)=\{\omega_1,\dots,\omega_\mu\}$ la base de $H^n(s)$ induite par B. On note $\omega = {}^t(\omega_1,\dots,\omega_\mu)$, les ω_j étant rangés selon le poids décroissant. Alors*

$$(s+1)t\omega = (s+1)A_0\omega + A_1 t\omega$$

la matrice A_0 et A_1 étant définies de la même manière qu'en (6.1.1).

DEMONSTRATION. Tout-à-fait similaire à celle de la proposition (6.1.1).

6.2. Lorsque $T_k \cap \mathbf{N}^2 - \{A_k\} \neq \phi$, pour un entier $k \in \{1,\dots,K-1\}$, la proposition (4.3.2) fait intervenir des facteurs $(s-\phi^*(u))^2$ si $x_1x_2u = x^c$ avec $C \in T_k \cap \mathbf{N}^2 - \{A_k\}$ (cf. proposition (3.1.1)). On ne peut donc pas retrouver le résultat de la proposition (6.1.1) dans la base $\mathscr{B}(s)$. Nous allons voir néanmoins que l'on peut obtenir une égalité analogue à (6.1.1.1) pourvu que les calculs soient effectués dans la base $\mathscr{B}'(s)$ définie en (3.2), section dont on garde les notations. Soit donc $\mathscr{B}'(s) = \{v_1,\dots,v_\mu\}$ la base de $H^n(s)$ définie en (3.2.1), les v_i, $1 \leqslant i \leqslant \mu$, étant ordonnés selon le poids décroissant, et $v = {}^t(v_1,\dots,v_\mu)$.

6.2.1. PROPOSITION. *Supposons qu'il existe $k \in \{1,\dots,K-1\}$ tel que l'on ait $T_k \cap \mathbf{N}^2 - \{A_k\} \neq \phi$. Alors*

$$(s+1)tv = (s+1)A_0v + A_1tv \tag{6.2.1.1}$$

les matrices A_0 et A_1 étant définies de la même manière qu'en (6.1.1).

6.2.2. COROLLAIRE. *Dans la base $\mathscr{B}'(s)$, on a*

$$\det_{\mathscr{B}'(s)} H^n(s) = R(f)(s+1)^\mu \Big/ \prod_{\beta \in \operatorname{spec}(f)} (s-\beta+1)^{g(\beta)}.$$

6.2.3. EXEMPLE. Soit $f(x_1,x_2) = x_1 + x_2 + x_1^2x_2^2$. On a $\mu = 3$, $\mathscr{B}'(s) = \{[1],[x_1x_2],[x_1]\}$, $\operatorname{spec}(f) = \{-\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}\}$.

On vérifie que

(a) $(s+\frac{1}{2}+1)t[1] = \frac{3}{2}(s+1)[x_1]$

(b) $(s+1+1)t[x_1x_2] = -\frac{3}{4}(s+1)[1]$

(c) $(s+\frac{3}{2}+1)t[x_1] = \frac{3}{2}(s+1)[x_1x_2]$

ou encore, en posant $v = {}^t([1], [x_1x_2], [x_1])$,

$$(s+1)tv = (s+1)A_0v + A_1tv$$

avec

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3/2 \\ -3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_1 = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}.$$

6.2.4. REMARQUE. Dans la base $\mathscr{B}(s)$, définie en (3.1), on a

$$\det_{\mathscr{B}(s)} H^n(s) = \frac{h(s+1)}{h(s)} \det_{\mathscr{B}'(s)} H^n(s) \quad \text{avec} \quad h \in \mathbf{C}(s)^*$$

(cf. (1.1.4) et le théorème (2.3.1) de [L-S]). Reprenons l'exemple (6.2.3): alors $\mathscr{B}(s) = \{[1], [x_1x_2], [x_1^2x_2^2]\}$ et

$$\det_{\mathscr{B}(s)} H^n(s) = -\frac{27}{16}\frac{(s+4)(s+1)^3}{(s+2)(s+3)(s+\frac{3}{2}+1)^2} = \frac{h(s+1)}{h(s)} \det_{\mathscr{B}'(s)} H^n(s)$$

avec

$$h(s) = \frac{(s+3)}{(s+\frac{1}{2}+1)}.$$

6.2.5. DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION (6.2.1). Notons $\mathscr{B}'$ la base de E qui induit $\mathscr{B}'(s)$.

Soit $x_1^{j_1}x_2^{j_2} \in \mathscr{B}'$ tel que $\phi^*(x^j) < -1$. De par la construction de $\mathscr{B}'$, on a $\alpha(x^j) = 1$ et la proposition (4.3.2) indique que (avec la notation (4.3.4))

$$(s - \phi^*(x^j))x^j = \sum_{-1 \leqslant j \leqslant 1} y_j \left(\frac{s}{f}\right)^j \quad (\text{mod}\,.\,\partial_s)$$

où $y_j \in E$, $\phi^*(y_j) > \phi^*(x^j) - j$.

Soit maintenant $x^k(=x_1^{k_1}x_2^{k_2})$ un élément de $\mathscr{B}'$ tel que $x_1x_2x^k = x^c$, $c \in \bar{T}_k' \cap \mathbf{N}^2$. Alors $\alpha(x^k)=2$. Le corollaire (4.2.2) donne

$$(s-\phi^*(x^k))x^k = h_{\Delta_{k-1}}x^k \frac{s}{f} \quad (\mathrm{mod}\,.\,\partial_s)$$

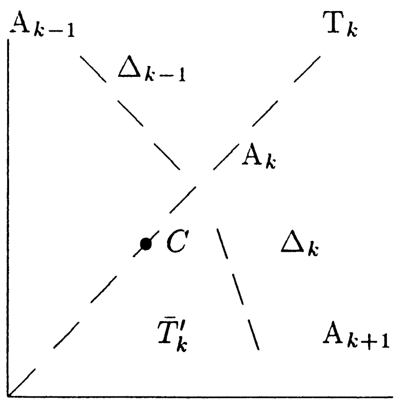
et on peut écrire $in^*(x^k h_{\Delta_{k-1}}) = x^k x^{A_{k+1}}$, c'est à dire $x^k h_{\Delta_{k-1}} = x^k x^{A_{k+1}} + R_k$ où $R_k \in \mathbf{C}[x]$, $\phi^*(R_k) > \phi^*(x^k)-1$. Or par construction $x^k x^{A_{k+1}} \in \mathscr{B}'$ et donc

$$(s-\phi^*(x^k))x^k = x^k x^{A_{k+1}} \frac{s}{f} + R_k \frac{s}{f} \quad (\mathrm{mod}\,.\,\partial_s)$$

avec $x^k x^{A_{k+1}} \in \mathscr{B}'$, $\phi^*(x^k x^{A_{k+1}}) = \phi^*(x^k)-1$, $\phi^*(R_k) > \phi^*(x^k)-1$. En appliquant le processus de divison utilisé lors de la démonstration de la proposition (4.3.2), on obtient

$$(s-\phi^*(x^k))x^k = x^k x^{A_{k+1}} \frac{s}{f} + \sum_{-1 \leq j \leq 1} y_j \left(\frac{s}{f}\right)^j \quad (\mathrm{mod}\,.\,\partial_s)$$

avec $y_j \in E$, $\phi^*(y_j) > \phi^*(x^k) - j$. Par conséquent la proposition (6.2.1) s'obtient de la même manière que la proposition (6.1.1).



6.2.6. THEOREME. *Soit f un polynôme satisfaisant les conditions énoncées au début de la section* (6), *B*(*s*) *une base de* $H^n(s)$ *quelconque. Alors*

$$\det_{B(s)} H^n(s) = \frac{h(s+1)}{h(s)} R(f)(s+1)^{\mu} \Big/ \prod_{\alpha \in \mathrm{spec}(f)} (s-\alpha+1)^{g(\alpha)}$$

où $h \in \mathbb{C}(s)^*$.

DEMONSTRATION. Résulte des corollaires (6.1.2), (6.2.2) et de (1.1.4).

7. Bonnes bases de la cohomologie (en dimension $n > 2$)

Dans tout ce qui suit, f désigne un polynôme satisfaisant les hypothèses énoncées en (0.1.11) et $R(f)$ le produit des valeurs critiques de f, défini en (0.1.12).

7.1. Soient B une base de E, $B(s) = \{u_1, \ldots, u_\mu\}$ la $\mathbf{C}(s)$ base de $H^n(s)$ induite par B et $u = {}^t(u_1, \ldots, u_\mu)$ (les éléments de $B(s)$ sont supposés rangés selon le poids décroissant).

7.1.1. DEFINITION. *$B(s)$ est une bonne base de $H^n(s)$ si*

$$(s+1)tu = (s+1)A_0 u + A_1 tu$$

où

(a) *A_0 est transposée de la matrice de la multiplication par f sur $\mathbf{C}[x]/\mathcal{J}(f)$ dans la base B. En particulier* $\det A_0 = R(f)$.
(b) *A_1 est une matrice triangulaire inférieure, sa diagonale étant formée par les éléments de* $\operatorname{spec}(f)$.

7.1.2. PROPOSITION. *Soit $B(s)$ une bonne base de $H^n(s)$.*
Alors

$$\det{}_{B(s)} H^n(s) = R(f)(s+1)^\mu \Big/ \prod_{\beta \in \operatorname{spec}(f)} (s-\beta+1)^{g(\beta)}.$$

7.2. *Existence de bonnes bases*

7.2.1. PROPOSITION. *Soit $B = \{v_1, \ldots, v_\mu\}$ une base de E, $B(s)$ la base de $H^n(s)$ induite par E. On suppose que pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant \mu$,*

$$(s - \phi^*(v_i))v_i = w_i \frac{s}{f} \quad \operatorname{mod}.(\partial_s)$$

où $w_i \in \mathbf{C}[x]$, $\phi^*(w_i) > \phi^*(v_i) - 1$. Alors $B(s)$ est une "bonne base" de $H^n(s)$. La conclusion reste la même si $\phi^*(w_i) \geqslant \phi^*(v_i) - 1$ mais $in^*(w_i) \in B$.

DEMONSTRATION. Se montre à l'aide de la proposition (4.3.2) comme dans le cas de la dimension 2 (cf. démonstration de la proposition (6.2.1)).

7.2.2. EXEMPLE (Illustration de la proposition (7.2.1)). Soit $f(x,y,z)=x+y+z+x^2y^2z^2$. Alors $\mu=5$. Notons: Δ_1 la face de $\mathscr{F}$ délimitée par les points $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(2,2,2)$, Δ_2 celle délimitée par les points $(1,0,0)$, $(0,0,1)$, $(2,2,2)$ et Δ_3 celle délimitée par les points $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ et $(2,2,2)$.

On a

(i) $P_{\Delta_1}=(-1,\ -1,\ \frac{3}{2})$, $P_{\Delta_2}=(-1,\ \frac{3}{2},\ -1)$, $P_{\Delta_3}=(\frac{3}{2},\ -1,\ -1)$

(cf. 0.1.8)

(ii) $h_{\Delta_1}(f)=\frac{5}{2}z$, $h_{\Delta_2}(f)=\frac{5}{2}y$, $h_{\Delta_3}(f)=\frac{5}{2}x$

(cf. 4.2)

(iii) $\operatorname{spec}(f)=\{-\frac{1}{2},\ -1,\ -\frac{3}{2},\ -2,\ -\frac{5}{2}\}$

(remarquons que spec(f) est symétrique par rapport à $-\frac{3}{2}$).

Il est facile de vérifier que la base "naturelle" de $H''(s)$, $B(s)=\{[1],[xyz],[x^2y^2z^2],[x^3y^3z^3],[x^4y^4z^4]\}$, n'est pas une bonne base. Néanmoins, dans la base $B'(s)=\{[1],[xyz],[x],[x^2yz],[xz]\}$ on a

(a) $\left(s+\dfrac{1}{2}\right)[1]=\dfrac{5}{2}[x]\dfrac{s}{f}$

(b) $(s+1)[xyz]=\dfrac{5}{2}[x^2yz]\dfrac{s}{f}$

(c) $\left(s+\dfrac{3}{2}\right)[x]=\dfrac{5}{2}[xz]\dfrac{s}{f}$

(d) $(s+2)[x^2yz]=\dfrac{5}{4}[1]\dfrac{s}{f}$

(e) $\left(s+\dfrac{5}{2}\right)[xz]=\dfrac{5}{2}[xyz]\dfrac{s}{f}.$

Par conséquent, en notant $w={}^t([1],\ [xyz],\ [x],\ [x^2yz],\ [xz])$

$$(s+1)tw=(s+1)A_0w+A_1tw$$

avec A_1 diagonale, diag A_1 = spec(f), et

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/2 \\ 5/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour construire la base $B'(s)$, on a utilisé le corollaire (4.2.2) et l'analogue du lemme (4.4.1) en dimension 3 afin de se trouver dans la situation de la proposition (7.2.1): on a d'abord gardé les monômes "sous diagramme", c'est-à-dire 1 et xyz. Pour le premier, on a posé $h_\Delta(f) = h_{\Delta_3}(f)$. La formule (4.2.2.2) mène alors à prendre le monôme x dans la nouvelle base. On réitère le raisonnement pour le monôme xyz (on prend x^2yz dans la nouvelle base) et pour le monôme x (on prend xz). Il faut ensuite appliquer le corollaire (4.2.2) au monôme x^2yz: le lemme (4.4.1) dit alors que $(s+2)x^2yz$ est cohomologue à $w(s/f)$ où $\phi^*(w) > -3$. Pour finir, il suffit d'appliquer le corollaire (4.2.2) au monôme xz en remarquant que $\phi^*(xz) = \phi^*_\Delta(xz)$ pour $\Delta = \Delta_2$ uniquement.

7.2.3. THEOREME. *On suppose que quels que soient* p *et* $p' \in \operatorname{spec}(f)$ $(p' > p)$ $p' - p \notin \mathbf{N}^*$. *Alors il existe des bonnes bases de* $H^n(s)$: *plus précisément, toute base de* E *induit une bonne base de* $H^n(s)$.

7.3. DEMONSTRATION DU THEOREME (7.2.3). Dans tout ce qui suit, on garde les notations de la section (2). On pose $p(g)(t) = \Sigma_{\alpha \in \operatorname{spec}(f)} g(\alpha) t^\alpha$.

7.3.1. LEMME. $t^n p(g)(t) = p(g)(t^{-1})$.

DEMONSTRATION. Tout-à-fait similaire à celle donnée dans [K-V]. Elle est basée sur le théorème (2.8) de [K], sur les résultats de [St] (p. 558–559) et sur la dualité entre les points d'un polyèdre montrée par Ehrhart [E].

7.3.2. COROLLAIRE. $\forall \alpha \in \operatorname{spec}(f)$, $\alpha > -n$.

Du lemme (7.3.1) on déduit

7.3.3. PROPOSITION. *Le spectre de la filtration de Newton définie sur* $\Omega^n/\mathrm{d}f \wedge \Omega^{n-1}$ *est symétrique par rapport à* $-n/2$.

7.3.4. COROLLAIRE. (i) *Soit* $\alpha \in \operatorname{spec}(f)$, α^s *son symétrique. Alors* $\alpha + \alpha^s = -n$.

(ii) $\delta^*(f) + \Delta^*(f) = -n$,

(iii) *la somme de tous les éléments du spectre* (*comptés avec multiplicité*) *vaut* $-\mu(n/2)$.

7.3.5. LEMME. *On suppose que le polyèdre de Newton à l'infini du polynôme f possède au moins deux faces de codimension* 1 *ne passant pas par l'origine. Alors* $-1 \in \operatorname{spec}(f)$.

DEMONSTRATION. Evidente.

7.3.6. PROPOSITION. *On suppose que, quels soient α et α' appartenant à* $\operatorname{spec}(f)$, $\alpha - \alpha'$ *n'est pas un entier non nul. Alors:*

(i) *si $n > 2$, $\Gamma_-(f)$ n'a qu'une seule face.*
(ii) *si $n = 2$, $\Gamma_-(f)$ a la particularité suivante: $T_k \cap \mathbf{N}^2 - \{A_k\} = \phi$ pour tout k, $1 \leqslant k \leqslant K-1$ (cf. section* (3)).

DEMONSTRATION. (i) Supposons que $\Gamma(f)$ possède au moins deux faces de codimension 1. Alors, d'après (7.3.5) $\alpha = -1$ appartient à $\operatorname{spec}(f)$. Son symétrique α^s vaut $-n+1$ d'après (7.3.4)(i) et par conséquent $\alpha^s - \alpha = -n+2$ est un entier non nul, ce qui est contraire aux hypothèses.
(ii) Résulte de la proposition (3.1.2).

Le théorème (7.2.3) résulte maintenant des théorèmes (5.6), (6.1.4) et de la proposition (7.3.6).

REMARQUE. La condition sur le décalage d'entiers n'est évidemment pas nécessaire pour avoir de bonnes bases de la cohomologie.

7.4. CONJECTURE. *Soit f un polynôme commode, non dégénéré par rapport à son polyèdre de Newton. Alors il existe des bonnes bases de la cohomologie du complexe d'Aomoto.*

7.5. *Structure de t: cas général*

7.5.1. NOTATIONS. Dans ce qui suit, on note α_j, $1 \leqslant j \leqslant r$, $(\alpha_1 > \cdots > \alpha_r)$ les éléments distincts de $\operatorname{spec}(f)$, $g(\alpha_j)$ leur multiplicité. Soit B une base de monômes de E, $B(s)$ la base de $H^n(s)$ induite par B, les éléments de $B(s)$ étant rangés selon le poids décroissant. Soit, de plus, $B_j(s)$ l'ensemble des éléments de $B(s)$ de poids α_j. On pose

$$B_j(s) = \{\omega_1^j, \ldots, \omega_{g(\alpha_j)}^j\} \quad \text{si} \quad \alpha(\omega_1^j) \geqslant \cdots \geqslant \alpha(\omega_{g(\alpha_j)}^j)$$

où $\alpha(\omega_k^j) \overset{\text{déf}}{=} \alpha(x^j)$ (cf. (4.3)) si $\omega_k^j = [x^j]$.
Si

$$B(s)\left(= \bigcup_{j=1}^{r} B_j(s)\right) = \{\omega_1, \ldots, \omega_\mu\}, \quad \text{on pose} \quad \omega = {}^t(\omega_1, \ldots, \omega_\mu).$$

7.5.2. THEOREME. *Avec les notations ci-dessus, on a*

$$(s+1)t\omega = (s+1)A_0\omega + A_1 t\omega$$

où

(i) A_0 *est la matrice transposée de la matrice de la multiplication par* f *sur* $\mathbf{C}[x]/\mathscr{J}(f)$ *dans la base* B.

(ii) A_1 *est une matrice de la forme*

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \times & B_2 & & \\ & & \ddots & 0 \\ \times & \cdots & \times & B_r \end{pmatrix}$$

où les B_j, $1 \leqslant j \leqslant r$ *sont des matrices carrées d'ordre* $g(\alpha_j)$. *De plus, si* k *désigne le nombre d'éléments* ω^j *de* $B_j(s)$ *vérifiant* $\alpha(\omega^j)=1$, B_j *est de la forme*

$$\begin{pmatrix} C_j & D_j \\ 0 & E_j \end{pmatrix}$$

où E_j *est une matrice carrée d'ordre* k *diagonale, diag* $E_j = \alpha_j$, *et* C_j *est une matrice carrée d'ordre* $g(\alpha_j)-k$.

DEMONSTRATION. Résulte de l'égalité (4.2.2.2) et de la proposition de division (2.2.1).

7.5.3. COROLLAIRE. *Soit* $A \subset B$ *l'ensemble des monômes* x^i *tels que* $\alpha(x^i)=1$ *et* $P=\{\phi^*(x^i), x^i \in A\} \subset \operatorname{spec}(f)$. *Si* $\alpha \in P$, *on note* $h(\alpha)$ *sa multiplicité (dans* P*). Alors*

$$\det_{B(s)} H^n(s) = R(f)(s+1)^{\mu} \Big/ \prod_{\alpha\in P} (s-\alpha+1)^{h(\alpha)} \times \psi(s)$$

où ψ *est une fraction rationnelle de* s. *De plus, si* $\Sigma_{\alpha\in P}\, h(\alpha)=q$, $\psi(s)=Q(s)/R(s)$ *où* Q *est un polynôme de degré* d *et* P *un polynôme de degré* $\mu+d-q$.

8. Intégrales de fonctions multiformes

Dans cette section, nous rappelons la définition des intégrales $I(s)=\int_\gamma \omega f^s$ considérées en introduction, le but étant de préciser la nature des cycles γ, de définir I comme une fonction méromorphe de s et d'en déterminer les pôles éventuels. Nous reprenons essentiellement les résultats établis par F. Loeser et C. Sabbah ([L-S] §4).

8.1. Soient $\mathbf{T}$ le tore complexe de dimension 1, $\pi_1(\mathbf{T})$ le groupe fondamental du tore $\mathbf{T}$ basé à l'origine, T un générateur de ce groupe et $\mathscr{L}$ le système local sur $\mathbf{T}$ dont la fibre est $\mathbf{C}[T, T^{-1}]$, l'action du groupe $\pi_1(\mathbf{T})$ étant induite par la multiplication par $T(=\exp 2i\pi s)$.

8.2. Soient comme précédemment $X = \mathbf{C}^n - f^{-1}(0)$, $\tilde{X}$ le revêtement universel de X et $p: \tilde{X} \to X$ ~~la~~ projection.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{p} & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \tilde{\mathbf{C}}^* & \to & \mathbf{C}^* \end{array}$$

$\tilde{X}$ est une variété de Stein puisque revêtement d'une variété algébrique affine. Si $\omega \in \Omega^n(X)$, $p^*\omega$ est une n-forme holomorphe sur $\tilde{X}$, et $p^*\omega f^s$ dépend analytiquement de s. Pour s fixé, $p^*\omega f^s$ définit une classe de cohomologie dans $H^n(\tilde{X}, \mathbf{C})$, notée $[\omega f^s]$.

8.3. Sur $\tilde{X}$, on dispose de la dualité de Poincaré:

$$\langle . \rangle: H^n_c(\tilde{X}, \mathbf{C}) \times H^n(\tilde{X}, \mathbf{C}) \to \mathbf{C}$$

où $H^n_c(\tilde{X}, \mathbf{C}) = H^n_c(X, p_! \mathbf{C}_{\tilde{X}})$ (image directe à support propre). De plus, $p_! \mathbf{C}_{\tilde{X}} = \mathscr{L}$, $\mathscr{L}$ étant le systéme local défini en (8.1), si bien que l'on a l'égalité de $\mathbf{C}[T, T^{-1}]$-modules de type fini ([L-S], 4.2.1)

$$H^n_c(\tilde{X}, \mathbf{C}) = H^n_c(X, \mathscr{L}).$$

Pour $\gamma \in H^n_c(X, \mathscr{L})$, l'expression $\langle \gamma, [\omega f^s] \rangle$ a un sens et la fonction $s \to \langle \gamma, [\omega f^s] \rangle$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$.

8.4. DEFINITION. *Pour $\omega \in \Omega^n(X)$ et $\gamma \in H^n_c(X, \mathscr{L})$ on définit*

$$\int_\gamma \omega f^s = \langle \gamma, [\omega f^s] \rangle.$$

REMARQUES. (i) Soit $\mathscr{L}^*$ le système local dual de $\mathscr{L}$. Sa fibre est égale à $\mathbf{C}[T, T^{-1}]$, mais sa monodromie autour de $t = 0$ est la multiplication par T^{-1}. Comme $H^c_n(X, \mathscr{L}) \simeq H^n_c(X, \mathscr{L}^*)$, on peut voir γ comme un cycle à coefficients dans $\mathscr{L}^*$.

(ii) Puisque $\langle T\gamma, Tp^*\omega f^s\rangle = \langle \gamma, p^*\omega f^s\rangle$, $(Tp^*\omega f^s = p^*\omega T(f^s) = \exp(2i\pi s)p^*\omega f^s)$ on a de plus

$$\int_{T\gamma} \omega f^s = \exp(-2i\pi s) \int_\gamma \omega f^s.$$

8.5. Supposons que le support des cycles ne soit plus compact. Nous nous proposons de définir (à partir de la définition (8.4)) les intégrales comme fonctions méromorphes de s. Pour ce faire, on désigne $H^n_{fp}(X, \mathscr{L})$ la cohomologie à support f-propre de $\mathscr{L}$ (i.e. $f|_{\text{supp}\,\gamma}$ est propre) (on se ramène au cas "support compact" dans les fibres de f). On a une application de $\mathbf{C}[T, T^{-1}]$-modules de type fini ([L-S] 4.2.5)

$$e\colon H^n_c(X, \mathscr{L}) \to H^n_{fp}(X, \mathscr{L}).$$

8.6. PROPOSITION. ker *e et coker e sont deux* $\mathbf{C}[T, T^{-1}]$*-modules de type fini de torsion. Plus précisément, tout élément de* ker *e et coker e est annulé par un produit de termes* $(T^m - \lambda)$, $m \in \mathbf{Z}$, $\lambda \in \mathbf{C}^*$.

8.7. COROLLAIRE ([L-S]: 4.2.7). *Le morphisme de* $\mathbf{C}[T, T^{-1}]$-modules de type fini $H^n_c(X, \mathscr{L}) \xrightarrow{e} H^n_{fp}(X, \mathscr{L})$ *devient un isomorphisme après tensorisation par* $\mathbf{C}(T)$.

Soit $\gamma \in H^n_{fp}(X, \mathscr{L})$ tel que $[\gamma] \in \operatorname{coker} e$. Alors $P(T)[\gamma] = 0 \Rightarrow P(T)\gamma = e(\gamma')$ où $\gamma' \in H^n_c(X, \mathscr{L})$ est à support compact. Par conséquent, d'après (8.4) $\int_{P(T)\gamma} \omega f^s$ est bien définie.

8.8. DEFINITION. *Avec les notations ci-dessus, on pose*

$$\int_\gamma \omega f^s = P(T)^{-1} \int_{P(T)\gamma} \omega f^s.$$

Ainsi $\int_\gamma \omega f^s$ est une fonction méromorphe de s dont les pôles sont contenus dans des hyperplans de $\mathbf{C}$ définis par $\exp(2i\pi s)^m - \lambda = 0$.

8.9. Soit $\beta \in \mathbf{C}^*$ assez général. On note $\mathscr{L}_\beta$ le système local de rang 1 sur $\mathbf{C}$ de monodromie β^{-1} autour de $t = 0$. De (8.7) on déduit que le rang générique du $\mathbf{C}[T, T^{-1}]$-module $H^n_{fp}(X, \mathscr{L})$ est égal à $\dim_{\mathbf{C}(s)} H^n(s)$.

En effet, un argument de régularité montre que $\dim_{\mathbf{C}(s)} H^n(s)$ est égal à $\dim_{\mathbf{C}} H^n(X, \mathscr{L}_\beta)$. Or ce dernier nombre est égal à $\dim_{\mathbf{C}} H^n_c(X, \mathscr{L}_{\beta^{-1}})$ par la dualité de Poincaré, qui n'est autre que le rang générique de $H^n_c(X, \mathscr{L})$.

8.10. Soit $\gamma \in H^n_c(X, \mathscr{L})$ et notons $\gamma(\mu^{-1}) \in H^n_c(X, \mathscr{L}_{\mu^{-1}})$ sa restriction à μ^{-1} assez général. Alors pour $\alpha \in \mathbf{C}$ tq $\mu = \exp 2i\pi\alpha$, on a $(\int_\gamma \omega f^s)_{|s=\alpha} = \langle \gamma(\mu^{-1}), [\omega f^\alpha]\rangle$.

9. Déterminants d'intégrales

Soit $\gamma_1,\dots,\gamma_\mu \in H^n_{fp}(X,\mathscr{L})$ tels que pour β dans un ouvert de $\mathbf{C}^*$ les restrictions $\gamma_1(\beta),\dots,\gamma_\mu(\beta)$ à $T(=\exp 2i\pi s)=\beta$ forment une base de $H^n_{fp}(X,\mathscr{L}_\beta)$. Soient $\omega_1,\dots,\omega_\mu \in \Omega^n(X)$ des n-formes dont les classes dans $H^n(s)$ forment une $\mathbf{C}(s)$-base (on la note $B(s)$). On désigne par $(\int_{\gamma_i}\omega_j f^s)$ la matrice dont les éléments sont les intégrales $\int_{\gamma_i}\omega_j f^s$, $1 \leqslant i,j \leqslant \mu$, et $\det_{B(s)}(\int_{\gamma_i}\omega_j f^s)$ son déterminant.

On suppose que $\det_{B(s)} H^n(s) = R(f)\prod_\beta (s+\beta)^{\gamma_\beta}$, $\gamma_\beta \in \mathbf{Z}$, $\beta \in \mathbf{Q}$. On a alors

9.1. THEOREME. *Avec les notations ci-dessus, on a*

$$\det_{B(s)}\left(\int_{\gamma_i}\omega_j f^s\right) = \mathscr{C}(T)R(f)^s \prod_\beta \Gamma(s+\beta)^{\gamma_\beta}$$

où $\mathscr{C} \in \mathbf{C}(T)$ *est une fonction périodique de* s.

9.2. COROLLAIRES. (i) *Cas SPB. Soit* f *le polynôme défini en* (5.1.2), $B(s)$ *la base de* $H^n(s)$ *définie en* (5.2.1)(i), $\operatorname{spec}(f)$ *la famille de rationnels définie en* (5.2.1)(ii). *On a (corollaire* 5.3.3)

$$\det_{B(s)} H^n(s) = R(f)(s+1)^\mu \Big/ \prod_{\beta\in\operatorname{spec}(f)} (s-\beta+1)^{g(\beta)}$$

si bien que le théorème (9.1) *donne dans ce cas*

$$\det_{B(s)}\left(\int_{\gamma_i}\omega_j f^s\right) = \mathscr{C}(T)R(f)^s\Gamma(s+1)^\mu \Big/ \prod_{\beta\in\operatorname{spec}(f)} \Gamma(s-\beta+1)^{g(\beta)}.$$

Ce résultat est à comparer avec celui obtenu par A. Varchenko (cf. (*V*)).

(ii) *Cas de la dimension* 2: *On garde les notations de la section* 6.

Dans la situation (6.1.1) *on a, en utilisant le corollaire* (6.1.2),

$$\det_{\mathscr{B}(s)}\left(\int_{\gamma_i}\omega_j f^s\right) = \mathscr{C}(T)R(f)^s\Gamma(s+1)^\mu \Big/ \prod_{\beta\in\operatorname{spec}(f)} \Gamma(s-\beta+1)^{g(\beta)}$$

Dans la situation (6.2.1) *on a, en utilisant le corollaire* (6.2.2)

$$\det_{\mathscr{B}'(s)}\left(\int_{\gamma_i}\omega_j f^s\right) = \mathscr{C}(T)R(f)^s\Gamma(s+1)^\mu \Big/ \prod_{\beta\in\operatorname{spec}(f)} \Gamma(s-\beta+1)^{\gamma(\beta)}.$$

9.3. *Démonstration du théorème* (9.1)

Nous nous inspirons de la démonstration donnée par F. Loeser et C. Sabbah dans un cadre plus général. Il s'agit de remarquer que dans une même base, deux solutions d'un même système d'EDF, vérifiant une condition de croissance raisonnable, diffèrent au plus d'une fonction périodique. Nous rappelons cette condition de croissance.

9.3.1. DEFINITION. On note $\mathcal{O}(\mathbf{C})$ la sous algèbre des fonctions holomorphes (de la variable s) des fonctions $\mathscr{C}$ satisfaisant la condition de croissance suivante: pour tout couple de réels (r, R), $r \leqslant R$, il existe $c > 0$, $b > 0$ tels que, dans le domaine $\{s \in \mathbf{C}/r \leqslant Re\ s \leqslant R, |Ims| > R\}$, on ait $|\mathscr{C}(s)| < c \exp(b|Ims|)$.

De manière analogue, on définit $\mathscr{E}(\mathbf{C})$, sous algèbre du corps des fonctions méromorphes (de la variable s):

9.3.2. DEFINITION. Une fonction méromorphe $\mathscr{C}$ appartient à $\mathscr{E}(\mathbf{C})$ s'il existe un nombre fini de formes linéaires L, un ensemble fini de nombres complexes non nuls β, des entiers $n_{L,\beta}$ et $h \in \mathbf{C}[s]$ tels que

$$h(s) \prod_{L,\beta} (T^L - \beta)^{n_{L,\beta}} \mathscr{C} \in \mathcal{O}(\mathbf{C}).$$

9.3.3. LEMME. (i) $\mathscr{E}(\mathbf{C})$ *est un module à gauche sur* $\mathbf{C}(s)\langle \tau, \tau^{-1} \rangle$.

(ii) *La sous algèbre des éléments invariants par* τ *de* $\mathscr{E}(\mathbf{C})$ *s'identifie à* $\mathbf{C}(T)$.

(iii) *Pour tout* $\beta \in \mathbf{C}$, $\Gamma(s+\beta)$ *et* $\Gamma(s+\beta)^{-1}$ *appartiennent à* $\mathscr{E}(\mathbf{C})$.

DEMONSTRATION. Le lemme n'est qu'un cas particulier de la proposition (4.1.2) de l'article [L-S].

9.3.4. REMARQUE. Pour $\gamma \in H^n_{fp}(X, \mathscr{L})$ et $\omega \in \Omega^n(X)$, $\int_\gamma \omega f^s \in \mathscr{E}(\mathbf{C})$.

Reprenons les notations du début de la section (9). Soit $A(s)$ la matrice de l'opérateur τ dans la base $B(s)$. Alors, pour $1 \leqslant i \leqslant \mu$, on a

$$\tau \begin{pmatrix} \displaystyle\int_{\gamma_i} \omega_1 f^s \\ \vdots \\ \displaystyle\int_{\gamma_i} \omega_\mu f^s \end{pmatrix} = A(s) \begin{pmatrix} \displaystyle\int_{\gamma_i} \omega_1 f^s \\ \vdots \\ \displaystyle\int_{\gamma_i} \omega_\mu f^s \end{pmatrix}$$

(en effet, par définition, γ définit une solution $\int_\gamma$ dans $\mathscr{E}(\mathbb{C})$ du système d'EDF $H^n(s)$ par la formule $\omega \to \int_\gamma \omega f^s$). On en déduit que $\det_{B(s)}(\int_{\gamma_i} \omega_j f^s)$ est solution du système d'EDF de rang 1 $\det_{B(s)} H^n(s)$, au même titre que $R(f)^s \Pi_\beta \Gamma(s+\beta)^{\gamma_\beta}$, c'est à dire

$$\tau\left(\det_{B(s)}\left(\int_{\gamma_i}\omega_j f^s\right)\right)=\det_{B(s)}H^n(s)\left(\det_{B(s)}\left(\int_{\gamma_i}\omega_j f^s\right)\right)$$

$$\tau\left(R(f)^s\prod_\beta\Gamma(s+\beta)^{\gamma_\beta}\right)=\det_{B(s)}H^n(s)\left(R(f)^s\prod_\beta\Gamma(s+\beta)^{\gamma_\beta}\right).$$

Il en résulte que

$$\tau\left[\det_{B(s)}\left(\int_{\gamma_i}\omega_j f^s\right)\left(R(f)^s\prod_\beta\Gamma(s+\beta)^{\gamma_\beta}\right)^{-1}\right]$$

$$=\det_{B(s)}\left(\int_{\gamma_i}\omega_j f^s\right)\left(R(f)^s\prod_\beta\Gamma(s+\beta)^{\gamma_\beta}\right)^{-1}.$$

Mais, d'après (9.3.3)(iii), l'expression entre crochets appartient à $\mathscr{E}(\mathbf{C})$, et comme elle est invariante par τ, on obtient, en utilisant (9.3.3)(ii)

$$\left(R(f)^s\prod_\beta\Gamma(s+\beta)^{\gamma_\beta}\right)^{-1}\det_{B(s)}\left(\int_{\gamma_i}\omega_j f^s\right)=\mathscr{C}(T)$$

où $\mathscr{C}\in\mathbf{C}(T)$.

9.4. REMARQUES. (i) La formule obtenue au théorème (9.1) est plus précise que celle obtenue au théorème (4.2.1) de [L-S] où apparaît une indétermination $h\in\mathbf{C}(s)$ (les bases choisies n'y sont pas spécifiées) et un décalage d'entiers (dû à la définition de la fonction "Zeta logarithmique" de la monodromie en 0 et en ∞ (cf. [L-S] (2.2)).

(ii) Dans une situation réelle (f defini sur $\mathbf{R}$) on peut montrer que, pour $Re\ s$ assez grand, on a une formule du type:

$$\det_{B(s)}\left(\int_{\gamma_i}\omega_j|f|^s\right)=|R(f)|^s\prod_\beta\Gamma(s+\beta)^{\gamma(\beta)}$$

(l'indétermination périodique $\mathscr{C}$ est levée).

Références

[A] K. Aomoto: Les équations aux différences finies et les intégrales de fonctions multiformes, *J. Fac. Sci. Tokyo* 22 (1975), 271–297 et 26 (1979), 519–523.

[B] J. Bernstein: The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter, *Funct. An. and Appl.* 6 (1972), 273–285.

[B-G-M-M] J. Briançon, M. Granger, Ph. Maisonobe and M. Miniconi: Algorithme de calcul du polynôme de Bernstein, *Ann. Inst. Fourier* 3 (1989), 553–609.

[Br] S. A. Broughton: Milnor numbers and the topology of polynomial hypersurfaces, *Inv. Math.* 92 (1988), 217–241.

[D] P. Deligne: Equations différentielles à points singuliers réguliers, Lect. Notes in Math. vol. 163, Springer-Verlag, 1970.

[E] E. Ehrhart: Demonstration de la loi de réciprocité, *C.R. Acad. Sci. Paris* 265 (1967), 5–7.

[K] A. G. Kouchnirenko: Polyèdres de Newton et nombres de Milnor, *Inv. Math.* 32 (1976), 1–31.

[K-V] A. Khovanskii and A. Varchenko: Asymptotics of integrals over vanishing cycles and the Newton polyhedron, *Sov. Math. Dokl.* 32 (1985), 122–127.

[L-S] F. Loeser and C. Sabbah: Equations aux différences finies et déterminants d'intégrales de fonctions multiformes, *Comm. Math. Helvetici* 66 (1991), 458–503.

[Sa] M. Saito: On the structure of Brieskorn lattice, *Ann. Inst. Fourier* 39 (1989), 27–72.

[St] J. H. M. Steenbrink: Mixed Hodge structures on the vanishing cohomology, Proc. Nordic summer school on real and complex singularities, Oslo (1976).

[V] A. Varchenko: Valeurs critiques et déterminants de périodes (en russe), *Uspekhi Math. Nauk* 44 (1989), 235–236.

[VI] A. Varchenko: Zeta function of monodromy and Newton's diagrams, *Inv. Math.* 37 (1976), 253–262.