JEAN-YVES CHARBONNEL

Opérateurs différentiels et mesures invariantes

Compositio Mathematica, tome 87, n° 3 (1993), p. 287-309
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1993__87_3_287_0>

Compositio Mathematica **87**: 287–309, 1993.

Operateurs différentiels et mesures invariantes

JEAN-YVES CHARBONNEL

UA 748, Université Paris 7, Couloir 45-55, 5-ème étage, 2 Place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France

Received 24 October 1991; accepted 20 July 1992

Introduction

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps k de caractéristique 0. Dans les bons cas, la méthode des orbites associe à une orbite Ω de la représentation coadjointe un idéal primitif de l'algèbre enveloppante. Dans [3], dans le cas où $\mathfrak{g}$ est nilpotente, J. Dixmier construit l'idéal primitif associé à Ω sans utiliser de polarisation. Dans cet article, il retrouve l'idéal primitif en considérant dans l'algèbre de Weyl de l'espace vectoriel sous-jacent à $\mathfrak{g}$, l'annulateur de la mesure de Kostant, β_Ω, de l'orbite Ω. Sa démonstration utilise un lemme sur les opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux [3] (Section 4, Lemme 4.3). Soient V un k-espace vectoriel de dimension finie et $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$. Lorsque k est le corps des nombres complexes, on désigne par G le sous-groupe analytique de $GL(V)$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit J un idéal premier $\mathfrak{g}$-invariant de l'algèbre symétrique $S(V)$. On note $\mathscr{V}(J)$ la variété des zéros de J dans V^*. On désigne par $\tilde{J}$ l'annulateur dans $S(V)$ du complémentaire dans $\mathscr{V}(J)$ de la réunion des orbites de dimension maximale de $\mathscr{V}(J)$. Soit $\Delta_\mathfrak{g}$ l'idéal à gauche de l'algèbre de Weyl $A(V)$ dont l'image par l'adjonction formelle: $a \mapsto a^{\top}$, est l'idéal à droite engendré par les champs de vecteurs: $v \mapsto \xi . v$, où ξ appartient à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Sous les hypothèses suivantes:

(1) k est le corps des nombres complexes,
(2) l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est algébrique et unimodulaire,
(3) la variété $\mathscr{V}(J)$ est lisse,
(4) les G-orbites dans $\mathscr{V}(J)$ portent une mesure invariante,
(5) les G-orbites dans $\mathscr{V}(J)$ sont de même dimension,

le lemme ci-dessus dit que l'annulateur dans $A(V)$ des mesures portées par les G-orbites contenues dans $\mathscr{V}(J)$, est l'idéal à gauche $A(V)J + \Delta_\mathfrak{g}$. Dans ce mémoire, on généralise ce lemme dans le cas où les hypothèses (2), (3), (5) ne sont plus satisfaites. Dans le cas où $\mathfrak{g}$ est algébrique, l'hypothèse (1) n'est pas nécessiare. Pour cela on reformule l'hypothèse (4). Soit $\tilde{\mathfrak{g}}$ l'enveloppe algébrique de $\mathfrak{g}$ dans

$\mathfrak{gl}(V)$. On dira que l'idéal J possède la propriété (**P**) si pour tout x dans un ouvert de Zariski non vide de $\mathscr{V}(J)$, on a:

$$\mathrm{tr}[\mathrm{ad}(\xi;\, \mathfrak{g},\, \mathfrak{g}(x))] = 0 \text{ pour tout } \xi \text{ dans } \tilde{\mathfrak{g}}(x).$$

Dans le cas où k est le corps des nombres complexes, la propriété (**P**) dit que sur toute G-orbite de dimension maximale, de $\mathscr{V}(J)$, existe une mesure invariante. Soit U un ouvert de Zariski de $\mathscr{V}(J)$ dans lequel ces orbites sont fermées. Chacune d'elles est alors le support d'une distribution $\mathfrak{g}$-invariante sur U. On note L_J l'ensemble des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux sur V qui annulent chacune de ces distributions.

Lorsque $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie algébrique, c'est à dire: $\mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{g}}$, on a le théorème:

Soit J un idéal premier $\mathfrak{g}$-invariant de l'algèbre symétrique $S(V)$, possèdant la propriété (**P**). *Soit p un élément de $\tilde{J}$ qui n'appartient pas à J. On désigne par L_p l'ensemble des éléments a de $A(V)$ pour lesquels $p^n a$ appartient à l'idéal à gauche $A(V)J + \Delta_{\mathfrak{g}}$, dès que n est un entier assez grand. Alors L_p est un idéal à gauche de $A(V)$ qui ne dépend pas de l'élément p de $\tilde{J}$. On désigne par L_J cet idéal à gauche. En outre, pour toute famille $\{J_i; i \in I\}$ d'idéaux premiers, $\mathfrak{g}$-invariants, possèdant la propriété* (**P**), *ne contenant pas $\tilde{J}$, d'intersection J, l'intersection de la famille $\{L_{J_i} i \in I\}$ est égale à L_J. Lorsque J est un idéal rationnel, le $A(V)$-module $A(V)/L_J$ est holonôme. Lorsque J est maximal, le $A(V)$-module $A(V)/L_J$ est simple.*

Ce théorème correspond aux théorèmes 4.3, 4.5, à la proposition 5.2 et au corollaire 5.3. En remarquant que les propriétés du théorème sont stables par extension des scalaires, il suffit de le démontrer lorsque k est le corps des nombres complexes. Dans ce cas, L_J est l'idéal défini ci-dessus. Lorsque l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ n'est pas une algèbre de Lie algébrique d'endomorphismes, ce dernier résultat reste encore vrai si G est fermé dans $Gl(V)$ et si les orbites d'un ouvert de Zariski de $\mathscr{V}(J)$ y sont fermées. On démontre l'assertion ci-dessus en considérant les zéros communs aux symboles principaux des éléments de $A(V)$ qui annulent ces distributions. En remarquant que l'idéal L_J est contenu dans l'annulateur des distributions β_Ω, on conclut en raisonnant par récurrence sur l'ordre des éléments de $A(V)$.

On rappelle que J est dit *rationnel* lorsque l'anneau des invariants de $S(V)/J$ est isomorphe à k. Dans le cas où J est un idéal rationnel, le cycle caractéristique du $A(V)$-module $A(V)/L_J$ a un support de dimension égale à celle de V. Dans le cas où J est maximal, celui-ci est irréducible et sa multiplicité égale à 1. La simplicité en résulte aussitôt. En général, la transformée de Fourier de ce $A(V)$-module est un $A(V)$-module holonôme simple dont la variété caractéristique n'est pas irréductible.

La rédaction de ce mèmoire est motivée par les conjectures de ([3], Section 6). D'après la formule des caractères pour les groupes de Lie résolubles, on est amené à résoudre le problème suivant: soit k le corps des nombres réels. On suppose que V est égal au dual de $\mathfrak{g}$ et que les G-orbites de dimension maximale qui sont contenues dans $\mathscr{V}(J)$ sont le support de mesures G-invariantes tempérées. Quel est alors l'annulateur de leurs transformées de Fourier dans l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients analytiques au voisinage de 0, dans $\mathfrak{g}$? Les résultats de ce mémoire nous donnent les opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux sur $\mathfrak{g}$ qui annulent ces distributions.

Ce travail se divise en 4 parties:

(0) Notations générales.
(1) Algèbre de Weyl.
(2) Quelques lemmes sur les actions linéaires.
(3) Variétés caractéristiques.
(4) Sur les opérateurs différentiels.
(5) Modules holonômes.

Chacune de ces sections est divisée en sous-sections. Les notations utilisées dans chacune d'elles sont précisées au début et font référence aux précédentes. Les notations précisées au début d'une section sont utilisées dans les sous-sections qu'elle contient, sans y faire référence.

Je remercie M. Duflo pour une remarque utile sur la cinquième partie.

0. Notations générales

Dans ce mémoire, k désigne un corps de caractéristique nulle. Dans ce qui suit on rappelle quelques notations qui seront utilisées tout au long de cet article sans y faire référence.

0.1. Si X est une variété analytique complexe, $\mathcal{O}_X$ désigne son faisceau structural. Lorsque X est lisse, on note $\mathscr{D}_X$ le faisceau des germes d'opérateurs différentiels sur X. Si a est une section locale de $\mathscr{D}_X$, on désigne par $\sigma(a)$ le symbole principal de a. Pour tout entier positif p, on note $\mathscr{D}_{X,p}$ le faisceau des germes d'opérateurs différentiels, d'ordre au plus p. Pour tout entier p, $\mathscr{D}_{X,p}$ est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent. Pour toute partie A de X, on note $\Gamma(A, \mathscr{D}_X)_p$ l'espace des sections de $\mathscr{D}_{X,p}$ au dessus de A.

0.2. Si X est une variété algébrique sur le corps k, on note $\mathscr{A}_X$ son faisceau structural. Lorsque X est lisse, on désigne par $\mathscr{D}_X^{(a)}$ le faisceau des germes d'opérateurs différentiels, à coefficients régulirers sur X.

0.3. Soit X une variété analytique. Si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est un système de coordonnées au voisinage d'un point de X, on désigne par $\partial_1, \ldots, \partial_n$ les champs de vecteurs sur ce voisinage qui sont définis par les relations suivantes:

$$\langle \partial_i, \mathrm{d}x_j \rangle = \delta_{i,j} \quad (i, j = 1, \ldots, n),$$

où $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker.

0.4. Si X est une variété algébrique sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, $\mathcal{O}_X$ désigne le faisceau structural de la variété analytique sous-jacente à X. En outre, lorsque X est lisse, on note $\mathscr{D}_X$ le faisceau des germes d'opérateurs différentiels sur X, à coefficients analytiques.

0.5. Si X est une variété algébrique définie sur le corps k, pour toute extension K de k, $X(K)$ désigne l'ensemble des K-points de X.

0.6. Si G est un groupe qui opère sur l'ensemble E, pour tout x dans E, $G(x)$ désigne le stabilisateur de x dans G et $G.x$ désigne l'orbite de x sous l'action de G. Lorsque G est un groupe de Lie d'algebre de Lie $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}(x)$ désigne l'algèbre de Lie de $G(x)$.

0.7. Soient V un espace vectoriel sur le corps k et X un endomorphisme de V. Soient W et W' deux sous-espaces vectoriels de V, invariants par X. On suppose que W contient W'. On note $A(X; W)$ la restriction de X à W et $A(X; W, W')$ l'endomorphisme de W/W' que définit $A(X; W)$ par passage au quotient. En outre, s'il existe sur V une structure d'algèbre de Lie pour laquelle X est une dérivation intérieure définie par l'élément x de V, on note $\mathrm{ad}(x; W)$ et $\mathrm{ad}(x; W, W')$ au lieu de $A(\mathrm{ad}\, x; W)$ et $A(\mathrm{ad}\, x; W, W')$. De même, on note $\mathrm{Ad}(g; W)$ et $\mathrm{Ad}(g; W, W')$ au lieu de $A(\mathrm{Ad}\, g; W)$ et $A(\mathrm{Ad}\, g; W, W')$ pour tout élément g d'un groupe de Lie d'algèbre de Lie V.

0.8. Soit V un espace vectoriel complexe. On note $\mathcal{O}_V$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur V. On désigne par $\tilde{\mathcal{O}}_V$ le faisceau $\mathcal{O}_V \otimes_{\mathbb{C}} S(V)$.

0.9. Soit X une variété C^∞. Pour tout ouvert U de X, on note $\mathscr{D}(U)$ l'espace des fonctions C^∞ sur U dont le support est compact.

1. Algèbre de Weyl

On rappelle dans cette section les notations utilisées par J. Dixmier dans [3].

1.1. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur k. On note V^* son dual et $S(V)$ l'algèbre symétrique de V. Sur la somme directe $V \oplus V^*$, il existe une forme bilinéaire alternée $\langle .,. \rangle$ et une seule pour laquelle V et V^* sont totalement isotropes et qui satisfait l'égalité:

$$\langle (x, 0), (0, x') \rangle = \langle x, x' \rangle \text{ pour } x \text{ dans } V \text{ et } x' \text{ dans } V^*.$$

Cette forme est non dégénérée. On notera $A(V)$ l'algèbre de Weyl correspondante. Elle est engendrée comme algèbre par $V \cup V^*$. Elle contient les algèbres $S(V)$ et $S(V^*)$ comme sous-algèbres. Pour tout (v, v') dans $V \times V^*$, on a dans $A(V)$:

$$[v, v'] = \langle v, v' \rangle . 1.$$

L'algèbre $A(V)$ s'identifie à l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux sur V. Dans cette identification, un élément v de V correspond à la dérivation définie par v, et un élément v' de V^* correspond à l'opérateur de multiplication par la fonction v'. Un élément de $A(V)$ qui appartient au sous-espace vectoriel $S(V^*) . V$ correspond à un champ de vecteurs polynomial sur V.

Conformément à la notation (0.1), pour tout entier non négatif ν, $A(V)_\nu$ désigne le sous-espace des opérateurs différentiels d'ordre au plus ν de l'algèbre $A(V)$.

1.2. Il existe un automorphisme $a \mapsto a^\perp$ et un seul de $A(V)$ tel que $v^\perp = -v$ pour tout v dans V et $(v')^\perp = -v'$ pour tout v' dans V^*. De même, il existe un antiautomorphisme $a \mapsto a^\top$ et un seul de $A(V)$ tel que $v^\top = -v$ pour tout v dans V et $(v')^\top = v'$ pour tout v' dans V^*. Lorsque $k = \mathbb{R}$, pour toute distribution μ sur V, pour tout a dans $A(V)$ et pour toute fonction C^∞, à support compact, ϕ sur V, on a:

$$\mu[a^\top(\phi)] = [a(\mu)](\phi).$$

1.3. Il existe un isomorphisme et un seul de $A(V)$ sur $A(V^*)$ qui transforme v en v pour tout v dans V et v' en $-v'$ pour tout v' dans V^*, d'où un isomorphisme de $A(V)$ sur l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux sur V^*. Dans cet isomorphisme, un élément v de V correspond à l'opérateur de multiplication par la fonction v sur V^*, et un élément v' de V^* correspond à la dérivation définie par $-v'$.

1.4. Soit L un idéal à gauche de $A(V)$. Pour p dans $S(V)$ ou $S(V^*)$, on désigne par L_p l'ensemble des éléments a de $A(V)$ qui satisfont la condition suivante: il existe un entier naturel n pour lequel $p^n a$ appartient à L.

LEMME. *Soit p dans $S(V)$ ou dans $S(V^*)$. Alors L_p est un idéal à gauche de $A(V)$.*

Soit a dans L_p. Soient v dans V et v' dans V^*. Soit n un entier positif pour lequel L contient $p^n a$. On suppose que p appartient à $S(V)$. Alors $p^n va$ appartient à L. On a:

$$p^{n+1} v' = v' p^{n+1} + (n+1)[p, v'] p^n;$$

donc L contient $p^{n+1} v' a$. Par suite, L_p est un idéal à gauche.

2. Quelques lemmes sur les actions linéaires

Les résultats de cette section sont préliminaires à ceux de 4. On n'y utilisera que ceux de 2.2 et 2.4. La sous-section 2.1 est un préliminaire à la sous-section 2.2. La sous-section 2.3 complète la sous-section 2.2. Le résultat qu'elle contient sera utilisé dans un mémoire ultérieur sur la résolution du problème mentionné à la fin de l'introduction.

2.1. Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie. On note $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$.

LEMME. *Soit* $\mathfrak{u}$ *une sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{g}$ *dont les éléments sont nilpotents. Soit H un sous-groupe fermé connexe de $GL(V)$. On note* $\mathfrak{h}$ *son algèbre de Lie. On suppose que* $[\mathfrak{u}, \mathfrak{h}]$ *est contenu dans* $\mathfrak{h}$. *Soit U le sous-groupe analytique de $GL(V)$ d'algèbre de Lie* $\mathfrak{u}$. *Alors UH est un sous-groupe fermé de $GL(V)$.*

Dans ce qui suit, une sous-algèbre de Lie parabolique de $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lie stricte de $\mathfrak{h}$, dont la complexifiée contient une sous-algèbre de Borel de la complexifiée de $\mathfrak{h}$. De même, un sous-groupe parabolique de H est le normalisateur dans H d'une sous-algèbre de Lie parabolique de $\mathfrak{h}$. Soit R le radical de H. Un sous-groupe parabolique de H est alors l'image réciproque d'un sous-groupe parabolique de H/R. Soit L une composante de Lévi de l'adhérence de Zariski de H dans $GL(V)$. Celle-ci existe d'après [7]. L'algèbre de Lie dérivée de l'algèbre de Lie de L étant un supplémentaire de $\mathfrak{r}$ dans $\mathfrak{h}$, le groupe L contient un groupe semi-simple connexe S qui est un revêtement de H/R; or le centre de S est fini; donc le centre de H/R l'est aussi. Par suite, tout sous-groupe parabolique de H/R n'a qu'un nombre fini de composantes connexes. En outre, tout sous-groupe parabolique de H/R contenant un sous-groupe parabolique minimal, la décomposition d'Iwasawa de H/R prouve que pour tout sous-groupe parabolique P de H et pour tout sous-groupe compact maximal K de H, on a les égalités:

$$H = KP = PK.$$

Soit $\mathfrak{r}$ le radical de $\mathfrak{h}$. Par hypothèse, il existe une sous-algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{u}'$ de l'algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{h}/\mathfrak{r}$ qui satisfait la condition suivante: pour tout x dans $\mathfrak{u}$, il existe y dans $\mathfrak{u}'$ pour lequel on a la relation:

$$\mathrm{ad}(x; \mathfrak{h},\mathfrak{r}) = \mathrm{ad}\, y.$$

D'après [2] (Ch. VIII, Section 10, Corollaire 2), $\mathfrak{u}'$ est contenu dans une sous-algèbre de Lie parabolique de $\mathfrak{h}/\mathfrak{r}$. Soit $\mathfrak{p}'$ une telle sous-algèbre de Lie. On désigne par $\mathfrak{p}$ l'image réciproque de $\mathfrak{p}'$ par l'application canonique de $\mathfrak{h}$ sur $\mathfrak{h}/\mathfrak{r}$.

La sous-algèbre de Lie $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{h}$ est alors une sous-algèbre de Lie parabolique de $\mathfrak{h}$, invariante par $\mathfrak{u}$. On désigne par P le normalisateur de $\mathfrak{p}$ dans H. Soit K un sous-groupe compact maximal de H. D'après ce qui précède, H est égal à PK; or P n'a qu'un nombre fini de composantes connexes; donc en raisonnant par récurrence sur la dimension de H, on voit qu'il suffit de démontrer le lemme dans le cas où $\mathfrak{h}$ est une algèbre de Lie résoluble.

Dans ce qui suit, on suppose qu'il en est ainsi. On note H' l'adhérence de UH dans $GL(V)$. Soit H_u le sous-groupe analytique de H dont l'algèbre de Lie est l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathfrak{h}$. Alors UH_u est un sous-groupe fermé, connexe et simplement connexe de $GL(V)$; donc UH_u/H_u est un sous-groupe vectoriel du groupe de Lie connexe commutatif H'/H_u. Par suite, H'/H_u est le produit direct d'un groupe compact et d'un groupe vectoriel contenant UH_u/H_u. Le groupe H/H_u étant fermé dans H'/H_u, UH/H_u est fermé dans H'/H_u. Les groupes UH et H' sont donc égaux.

2.2. Soit V un espace vectoriel complexe de dimension finie. Soit Γ un sous-groupe algébrique de $GL(V)$. On note G un sous-groupe fermé connexe et complexe de Γ qui est dense dans Γ pour la topologie de Zariski.

LEMME. *Soit W une partie G-invariante de V, fermée et irréductible pour la topologie de Zariski. Il existe un ouvert de Zariski, non vide, W' de W et un sous-groupe fermé G_1 de Γ, contenant G et n'ayant qu'un nombre fini de composantes connexes, qui satisfont les conditions suivantes:*

(1) *pour tout x dans W', l'orbite $G_1.x$ est fermée dans W' et égale à l'adhérence de $G.x$ dans W'.*
(2) *pour tout x dans W' et pour tout sous-groupe fermé H de Γ, contenant G_1 et n'ayant qu'un nombre fini de composantes connexes, l'orbite $H.x$ est fermée dans W'.*

Puisque W est G-invariant et fermé dans V pour la topologie de Zariski, W est Γ-invariant. Soit W_1 la réunion des Γ-orbites de dimension maximale dans W. D'après [8] (Théorème 9.3.1), W contient un ouvert de Zariski non vide, Γ-invariant, W_2, qui satisfait la propriéte suivante: pour tout (x, y) dans $W_2 \times W_2$, les composantes de Lévi des groupes $\Gamma(x)$ et $\Gamma(y)$ sont conjuguées entre elles sous l'action de Γ. On note W' l'intersection de W_1 et de W_2. Soient x un point de W' et L_x une composante de Lévi de $\Gamma(x)$. On désigne par G_1 l'adhérence dans Γ de L_xG. Puisque G est complexe et dense dans Γ pour la topologie de Zariski, il contient le sous-groupe dérivé de Γ; donc G_1 est un sous-groupe invariant de Γ. L'ouvert de Zariski W' étant contenu dans W_2, le groupe G_1 ne dépend pas du point x de W'. Puisque W' est contenu dans W_1, $\Gamma.x$ est fermé dans W'. L'application: $g \mapsto g.x$ de Γ dans $\Gamma.x$ définit par passage au quotient un homéomorphisme de $\Gamma/\Gamma(x)$ sur $\Gamma.x$. Soit $L_{x,0}$ la composante neutre de L_x. On désigne par $G_{1,0}$ l'adhérence dans Γ de $L_{x,0}G$. Puisque L_x n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, G_1 n'a qu'un nombre fini de composantes connexes et sa composante neutre est égale à $G_{1,0}$. Il nous reste à prouver que $\Gamma(x)H$ est fermé dans Γ, pour tout sous-groupe fermé H de Γ qui contient G_1 et qui n'a qu'un nombre fini de composantes connexes. Soit U_x le radical unipotent de $\Gamma(x)$. D'après 2.1, U_xH_0 est un sous-groupe fermé de Γ; donc U_xH est fermé dans Γ. Puisque $\Gamma(x)$ est égal à U_xL_x, U_xH contient $\Gamma(x)$; donc les groupes U_xH et $\Gamma(x)H$ coïncident.

2.3. On conserve les notations de 2.2. On suppose que V est le complexifié de l'espace vectoriel réel $V_{\mathbb{R}}$, que G contient un sous-groupe de Lie réel, connexe, $G_{\mathbb{R}}$ qui laisse stable $V_{\mathbb{R}}$ et dont l'algèbre de Lie est une forme réelle de $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{g}_0$ cette algèbre de Lie. Puisque $\mathfrak{g}_0$ est une forme réelle de $\mathfrak{g}$, $G_{\mathbb{R}}$ est dense dans Γ pour la topologie de Zariski. Par suite, la forme réelle $V_{\mathbb{R}}$ de V définit sur Γ une structure de groupe algébrique défini sur $\mathbb{R}$. On note $\Gamma(\mathbb{R})$ l'ensemble des points réels de Γ. On suppose que l'intersection $W_{\mathbb{R}}$ de W et de $V_{\mathbb{R}}$ est dense dans W pour la topologie de Zariski. On désigne par $W'_{\mathbb{R}}$ l'intersection de W' et de $W_{\mathbb{R}}$.

LEMME. *On peut choisir le sous-groupe G_1 du lemme 2.2 de façon que l'intersection de $G_{\mathbb{R}}$ et de G_1 contienne un sous-groupe fermé connexe H qui satisfait les conditions suivantes:*

(1) *pour tout x dans $W'_{\mathbb{R}}$, $H.x$ est l'adhérence de $G_{\mathbb{R}}.$ dans $W'_{\mathbb{R}}$.*
(2) *l'algèbre de Lie de H est une forme réelle de l'algèbre de Lie de G_1.*

Soit x un point de $W'_{\mathbb{R}}$. Soit L une composante de Lévi du groupe $\Gamma(\mathbb{R})(x)$. On désigne par L_c une composante de Lévi de $\Gamma(x)$ qui contient L. Puisque $\Gamma(\mathbb{R})(x)$ est le produit semi-direct de L et de son radical unipotent, L est l'intersection de L_c et de $\Gamma(\mathbb{R})$. En outre, l'algèbre de Lie de L_c est la compléxifiée de l'algèbre de Lie de L. Le groupe G_1 est défini comme étant l'adhérence dans Γ de L_cG. Soit H la composante neutre de l'adhérence de $LG_{\mathbb{R}}$ dans Γ. On désigne par $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{h}$ les algèbres de Lie des groupes G_1 et H. Puisque l'algèbre de Lie de L_cG est la complexifiée de l'algèbre de Lie de $LG_{\mathbb{R}}$, $LG_{\mathbb{R}}$ contient la composante neutre de l'ensemble des points réels de L_cG; or l'application exponentielle du groupe G_1 est un difféomorphisme au voisinage de 0; donc H est la composante neutre de l'ensemble des points réels de G_1 et $\mathfrak{g}_1$ est la complexifiée de $\mathfrak{h}$.

Soit y un point de $W'_{\mathbb{R}}$. Puisque y appartient à W', les composantes de Lévi des groupes $G_1(x)$ et $G_1(y)$ sont conjuguées sous l'action de Γ; donc $G_1(y)$ contient une composante de Lévi du groupe $\Gamma(y)$. Par suite, $\mathfrak{g}_1(y)$ est une sous-algèbre de Lie algébrique de $\mathfrak{gl}(V)$. D'après ce qui précède, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1(y)$ est la complexifiée de $\mathfrak{h}(y)$; donc $\mathfrak{h}(y)$ est une sous-algèbre de Lie algébrique de $\mathfrak{gl}(V_{\mathbb{R}})$. Soit $\mathfrak{l}_y$ une sous-algèbre de Lévi de $\mathfrak{h}(y)$. On note $\mathfrak{l}$ l'algèbre de Lie de L. Soient $\mathfrak{l}_c$ et $\mathfrak{l}_{y,c}$ les complexifiées des algèbres de Lie $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{l}_y$. D'après ce qui précède, $\mathfrak{l}_c$ et $\mathfrak{l}_{y,}$ sont conjuguées sous l'action adjointe de Γ; or G étant dense dans Γ pour la topologie de Zariski, $\mathfrak{g}$ contient l'algèbre de Lie dérivée de l'algèbre de Lie de Γ; donc les algèbres de Lie $\mathfrak{l}_c+\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{l}_{y,c}+\mathfrak{g}$ sont égales. Par suite, les algèbres de Lie

$\mathfrak{l}+\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{l}_y+\mathfrak{g}_0$ le sont aussi. Puisque $G_1(y)$ contient un sous-groupe de Lévi de $\Gamma(y)$, $\mathfrak{l}_y$ est une sous-algèbre de Lévi de $\Gamma(\mathbb{R})(y)$. Soit U_y le radical unipotent de $\Gamma(\mathbb{R})(y)$. Le groupe $U_yH(y)$ est alors un sous-groupe d'indice fini de $\Gamma(\mathbb{R})(y)$. Puisque $\mathfrak{g}$ contient l'algèbre de Lie dérivée de l'algèbre de Lie de Γ, $\mathfrak{g}_0$ contient l'algèbre de Lie dérivée de l'algèbre de Lie de $\Gamma(\mathbb{R})$; donc H est un sous-groupe invariant de $\Gamma(\mathbb{R})$. Il résulte alors du lemme 2.1 et de ce qui précède que le sous-groupe $\Gamma(\mathbb{R})(y)H$ est fermé dans $\Gamma(\mathbb{R})$. Par suite, l'orbite $H.y$ est fermée dans $\Gamma.y$. En outre, les algèbres de Lie $\mathfrak{l}+\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{l}_y+\mathfrak{g}_0$ étant égales, $G_{\mathbb{R}}.y$ est partout dense dans $H.y$. La condition (1) du lemme résulte alors de ce que $\Gamma.y$ est fermé dans W'.

2.4. Soit V un espace vectoriel complexe de dimension finie. Soit Γ un sous-groupe algébrique de $GL(V)$.

LEMME. *Soit H un sous-groupe fermé connexe, complexe de Γ qui est dense dans Γ pour la topologie de Zariski. Soit Ω une H-orbite dans V.*

(i) *On note $\tilde{\Omega}$ l'adhérence de Ω dans la Γ-orbite qui la contient. Alors il existe un sous-groupe fermé connexe, complexe $\tilde{H}$ de Γ pour lequel $\tilde{\Omega}$ est une orbite de $\tilde{H}$.*
(ii) *On suppose qu'il existe sur la Γ-orbite contenant Ω une forme volume, Γ-invariante. Alors il existe sur $\tilde{\Omega}$ une forme volume, $\tilde{H}$-invariante.*

(i) Soit x un point de Ω. L'image réciproque de Ω par l'application: $\gamma \mapsto \gamma.x$, de Γ dans la Γ-orbite contenant Ω, est le sous-groupe $\Gamma(x)H$. Soit $\tilde{H}$ l'adhérence dans Γ du groupe $\Gamma(x)H$. Puisque l'application: $\gamma \mapsto \gamma.x$, définit par passage au quotient un homéomorphisme de $\Gamma/\Gamma(x)$ sur $\Gamma.x$, la $\tilde{H}$-orbite contenant Ω est $\tilde{\Omega}$.

(ii) Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de Γ. Puisqu'il existe sur $\Gamma.x$ une forme volume Γ-invariante, pour tout γ dans $\Gamma(x)$, $|\det \mathrm{Ad}[\gamma; \mathfrak{g}, \mathfrak{g}(x)]|$ est égal à 1; or l'algèbre de Lie de H contient l'algèbre dérivée de l'algèbre de Lie de Γ car H est dense dans Γ pour la topologie de Zariski; donc il existe sur $\tilde{\Omega}$ une forme volume, $\tilde{H}$-invariante.

2.5. Dans cette sous-section, le corps k n'est pas nécessairement algébriquement clos. Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie des endomorphismes de V. On note $\tilde{\mathfrak{g}}$ l'enveloppe algébrique de $\mathfrak{g}$. On utilise l'action de $\mathfrak{g}$ dans V, contragrédiente à son action naturelle dans V. Si J est un idéal premier $\mathfrak{g}$-invariant de $S(V)$, on note $\mathscr{V}(J)$ la variété des zéros de J dans V^*. On dira que *l'idéal premier J possède la propriété* **(P)**, *relativement à* $\mathfrak{g}$, si *l'ensemble des points x de $\mathscr{V}(J)$ qui satisfont la condition suivante:*

$$\mathrm{tr}[\mathrm{ad}(\xi;\, \mathfrak{g},\, \mathfrak{g}(x))] = 0 \text{ pour tout } \xi \text{ dans } \tilde{\mathfrak{g}}(x),$$

est partout dense dans $\mathscr{V}(J)$ pour la topologie de Zariski.

LEMME. *Soit J un idéal premier* $\mathfrak{g}$*-invariant de* $S(V)$. *On suppose qu'il posède la propriété* **(P)** *relativement à* $\mathfrak{g}$. *Soit x un point de* $\mathscr{V}(J)$ *pour lequel* $\tilde{\mathfrak{g}}(x)$ *est de dimension minimale. Alors on a:*

$$\mathrm{tr}[\mathrm{ad}(\xi;\ \mathfrak{g},\ \mathfrak{g}(x))] = 0 \textit{ pour tout } \xi \textit{ dans } \tilde{\mathfrak{g}}(x).$$

Puisque $\tilde{\mathfrak{g}}$ est l'enveloppe algébrique de $\mathfrak{g}$, ces deux algèbres de Lie ont même algèbre dérivée; donc pour tout x dans V^* et pour tout ξ dans $\tilde{\mathfrak{g}}(x)$, on a:

$$\mathrm{tr}[\mathrm{ad}(\xi;\ \mathfrak{g}, \mathfrak{g}(x))] = \mathrm{tr}[\mathrm{ad}(\xi;\ \tilde{\mathfrak{g}},\ \tilde{\mathfrak{g}}(u))]$$

Soit d la dimension de $\tilde{\mathfrak{g}}(x)$. On considère la grassmanienne $Gr_d(\tilde{\mathfrak{g}})$. Soit X l'ensemble des éléments $(x, \mathfrak{p}, \xi)$ de $\mathscr{V}(J) \times Gr_d(\tilde{\mathfrak{g}}) \times \tilde{\mathfrak{g}}$ qui satisfont la condition suivante: $\mathfrak{p}$ est une sous-algèbre de Lie de $\tilde{\mathfrak{g}}(x)$ qui contient ξ. Soit W l'ensemble des x de $\mathscr{V}(J)$ pour lesquels $\tilde{\mathfrak{g}}(x)$ est de dimension d. Soit W' l'ensemble des points x de $\mathscr{V}(J)$ qui satisfont la condition:

$$\mathrm{tr}[\mathrm{ad}(\xi;\ \mathfrak{g},\ \mathfrak{g}(x))] = 0 \text{ pour tout } \xi \text{ dans } \tilde{\mathfrak{g}}(x).$$

Pour tout x dans W, $(x, \mathfrak{p}, \xi)$ appartient à X si et seulement si $\mathfrak{p}$ est le stabilisateur de x dans $\tilde{\mathfrak{g}}$; donc l'intersection de X et de $W \times Gr_d(\tilde{\mathfrak{g}}) \times \tilde{\mathfrak{g}}$ est irréductible pour la topologie de Zariski. Soit X' l'adhérence de cette intersection pour la topologie de Zariski. Pour tout $(x, \mathfrak{p}, \xi)$ dans X', $(x, \mathfrak{p}, 0)$ appartient à X'; or $Gr_d(\tilde{\mathfrak{g}})$ est une variété algébrique complète; donc l'image de X' par la projection:

$$(x,\ \mathfrak{p},\ \xi) \mapsto x,$$

est égale à $\mathscr{V}(J)$. Soit X'' l'image réciproque de W' par la restriction à X' de la projection:

$$(x,\ \mathfrak{p},\ \xi) \mapsto x.$$

Par hypothèse W' est partout dense dans $\mathscr{V}(J)$ pour la topologie de Zariski; donc X'' est partout dense dans X' pour la topologie de Zariski. En outre, pour tout $(x, \mathfrak{p}, \xi)$ dans X'', on a:

$$\mathrm{tr}[\mathrm{ad}(\xi;\ \tilde{\mathfrak{g}},\ \mathfrak{p})] = 0;$$

donc pour tout x dans W, on a:

$$\mathrm{tr}[\mathrm{ad}(\xi;\ \mathfrak{g},\ \mathfrak{g}(x))] = 0 \text{ pour tout } \xi \text{ dans } \tilde{\mathfrak{g}}(x).$$

3. Variétés caractéristiques

On suppose le corps k algébriquement clos. Soit V un k-espace vecoriel de dimension finie. On note Γ un sous-groupe algébrique de $GL(V)$ et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie de Γ. Soit W une partie Γ-invariante de V qui est fermée et irréductible pour la topologie de Zariski. Il est bien connu que la variété caractéristique d'un $A(V)$-module joue un rôle fondamental dans l'étude de celui-ci. On construit en 3.1 un sous-ensemble de $V \times V^*$ qui contient la variété caractéristique des $A(V)$-modules étudiés en 4 et 5. On calcule l'annulateur de ce sous-ensemble dans $\tilde{\mathscr{A}}_V$ en 3.2. La sous-section 3.3 donne les sections globales de ce faisceau.

3.1. L'algèbre $S(V) \otimes S(V^*)$ s'identifie à l'algèbre des fonctions polynomiales sur $V \times V^*$. Pour x dans $\mathfrak{h}$, on note $\sigma(x)$ la fonction polynomiale sur $V \times V^*$ définie par:

$$\sigma(x)(v, v') = \langle v', x.v \rangle.$$

Soit $W_{\mathfrak{h}}$ l'ensemble des points (v, v') de $W \times V^*$ qui satisfont la condition suivante:

$$\sigma(x)(v, v') = 0 \text{ pour tout } x \text{ dans } \mathfrak{h}.$$

LEMME. *Soit W' un ouvert de Zariski de W sur lequel la fonction:*

$$x \longmapsto \dim \mathfrak{h}(x)$$

est constante. On note $W'_{\mathfrak{h}}$ l'intersection de $W_{\mathfrak{h}}$ et de $W' \times V^*$. Alors l'adhérence de Zariski de $W'_{\mathfrak{h}}$ est une composante irréductible de $W_{\mathfrak{h}}$, pour la topologie de Zariski.

On la notera $\tilde{W}_{\mathfrak{h}}$.

Soit d la différence de la dimension de V et de la codimension de $\mathfrak{h}(x)$ dans $\mathfrak{h}$, pour tout x dans W'. La dimension de $W'_{\mathfrak{h}}$ est alors égale à la somme de d et de la dimension de W. Soit Z une composante irréductible de l'adhérence de Zariski de $W'_{\mathfrak{h}}$. L'ensemble des points v de W pour lesquels l'intersection de $\{v\} \times V^*$ et de Z est de dimension d, contient alors un ouvert de Zariski, non vide, de W; or pour v dans W', l'intersection de $W'_{\mathfrak{h}}$ et de $\{v\} \times V^*$ est le produit cartésien de $\{v\}$ et d'un sous-espace de dimension d; donc pour tout v dans un ouvert de Zariski non vide de W', l'intersection de Z et de $\{v\} \times V^*$ est le produit cartésien de $\{v\}$ et d'un sous-espace de dimension d de V^*. On considère la Grassmannienne $Gr_d(V^*)$. Soit X l'ensemble des points $(v, \mathfrak{p})$ de $W \times Gr_d(V^*)$ pour lesquels $\{v\} \times \mathfrak{p}$

est contenu dans Z. La partie X de $W \times Gr_d(V^*)$ est fermée pour la topologie de Zariski; donc son image par la projection: $(v, \mathfrak{p}) \mapsto v$ est fermée pour la topologie de Zariski. D'après ce qui précède, elle contient un ouvert de Zariski, non vide, de W'; donc elle est égale à W. Par suite, Z contient $W'_{\mathfrak{h}}$. Il en résulte que l'adhérence de Zariski de $W'_{\mathfrak{h}}$ est irréductible.

3.2. On utilise les notations de 3.1 avec les mêmes hypothèses. On désigne par $\tilde{\mathscr{A}}_V$ le faisceau d'algèbres sur V:

$$\mathscr{A}_V \otimes_{\mathbb{C}} S(V).$$

On identifie $\mathscr{A}_V$ à un sous-faisceau de $\tilde{\mathscr{A}}_V$, au moyen du plongement: $\phi \mapsto \phi \otimes 1$. Soit $\{v_1, \ldots, v_n\}$ une base de V.

LEMME. *Soit J l'annulateur de W dans $S(V^*)$. Soit $\mathscr{L}$ l'annulateur de $W_{\mathfrak{h}}$ dans $\tilde{\mathscr{A}}_V$. Alors la restriction de $\mathscr{L}$ au complémentaire de $W \backslash W'$ coïncide avec le faisceau d'idéaux engendré par J et $\sigma(\mathfrak{h})$.*

Soient U un ouvert de Zariski de V, contenu dans le complémentaire de $W \backslash W'$ et a une section de $\mathscr{L}$ au dessus de U. Il suffit de prouver que la restriction de a à tout ouvert de Zariski d'un recouvrement de U est section locale du faisceau ci-dessus. Puisque $W_{\mathfrak{h}}$ est contenu dans $W \times V^*$, la restriction de $\mathscr{L}$ au complémentaire de W dans V, est égale à la restriction de $\tilde{\mathscr{A}}_V$ à cet ouvert. Soit x un point de W'. Par hypothèse, il existe un ouvert affine T de W, contenant x, une famille $\{\xi_1, \ldots, \xi_r\}$ de l'algèbre de Lie de $\mathfrak{h}$ et une partie I de $\{1, \ldots, n\}$ qui satisfont la condition suivante: pour tout y dans T, la famille $\{\xi_1 . y, \ldots, \xi_r . y\}$ est une base d'un supplémentaire dans V de l'espace engendré par la famille $\{v_i; i \in I\}$. Soit M l'idéal à gauche de $\tilde{\mathscr{A}}_V(T)$ engendré par la famille $\{\sigma(\xi_1), \ldots, \sigma(\xi_r)\}$. Soit B la sous-algèbre de $\tilde{\mathscr{A}}_V(T)$ engendrée par la famille $\{v_i; i \in I\}$ et l'algèbre des fonctions régulières sur T. D'après le choix des familles $\{\xi_1, \ldots, \xi_r\}$ et $\{v_i; i \in I\}$, on a la décomposition:

$$\tilde{\mathscr{A}}_V(T) = M \oplus B.$$

En outre, pour tout élément non nul b de B, la fonction: $v' \mapsto b(y, v')$ n'est pas identiquement nulle sur l'intersection de $W_{\mathfrak{h}}$ et de $\{y\} \times V^*$, pour tout y dans un ouvert de Zariski non vide de T; donc M est l'ensemble des sections de $\mathscr{L}$ au dessus de T. Par suite, il existe un ouvert de Zariski U' de V, contenant x et contenu dans U, une section b, au dessus de U', du faisceau d'idéaux de $\tilde{\mathscr{A}}_V$, engendré par $\sigma(\mathfrak{h})$, pour lesquels $a - b$ est identiquement nul sur l'intersection de $U' \times V^*$ et de $W \times V^*$; or J est un idéal premier; donc la restriction de a à U' appartient au faisceau d'idéaux engendré par J et $\sigma(\mathfrak{h})$.

3.3. On conserve les notations de 3.1. On utilise un ouvert de Zariski, non vide, W' de W, qui satisfait la condition du lemme 3.1. Soit p un élément de $S(V^*)$ qui est identiquement nul sur le complémentaire de W' dans W.

PROPOSITION. *Soit J l'annulateur de W dans $S(V^*)$. Soit a un élément de $S(V) \otimes S(V^*)$ qui est identiquement nul sur $W'_{\mathfrak{h}}$. Alors pour l entier positif assez grand, $p^l a$ appartient à l'idéal de $S(V) \otimes S(V^*)$ engendré par J* et *$\sigma(\mathfrak{h})$.*

Soit U le complémentaire dans V de la variété des zéros de p. On utilise les notations de 3.2 et la filtration naturelle sur $S(V)$. Soit v l'ordre de a. Soit $\mathscr{L}_v$ le $\mathscr{A}_V$-module dont les sections locales sont les sections d'ordre au plus v du $\tilde{\mathscr{A}}_V$-module engendré par J et $\sigma(\mathfrak{h})$. Le $\mathscr{A}_V$-module $\mathscr{L}_v$ est engendré par une famille finie de sections globales; or c'est un sous-module du module cohérent $\mathscr{A}_V \otimes_{\mathbb{C}} S(V)_v$; donc d'après [10] (Théorème 1, n^0 13), le module $\mathscr{L}_v$ est cohérent. D'après le lemme 3.2, la restriction de a à U est une section du faisceau d'idéaux de $\tilde{\mathscr{A}}_V$, engendré par J et $\sigma(\mathfrak{h})$; donc, d'après [10] (Corollaire 1, n^0 46), a appartient à l'idéal de $\mathscr{A}_V(U) \otimes_{\mathbb{C}} S(V^*)$ engendré par J et $\sigma(\mathfrak{h})$. Par suite, d'après [10] (Proposition 5, n^0 43], pour l entier positif assez grand, $p^l a$ appartient à l'idéal de $S(V) \otimes S(V^*)$ engendré par J et $\sigma(\mathfrak{h})$.

4. Sur les opérateurs différentiels

Les théoremes 4.3 et 4.5 sont le but de cette section. La section 4.1 décrit l'annulateur dans l'anneau des opérateurs différentiels au voisinage d'un point d'une orbite, de la mesure invariante sur cette orbite. En utilisant les résultats de 3, on montre alors que tout élément d'un idéal à gauche L_p de $A(V)$ annule la mesure invariante sur toute orbite Ω contenue dans un ouvert de Zariski de $\mathscr{V}(J)$. Ce résultat est l'objet du lemme 4.2. De celui-ci on déduit le théorème 4.3. La proposition 4.4 montre que l'idéal à gauche $L_{J,\mathfrak{g}_1}$ de 4.3 contient les opérateurs différentiels qui sont associés à l'action de tout élément de l'enveloppe algébrique de $\mathfrak{g}$. On suppose en 4.5 l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ algébrique. Les arguments classiques sur les corps de caractéristique nulle permettent d'énoncer le théorème pour un corps quelconque de caractéristique zéro. Le théorème résulte alors du théorème 4.3 et du raisonnement par récurrence de 4.3. Celui-ci utilise principalement les résultats de 3.

Soit V un espace vectoriel complexe de dimension finie. Soient G un sous-groupe fermé connexe, complexe de $GL(V)$. On désigne par $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et par Γ l'adhérence de Zariski de G dans $GL(V)$. Soit J un idéal premier $\mathfrak{g}$-invariant de $S(V^*)$ qui possède la propriété (**P**) de 2.5 relativement à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

4.1. Pour tout élément ξ de $\mathfrak{g}$, on note $\tilde{\xi}$ le champ de vecteurs sur $V: x \mapsto \xi . x$. Soit Ω une orbite de G dans V qui est localement fermée. On suppose qu'il existe sur Ω une forme volume, G-invariante. Soit β une telle forme. On note d la dimension de Ω. On désigne par $\mathcal{O}_d$ l'anneau des séries formelles à d indéterminées sur $\mathbb{C}$ dont le rayon de convergence est non nul.

LEMME. *Soit x_0 un point de Ω.*

(i) *Il existe un voisinage U de x_0 dans V et un système de coordonnées $\{x_1, \ldots, x_n\}$ sur U qui satisfait les conditions suivantes:*

(1) *les restrictions à Ω des coordonnées $x_1, \ldots, x_d$ forment un système de coordonnées sur Ω,*

(2) *l'intersection de Ω et de U est l'ensemble des zéros communs aux fonctions $x_{d+1}, \ldots, x_n$,*

(3) *la restriction de β à l'intersection de U et de Ω est égale à la forme volume $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}\overline{x_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_d \wedge \mathrm{d}\overline{x_d}$ sur cette intersection.*

On note $\mu_{\Omega,U}$ la distribution sur U définie par la forme volume β. On considère l'action de $\mathscr{D}_U$ sur l'espace des distributions sur U.

(ii) *Soit $\mathscr{I}_{\Omega,U}$ l'annulateur de $\mu_{\Omega,U}$ dans $\mathscr{D}_U$. Alors $\mathscr{I}_{\Omega,U}$ est le faisceau d'idéaux à gauche de $\mathscr{D}_U$, engendré par les sections globales:*

$$\partial_1, \ldots, \partial_d, x_{d+1}, \ldots, x_n.$$

(i) Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de V. On note $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ la base duale. En réordonnant celle-ci et en choisissant le voisinage U'' de x_0 assez petit, on peut supposer que les restrictions à l'intersection de Ω et de U'', des fonctions:

$$e_1^* - \langle e_1^*, x_0 \rangle, \ldots, e_d^* - \langle e_d^*, x_0 \rangle,$$

forment un système de coordonnées en x_0 sur Ω. On désigne par $x'_1, \ldots, x'_d$ les restrictions à U'' de ces fonctions. Puisque Ω est une sous-variété analytique de V, pour $j = d+1, \ldots, n$, il existe un élément X_j de $\mathcal{O}_d$ pour lequel la fonction $e_j^* - X_j(x'_1, \ldots, x'_d)$ est identiquement nulle sur un petit voisinage de x_0 dans Ω. Soit U' un voisinage ouvert de x_0 dans V, contenu dans U'', sur lequel les séries $X_{d+1}(x'_1, \ldots, x'_d), \ldots, X_n(x'_1, \ldots, x'_d)$ convergent. On note $x'_{d+1}, \ldots, x'_n$ les fonctions sur U':

$$e_{d+1}^* - X_{d+1}(x'_1, \ldots, x'_d), \ldots, e_n^* - X_n(x'_1, \ldots, x'_d).$$

Par construction, les fonctions $x'_1, \ldots, x'_n$ forment un système de coordonnées sur ω' qui satisfait les conditions (1) et (2) du lemme.

Par hypothèse, β est une forme volume G-invariante sur Ω; donc en choisissant l'ouvert U' assez petit, on peut supposer qu'il existe une fonction holomorphe inversible h_0 sur l'intersection de U' et de Ω pour laquelle β est la restriction à $U' \cap \Omega$ de la forme volume:

$$|h_0|\, \mathrm{d}x'_1 \wedge \mathrm{d}\overline{x'_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x'_d \wedge \mathrm{d}\overline{x'_d},$$

sur $U' \cap \Omega$. Puisque h_0 ne s'annule pas sur l'intersection de U' et de Ω, elle est le carré d'une fonction holomorphe h sur cet ouvert de Ω. Soit H la série de Taylor de h en x_0. Soit U un voisinage ouvert de x_0 dans U' sur lequel la série $H(x'_1, \ldots, x'_d)$ est convergente. Il existe alors une fonction holomorphe k sur U qui satisfait la condition suivante:

$$h = x'_1 \frac{\partial k}{\partial x'_1} + k.$$

En choisissant l'ouvert U assez petit, on peut supposer que k y est inversible. Soient $x_1, \ldots, x_n$ les fonctions sur U définies par:

$$x_1 = kx'_1,\ x_2 = x'_2, \ldots, x_n = x'_n.$$

Puisque k est inversible sur U, elles définissent un système de coordonnées sur U qui satisfait les conditions (1), (2) et (3) du lemme.

(ii) Soit $\mathscr{D}_\Omega(U)$ l'espace des fonctions C^∞ sur U dont le support a une intersection compacte avec Ω. D'après les conditions (1), (2) et (3) ci-dessus, la distribution $\mu_{\Omega,U}$ est annulée par les opérateurs différentiels $\partial_1, \ldots, \partial_d$, $x_{d+1}, \ldots, x_n$. En particulier, elle s'étend à $\mathscr{D}_\Omega(U)$. Soit a une section globale de $\mathscr{D}_U$ qui annule $\mu_{\Omega,U}$. Il existe un polynôme P à $n-d$ indéterminées sur l'anneau des fonctions holomorphes sur U, annulées par les champs de vecteurs $\partial_1, \ldots, \partial_d$, pour lequel on a:

$$a = P[x_1, \ldots, x_d;\ \partial_{d+1}, \ldots, \partial_n]$$

$$\text{modulo } \mathscr{D}_U\partial_1 + \cdots + \mathscr{D}_U\partial_d + \mathscr{D}_U x_{d+1} + \cdots + \mathscr{D}_U x_n.$$

Soit $\mathscr{E}(U, \Omega)$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{D}_\Omega(U)$ qui sont annulés par les champs de vecteurs $\partial_{d+1}, \ldots, \partial_n$. Pour tout $(n-d)$-uplet d'entiers non négatifs $(m_{d+1}, \ldots, m_n)$ et pour tout ϕ dans $\mathscr{E}(U, \Omega)$, on a:

$$P[x_1, \ldots, x_d;\ \partial_{d+1}, \ldots, \partial_n)\mu_{\Omega,U}[(x_{d+1}^{m_{d+1}} \cdots x_n^{m_n})\phi] = 0;$$

donc les coefficients de P sont nuls. Par suite, a est section globale du faisceau $\mathscr{I}_{\Omega,U}$.

Soit U_1 un ouvert de V dans lequel Ω est fermé. On note $\mathscr{J}_{\Omega,U_1}$ le faisceau d'idéaux de $\mathscr{D}_{U_1}$ dont la restriction à chacun des petits ouverts U est le faisceau $\mathscr{J}_{\Omega,U}$. D'après l'assertion (ii), $\mathscr{J}_{\Omega,U_1}$ est l'annulateur de la distribution μ_{Ω,U_1}. Si U_2 est un second ouvert de V dans lequel Ω y est fermé, les faisceaux $\mathscr{J}_{\Omega,U_1}$ et $\mathscr{J}_{\Omega,U_2}$ ont alors même restriction à l'intersection de U_1 et de U_2. Soit U_Ω la réunion des ouverts U de V pour lesquels l'intersection de Ω et de U est fermée dans U. D'après ce qui précède, il existe un unique faisceau sur U_Ω dont la restriction à chacun des ouverts U, ci-dessus est égale à $\mathscr{J}_{\Omega,U}$. En désignant par ι l'injection canonique de U_Ω dans V, on note $\mathscr{J}_\Omega$ l'image de ce faisceau par le foncteur ι_*.

4.2. Soit W la variété des zéros de J. Soit G_1 un sous-groupe fermé de Γ n'ayant qu'un nombre fini de composantes connexes. Soit W' un ouvert de Zariski, non vide de W qui est réunion de G_1-orbites de dimension maximale. On suppose que G_1 et W' satisfont les conditions (1) et (2) du lemme 2.2, relativement à W. D'après les lemmes 2.4 et 2.5, sur toute G_1-orbite, contenue dans W', *existe une forme volume* G_1-invariante. On désigne par $\mathfrak{g}_1$ l'algèbre de Lie de G_1. On utilise l'antiautomorphisme: $a \mapsto a^{\mathrm{T}}$ de $A(V)$, défini en 1.2. On note $\Delta_{\mathfrak{g}_1}$ l'image par cet antiautomorphisme, de l'idéal à droite de $A(V)$, engendré par les champs de vecteurs $v \mapsto \xi . v$, où ξ est dans $\mathfrak{g}_1$. Soit L l'idéal à gauche de $A(V)$ engendré par J et $\Delta_{\mathfrak{g}_1}$.

LEMME. *Soit p un élement de $S(V^*)$. On utilise l'idéal à gauche L_p de $A(V)$ défini en* 1.4, *relativement aux données L et p ci-dessus. Soit Ω une G_1-orbite contenue dans W' sur laquelle p n'est pas identiquement nulle. Soit a un élément de L_p. Alors avec les notations de* 4.1, *a est section globale du faisceau $\mathscr{J}_\Omega$.*

Soit x un point de Ω. Soit U un ouvert de V contenant x sur lequel existe un système de coordonnées $\{x_1, \ldots, x_n\}$ qui satisfait les conditions (1), (2), (3) du lemme 4.1. Soit $\mathscr{L}$ le faisceau des sections locales s de $\mathscr{D}_U$ qui satisfont la condition suivante: pour n entier positif assez grand, $p^n s$ est une section locale du faisceau $\mathscr{J}_{\Omega,U}$. La démonstration de 1.4 montre que $\mathscr{L}$ est un faisceau d'idéaux à gauche de $\mathscr{D}_U$. On note $\tilde{\mathscr{L}}$ le $\mathscr{D}_U$-module à gauche: $\mathscr{L}/\mathscr{J}_{\Omega,U}$. On désigne par $\mathscr{O}_U[p^{-1}]$ le faisceau des fonctions méromorphes sur U dont l'ensemble des pôles est contenu dans la variété des zéros de p. D'après [6] [Chapitre I, Théorème 8.1), le $\mathscr{D}_U$-module $\mathscr{O}_U[p^{-1}]$ est cohérent; or le $\mathscr{D}_U$-module $\mathscr{L}$ est isomorphe au $\mathscr{D}_U$-module:

$$\mathscr{O}_U[p^{-1}] \otimes_{\mathscr{O}_U} \mathscr{J}_{\Omega,U};$$

donc le $\mathscr{D}_U$-module $\mathscr{L}$ est cohérent. Par suite, le support Σ de $\tilde{\mathscr{L}}$ est un sous-ensemble analytique fermé de U; or p n'est pas identiquement nul sur Ω; donc Σ est sous-ensemble analytique strict de l'intersection de U et de Ω. On suppose que Σ est non vide. Il Il s'agit d'aboutir à une contradiction. Soit y un point lisse de Σ. Soit $\{y_1, \ldots, y_n\}$ un système de coordonnées sur un voisinage U' de y dans

U, qui satisfait les conditions suivantes:

(1) $y_i = x_i$ pour $i = d+1, \ldots, n$,
(2) au voisinage de y, sur Ω, Σ est l'ensemble des zéros communs aux fonctions $y_1, \ldots, y_l$.

La démonstration du lemme 4.1 montre alors qu'on peut supposer que le système de coordonnées $\{y_1, \ldots, y_n\}$ sur U' satisfait les conditions (1), (2), (3) du lemme 4.1. Soit $\mathscr{L}_{U'}$ la restriction de $\mathscr{L}$ à U'. Pour v entier positif, on note $\mathscr{L}_v$ le faisceau des sections locales de $\mathscr{L}_{U'}$ qui sont d'ordre au plus v. C'est un $\mathcal{O}_{U'}$-module cohérent. Puisque y_1 est nul sur Σ, il existe un entier n pour lequel $y_1^n s$ est section locale du faisceau $\mathscr{I}_{\Omega,U'}$, pour toute section locale s de $\mathscr{L}_v$. Soit n_v le plus petit entier qui satisfait cette condition. Puisque y appartient à Σ, n_v est non nul pour au moins un v. On utilise les champs de vecteurs $\partial_1, \ldots, \partial_n$ sur U' qui sont définis par les relations:

$$\langle \partial_i, \mathrm{d}x_j \rangle = \delta_{i,j} \quad \text{pour } i, j = 1, \ldots, n.$$

Soit s une section locale de $\mathscr{L}_v$. D'après le lemme 4.1, le champ de vecteurs ∂_1 est une section globale de $\mathscr{I}_{\Omega,U}$; or s et $[\partial_1, s]$ sont des opérateurs différentiels d'ordre au plus v; donc $y_1^{n_v}[\partial_1, s]$ et $y_1^{n_v}\partial_1 s$ sont des sections locales de $\mathscr{I}_{\Omega,U}$. D'après la relation:

$$\partial_1 y_1^{n_v} s - y_1^{n_v} \partial_1 s = n_v y_1^{n_v - 1} s,$$

$y_1^{n_v-1}s$ est une section locale de $\mathscr{I}_{\Omega,U}$. Ceci est absurde d'après la minimalité de n_v et le choix arbitraire de s.

4.3. On conserve les notations de 4.2. On note $\tilde{J}$ l'ensemble des éléments de $S(V^*)$ qui sont identiquement nuls sur la réunion des G_1-orbites de dimension non maximale, contenues dans W. La partie $\tilde{J}$ de $S(V^*)$ est un idéal de $S(V^*)$ qui contient strictement J. Pour toute partie S de W', on note $L(S)$ l'ensemble des éléments de $A(V)$ qui sont section globale de $\mathscr{I}_\Omega$, pour toute G_1-orbite Ω, rencontrant S.

THEOREME. *Soit S une partie de W', partout dense dans W pour la topologie de Zariski. Alors pour tout élément p de $\tilde{J}$ qui n'est pas dans J, les idéaux à gauche L_p et $L(S)$ de $A(V)$ sont égaux. En particulier l'idéal à gauche L_p ne dépend pas de l'élément p du complémentaire de J dans $\tilde{J}$.*

On notera $L_{J,\mathfrak{g}_1}$ cet idéal à gauche.

Si p est un élément de $\tilde{J}$ qui n'est pas dans J, on note S_p l'ensemble des points de S en lesquels p n'est pas nul. L'adhérence de S_p pour la topologie de Zariski est alors égale à W.

Soit p un élément de $\tilde{J}$ qui n'est pas dans J. D'après le lemme 4.2, $L(S_p)$ contient L_p. Soit a un élément de $L(S_p)$. Soit v la filtration de a. On montre en raisonnant par récurrence sur v que L_p contient a. Si v est nul, alors a est nul sur chacune des G_1-orbites contenues dans S; or S est dense dans W pour la topologie de Zariski; donc J contient a. On suppose l'assertion vraie pour $v-1$. On utilise les notations de 3.1. Soit W'' le complémentaire dans W de la variété des zéros de p. D'après 4.1, pour toute G_1-orbite Ω S et rencontrant W'', pour tout x dans l'intersection de Ω et de W'', $\sigma(a)$ est nul sur l'intersection de $W_{\mathfrak{g}_1}$ et de $\{x\} \times V^*$; or d'après 3.1, l'intersection de $W_{\mathfrak{g}_1}$ et de $W'' \times V^*$ est irréductible; donc d'après 3.3, pour l entier positif assez grand, $p^l\sigma(a)$ est le symbole principal d'un élément b de L. Alors $p^l a - b$ est un élément de $L(S_p)$ d'ordre au plus $v-1$; donc d'après l'hypothèse de récurrence, pour k entier positif assez grand, $p^k(p^l a - b)$ appartient à L. Par suite, L contient $p^{l+k}a$ et L_p contient a; donc $L(S_p)$ est égal à L_p.

Soit p' un élément du complémentaire de J dans $\tilde{J}$. On note S' l'intersection de S_p et de $S_{p'}$. C'est une partie de W', partout dense dans W pour la topologie de Zariski; donc d'après ce qui précède, on a les égalités:

$$L_p = L(S') \quad \text{et} \quad L_{p'} = L(S').$$

Par suite, les idéaux à gauche L_p et $L(S_p)$ sont égaux et ne dépendent pas de p. Soient $p_1, \ldots, p_l$ les éléments d'une famille génératrice de l'idéal $\tilde{J}$, qui ne sont pas dans J. La partie S de W est alors la réunion des parties $S_{p_1}, \ldots, S_{p_l}$; donc $L(S)$ est l'intersection des idéaux à gauche $L(S_{p_1}), \ldots, L(S_{p_l})$. D'après ce qui précède, $L(S)$ est alors égal à L_p.

4.4. On conserve les notations de 4.2 et de 4.3. On désigne par $\tilde{\mathfrak{g}}$ l'algèbre de Lie de Γ. Pour tout ξ dans $\tilde{\mathfrak{g}}$, on note aussi ξ le champ de vecteur: $v \mapsto \xi . v$ sur V. On utilise l'antiautomorphisme: $a \mapsto a^{\mathsf{T}}$ de $A(V)$, défini en 1.2. On désigne par Δ l'image par cet antiautomorphisme, de l'idéal à droite de $A(V)$, engendré par les champs de vecteurs ξ, où ξ est dans $\tilde{\mathfrak{g}}$.

PROPOSITION. *L'idéal à gauche $L_{J,\mathfrak{g}_1}$ de $A(V)$* contient Δ.

Soit Ω une Γ-orbite de dimension maximale et contenue dans W'. Soit U un ouvert de V dans lequel Ω est fermé. D'après le lemme 2.5, il existe une distribution μ_Ω sur U, Γ-invariante et de support Ω. Puisque Ω est contenu dans W', toute G_1-orbite contenue dans Ω, est fermée dans U. Pour toute G_1-orbite ω, contenue dans Ω, on désigne par μ_ω une distribution G_1-invariante sur U, de support ω. Soit ξ dans $\tilde{\mathfrak{g}}$. Pour tout g dans Γ, Ad $g(\xi) - \xi$ appartient à $\mathfrak{g}_1$; donc la distribution sur U, $\xi^{\mathsf{T}}(\mu_{g.\omega})$, est G_1-invariante et de support $g.\omega$. en outre, elle est l'image de la distribution $\xi^{\mathsf{T}}(\mu_\omega)$ par l'application: $v \mapsto g.v$. Par suite, il existe un scalaire $c(\xi)$ pour lequel on a:

$$\xi^{\mathsf{T}}(\mu_{g.\omega}) = c(\xi)\mu_{g.\omega} \quad \text{pour tout } g \text{ dans } \Gamma.$$

D'après le théorème de Fubini, la distribution μ_Ω est limite faible de combinaisons linéaires des distributions $\mu_{g.\omega}$; or la distribution $\xi^{\mathsf{T}}(\mu_\Omega)$ est nulle; donc $c(\xi)$ est nul. Vu l'arbitraire de l'orbite Ω, l'idéal $L_{J,\mathfrak{g}_1}$ contient ξ^{T}, d'après le théorème 4.3.

4.5. Dans cette sous-section, le corps k n'est pas nécessairement algébriquement clos. Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie. Soit G un sous-groupe algébrique de $GL(V)$, irréductible pour la topologie de Zariski. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. On note Δ l'idéal à gauche de $A(V)$ pour lequel Δ^{T} est l'idéal à droite de $A(V)$ engendré par les champs de vecteurs: $v \mapsto \xi . v$, où ξ appartient à $\mathfrak{g}$. On utilise les notations de 1.4 et de 2.5. Si J est un idéal premier G-invariant de $S(V^*)$, on note $\tilde{J}$ l'annulateur dans $S(V^*)$ du complémentaire dans $\mathscr{V}(J)$ de la réunion des G-orbites de dimension maximale contenues dans $\mathscr{V}(J)$.

THEOREME. *Soit J un idéal premier G-invariant de $S(V^*)$ qui possède la propriété* (**P**) *de* 2.5 *relativement à* $\mathfrak{g}$. *Soit L l'idéal à gauche de $A(V)$ engendré par J et Δ. Alors l'idéal à gauche L_p ne dépend pas de l'élément p du complémentaire de J dans $\tilde{J}$. On notera L_J cet idéal à gauche. Soit $\{J_i; i \in I\}$ une famille d'idéaux premiers G-invariants de $S(V)$ qui possèdent la propriété* (**P**), *relativement à* $\mathfrak{g}$, *et qui ne contiennent pas $\tilde{J}$. Si J est l'intersection des J_i, alors L_J est l'intersection des idéaux à gauche L_{J_i}.*

On suppose que k est le corps des nombres complexes. D'après le théorème 4.3 et d'après la proposition 4.5, l'idéal à gauche L_p de $A(V)$ ne dépend pas de l'élément p du complémentaire de J dans $\tilde{J}$. Pour tout i dans I, on désigne par S_i la réunion des G-orbites de dimension maximale, contenues dans $\mathscr{V}(J_i)$. Soit S la réunion des S_i. Puisque J est l'intersection des J_i, la variété $\mathscr{V}(J)$ est l'adhérence de Zariski de S. En outre, $\tilde{J}$ n'étant contenu dans aucun des J_i, S est réunion de G-orbites de dimension maximale, contenues dans $\mathscr{V}(J)$. D'après le théorème 4.3, pour tout i dans I, L_{J_i} est égal à $L(S_i)$ et L_J est égal à $L(S)$; or $L(S)$ est l'intersection de la famille $\{L(S_i); i \in I\}$; donc L_J est l'intersection de la famille $\{L_{J_i}; i \in I\}$.

On suppose que k est un sous-corps algébriquement clos de $\mathbb{C}$. Soient $V_{\mathbb{C}}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel:

$$V \otimes_k \mathbb{C}$$

et $G_{\mathbb{C}}$ l'adhérence de Zariski de G dans $GL(V_{\mathbb{C}})$. Soit J un idéal premier G-

invariant de $S(V^*)$. On note $J_{\mathbb{C}}$ l'idéal de $S(V_{\mathbb{C}}^*)$ engendré par J et $L_{\mathbb{C}}$ l'idéal à gauche de $A(V_{\mathbb{C}})$ engendré par J et Δ. Si J possède la proriété (**P**), relativement à $\mathfrak{g}$, alors $J_{\mathbb{C}}$ possède la propriété (**P**), relativement à l'algèbre de Lie de $G_{\mathbb{C}}$. En considérant une base du k-espace vectoriel $\mathbb{C}$, on voit que l'intersection de $L_{\mathbb{C}}$ et de $A(V)$ est l'idéal à gauche de $A(V)$ engendré par J et Δ. Puisque l'idéal de $S(V_{\mathbb{C}}^*)$ engendré par $\tilde{J}$ est l'annulateur dans $S(V_{\mathbb{C}}^*)$ du complémentaire dans $\mathscr{V}(J_{\mathbb{C}})$ de la réunion des $G_{\mathbb{C}}$-orbites de dimension maximale contenues dans $\mathscr{V}(J_{\mathbb{C}})$, le théorème pour k résulte du théorème pour $\mathbb{C}$.

On suppose k algébriquement clos et distinct de $\mathbb{C}$. Le corps k est alors limite inductive d'un système $\{k_l; l \in L\}$ d'extensions algébriquement closes, de type fini, du corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Le choix d'une base du k-espace vectoriel V montre qu'il existe un système inductif strict $\{V_l; l \in L\}$ de k_l-espaces vectoriels dont la limite est V. Si J est un idéal de $S(V^*)$ alors pour l assez grand, J est engendré par son intersection avec $S(V_l^*)$; donc pour l assez grand, l'idéal à gauche $A(V)J+\Delta$ est engendré par son intersection avec $A(V_l)$. La première partie du théorème résulte alors de ce que k_l est isomorphe à un sous-corps de $\mathbb{C}$. D'après les hypothèses, l'intersection de la famille $\{L_{J_i}; i \in I\}$, contient L_J. Si a est dans cette intersection, alors avec les notations de 3.1, $\sigma(a)$ est nul sur $\mathscr{V}(J)_{\mathfrak{g}}$; donc en raisonnant par récurrence sur l'ordre de a, on montre comme en 4.3 que L_J contient a.

Lorsque k n'est pas algébriquement clos, on considère une clôture algébrique $\bar{k}$ de k. Soit $\bar{V}$ le $\bar{k}$-espace vectoriel:

$$V \otimes_k \bar{k}.$$

Soit $\bar{G}$ l'adhérence de Zariski de G dans $GL(\bar{V})$. On note $\bar{J}$ l'idéal de $S(\bar{V})$ engendré par J. L'idéal $\bar{\tilde{J}}$ de $S(\bar{V})$ engendré par $\tilde{J}$ est l'annulateur dans $S(\bar{V})$ du complémentaire dans $\mathscr{V}(\bar{J})$ de la réunion des $\bar{G}$-orbites de dimension maximale. Soit $\bar{L}$ l'idéal à gauche de $A(\bar{V})$ engendré par J et Δ. L'idéal à gauche L est alors l'intersection de $A(V)$ et de $\bar{L}$; donc pour tout élément p de $\tilde{J}$ qui n'appartient pas à J, L_p est l'intersection de $A(V)$ et de $L_{\bar{J}}$. Puisque pour tout i, L_{J_i} est l'intersection de $A(V)$ et de $L_{\bar{J}_i}$, il résulte du théorème pour $\bar{k}$ que L_J est l'intersection de la famille $\{L_{J_i}; i \in I\}$.

5. Modules holonômes

On s'intéresse dans cette section au $A(V)$-module à gauche $A(V)/L_J$, où L_J est l'idéal à gauche défini en 4.5. Les résultats principaux sont ceux de 5.2 et 5.3. Le but de la section 5.1 est l'étude du cycle caractéristique de ce $A(V)$-module. Les assertions de 5.2 et de 5.3 en sont des conséquences directes.

On suppose le corps k algébriquement clos. Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie. On le regarde comme variété algébrique sur k. On considère dans cette section la catégorie des $\mathscr{D}_V^{(a)}$-modules à gauche sur V qui sont cohérents. Un objet de cette catégorie sera plus simplement appelé module. Dans ce qui suit, on identifie le fibré cotangent de V à la variété $V \times V^*$.

5.1. On suppose que k est le corps des nombres complexes. Soit M un module. On considère sur M une bonne filtration:

$$\{M_n; n = 0, 1, \ldots\}.$$

D'après [6] (Ch. I, Proposition 2.5.4), il en existe une car M est cohérent. On note $\mathrm{Gr}(M)$ le gradué associé à M relativement à cette filtration. Puisque la filtration est bonne, $\mathrm{Gr}(M)$ est un $\mathscr{A}_V \otimes S(V)$-module cohérent. Le cycle défini par l'annulateur de ce $\mathscr{A}_V \otimes S(V)$-module est noté $\mathbf{Ch}(M)$. On désigne par $\mathrm{Ch}(M)$ le support de ce cycle. D'après [6] (Ch. I, lemme 2.2.1 et 2.4.2), $\mathbf{Ch}(M)$ et $\mathrm{Ch}(M)$ ne dépendent pas du choix de la bonne filtration sur M. Par définition, $\mathbf{Ch}(M)$ et $\mathrm{Ch}(M)$ sont respectivement le cycle et la variété caractéristique du module M.

LEMME. *Soit p un élément de $S(V^*)$. On suppose que la restriction de M au complémentaire de la variété des zéros de p, est holonôme. On désigne par N le faisceau des sections locales du module M qui sont annulées par une puissance de p.*

(i) *Le $\mathscr{A}_V$-module N est un sous-module du module M.*

(ii) *Soit C_p la réunion des composantes irréductibles de* $\mathrm{Ch}(M)$ *sur lesquelles p n'est pas identiquement nul. Alors la variété caractéristique du module M/N est contenue dans la réunion de C_p et d'une famille finie de variétés algébriques de $V \times V^*$. Chacune d'elles est l'adhérence du fibré conormal à une sous-variété algébrique lisse de la variéte des zéros de p. En outre, si X est une composante irréductible de C_p, alors X a même multiplicité dans* $\mathbf{Ch}(M)$ *et* $\mathbf{Ch}(M/N)$.

(i) La démonstration du lemme 1.4 prouve que N est un sous-$\mathscr{D}_V^{(a)}$-module du module M.

(ii) Soit U le complémentaire de la variété des zéros de p. Soit M' la restriction de M à U. La restriction des opérateurs différentiels à cet ouvert définit sur M' une structure naturelle de $\mathscr{D}_V^{(a)}$-module à gauche. D'après [6] (Ch. I, Proposition 8.4.1), ce module est holonôme. Soit ϕ le morphisme de M dans M' défini par:

$$\phi(m) = m|_U.$$

Ce morphisme est un morphisme du $\mathscr{D}_V^{(a)}$-module M dans le $\mathscr{D}_V^{(a)}$-module M'. Son noyau est alors le sous-$\mathscr{D}_V^{(a)}$-module N; donc M/N est un $\mathscr{D}_V^{(a)}$-module holonôme. La variété caractéristique du $\mathscr{D}_V^{(a)}$-module M' est la réunion de C_p et d'une sous-variété algébrique de $V \times V^*$ dont l'image par la projection canonique sur V, est contenue dans la variété des zéros de p; or M' et M/N ont même restriction à U; donc d'après [6] (Ch. I, Corollaire 2.7.5), Ch(M/N) est la réunion de C_p et d'une famille de sous-variétés algébrique de $V \times V^*$ qui satisfait les conditions de l'assertion.

Soit X une composante irréductible de C_p. La multiplicité de X dans $\mathbf{Ch}(M/N)$ est égale à la multiplicité de l'intersection de U et de X dans le cycle caractéristique du $\mathscr{D}_U^{(a)}$-module M'; or cette dernière est la multiplicité de X dans $\mathbf{Ch}(M)$; donc X a même multiplicité dans $\mathbf{Ch}(M)$ et $\mathbf{Ch}(M/N)$.

5.2. On suppose dans cette sous-section le corps k algébriquement clos. On utilise les notations de 5, de 3.1 et de 4.5.

PROPOSITION. *Soit J un idéal premier G-invariant, rationnel de $S(V^*)$. On note W la variéte des zéros de J. On suppose que J possède la propriété* (**P**) *de* 2.5, *relativement à* $\mathfrak{g}$. *Alors le $A(V)$-module $A(V)/L_J$ est holonôme. Sa variété caractéristique est contenue dans $W_{\mathfrak{g}}$ et $\tilde{W}_{\mathfrak{g}}$ en est une composante irréductible. En outre, la multiplicité de $\tilde{W}_{\mathfrak{g}}$ dans le cycle caractéristique du $A(V)$-module $A(V)/L_J$, est égale à* 1.

On commence par prouver la proposition dans le cas où k est le corps des nombres complexes. On utilise l'idéal à gauche L de 4.5. Pour simplifier, on note M le $A(V)$-module à gauche $A(V)/L$. Soit p un élément de $\tilde{J}$ qui n'appartient pas à J. On utilise alors les notations N, U, M' de 5.1. D'après 4.5, M/N est isomorphe à $A(V)/L_J$. Puisque la variété caractéristique de M est contenue dans $W_{\mathfrak{g}}$, $W_{\mathfrak{g}}$ contient Ch(M/N). D'après le lemme 3.1, $\tilde{W}_{\mathfrak{g}}$ est l'unique composante irréductible de $W_{\mathfrak{g}}$ dont l'image par la projection canonique de $V \times V^*$ sur V, n'est pas contenue dans la variété des zéros de p; or d'après l'assertion (ii) du lemme 4.1, la multiplicité de l'intersection de $\tilde{W}_{\mathfrak{g}}$ et de U, dans le cycle caractéristique du $\mathscr{D}_U^{(a)}$-module M', est égale à 1; donc la proposition est conséquence du lemme 5.1.

L'énoncé de la proposition est stable par extension des scalaires. Lorsque k est un corps algébriquement clos, de caractéristique nulle, arbitraire, on procède alors comme en 4.5 et on utilise ce qui précède.

5.3. On conserve les notations de 5.2.

COROLLAIRE. *Soit J un idéal premier G-invariant de $S(V^*)$, qui possède la propriété* (**P**) *de* 2.5, *relativement à* $\mathfrak{g}$. *On suppose que J est maximal parmi les idéaux G-invariants. Alors le $A(V)$-module $A(V)/L_J$ est simple.*

Avec les notations de 4.5, l'idéal à gauche L_J est égal à L. On note ici M_0 le $A(V)$-module $A(V)/L_J$. Puisque J est maximal, $\tilde{W}_{\mathfrak{g}}$ est égal à $W_{\mathfrak{g}}$; donc d'après la proposition 5.2, on a:

$$\mathbf{Ch}(M_0) = W_{\mathfrak{g}}.$$

Si M est un sous-module de M_0, on a la suite exacte:

$$0 \to M \to M_0 \to M/M_0 \to 0;$$

or d'après [6] (Ch. I, 2.4.1 et 2.4.2), on a la relation:

$$\mathbf{Ch}(M_0) = \mathbf{Ch}(M) + \mathbf{Ch}(M/M_0);$$

donc $\{0\}$ est le seul sous-module strict de M_0.

Bibliographie

[1] A. Borel et al.: *Algebraic D-modules.* Perspective in Mathematics, Vol. 2, Academic Press, Incorporation.

[2] N. Bourbaki: *Eléments de Mathématiques. Groupes et algèbres de Lie, Chapitres* 7 *et* 8. Diffusion C.C.L.S., Paris, 1975.

[3] J. Dixmier: *Sur la méthode des orbites.* Proceedings de la conférence: "Non commutative Harmonic Analysis", Marseille-Luminy, 1978, Lecture Notes in Mathematics n° 728.

[4] R. Hartshorne: *Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics n° 52, Springer-Verlag, 1977.

[5] J. E. Humphreys: *Linear algebraic groups.* Graduate Texts in Mathematics n° 21, Springer-Verlag, 1975.

[6] Z. Mebkhout: *Le formalisme des six opérations de Grothendieck.* Travaux en cours, n° 35, Hermann, Paris, 1989.

[7] G. D. Mostow: Fully reducible subgroups of algebraic subgroups. *Am. J Math.* 78 (1956), 200–221.

[8] R. W. Richardson: Deformations of Lie subgroups and the variations of isotropy subgroup. *Acta Math* 129 (1972), 35–73.

[9] M. Rosenlicht: A remark on quotient spaces. *Anais da Academia Brasileira de Ciencias.* 35 (1963), 487–489.

[10] J. P. Serre: Faisceaux algébriques cohérents. *Annals of Mathematics* 61 (1955), 197–367.

[11] J. P. Serre: Géométrie algébrique et Géométrie analytique. *Annales de l'Institut Fourier* 6 (1955–56), 1–42.