

# COMPOSITIO MATHEMATICA

MICHELE AUDIN

ROBERT SILHOL

**Variétés abéliennes réelles et toupie de Kowalevski**

*Compositio Mathematica*, tome 87, n° 2 (1993), p. 153-229

<[http://www.numdam.org/item?id=CM\\_1993\\_\\_87\\_2\\_153\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CM_1993__87_2_153_0)>

© Foundation Compositio Mathematica, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Variétés abéliennes réelles et toupie de Kowalevski

MICHELE AUDIN<sup>1</sup> et ROBERT SILHOL<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Institut De Rech. Math. Avancée, 7 Rue René Descartes, F-67084 Strasbourg Cedex, France;*

<sup>2</sup>*Université de Montpellier II, F-34095 Montpellier Cedex 5, France*

Received 5 February 1992; accepted 30 June 1992

Nous allons expliquer dans ces notes comment sont faits les niveaux communs des intégrales premières dans l'exemple de la toupie de Kowalevski et, à titre d'introduction, dans les exemples plus simples de la toupie de Lagrange et du solide de dimension 3. Pour ce faire, nous montrerons que les aspects réels de la méthode de la courbe spectrale permettent d'étudier les "tores de Liouville". Ces résultats sont assez classiques dans les cas du solide libre et de la toupie symétrique (cas dit de Lagrange), en particulier, l'exposé de Verdier [28] utilise précisément l'exemple de Lagrange pour introduire et illustrer la méthode.

Le calcul des tores de Liouville de Kowalevski a déjà été fait dans [19], mais, d'une part les calculs sont assez pénibles et certains arguments ne sont pas très détaillés dans cet article, d'autre part, ces mêmes arguments reposent sur l'étude [4] qu'il n'est pas très facile de se procurer.

L'exemple de Kowalevski est à la fois un exemple très simple de système complètement intégrable: deux fonctions en involution sur une variété symplectique de dimension 4, et à la fois un exemple très difficile: une interprétation physique\* raisonnable en est très récente [7], tous les calculs reposent sur des changements de variables très astucieux et réputés mystérieux (dûs à Kowalevski elle-même). En fin de compte, les solutions s'expriment à l'aide de fonctions thêta associées à une courbe algébrique  $X$  de genre 2. Tout semble donc en place pour que la méthode "équation de Lax-courbe spectrale" se déroule pour donner une étude simple du problème en fournissant une belle application algébrique de la surface de niveau considérée dans la jacobienne de la courbe  $X$  correspondante, dont on peut rêver, les dimensions coïncidant, qu'elle soit un isomorphisme, réel qui plus est. Comme il est très facile de comprendre la partie réelle de la jacobienne de  $X$ , il n'y aurait plus rien à faire (voir [13]).

La réalité est à la fois plus compliquée et plus mystérieuse. D'abord, c'est un exemple qui a résisté très longtemps à la mise sous forme de Lax, ensuite la

---

\*Il y a bien sûr des bonnes raisons mathématiques de s'intéresser à ce cas: à part les cas d'Euler-Poinsot et de Lagrange, c'est le seul cas de "toupie" dont les solutions sont des fonctions méromorphes du temps, c'est d'ailleurs ainsi que Kowalevski l'a trouvé.

topologie des niveaux est définitivement *différente* de celle de la jacobienne de  $X$ ! On verra donc qu'il y a une certaine différence entre résoudre un système par des fonctions  $\mathcal{Y}$  sur une courbe  $X$  et linéariser le système sur la jacobienne d'une courbe spectrale.

Voici maintenant un résumé et un plan du présent article:

Nous allons commencer par rappeler la méthode générale et les équations différentielles du mouvement du solide avec un point fixe (que nous appellerons, comme tout le monde, une *toupie*) et les intégrales premières dans les cas dits d'Euler-Poinsot, de Lagrange et de Kowalevski (section 1.3).

Nous expliciterons complètement la méthode dans les cas d'Euler-Poinsot (et du solide libre) dans la Section 2 et de Lagrange dans la Section 3. Dans chacun de ces cas nous montrerons l'image de l'application moment, l'équivalence entre la lissité de la courbe spectrale et la régularité du niveau correspondant, et, en plus, comment la géométrie réelle de la jacobienne informe sur la topologie des niveaux (tores de Liouville et leurs bifurcations).

Toute la suite sera consacrée au cas de Kowalevski. Nous rappellerons tout d'abord les changements de variables de Kowalevski, pour expliquer comment s'introduit la courbe  $X$  et nous étudierons cette courbe en fonction des valeurs prises par les intégrales premières (section 4).

Nous rappellerons ensuite la forme de Lax de [7] dans la Section 5 où nous étudierons les différents avatars de la courbe spectrale associée. Nous aurons ainsi assez d'informations pour montrer dans la Section 6 que l'application de vecteurs propres est un isomorphisme sur son image. En particulier, les niveaux réguliers seront identifiés à des parties réelles de variétés de Prym réelles.

Ainsi dans la Section 7, nous pourrions identifier l'image de l'application moment et les nombres de tores de Liouville, et même les bifurcations de ces tores, en étudiant les variétés de Prym réelles concernées\*.

La littérature consacrée aux systèmes intégrables et en particulier aux toupies est très vaste et nous ne pouvons prétendre tout citer. Nous avons surtout utilisé les articles d'Adler et van Moerbeke [1], de Bobenko, Reiman et Semenov-Tian-Shanski [7] qui contient l'outil essentiel de ce travail (la forme de Lax que nous utilisons pour Kowalevski), de Reiman [23] et de Griffiths [15] et nous avons beaucoup pillé celui de Verdier [28] qui a été notre introduction au sujet.

A notre connaissance, il n'existe toutefois dans la littérature publiée aucun exemple de système intégrable dont les bifurcations de tores de Liouville aient été traitées complètement (malgré de nombreuses annonces plus ou moins crédibles). En plus de montrer l'utilisation de la méthode algèbro-géométrique pour ce type de problèmes, le présent travail innovera en présentant des résultats complets pour les trois cas traités.

---

\*La méthode choisie ici repose sur l'utilisation de l'application de vecteurs propres. Un autre type d'approche algèbro-géométrique est celle dite "de Painlevé" [2] et pourrait sans doute être utilisée aussi à des fins topologiques.

Nous avons bénéficié de discussions avec D. Bennequin, J.-Y. Mérindol et C. Sabbah. Enfin nous devons remercier A. Chenciner et N. Desolneux de nous avoir indiqué le très beau [7] sans quoi ce travail n'existerait pas.

## 0. Notations

Commençons par quelques rappels de géométrie algébrique réelle. Une courbe algébrique sur  $\mathbf{C}$ , ou plus généralement une variété projective complexe  $V$ , est *réelle* si elle admet une involution anti-holomorphe  $\sigma$ . Nous dirons que  $(V, \sigma)$ , ou plus simplement  $\sigma$ , est une structure réelle. La partie réelle de  $(V, \sigma)$  est formée des points fixes de  $\sigma$  et sera notée  $V(\mathbf{R})$ .

Remarquons qu'une courbe ou plus généralement une variété réelle peut avoir une partie réelle vide et que ceci n'enlève rien à son caractère réel. De la même manière une singularité réelle peut avoir une partie réelle vide.

Les niveaux communs des intégrales premières considérés dans cet article sont notés par un  $\mathcal{F}$ . Cette notation désigne bien le niveau réel. Les jacobiniennes et autres variétés abéliennes considérées sont complexes, et réelles au sens ci-dessus puisque définies par des courbes réelles.

## PREMIERS EXEMPLES

### 1. Introduction: la méthode de la courbe spectrale, les toupies

#### 1.1. La méthode de la courbe spectrale

On s'intéresse à des systèmes différentiels qu'on a été capable de mettre "sous forme de Lax", c'est à dire sous la forme

$$\dot{\vec{A}}(\lambda) = [A(\lambda), B(\lambda)]$$

où  $A(\lambda)$  et  $B(\lambda)$  sont des polynômes de Laurent en une variable à coefficients dans une algèbre de Lie (de matrices)  $\mathfrak{g}$ , dépendant du temps, et où le point désigne précisément la dérivation par rapport au temps\*.

L'intérêt de cette forme est que, grâce aux propriétés de la trace et du crochet, les coefficients du polynôme caractéristique

$$P(\lambda, \mu) = \det(A(\lambda) - \mu I)$$

---

\*En général,  $B$  dépend de  $A$ : l'équation est non-linéaire.

ne dépendent pas du temps: ce sont des intégrales premières.

La courbe d'équation  $P(\lambda, \mu) = 0$ , ou plutôt la courbe complète lisse  $X$  ayant cette équation pour  $\lambda \neq 0, \infty$  est dite *courbe spectrale*. Un point  $(\lambda, \mu)$  de la courbe spectrale décrit une valeur propre ( $\mu$ ) de la matrice  $A(\lambda)$ . Sous des hypothèses convenables,  $\mu$  est une valeur propre simple et l'on peut parler de *la droite propre associée*. On définit ainsi un fibré en droites complexes sur la courbe. Plus précisément: à chaque valeur spécifique des matrices constituant le polynôme  $A(\lambda)$ , on associe un fibré sur la courbe. Appelons  $\mathcal{T}_X$  l'ensemble des matrices donnant la même courbe  $X$  (c'est un niveau commun des intégrales premières que sont les coefficients dans  $X$ ). On a ainsi défini une application

$$f_X: \mathcal{T}_X \rightarrow \text{Pic}^d(X)$$

pour un certain entier  $d$  (en fait, pour avoir  $d > 0$ , on considère le fibré en droites dual de celui des vecteurs propres)<sup>†</sup>.

Une façon de dire que le système différentiel de départ se résout à l'aide de fonctions  $\mathcal{G}$  ou d'intégrales hyperelliptiques peut être de dire qu'il lui correspond par  $f_X$  un flot linéaire sur la jacobienne de  $X$  (ou son avatar  $\text{Pic}^d(X)$ ).

Les intégrales premières sont des polynômes en les coefficients de  $A(\lambda)$  et l'application  $f_X$  est algébrique. Remarquons aussi que, dans le cas où le système considéré est complètement intégrable (voir ci-dessous la Section 1.2),  $\mathcal{T}_X$  est une réunion de tores réels (tores de Liouville), et  $\text{Pic}(X)$  un tore complexe. On peut rêver que  $f_X$  soit un isomorphisme de la complexifiée de  $\mathcal{T}_X$  dans un ouvert de  $\text{Pic}(X)$ , ou de  $\mathcal{T}_X$  dans la partie réelle de  $\text{Pic}(X)$ . En fait, ce sera en général un revêtement de son image, ou une fibration.

Une méthode assez simple, dont une version est due à Reiman [23] et une autre à Griffiths [15] (voir aussi [1]) permet à la fois de calculer la différentielle de  $f_X$  et de dire si l'image du flot considéré est ou non linéaire.

### 1.1.1. Application tangente à $f$ (à la Reiman)

On considère donc l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  et des polynômes de Laurent en  $\lambda$  à coefficients dans  $\mathfrak{g}$ . On suppose que  $g$  est une fonction invariante sur  $\mathfrak{g}$  et on considère un hamiltonien de la forme

$$h(A(\lambda)) = \text{Res}(g(A(\lambda))\lambda^{-n-1} d\lambda)$$

(c'est à dire le coefficient de  $\lambda^n$  dans  $g(A)$ ). Son flot est alors décrit par une

---

<sup>†</sup>Comme l'explique bien Griffiths dans [15], les deux faits que  $X$  soit une courbe, et qu'elle soit lisse impliquent que ce fibré est bien défini dès lors qu'il l'est en un point général, c'est à dire dès lors qu'en un tel point, les sous-espaces propres de  $A(\lambda)$  sont de dimension 1.

équation de Lax

$$\dot{\hat{A}}(\lambda) = [A(\lambda), B(\lambda)]$$

où  $B(\lambda)$  est la partie polynôme (c'est à dire les puissances positives) de  $dh(A(\lambda))$ .

La courbe spectrale  $X$  associée est recouverte par deux ouverts (affines)  $\mathcal{U}_+$  et  $\mathcal{U}_-$  (correspondant à  $\lambda \neq \infty$  et  $\lambda \neq 0$  respectivement). A chaque valeur particulière de la matrice  $A(\lambda)$  on associe un fibré de degré  $d$  sur  $Y$ , (le dual de) celui des vecteurs propres.

Du fait que  $g$  est une fonction invariante sur  $\mathfrak{g}$ ,  $A(\lambda)$  commute avec  $dh(A(\lambda))$ , elles ont donc les mêmes vecteurs propres. Si  $v$  est un vecteur propre de  $A(\lambda)$  pour la valeur propre  $\mu$  ( $(\lambda, \mu) \in Y$ ), il est vecteur propre de  $dh(A(\lambda))$  pour une certaine valeur propre  $\psi(\lambda, \mu)$  qui est clairement une fonction holomorphe sur  $\mathcal{U}_+ \cap \mathcal{U}_-$ . Elle définit un cocycle et donc un élément de  $H^1(Y, \mathcal{O}_Y) = T_{\mathcal{L}} \text{Pic}^d(Y)$  qui est précisément l'image du champ de vecteurs défini par l'équation de Lax considérée\*.

De plus, dans le cas de ces formes de Lax particulières, l'image du flot est automatiquement linéaire.

### 1.1.2. Application tangente à $f$ (à la Griffiths)

Appelons  $P^-$  le diviseur  $\sum P_i$  des points où  $\lambda = \infty$  sur la courbe  $X$  et considérons le faisceau  $\mathcal{O}_X(P^-)$  des fonctions méromorphes qui ont au plus des pôles simples en les points de  $P^-$ :

$$\mathcal{O}_X(P^-) = \{f \in \mathcal{M}_X \mid (f) + P^- \geq 0\}$$

ainsi que la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X(P^-) \rightarrow \mathcal{O}_{P^-(P^-)} \rightarrow 0,$$

qui définit le faisceau "gratte-ciel"  $\mathcal{O}_{P^-(P^-)}$  des parties "Laurent" en les points de  $P^-$  des éléments de  $\mathcal{O}_X(P^-)$ , et son pendant cohomologique

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(P^-)) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_{P^-(P^-)}) \xrightarrow{\partial} H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow$$

Avec la seule hypothèse que le flot concerné est écrit sous forme de Lax, Griffiths montre que l'image du champ de vecteurs engendrant ledit flot dans  $H^1(X, \mathcal{O}_X)$  est l'image par  $\partial$  d'une section de  $\mathcal{O}_{P^-(P^-)}$  que nous décrivons maintenant:

Si  $A(\lambda)v = \mu v$ , alors, en dérivant par rapport au temps, on voit que  $B(\lambda)v + \dot{v}$

\*Naturellement  $\mathcal{O}_?$  désigne le faisceau des fonctions holomorphes sur?

est un vecteur propre de  $A(\lambda)$  pour  $\mu$  et, puisqu'on a supposé les sous-espaces propres de dimension 1,

$$B(\lambda)v = \varphi(\lambda, \mu)v - \dot{v}$$

et la section de  $\mathcal{O}_P(P^-)$  cherchée est celle induite par  $\varphi(\lambda, \mu)$ .

Il est facile de vérifier, quand  $B(\lambda)$  est de la forme considérée par Reiman, que les deux constructions coïncident. Sous l'hypothèse plus faible considérée par Griffiths, la linéarisation n'est pas automatique, mais elle se produit effectivement, par exemple quand la section obtenue ne dépend pas du temps.

### 1.2. Systèmes complètement intégrables

Les systèmes que nous allons étudier s'écrivent donc en termes de matrices. Nous aurons à considérer les orbites *coadjointes* de l'opération d'un groupe de Lie  $G$  sur le dual de son algèbre de Lie  $\mathfrak{g}^*$ :  $G$  sera ici  $SO(3)$  ou son fibré tangent  $SO(3) \tilde{\times} \mathfrak{so}(3)$ . Le dual  $\mathfrak{g}^*$  sera muni de sa structure de Poisson naturelle (celle de Kirillov) et les orbites coadjointes de la structure symplectique correspondante (voir [6] par exemple).

Les systèmes étudiés sont des systèmes hamiltoniens. Autrement dit, on dispose, sur la variété symplectique  $(M, \omega)$  – notre orbite coadjointe – d'une fonction  $H$  et le flot considéré est celui de son gradient symplectique.

On dit qu'un tel système est *complètement intégrable* s'il existe  $n$  fonctions  $H = H_1, H_2, \dots, H_n$  ( $2n = \dim M$ ) indépendantes sur un ouvert dense de  $M$  et en involution:  $\{H_i, H_j\} = 0$ . Les niveaux communs réguliers  $\mathcal{T}_{H_1, \dots, H_n}$  sont des sous-variétés lagrangiennes de  $M$  et Arnold a montré dans [5] que les composantes connexes compactes en sont des tores (les célèbres "tores de Liouville").

### 1.3. Les toupies

Les exemples que nous allons développer sont issus de la mécanique, aspect sur lequel nous ne nous appesentirons pas: le lecteur peut se reporter aux livres d'Appell [3] et d'Arnold [5]. La présentation qui suit est inspirée de l'exposé de Verdier [28].

Nous utiliserons systématiquement l'isomorphisme

$$(\mathbf{R}^3, \wedge) \rightarrow (\mathfrak{so}(3), [ , ])$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

le produit scalaire usuel permettant d'identifier le tout à  $\mathfrak{so}(3)^*$  où le groupe  $SO(3)$  opère par l'opération coadjointe... c'est à dire par rotations. Les orbites coadjointes  $y$  sont donc les sphères centrées à l'origine.

Soit  $\mathcal{J}$  la matrice d'inertie. C'est la matrice d'un opérateur symétrique défini positif (et constant), soient  $\Omega$  le vecteur instantané de rotation et  $M$  le moment cinétique – tous deux dans un repère lié au solide.

La "toupie" est une solide de masse 1 avec un point fixe dans un champ de pesanteur constant (d'intensité 1 dans les unités choisies). Si  $\Gamma$  désigne ce champ de pesanteur exprimé dans un repère lié au solide, les équations d'Euler-Poisson sont

$$\begin{cases} \dot{M} = [M, \Omega] + [\Gamma, L] \\ \dot{\Gamma} = [\Gamma, \Omega] \\ M = \mathcal{J}(\Omega) \end{cases} \quad (1)$$

où  $L = \overrightarrow{OG}$  (du point fixe au centre de gravité) est un vecteur constant qu'on peut supposer de longueur 1.

On se trouve maintenant dans  $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$  qu'il est naturel (vues les équations) de munir de la structure d'algèbre de Lie produit semi-direct:  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3) \times \mathbf{R}^3$  avec le crochet

$$[(h, v), (h', v')] = ([h, h'], h(v') - h'(v))$$

ou encore, grâce à notre identification de  $\mathbf{R}^3$  avec les matrices antisymétriques

$$[h + \varepsilon v, h' + \varepsilon v'] = [h, h'] + \varepsilon([h, v'] + [h', v])$$

(on prolonge le crochet par linéarité et on "fait"  $\varepsilon^2 = 0$ ).

Ainsi les deux premières équations du système (1) se résument en

$$\overbrace{\Gamma + \varepsilon M}^{\dot{\phantom{\Gamma + \varepsilon M}}} = [\Gamma + \varepsilon M, \Omega + \varepsilon L]$$

(Il reste à caser la troisième!)

On utilise aussi la forme bilinéaire symétrique non dégénérée *invariante*

$$(h, v) \cdot (h', v') = h \cdot v' + h' \cdot v$$

définie grâce au produit scalaire usuel de  $\mathbf{R}^3$ , grâce à laquelle on identifie  $\mathfrak{g}^*$  à  $\mathfrak{g}$ . Les orbites coadjointes concernées sont de dimension 4:

$$\Gamma + \varepsilon M \in \mathcal{O}_c \Leftrightarrow \begin{cases} \|\Gamma\|^2 = 1 \\ \Gamma \cdot M = c \end{cases}$$

(elles sont difféomorphes à  $\mathcal{O}_0 = TS^2$ ).

L'énergie est maintenant

$$H(\Gamma + \varepsilon M) = \frac{1}{2}M \cdot \Omega + \Gamma \cdot L$$

(somme de l'énergie cinétique, et de l'énergie potentielle).

Le gradient de  $H$  pour la forme bilinéaire considérée est:

$$\nabla_{\Gamma + \varepsilon M} H = \Omega + \varepsilon L$$

en effet, comme  $M \cdot \Omega = M \cdot \mathcal{J}(M)$  avec  $\mathcal{J}$  symétrique

$$\begin{aligned} dH_{\Gamma + \varepsilon M}(X + \varepsilon Y) &= \Omega \cdot Y + X \cdot L \\ &= (\Omega + \varepsilon L) \cdot (X + \varepsilon Y) \end{aligned}$$

Les deux premières équations de (1) s'écrivent

$$\overbrace{\Gamma + \varepsilon M}^{\dot{x}} = [\Gamma + \varepsilon M, \nabla_{\Gamma + \varepsilon M} H]$$

et sont donc de la forme  $\dot{x} = [x, \nabla_x H]$ . Le produit scalaire utilisé pour calculer le gradient étant celui qui définit l'isomorphisme  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ , on en déduit immédiatement que  $\Omega + \varepsilon L$  est le champ hamiltonien associé à  $H$ .

Pour que le système soit complètement intégrable sur  $\mathcal{O}_c$ , il faut encore qu'il existe une autre intégrale première  $K$ . C'est le cas quand

1. Le point fixe est au centre de gravité:  $O = G$  ou  $L = 0$ , cas dit d'Euler-Poinsot, où  $K = \|M\|^2$  convient (le lecteur vérifiera facilement que  $H$  et  $K$  sont en involution).
2. La toupie est symétrique: il existe un repère orthonormé lié au solide où

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} l & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

(quitte à changer d'unités on peut supposer – ce que nous ferons – que  $l = 1$ ) et dont le troisième vecteur est colinéaire à  $L$ :  $OG$  est un axe de symétrie pour le solide. En d'autres termes  $(M - \Omega) \wedge L = 0$ . Ce cas est dit "de Lagrange",  $K = M \cdot L$ , le moment de Lagrange, est alors une intégrale première. De plus

$\nabla_{\Gamma + \varepsilon M} K = L$  et

$$\begin{aligned} \omega_{\Gamma + \varepsilon M}(\nabla_{\Gamma + \varepsilon M} H, \nabla_{\Gamma + \varepsilon M} K) &= \omega_{\Gamma + \varepsilon M}(\Omega + \varepsilon L, L) \\ &= (\Gamma + \varepsilon M) \cdot [\Omega + \varepsilon L, L] \\ &= (\Gamma + \varepsilon M) \cdot [\Omega, L] \\ &= M \cdot (\Omega \wedge L) \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque  $M$  est dans le plan  $(\Omega, L)$  et donc les deux intégrales commutent.

REMARQUE. La fonction  $K$  est le moment de Lagrange, elle doit donc engendrer un flot de rotations autour de l'axe  $L$ . C'est en effet le cas puisque son gradient symplectique est

$$\begin{aligned} X_K(\Gamma + \varepsilon M) &= [\nabla_{\Gamma + \varepsilon M} K, \Gamma + \varepsilon M] \\ &= [L, \Gamma + \varepsilon M] \\ &= [L, \Gamma] + \varepsilon [L, M] \end{aligned}$$

Le vecteur  $[L, X] = L \wedge X$  est obtenu en projetant  $X$  sur le plan orthogonal à  $L$  et en le faisant tourner d'un quart de tour, c'est à dire le champ fondamental de l'opération de  $S^1$  par rotations autour de l'axe  $L$ .

3. Il existe une base orthonormée liée au solide dans laquelle

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

(on supposera encore que  $m = 1$ ) et dont le premier vecteur est colinéaire à  $L$ . C'est le cas de Kowalevski. Si, dans la même base,

$$\Omega = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

la fonction

$$K = |(p + iq)^2 + (\gamma_1 + i\gamma_2)|^2$$

est une deuxième intégrale première, qui commute avec l'énergie  $H$  (les calculs

sont aussi classiques que les précédents, mais un peu plus pénibles, ils sont donc laissés au lecteur).

Pour une discussion détaillée des différentes raisons qui peuvent amener à ne considérer que ces trois cas, voir le livre de Golubev [14].

## 2. Le solide libre en dimension 3 et la toupie d'Euler-Poinsot

### 2.1. Le solide libre

Les équations (1) s'écrivent, dans le cas d'Euler-Poinsot

$$\begin{cases} \dot{M} = [M, \Omega] \\ \Gamma = [\Gamma, \Omega] \\ M = \mathcal{J}(\Omega) \end{cases}$$

puisque  $L = 0$ . La deuxième traduit simplement le fait que  $\Gamma$  est un vecteur constant (dans le repère fixe). Nous allons donc seulement étudier les deux autres, c'est à dire le système

$$\begin{cases} \dot{M} = [M, \Omega] \\ M = \mathcal{J}(\Omega) \end{cases}$$

qui décrit un *solide libre*. C'est une bonne illustration de la méthode puisqu'il s'agit d'un exemple de (très) petite dimension\*:  $M \in \mathbf{R}^3 = \mathfrak{so}(3)$ .

### 2.2. Tores de Liouville pour le solide libre

Les deux intégrales premières sont

$$\begin{cases} H = \frac{1}{2} M \cdot \Omega \\ K = \|M\|^2 \end{cases}$$

Les niveaux de  $K$  sont les orbites (co)-adjointes, c'est à dire les sphères centrées à l'origine. Si  $M = (u, v, w)$  et si  $\mathcal{J}$  est la matrice diagonale  $(a_1, a_2, a_3)$  (on suppose les  $a_i > 0$  distincts), alors

$$H = \frac{1}{a_1} u^2 + \frac{1}{a_2} v^2 + \frac{1}{a_3} w^2.$$

---

\*Mais ayant suscité des généralisations intéressantes: y remplacer  $\mathfrak{so}(3)$  par  $\mathfrak{so}(n)$ .

Le problème des tores de Liouville et de leurs bifurcations est donc celui de la fonction  $H$  sur les sphères de dimension 2:

$$\mathcal{O}_{p^2} = \{M \in \mathbf{R}^3 \mid u^2 + v^2 + w^2 = p^2\}.$$

Ce n'est donc pas très compliqué. Ces "tores" sont représentés sur la figure 1.

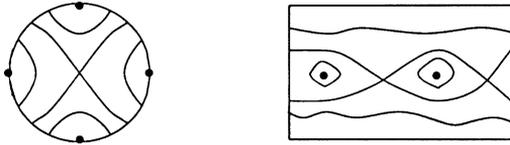


Fig. 1.

### 2.3. Une forme de Lax et la courbe spectrale

Manakov [21] a remarqué que les équations d'Euler se mettent sous forme de Lax en

$$\overbrace{M + J^2\lambda}^{\cdot} = [M + J^2\lambda, \Omega + J\lambda] \tag{2}$$

où  $J$  est la matrice diagonale  $(b_1, b_2, b_3)$  avec

$$\begin{cases} 2b_1 = -a_1 + a_2 + a_3 \\ 2b_2 = a_1 - a_2 + a_3 \\ 2b_3 = a_1 + a_2 - a_3 \end{cases} \tag{3}$$

(de sorte que, matriciellement,  $M = \mathcal{J}(\Omega) = \Omega J + J\Omega$ ). On supposera les  $a_i$  et de même les  $b_i$  distincts. Remarquons que cette forme de Lax n'est pas dans  $\mathfrak{so}(3)[\lambda, \lambda^{-1}]$  mais dans  $\mathfrak{gl}(3)[\lambda, \lambda^{-1}]$ .

La courbe spectrale correspondante  $X$  a pour équation

$$(b_1^2\lambda - \mu)(b_2^2\lambda - \mu)(b_3^2\lambda - \mu) + (b_1^2\lambda - \mu)u^2 + (b_2^2\lambda - \mu)v^2 + (b_3^2\lambda - \mu)w^2 = 0$$

soit, sur l'orbite  $\mathcal{O}_{p^2}$

$$(b_1^2\lambda - \mu)(b_2^2\lambda - \mu)(b_3^2\lambda - \mu) + H'\lambda - p^2\mu = 0 \tag{4}$$

avec  $H' = b_1^2u^2 + b_2^2v^2 + b_3^2w^2$ , qui est naturellement une combinaison linéaire de  $H$  et  $K$  grâce à (3):

$$H' = a_1a_2a_3H + [\frac{1}{4}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - \frac{1}{2}(a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1)]K.$$

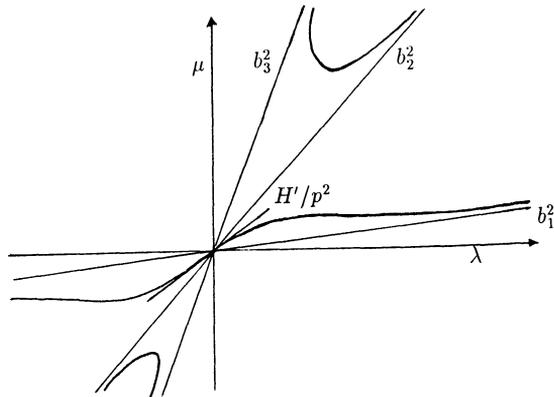


Fig. 2.

Sur l'orbite  $O_{p^2}$ , on peut remplacer sans dommages l'étude de  $H$  par celle de  $H'$ .

La courbe  $X$  est de genre 1. La figure 2 la représente dans ses coordonnées naturelles.

La figure 3, quant à elle, représente côte à côte, les niveaux de  $H$  et les parties réelles des courbes spectrales correspondantes. On remarque, et on démontre aisément, que la courbe spectrale  $X(\mathbb{C})$  est lisse si et seulement si le niveau (réel) correspondant est régulier. Comme  $X$  est de genre 1, elle est isomorphe à sa jacobienne et la partie droite de la figure doit représenter la fibration jacobienne, comme nous le verrons rapidement (dans 2.5).

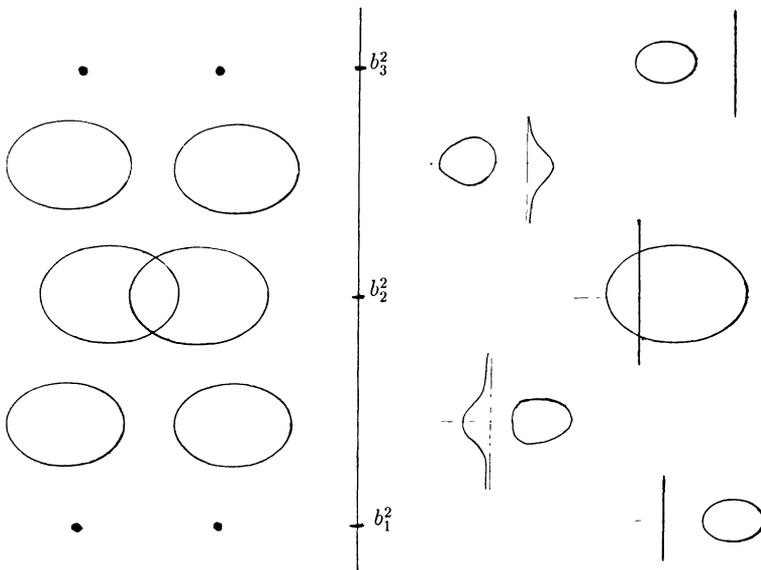


Fig. 3.

Sur cette figure, la courbe est dessinée dans les coordonnées  $y = \lambda^{-1}\mu$  en abscisses,  $t = \lambda^{-1}$  en ordonnées, coordonnées dans lesquelles on voit bien que la forme de sa partie réelle ne dépend que de la position de  $H'/p^2$  par rapport aux  $b_i^2$ .

#### 2.4. Application de vecteurs propres

Nous allons démontrer ici ce que ne montre pas la Fig. 3:

**PROPOSITION 2.4.1.** *Si  $H \in \mathbf{R}$  est une valeur régulière, l'application de vecteurs propres  $f_H: \mathcal{F}_H \rightarrow \text{Pic}^3(X)$  est un revêtement d'ordre 4 de la partie réelle.*

**DEMONSTRATION.** Le calcul du degré est standard et se fait par exemple par le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch (voir 6.2). Commençons donc par regarder la courbe  $X$  dans ses coordonnées naturelles comme sur la figure 2. Le diviseur  $P^-$  au dessus de  $\lambda = \infty$  est  $P_1 + P_2 + P_3$  où  $P_i: \mu = b_i^2\lambda, (\lambda, \mu) = (\infty, \infty)$ .

Dans ce cas, il est un peu délicat d'appliquer la méthode de Reiman, puisque la forme de Lax (2) s'obtient seulement formellement à l'aide d'une fonction invariante  $g$  comme à la Section 1.1.1:  $g$  devrait être

$$g(A) = \frac{2}{3} \text{tr } A^{3/2}$$

(voir [23] ou [1]). Alors  $dg(A)$  serait  $\text{tr} \sqrt{A}$ . Comme au voisinage de  $P_i$ , on a  $\mu \sim b_i^2\lambda$ , l'élément de  $H^1(X, \mathcal{O}_X)$  obtenu comme image du flot de  $H'$  devrait être l'image de

$$\sum_{i=1}^3 \frac{b_i}{t_i} \in H^0(X, \mathcal{O}_{P^-(P^-)})$$

( $t_i = 1/\lambda$  est une coordonnée locale près de  $P_i$ ).

C'est bien ce que donne la méthode de Griffiths.

**REMARQUE.** Considérons la suite exacte

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(P^-)) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_{P^-(P^-)}) \xrightarrow{\partial} H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow$$

Une section du faisceau gratte-ciel est envoyée sur 0 quand elle provient d'une section de  $\mathcal{O}_X(P^-)$ , autrement dit quand il existe une fonction méromorphe sur  $X$  dont les pôles sont en les points de  $P^-$ , avec le développement prescrit. Par exemple  $\sum_{i=1}^3 1/t_i$  va sur zéro: il correspond à la fonction  $\lambda$ , de même  $\sum_{i=1}^3 b_i^2/t_i$ , qui correspond à  $\mu$ . Nous allons montrer que  $\sum_{i=1}^3 b_i/t_i$  n'est pas envoyé sur zéro, nécessairement par un calcul un peu précis, à cause des deux exemples précédents.

Choisissons  $\omega \in H^0(X, \Omega_X^1)$  et montrons donc que

$$\sum_{i=1}^3 b_i \operatorname{Res}_{P_i} \left( \frac{\omega}{t_i} \right) \neq 0$$

Pour ce faire on transforme l'équation (4) en l'écrivant dans les coordonnées  $y$  et  $t$  ci-dessus

$$(b_1^2 - y)(b_2^2 - y)(b_3^2 - y) + t^2(H' - p^2y) = 0.$$

Il n'y a plus qu'à poser  $u = 1/(p^2y - H')$ ,  $z = tu$  pour avoir  $X$  sous forme de Weierstrass  $z^2 = P(u)$ , de sorte que  $\omega = \frac{du}{z}$  est un générateur de  $H^0(X, \Omega_X^1)$ .

LEMME 2.4.2

$$\operatorname{Res}_{P_1} \left( \frac{du}{t_1 z} \right) = \frac{2p^2}{(b_3^2 - b_1^2)(b_2^2 - b_1^2)}$$

On a alors le résultat cherché puisque

$$\sum_{i=1}^3 b_i \operatorname{Res}_{P_i} \left( \frac{\omega}{t_i} \right) = -2p^2 \frac{(b_3 - b_1)(b_1 - b_2)(b_2 - b_3)}{(b_3^2 - b_1^2)(b_1^2 - b_2^2)(b_2^2 - b_3^2)} \neq 0$$

(les  $b_i$  sont distincts).

Remarquons aussi, comme prévu, que le lemme donne

$$\sum_{i=1}^3 \operatorname{Res}_{P_i} \left( \frac{\omega}{t_i} \right) = 0, \quad \sum_{i=1}^3 b_i^2 \operatorname{Res}_{P_i} \left( \frac{\omega}{t_i} \right) = 0$$

Ainsi,  $f_X$  est submersive. En utilisant la méthode que nous expliquerons dans 6.4 (en gros, chercher les matrices  $g \in GL(3, \mathbb{C})$  telles que  $g(M + J^2\lambda)g^{-1}$  soit une matrice de la même forme  $M' + J^2\lambda$ ), on montre aisément que  $f_X$  est un revêtement d'ordre 4: les points

$$M = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha u \\ \beta v \\ \alpha\beta w \end{bmatrix}$$

(avec  $\alpha^2 = \beta^2 = 1$ ) ont la même image, voir [17] par exemple, où Haine montre qu'en fait les réseaux de périodes sont proportionnels, ce qui fait que le niveau  $\mathcal{F}_H$  est quand même isomorphe à la courbe elliptique.  $\square$

Il nous reste à faire le petit calcul qui donne la démonstration du lemme. Au voisinage de  $P_1$ , on développe

$$y = b_1^2 + \frac{p^2 b_1^2 - H'}{(b_3^2 - b_1^2)(b_2^2 - b_1^2)} t^2 + o(t^2)$$

on pose  $A = (b_3^2 - b_1^2)(b_2^2 - b_1^2)$  et on calcule

$$\frac{du}{tz} = -\frac{p^2 dy}{t^2(p^2 y - H')} = \frac{-p^2 \left[ \frac{2(H' - p^2 b_1^2)}{A} t + o(t) \right] dt}{t^2[(p^2 b_1^2 - H') + o(t)]}$$

et

$$\text{Res}_{P_1} \left( \frac{du}{t_1 z} \right) = \frac{2p^2}{A}$$

comme annoncé. □

### 2.5. Etude des bifurcations

Dans toute la suite de cette section on suppose  $K$ , et donc  $p^2$ , fixé\*.

Nous désignerons par  $\mathcal{C}_{H'}$  la courbe complexe, complexifiée du niveau  $\mathcal{T}_{H',K}$  ( $K$  fixé comme ci-dessus). En fait il est facile de voir qu'en utilisant exactement les mêmes formules on peut aussi définir  $\mathcal{C}_{H'}$  lorsque  $H'$  est complexe. Comme il existe un ouvert non vide de  $\mathbf{R}$  au-dessus duquel les  $\mathcal{C}_{H'}$  sont des courbes lisses de genre 1, il existe un ouvert  $U$  de  $\mathbf{C}$  au-dessus duquel les  $\mathcal{C}_{H'}$  le sont aussi. On peut de plus toujours choisir  $U$ , et c'est ce que nous ferons, de façon à ce qu'il soit globalement invariant par conjugaison complexe.

Avec la construction ci-dessus nous avons une surface complexe  $\mathcal{C}$ , fibrée en courbes elliptiques au-dessus de  $U$ . La conjugaison complexe opérant sur cette surface, nous avons une structure réelle, évidemment compatible avec la fibration et donc une surface elliptique réelle au sens de [26]. A une telle surface on peut associer sa fibration jacobienne définie de la manière suivante. Comme toutes les courbes sont homéomorphes, on peut supposer que c'est une même surface topologique  $C_{\text{top}}$  et que c'est la structure complexe qui varie avec  $H'$ . On fixe une base  $(\alpha, \beta)$  de  $H_1(C_{\text{top}}, \mathbf{Z})$ . Pour chaque  $H'$  il existe une forme holomorphe  $\omega_{H'}$  sur  $\mathcal{C}_{H'}$  telle que  $\int_{\beta} \omega_{H'} = 1$ . Notons  $\tau_{H'} = \int_{\alpha} \omega_{H'}$  et faisons

---

\*En fait, pour ce que nous allons faire, on pourrait tout aussi bien faire l'inverse i.e. fixer  $H'$  et faire varier  $K$ .

opérer  $\mathbf{Z}^2$  sur  $\mathbf{C} \times U$  par

$$(n, m) \cdot (z, H') = (z + n\tau_{H'} + m, H')$$

Le quotient de  $\mathbf{C} \times U$  par cette opération de  $\mathbf{Z}^2$  est la fibration jacobienne de  $\mathcal{C}$ . On remarquera que la surface ainsi obtenue possède une structure réelle induite par celle de  $\mathcal{C}$ .

De la même manière que nous avons construit  $\mathcal{C}$ , on peut à l'aide des  $X_{H'}$  construire une surface  $\mathcal{X}$ , fibrée elle aussi en courbes elliptiques au-dessus d'un ouvert  $U'$ . Soit  $U'' = U' \cap U$  (en fait, comme on le verra plus bas, on peut choisir  $U = U'$  ce qui montrera, entre autre, que  $\mathcal{T}_{H',K}(\mathbf{C})$  est lisse si et seulement si  $X_{H'}$  est lisse). Nous allons montrer

**LEMME 2.5.1.** *La fibration elliptique  $\mathcal{X}$  au-dessus de  $U''$  est isomorphe à la fibration jacobienne de  $\mathcal{C}$ , au-dessus de  $U''$  et cet isomorphisme est réel.*

Le résultat découle de la démonstration donnée par Haine [17] du fait correspondant pour  $X_{H'}$  et la jacobienne de  $\mathcal{C}_{H'}$ . Pour être plus précis on remarque tout d'abord que le changement de variables, mentionné plus haut, qui permet de mettre les courbes  $X_{H'}$  sous la forme  $z^2 = P(u)$ , avec  $\deg P = 3$ , dépend algébriquement de  $H'$  et est compatible avec la structure réelle. Ensuite que l'on peut normaliser, grâce à une transformation de la forme

$$u \mapsto \frac{au - b}{d}$$

qui dépend algébriquement des racines et donc de  $H'$ , les courbes sous la forme  $z^2 = u(1-u)(1-cu)$  (on pourra prendre  $a = 1$ ,  $b = 1/(p^2 b_1^2 - H')$  et

$$d = \frac{p^2(b_1^2 - b_3^2)}{(p^2 b_1^2 - H')(p^2 b_3^2 - H')}$$

ce qui donne pour  $c$

$$c = \frac{(b_1^2 - b_2^2)(p^2 b_3^2 - H')}{(b_1^2 - b_3^2)(p^2 b_2^2 - H')}$$

ce qui, à une permutation des  $b_i$  près, correspond exactement à la forme donnée par Haine).

De là il est possible en suivant exactement la démonstration proposée par Haine de montrer que le réseau des périodes de  $\mathcal{C}$  est proportionnel au réseau des périodes de  $\mathcal{X}$  (et ceci, cette fois ci, indépendamment de  $H'$ ), ce qui démontre le lemme.

REMARQUE. En fait le résultat du lemme 2.5.1 est encore vrai si l'on remplace  $U''$  par  $C$ . Ceci découlera des considérations qui suivent.

Le lemme 2.5.1 va nous permettre d'expliquer les similitudes et les différences entre les fibres  $\mathcal{T}_{H'}$  et la partie réelle des fibres  $X_{H'}$  et ceci y compris dans le cas où les fibres sont singulières.

Tout d'abord on remarquera que sauf dans les cas  $H' = b_1^2$  et  $H' = b_3^2$ , la fibre  $\mathcal{T}_{H'}$  est lisse si et seulement si la fibre  $X_{H'}$  n'a pas de singularités réelles. Si  $H' = b_1^2$  ou si  $H' = b_3^2$  la fibre  $\mathcal{T}_{H'}$  est formée de deux points isolés alors que la fibre  $X_{H'}$  est formée de deux courbes rationnelles qui se coupent en deux points complexes conjugués. Pour comprendre la correspondance dans ce dernier cas nous aurons besoin de quelques remarques. Tout d'abord la fibre  $X_{H'}$  n'est pas lisse, elle a deux points singuliers complexes conjugués. Pour de nombreuses raisons il est important de considérer ceci comme une singularité réelle. On trouve du coup que  $\mathcal{T}_{H'}$  est lisse si et seulement si  $X_{H'}$  n'a pas de singularités réelles au sens ci-dessus\*.

Ensuite on remarquera que d'une part la surface  $\mathcal{C}$  est lisse (c'est évident puisque  $\mathcal{C}$  n'est rien d'autre que la surface  $u^2 + v^2 + w^2 = p^2$ ) et que d'autre part la fibration au-dessus de  $C$  par les  $X_{H'}$  est isomorphe au modèle de Néron de  $\mathcal{X}$  (ceci peut se démontrer par le calcul en utilisant la forme  $y^2 = z(1-z)(1-cz)$  ci-dessus et la caractérisation des fibres singulières donnée dans [26]). Ceci explique complètement et la différence et la correspondance entre les deux fibres.

Si  $b_1^2 < H' < b_3^2$  les fibres sont identiques. Ceci s'explique de la manière suivante: les fibres sont toutes semi-stables (les seules singularités sont des singularités quadratiques ordinaires) et pour chaque  $H'$  il existe un voisinage sur lequel aucune fibre  $\mathcal{T}_{H'}$  n'est vide. De plus aucune fibre n'est réduite à des points isolés. Dans ce contexte le fait que les fibres soient identiques découle du théorème VII 2.2 de [26].

Si  $b_1^2 > H'$  ou si  $b_3^2 < H'$ ,  $\mathcal{T}_{H'}$  est vide alors que  $X_{H'}(\mathbf{R})$  a deux composantes connexes. Ceci correspond au fait qu'une courbe réelle de genre 1, dont la partie réelle est vide a une jacobienne dont la partie réelle a deux composantes connexes (c'est facile à démontrer mais on peut consulter [16] ou [24]).

Si  $H' = b_1^2$  ou si  $H' = b_3^2$  la fibre  $\mathcal{T}_{H'}$  est celle décrite théorème VII 2.1 (dernier cas) de [26] à laquelle correspond la fibre du modèle de Néron de sa fibration jacobienne qui est décrite p. 154 (milieu de page, cas  $m = 2$ ) de [26] ce qui est exactement la fibre  $X_{H'}$ .

## 2.6. Tores de Liouville pour la toupie d'Euler-Poinsot

Revenons au cas d'Euler-Poinsot. Nous avons déterminé les trajectoires de  $M$

\*En fait ceci semble être un résultat tout à fait général à condition bien sûr, de remplacer lisse par "n'a pas de singularité réelle" et de prendre la même définition de part et d'autre.

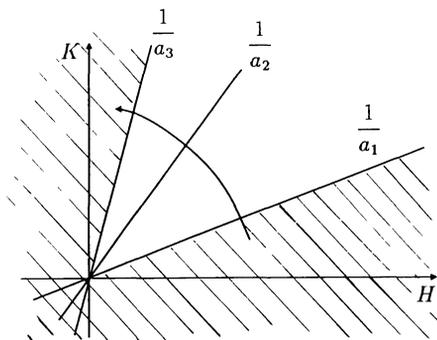


Fig. 4.

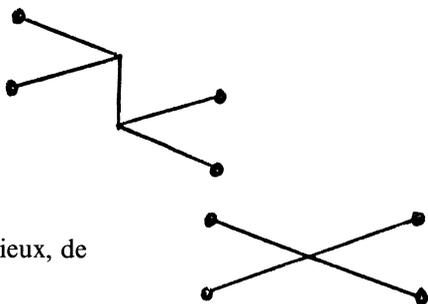
pour  $H = \text{cste}$ ,  $K = \text{cste}$ . Les niveaux pour Euler-Poinsot s'en déduisent: pour chaque valeur de  $M$ , le vecteur  $\Gamma$  vérifie  $\Gamma \cdot M = c$  et  $\|\Gamma\|^2 = 1$ . Autrement dit, le niveau  $\mathcal{F}$  est un fibré en cercles sur le niveau  $H = K = \text{cste}$  si  $c \in ]-p, p[$ , identique à ce niveau si  $c = \pm p$  et vide dans les autres cas.

La figure 4 représente l'image de l'application moment  $(H, K)$  (noter que  $H = K/a_i \Leftrightarrow H' = b_i^2 K$ ). Si  $c \in ]-p, p[$ , en suivant le chemin représenté par la flèche, on trouve la situation suivante pour les tores de Liouville:

$\emptyset$ , 2 cercles, 2 tores, produit de 2 cercles se coupant en 2 points par un cercle, 2 tores, 2 cercles,  $\emptyset$ .

La bifurcation centrale est le modèle qui manque dans la liste de Fomenko [11] (bien qu'il figure dans la plupart des exemples considérés dans les livres de cet auteur).

En imitant les graphes de Fomenko, il s'agit de



ou mieux, de

### 3. Le cas de Lagrange

#### 3.1. La courbe spectrale

On reprend les notations de la Section 1.3. En remplaçant  $\varepsilon$  par une variable polynomiale  $\lambda$  et en décalant les exposants, on voit facilement que le système (1)

est équivalent à

$$\overbrace{\Gamma\lambda^{-1} + M + L\lambda} = [\Gamma\lambda^{-1} + M + L\lambda, \Omega + \lambda L]$$

C'est la mise sous forme de Lax de la toupie symétrique. On dispose donc d'une "courbe spectrale", la courbe d'équation

$$\det(\Gamma\lambda^{-1} + M + L\lambda - \mu I) = 0$$

où  $\Gamma\lambda^{-1} + M + L\lambda$  est considéré comme une matrice antisymétrique et donc où le polynôme caractéristique s'écrit  $\mu(\mu^2 + \|\Gamma\lambda^{-1} + M + L\lambda\|^2)$  avec

$$\begin{aligned} Q(\lambda) &= \|\Gamma\lambda^{-1} + M + L\lambda\|^2 \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\Gamma\lambda^{-1} + M + L\lambda)^2 \\ &= -\frac{1}{2} [\operatorname{tr}(\Gamma^2)\lambda^{-2} + 2 \operatorname{tr}(M\Gamma)\lambda^{-1} + \operatorname{tr}(M^2 + 2L\Gamma) \\ &\quad + 2 \operatorname{tr}(LM)\lambda + \operatorname{tr}(L^2)\lambda^2] \\ &= \lambda^{-2} + 2M \cdot \Gamma\lambda^{-1} + \|M\|^2 + 2\Gamma \cdot L + 2M \cdot L\lambda + \lambda^2 \end{aligned}$$

(on remarquera comme le décalage utilisé dans les puissances de  $\lambda$  met bien en évidence les rôles analogues joués par les moments  $c = M \cdot \Gamma$  et  $K = M \cdot L$ ). Ainsi  $Q$  s'écrit, sur l'orbite  $\mathcal{O}_c$ :  $Q(\lambda) = \lambda^{-2} + 2c\lambda^{-1} + H' + 2K\lambda + \lambda^2$ , où:

$$H' = \|M\|^2 + 2\Gamma \cdot L = 2H + \frac{m-1}{m} K^2$$

les coefficients de  $Q$  sont, à peu de choses près, les intégrales premières  $H$  et  $K$  déjà exhibées.

Ainsi la courbe spectrale a pour équation

$$\mu(\mu^2 + Q(\lambda)) = 0$$

et est indexée par les niveaux de  $(H', K)$  ou de  $(H, K)$ , ce qui revient au même.

Il sera commode d'utiliser la courbe (de genre 1)  $X$  d'équation

$$\mu^2 + \lambda^{-2} + \lambda^2 + 2(c\lambda^{-1} + K\lambda) + H' = 0 \quad (5)$$

### 3.2. Niveaux réguliers

La courbe  $X$  décrit les valeurs propres non nulles de la matrice antisymétrique  $A(\lambda) = \Gamma\lambda^{-1} + M + L\lambda$ . La courbe complexe  $X(\mathbb{C})$  est lisse exactement quand le

polynôme  $\lambda^2 Q(\lambda)$  n'a pas de racine multiple (en particulier, elle n'a aucun point réel dans ce cas:  $X(\mathbf{R}) = \emptyset$ ). Le polynôme de Laurent  $Q$  est indexé par les valeurs de  $(H, K)$ .

**PROPOSITION 3.2.1.**  *$a \in \mathbf{R}^2$  est une valeur régulière de  $(H, K)$  si et seulement si la courbe complexe correspondante  $X(\mathbf{C})$  est lisse.*

**DEMONSTRATION.** Le polynôme  $\lambda^2 Q$  est réel et positif sur  $\mathbf{R}$ . Pour que  $X(\mathbf{C})$  soit singulière, il faut et il suffit que  $\lambda^2 Q$  ait une racine multiple, c'est à dire, si celle-ci est réelle, que  $Q$  ait une racine réelle, et sinon que  $\lambda^2 Q$  soit le carré d'un polynôme réel irréductible de degré deux. Autrement dit, soit

$$\exists \lambda \in \mathbf{R} \mid \Gamma \lambda^{-1} + M + L\lambda = 0$$

soit (tous calculs faits)

$$Q(\lambda) = (\lambda + c + \lambda^{-1})^2$$

avec  $c^2 - 4 < 0$ , ou encore

$$\begin{cases} H' = c^2 + 2 \\ K = c \end{cases} \quad c^2 - 4 < 0$$

Examinons maintenant les niveaux de  $(H, K)$ . On se place sur l'orbite  $\mathcal{O}_c$

$$\begin{cases} \|\Gamma\|^2 = 1 \\ \Gamma \cdot M = c \end{cases}$$

et on cherche quand les fonctions

$$H(\Gamma + \varepsilon M) = \frac{1}{2} \Omega \cdot M + \Gamma \cdot L$$

$$K(\Gamma + \varepsilon M) = L \cdot M$$

sont indépendantes. Leurs gradients ont déjà été calculés à la Section 1.3:  $\nabla_{\Gamma + \varepsilon M} H = \Omega + \varepsilon L$ ,  $\nabla_{\Gamma + \varepsilon M} K = L$ . Avec la même forme bilinéaire invariante, les gradients des deux fonctions définissant l'orbite  $\mathcal{O}_c$  sont évidemment  $\varepsilon \Gamma$  et  $\Gamma + \varepsilon M$  respectivement. Le problème des niveaux réguliers est donc celui du rang de la matrice  $6 \times 4$

$$\begin{pmatrix} 0 & \Gamma & \Omega & L \\ \Gamma & M & L & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui n'est pas très difficile. En se souvenant que  $M - \Omega$  est colinéaire à  $L$ , on trouve que

1. Le rang de  $(H, K)$  est 0 quand les quatre vecteurs  $L, \Gamma, M, \Omega$  sont colinéaires: l'axe de la toupie est vertical, le moment cinétique aussi et il est *constant*. La valeur que  $(H, K)$  prend en ces points est

$$H = \frac{c^2}{2m} + \eta \quad (\eta = \pm 1)$$

$$K = c\eta$$

ou

$$H' = c^2 + 2\eta$$

$$K = c\eta$$

grâce aux formules précédentes. Pour  $\eta = 1$  et  $c < 2$  on trouve le point  $(H', K)$  où  $Q$  a deux racines doubles conjuguées.

2. Le rang de  $(H, K)$  est 1 quand il y a une relation linéaire de la forme  $\Gamma\lambda^{-1} + M + L\lambda = 0$  comme on le vérifie aisément, autrement dit quand  $\lambda^2 Q$  a une racine réelle (nécessairement double). □

La discussion précédente est résumée par la Fig. 5 où l'on voit les valeurs prises par l'application  $(H', K)$  pour  $c \geq 0$ .

Les deux points • de chaque figure indiquent les valeurs de  $(H', K)$  pour lesquelles le polynôme  $\lambda^2 Q$  a deux racines doubles, la courbe celles pour lesquelles il a une racine double (réelle). Sur la première figure, un des points n'est pas sur la courbe: il correspond à deux racines doubles complexes non réelles et aussi à une courbe  $X_0(\mathbb{C})$  singulière dont la partie réelle est vide (et donc lisse).

Naturellement, ces dessins représentent des sections du discriminant (queue

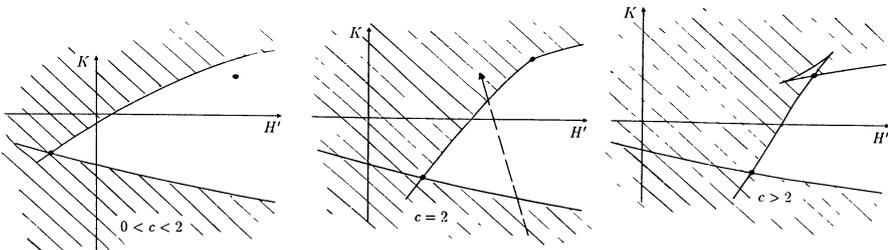


Fig. 5.

d'aronde) des polynômes de degré 4. La courbe discriminante se paramètre par la racine double  $t$ :

$$H' = t^2 - \frac{4c}{t} - \frac{3}{t^2}$$

$$K = -t + \frac{c}{t^2} + \frac{1}{t^3}$$

Elle a deux branches  $t < 0$  et  $t > 0$  qui s'échangent quand on remplace  $c$  par  $-c$  (c'est pourquoi étudier le cas  $c \geq 0$  suffit) et qui se recoupent quand  $\lambda^2 Q$  a deux racines doubles réelles, c'est à dire quand  $t^2 - ct + 1 = 0$  (intersection des deux branches, en  $(H', K) = (c^2 - 2, -c)$ ) et  $t^2 + ct + 1 = 0$  si  $c^2 - 4 \geq 0$  (auto-intersection d'une des branches, en  $(H', K) = (c^2 + 2, c)$ ).

Quand  $c^2 - 4 < 0$ , les deux racines de  $t^2 + ct + 1 = 0$  sont quand même des racines doubles de  $\lambda^2 Q$  qui, étant conjuguées, correspondent bien à des valeurs réelles  $(c^2 + 2, c)$  de  $H'$  et  $K$ .

Les zones hachurées ne sont pas atteintes comme on le voit en remarquant que  $H' \geq -2$  d'une part, et d'autre part, comme  $\lambda^2 Q$  est un polynôme réel positif, qu'il ne peut avoir une racine réelle d'ordre exactement 3.

### 3.3. Application de vecteurs propres

Elle envoie un niveau  $(H, K)$  indexant la courbe  $X$  dans la jacobienne de celle-ci. Plus précisément, on a

$$f_{H,K}: \mathcal{T}_{H,K} \rightarrow \text{Pic}^4(X)$$

Le calcul du degré n'est pas difficile, il sera fait un peu plus bas, où nous calculerons explicitement l'image de  $f_{H,K}$ .

Notons qu'ici  $\dim \mathcal{T}_{H,K} = 2$  et  $\dim \text{Jac}(X) = 1$ . C'est lié au fait que le flot de  $K$  engendre un groupe (compact) de rotations comme on l'a remarqué à la Section 1.3. On a

**PROPOSITION 3.3.1.** *L'application  $f = f_{H,K}$  est une submersion. Le noyau de sa différentielle est engendré par le champ de vecteurs hamiltonien de  $K$ .*

**DEMONSTRATION.** On utilise la méthode de Reiman comme en 1.1.1 pour montrer que le champ hamiltonien de  $K$  est annulé par l'application tangente à  $f$  alors que celui de  $H$  est envoyé sur un élément non nul de  $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ .

Dans  $\text{tr } A(\lambda)^2$ ,  $K$  est le coefficient de  $\lambda$  et  $H'$  le terme constant:

$$H' = \text{Res}(\text{tr } A(\lambda)^2 \lambda^{-1} d\lambda)$$

$$2K = \text{Res}(\text{tr } A(\lambda)^2 \lambda^{-2} d\lambda)$$

Les images de champs hamiltoniens par l'application tangente à  $f$  sont donc, à des coefficients constants près, les cocycles  $\mu$  (pour  $H'$ ) et  $\mu\lambda^{-1}$  (pour  $K$ ).

On veut donc montrer que

$$\{\mu\} \neq 0 \in H^1(X, \mathcal{O}_X) \quad \text{et} \quad \{\mu\lambda^{-1}\} = 0 \in H^1(X, \mathcal{O}_X)$$

Regardons donc un peu précisément les fonctions  $\lambda$  et  $\mu$  sur  $X$ . La fonction  $\lambda: X \rightarrow \mathbf{P}^1$  est un revêtement double, ramifié en les quatre racines  $e_1, e_2, e_3, e_4$  du polynôme  $\lambda^2 Q(\lambda)$ , qui sont d'ailleurs dans  $\mathbf{C} - \{0\}$  (ou dans  $\mathbf{P}^1 - \{0, \infty\}$ ).

Près de  $\lambda = 0$ , l'équation de la courbe donne  $\lambda^2 + \mu^{-2} = 0$ , on a donc deux branches et en particulier, après normalisation, il y a deux points  $a_+$  et  $b_+$  de  $X$  au dessus de  $(\lambda, \mu) = (0, \infty) \in \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ . La situation est identique pour  $\lambda = \infty$  comme on l'a déjà remarqué. Appelons donc  $a_-$  et  $b_-$  les deux points de  $X$  correspondants. Ainsi

$$(\lambda) = a_+ + b_+ - a_- - b_-$$

$$(\mu) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 - a_+ - b_+ - a_- - b_-$$

et en particulier,  $(\lambda^{-1}\mu) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 - 2a_+ - 2b_+$  et  $\lambda^{-1}\mu$  est holomorphe sur  $\mathcal{U}_-$  et le cocycle qu'elle représente a une classe de cohomologie triviale (voilà pour l'image du flot de  $K$ ). Il ne reste plus qu'à vérifier que la classe de cohomologie définie par  $\mu$  est non nulle dans  $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ . Pour cela, on va l'évaluer sur une forme holomorphe. Comme l'équation de  $X$  s'écrit sous forme de Weierstrass  $(\lambda\mu)^2 + \lambda^2 Q(\lambda) = 0$ , il est clair que  $\omega = \frac{d\lambda}{\lambda\mu}$  est une forme holomorphe. Calculons

$$\text{Res}_{[\lambda=\infty]}(\mu\omega) = \text{Res}_{a_-} \frac{d\lambda}{\lambda} + \text{Res}_{b_-} \frac{d\lambda}{\lambda} = -2 \neq 0$$

Comme il n'est pas difficile de voir que  $g \mapsto \text{Res}_{[\lambda=\infty]}(g\omega)$  induit un homomorphisme  $H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \mathbf{C}$  (en fait c'est la dualité entre  $H^1(X, \mathcal{O}_X)$  et  $H^0(X, \Omega_X^1)$ ), ça suffit pour montrer que la classe de  $\mu$  est non triviale.  $\square$

L'application  $f_{H,K}: \mathcal{F}_{H,K} \rightarrow \text{Pic}^4(X)$  est invariante par l'opération du groupe  $\mathcal{R}$  des rotations autour de l'axe  $L$  (c'est à dire par le flot de  $K$ ) comme on l'a déjà vu. On obtient donc une application  $\mathcal{F}_{H,K}/\mathcal{R} \rightarrow \text{Pic}^4(X)$  qui est un isomorphisme sur son image. On trouve une démonstration de ce fait dans [1], que nous rappelons rapidement (voir aussi [28] et [22]). Commençons par étudier les propriétés du fibré des vecteurs propres. Ces vecteurs se calculent explicitement.

Si  $A(\lambda)$  est la matrice antisymétrique correspondant au vecteur

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \lambda^{-1} + u \\ \gamma_2 \lambda^{-1} + v \\ \gamma_3 \lambda^{-1} + w + \lambda \end{bmatrix}$$

un vecteur propre associé à  $\mu$  est

$$V = \begin{bmatrix} -xz - \mu y \\ -yz + \mu x \\ x^2 + y^2 \end{bmatrix}$$

(rappelons que  $\mu^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$ ).

**REMARQUE** (pour les sceptiques). Ce calcul montre que le fibré des vecteurs propres est effectivement bien défini, même en les points où les deux valeurs propres coïncident, c'est à dire où  $\mu$  s'annule.

A l'aide d'une transformation linéaire (constante) de  $\mathbb{C}^3$ , on remplace  $V$  par

$$V' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -i & 1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 \\ (x + iy)(\mu + iz) \\ -i(x - iy)(\mu - iz) \end{bmatrix}$$

pour simplifier un peu l'étude des diviseurs. Celui associé au fibré des vecteurs propres se détermine à l'aide

- (a) des zéros communs des trois coordonnées
- (b) des pôles de chacune d'elle.

$$V' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + iy = \mu - iz = 0 \\ \text{ou} \\ x - iy = \mu + iz = 0 \end{cases}$$

mais

$$x + iy = (\gamma_1 + i\gamma_2)\lambda^{-1} + (u + iv) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\gamma_1 + i\gamma_2}{u + iv}$$

avec  $\mu = iz(\lambda)$ , ce qui détermine un unique point  $R$  de la courbe  $X$ . L'autre

équation détermine le point  $R' = \left( -\frac{\gamma_1 - i\gamma_2}{u - iv}, -iz \right)$  (remarquons que quand  $x, y, u, v \in \mathbf{R}$ ,  $R' = \bar{R}$ )\*.

Il est clair que  $x^2 + y^2$  a un zéro simple en chacun de ces points, le diviseur des zéros de  $V$  est donc  $R + R'$ .

Les composantes de  $V'$  ont des pôles seulement pour  $\lambda = 0$  et  $\lambda = \infty$ . En chacun des points  $a_+$  et  $b_+$  de  $X$  au-dessus de  $\lambda = 0$ , chacune des coordonnées a un pôle double, ainsi le diviseur des pôles de  $V'$  est  $2a_+ + 2b_+ + a_- + b_-$ , le degré du fibré des vecteurs propres est  $-4$ , celui de son dual est donc bien  $4$ , et un diviseur possible est

$$D = 2a_+ + 2b_+ + a_- + b_- - R - R'$$

Remarquons que

$$(x + iy) = R + \sigma R - a_+ - b_+$$

$$(x - iy) = R' + \sigma R' - a_+ - b_+$$

où  $\sigma(\lambda, \mu) = (\lambda, -\mu)$  désigne l'involution du revêtement  $\lambda$ . Ainsi  $D \sim \sigma R + \sigma R' + a_- + b_-$ , écriture qu'on peut trouver plus agréable. En particulier, quand  $\Gamma$  et  $M$  sont réels, la classe de  $D$  est dans l'image<sup>†</sup> du groupe des diviseurs réels dans  $\text{Pic}^4(X)(\mathbf{R})$ .

Inversement, soit  $R$  un point de  $X$ ,  $R = (\lambda_0, \mu_0)$ , essayons de reconstituer de qui la classe du diviseur  $2a_+ + 2b_+ - R - R'$  est l'image. D'abord  $-\frac{\gamma_1 + i\gamma_2}{u + iv} = \lambda_0$  est déterminé. Aussi, comme  $w = K = M \cdot L$  est donné, on en déduit  $\gamma_3$  par

$$\mu_0 = iz, \quad \gamma_3 = \lambda_0(z - K - \lambda_0)$$

Ecrivons encore que  $\|\Gamma\|^2 = 1$  et  $M \cdot \Gamma = c$ . La première de ces deux équations détermine  $\gamma_1^2 + \gamma_2^2$  et donc  $u^2 + v^2$ , la deuxième détermine  $\Re(\gamma_1 + i\gamma_2)(u - iv)$ . Ainsi  $\gamma_1 + i\gamma_2$  et  $u + iv$  sont déterminés à multiplication par un même  $e^{i\theta}$  près:  $\Gamma$  et  $M$  sont déterminés à l'action du flot de  $K$  près. De même le point  $R'$  détermine  $\gamma_1 - i\gamma_2$  et  $u - iv$  au flot de  $K$  près. Ainsi le diviseur considéré est l'image de deux points de  $\mathcal{T}_{H,K}/\mathcal{R}$ . En résumant:

\*Rappelons que  $z$  est une fonction de  $\lambda: z = \gamma_3 \lambda^{-1} + w + \lambda$ .

†Comme  $X$  n'a pas de point réel,  $\text{Pic}^4(X)(\mathbf{R})$  a deux composantes connexes. L'une contient les classes qui peuvent se représenter par des diviseurs réels tels que  $A + \bar{A}$ , l'autre n'est pas dans l'image du groupe des diviseurs réels: elle contient des diviseurs qui sont équivalents à leur conjugué sans être eux-mêmes invariants par conjugaison.

PROPOSITION 3.3.2. Si  $(H, K) \in \mathbf{R}^2$  est une valeur régulière,

$$f_{H,K}: \mathcal{T}_{H,K} \rightarrow \text{Pic}^4(X)$$

induit un revêtement double de  $\mathcal{T}_{H,K}/\mathcal{R}$  sur l'une des deux composantes de la partie réelle de  $\text{Pic}^4(X)$ . □

De plus, on a aisément:

PROPOSITION 3.3.3. Le revêtement n'est pas trivial, en particulier les niveaux réguliers sont connexes.

DEMONSTRATION. Vue la forme du discriminant et celle de l'image de  $(H, K)$ , par un argument standard de théorie de Morse, il suffit de vérifier que le niveau critique correspondant à un minimum de  $K$  sur  $H = \text{cste}$  (ou inversement) est connexe. On fixe donc  $t \in \mathbf{R}$ , paramétrant un point  $(H, K)$  de la frontière de l'image. Ainsi  $\Gamma + tM + t^2L = 0$  et la valeur de  $\gamma_3$  est déterminée,  $(\gamma_1, \gamma_2)$  décrit le petit cercle correspondant sur la sphère unité et les deux premières coordonnées de  $M$  sont déterminées par

$$u = -\frac{\gamma_1}{t}, \quad v = -\frac{\gamma_2}{t}$$

et le niveau critique considéré est bien un cercle. □

Le long d'un chemin comme celui représenté sur la Fig. 5 on trouve donc  $\emptyset, 1$  cercle, 1 tore, 1 cercle,  $\emptyset$ , ou, dans les notations de Fomenko:



REMARQUE. Contrairement à ce qu'on lit parfois,  $\mathcal{T}_{H,K}/S^1$  n'est isomorphe, ni à  $X(\mathbf{R})$ , qui n'a pas de points, ni à  $X$  avec son autre structure réelle, qui a deux composantes. Classiquement, les ouvrages de mécanique montrent qu'on peut résoudre les équations d'Euler dans ce cas en intégrant une équation différentielle, celle vérifiée par  $\gamma_3$ :

$$\dot{\gamma}_3^2 = f(\gamma_3) = (H' - K^2 - 2\gamma_3)(1 - \gamma_3^2) - (c - K\gamma_3^2)$$

(voir [5] par exemple). La courbe  $X': x^2 = f(u)$  est équivalente sur  $\mathbf{C}$  à notre courbe  $X$  comme en le voit en calculant ses invariants. Son équation s'obtient classiquement en envoyant une des racines de  $\lambda^2 Q$  à l'infini. La zone des mouvements réels que nous avons représentée dans le plan des  $(H', K)$  sur la Fig. 5 correspond au cas où le polynôme  $f$  a deux racines réelles  $e_1$  et  $e_2$  entre  $-1$  et  $1$  (il en a toujours une  $\geq 1$ ). Sous cette forme, la courbe elliptique  $X'(\mathbf{R})$  a deux

composantes (comme  $\text{Pic}^4(X)(\mathbf{R})$ ), mais l'une seulement correspond à des mouvements réels de la toupie, celle où  $\gamma_3 \in [-1, 1]$ .

La zone où  $\gamma_3 \in [e_1, e_2]$  est l'image du niveau considéré dans la sphère  $S^2$  ou vit  $\Gamma$ . A chaque point  $\Gamma$  de l'intérieur de cette bande correspondent 2 points  $M$ , ce qui montre que le niveau est bien *un* tore, comme nous venons de le vérifier par la méthode algébrogéométrique (voir les traités de mécanique cités pour une étude plus précise de l'image du flot de  $H$  dans cette bande).

## LE CAS DE KOWALEVSKI

Nous reprenons les notations de 1.3, en indexant les orbites par  $2l = c$ , suivant l'usage consacré.

### 4. Les changements de variables de Kowalevski

#### 4.1. Quelques réductions algébriques

Rappelons la méthode utilisée par Kowalevski elle-même dans [20], traduite en termes modernes à l'aide de [18] et de [29]... c'est à dire, en dernière instance d'Euler lui-même.

Vue la forme de la fonction  $K$ , il est naturel de poser  $x = p + iq$  et

$$\begin{aligned}\xi &= p^2 - q^2 + \gamma_1 + i(2pq + \gamma_2) \\ &= x^2 + \gamma_1 + i\gamma_2\end{aligned}$$

ce qu'elle fait. Il est agréable de poser  $y = p - iq$  et  $\eta = p^2 - q^2 + \gamma_1 - i(2pq + \gamma_2)$ , et de considérer  $x, y, \xi$  et  $\eta$  comme des variables complexes indépendantes (ce qu'elles sont effectivement si on complexifie les équations en autorisant  $M$  et  $\Gamma$  à vivre dans  $\mathbf{C}^3$  au lieu de  $\mathbf{R}^3$ ).

Ainsi les quatre équations (décrivant l'orbite  $O_{2l}$  pour les deux premières et les intégrales  $H$  et  $K$  pour les deux suivantes)

$$1 = \|\Gamma\|^2$$

$$2l = \Gamma \cdot M$$

$$H = \frac{1}{2}\Omega \cdot M + L$$

$$K = (p^2 - q^2 + \gamma_1)^2 + (2pq + \gamma_2)^2$$

deviennent

$$\begin{aligned}\gamma_3^2 &= 1 - K + y^2\xi + x^2\eta - x^2y^2 \\ r\gamma_3 &= 2l - y\xi - x\eta + xy(x+y) \\ r^2 &= 2H + \xi + \eta - (x+y)^2 \\ \xi\eta &= K\end{aligned}\tag{6}$$

On élimine facilement  $r$  et  $\gamma_3$  entre les trois premières, ce qui fait introduire les deux polynômes

$$R(x) = -x^4 + 2Hx^2 + 4lx + 1 - K$$

et

$$R_1(x, y) = -2Hx^2y^2 - 4lxy(x+y) - (1-K)(x+y)^2 + 2H(1-K) - 4l^2$$

grâce auxquels on peut écrire

$$\xi R(y) + \eta R(x) + R_1(x, y) + K(x-y)^2 = 0\tag{7}$$

Elle remarque aussi que

$$-4 \left\{ \frac{dx}{dt} \right\}^2 = R(x) + (x-y)^2\xi\tag{8}$$

et décide de considérer la courbe de genre 1,  $\mathcal{E}$ , d'équation  $u^2 = -R(x)$ . Sa jacobienne sera la courbe isomorphe  $\mathcal{E}'$  d'équation  $t^2 = S(s)$  où

$$S(s) = 4s^3 - \left( \frac{H^2}{3} - (1-K) \right) s + \frac{H}{3} \left( \frac{H^2}{9} + 1 - K \right) - l^2$$

**REMARQUE.** Il nous sera utile d'avoir remarqué que, par construction,  $R$  et  $S$  ont une racine multiple en même temps. Il sera agréable d'avoir un énoncé un peu plus précis sur les racines réelles ( $R$  et  $S$  sont à coefficients réels):  $S$  s'obtient par une transformation projective qui envoie une racine de  $R$  à l'infini. On en déduit sans trop de mal le nombre de racines réelles de  $S$  en fonction de celui de  $R$  en remarquant que  $\infty$  est réel (voir la discussion dans 4.3).

La courbe de genre 1  $\mathcal{E}$  est un espace homogène principal sous l'opération du groupe  $\mathcal{E}'$  (c'est le point à l'infini qui est l'élément neutre). Les  $+$  et  $-$  figurant dans la suite réfèrent à ces structures.

On considère la forme holomorphe  $\omega = \frac{dx}{u}$ . Les automorphismes de  $\mathcal{E}$  qui transforment  $\omega$  en  $\pm\omega$  sont de la forme  $M \mapsto P \pm M$  où  $P$  est un point de  $\mathcal{E}'$ . En d'autres termes, les points  $P$  de  $\mathcal{E}'$  paramètrent ces automorphismes.

Ceci peut se raconter avec des formules. On cherche les automorphismes  $(x, u) \mapsto (y, v)$  ( $v^2 = R(y)$ ) tels que  $\frac{dx}{u} = \pm \frac{dy}{v}$ , autrement dit tels que

$$\left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2 = \frac{R(y)}{R(x)}$$

Les intégrales de cette équation différentielle sont données par une équation

$$\Phi_s(x, y) = 0$$

où  $\Phi$  est un polynôme homogène symétrique en  $x$  et  $y$ , de degré 2 en chacune de ses variables, et aussi de degré 2 en le paramètre  $s$ . Tous calculs faits (!), c'est l'équation

$$4(x-y)^2 \left( s - \frac{H}{6} \right)^2 - 4 \left( s - \frac{H}{6} \right) \tilde{R}(x, y) + R_1(x, y) = 0$$

qu'on trouve à la page 188 de [20] et dans laquelle

$$\tilde{R}(x, y) = -x^2y^2 + 2Hxy + 2l(x+y) + 1 - K$$

Sa signification est la suivante: soit  $M = (x, u)$  un point fixé dans  $\mathcal{E}$  (notons au passage que  $-M = (x, -u)$ ). Fixons aussi  $P = (s, t) \in \mathcal{E}'$  (de même  $-P = (s, -t)$ ). Les solutions de l'équation (en  $y$ )  $\Phi_s(x, y) = 0$  sont  $y(P+M)$  et  $y(P-M)$ .

Si au contraire, fixant toujours  $M$ , on fixe un deuxième point  $M' = (y, v) \in \mathcal{E}$ , les solutions en  $s$  de  $\Phi_s(x, y) = 0$  sont

$$s_1 = s(M+M') = s(-M'-M) \quad \text{et} \quad s_2 = s(M-M') = s(M'-M). \quad (9)$$

Le "mystérieux changement de variables" de Kowalevski est exactement celui-ci: elle remplace  $x$  et  $y$  par  $s_1$  et  $s_2$ . Notons que, par définition, grâce à (9), on a

$$\begin{cases} \frac{ds_1}{\sqrt{S(s_1)}} = \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} \\ \frac{ds_2}{\sqrt{S(s_2)}} = -\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} \end{cases} \quad (10)$$

**4.2. Les équations différentielles**

Ensuite, elle utilise l'équation (8) et sa jumelle:

$$-4 \left\{ \frac{dx}{dt} \right\}^2 = R(x) + (x-y)^2 \zeta$$

$$-4 \left\{ \frac{dy}{dt} \right\}^2 = R(y) + (y-x)^2 \eta$$

pour obtenir

$$-4 \left\{ \frac{1}{\sqrt{S(s_1)}} \frac{ds_1}{dt} \right\}^2 = 4 \frac{(x-y)^4}{R(x)R(y)} \left( s_1 - \frac{H}{6} - \frac{\sqrt{K}}{2} \right) \left( s_1 - \frac{H}{6} + \frac{\sqrt{K}}{2} \right)$$

Posons

$$T(s) = -S(s) \left( s - \frac{H}{6} - \frac{\sqrt{K}}{2} \right) \left( s - \frac{H}{6} + \frac{\sqrt{K}}{2} \right)$$

pour obtenir

$$\frac{ds_1}{\sqrt{T(s_1)}} = \frac{dt}{s_1 - s_2}$$

et de même

$$\frac{ds_2}{\sqrt{T(s_2)}} = \frac{dt}{s_2 - s_1}$$

d'où l'on déduit les équations différentielles vérifiées par  $s_{1,2}$ :

$$0 = \frac{ds_1}{\sqrt{T(s_1)}} + \frac{ds_2}{\sqrt{T(s_2)}}$$

$$dt = \frac{s_1 ds_1}{\sqrt{T(s_1)}} + \frac{s_2 ds_2}{\sqrt{T(s_2)}}$$

Il est donc nécessaire d'étudier la courbe  $X$  d'équation  $y^2 = T(s)$ : on voit apparaître des intégrales hyperelliptiques qui lui sont associées.

### 4.3. La courbe $X$

Posons, pour simplifier les expressions:

$$z = 2 \left( s + \frac{H}{3} \right)$$

alors

$$2S(s) = \varphi(z) = z^3 - 2Hz^2 + (H^2 + 1 - K)z - 2l^2$$

et

$$\left( s - \frac{H}{6} - \frac{\sqrt{K}}{2} \right) \left( s - \frac{H}{6} + \frac{\sqrt{K}}{2} \right) = \frac{1}{2} (z - H - \sqrt{K})(z - H + \sqrt{K})$$

L'équation de la courbe  $X$  est maintenant

$$y^2 = -2\varphi(z)[(z - H)^2 - K]$$

C'est une courbe (hyperelliptique) de genre 2, lisse exactement quand toutes les racines du polynôme

$$\Phi(z) = -2\varphi(z)[(z - H)^2 - K]$$

sont simples.

Etudions donc le discriminant pour la courbe  $X$ . Il est formé de trois composantes:

1. le discriminant de  $\varphi$  (ou de  $R$ ), courbe sur laquelle  $\varphi$  a une racine multiple,
2. la droite  $K = 0$  où les deux racines de  $(z - H)^2 - K$  coïncident,
3. la courbe sur laquelle  $H \pm \sqrt{K}$  est une racine de  $\varphi$ .

4.3.1. On trouve un paramétrage du discriminant de  $\varphi$  en écrivant  $\varphi(z) = (z - t)^2(z - u)$  qui donne en éliminant  $u$ :

$$K = 1 - \frac{2l^2}{t} + \frac{l^4}{t^4}$$

$$H = t + \frac{l^2}{t^2}$$

La courbe est ainsi paramétrée par la racine double elle-même. Si on s'intéresse à sa partie réelle, elle a deux branches, l'une pour  $t < 0$  et l'autre pour  $t > 0$ , elle est asymptote à la droite  $K = 1$  et présente un point de rebroussement obtenu pour  $t = (2l^2)^{1/3}$  "avant" lequel la racine simple  $u$  est supérieure à la racine double  $t$  et après lequel c'est l'inverse.

REMARQUE. On obtient aussi cette courbe en disant que  $R$  a une racine multiple: la même méthode donne alors un paramétrage par la racine multiple de  $R$  cette fois

$$K = 1 + 2ly + y^4$$

$$H = y^2 - \frac{l}{y}$$

Elle partage le plan en trois parties, suivant que  $\varphi$  a trois racines réelles positives, une racine réelle (positive), deux racines réelles négatives et une positive, ce qui correspond aux cas où  $R$  a respectivement 4, 2, et 0 racines réelles. Cette discussion est résumée sur la figure 6.

4.3.2. En écrivant

$$\varphi(z) = z[(z - H)^2 - K] + z - 2l^2$$

on vérifie immédiatement que  $\varphi(H \pm \sqrt{K}) = 0$  si et seulement si  $K = (H - 2l^2)^2$ . La parabole ayant cette équation partage le demi-plan  $K > 0$  en trois parties où, de haut en bas

- (a) d'abord  $\varphi(H \pm \sqrt{K}) > 0$
- (b) ensuite  $\varphi(H + \sqrt{K}) > 0$  et  $\varphi(H - \sqrt{K}) < 0$
- (c) et enfin  $\varphi(H \pm \sqrt{K}) < 0$ .

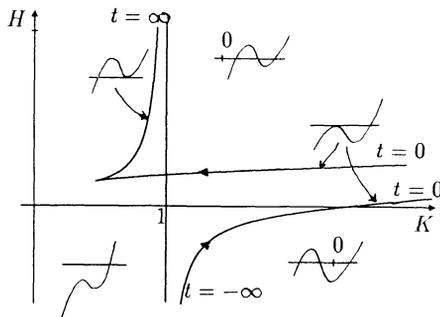


Fig. 6.

La parabole et la courbe à cusp de la figure 6 se coupent en les points

$$(K, H) = ((l^2 + 1)^2, l^2 - 1), (t = -1)$$

$$(K, H) = ((l^2 - 1)^2, l^2 + 1), (t = 1)$$

et sont tangentes au point

$$(K, H) = \left( \frac{1}{16l^4}, \frac{1}{4l^2} + 2l^2 \right)$$

obtenu pour  $t = 2l^2$ .

La figure 7 représente le discriminant de  $\Phi$ . Naturellement cette figure représente des sections du discriminant des polynômes de degré 5 (ombilic).

La partie réelle de la courbe  $X$  a trois composantes quand  $\varphi$  a trois racines réelles (intérieur de la courbe à cusp, voir la figure 6) et deux quand  $\varphi$  n'en a qu'une.

On déduit aisément le nombre de composantes de la partie réelle de la jacobienne  $\text{Jac}(X)$  en appliquant le théorème de Comessatti (voir [8] ou [26]). Dans le cas qui nous intéresse, où  $X(\mathbf{R})$  n'est pas vide, puisque  $\Phi$  est de degré impair

$$|\pi_0 \text{Jac}(X)(\mathbf{R})| = 2^{|\pi_0 X(\mathbf{R})| - 1}$$

On s'aperçoit immédiatement, contrairement à ce qui est affirmé dans [13], que le nombre de composantes ne correspond *pas* à celui trouvé par Kharlamov [19] et que nous allons retrouver dans 7.3 pour les niveaux réguliers correspondants: par exemple le nombre de composantes de  $X(\mathbf{R})$  (et donc celui de  $\text{Jac}(X)(\mathbf{R})$ ) ne dépend évidemment pas de la position du point considéré par rapport à la parabole (la parabole sert uniquement à placer les racines de  $\varphi$  par

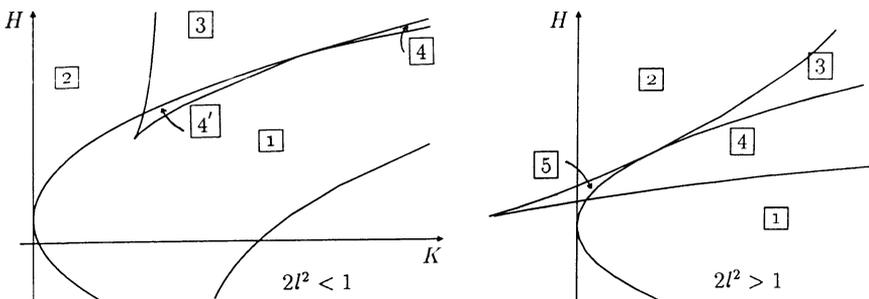


Fig. 7.

rapport à  $H \pm \sqrt{K}$ , pas à modifier le nombre des racines), alors que le nombre de tores de Liouville en dépend.

**PROPOSITION 4.3.3.** *Le niveau régulier  $\mathcal{T}_{H,K}$  indexé par  $H$  et  $K$  dans l'orbite  $O_{21}$  n'est pas en général isomorphe à la partie réelle de la jacobienne de la courbe  $X$  correspondante. □*

**COROLLAIRE 4.3.4.** *Il n'existe aucune application*

$$f_{H,K}: \mathcal{T}_{H,K} \rightarrow \text{Jac}(X)$$

*qui induise un difféomorphisme de  $\mathcal{T}_{H,K}$  sur la partie réelle de  $\text{Jac}(X)$ . □*

La philosophie de ces remarques est la suivante. Le fait de résoudre un système différentiel grâce à des fonctions  $\mathfrak{J}$  associées à une courbe  $X$  n'est pas équivalent à l'identification des variétés intégrales à la jacobienne de  $X$  même si elle permet de linéariser les flots sur cette courbe. La méthode "forme de Lax-courbe spectrale" est bien plus puissante: elle fournit une *application* de la variété intégrale considérée dans une variété abélienne qui, en plus de linéariser les flots, est bien souvent un isomorphisme. C'est ce que nous allons étudier dans le paragraphe 5.

La proposition précédente explique sans doute pourquoi on n'a jamais trouvé de forme de Lax *réelle* pour la toupie de Kowalevski qui donne la courbe  $X$  comme courbe spectrale. Il y a bien une forme de Lax dont  $X$  est la courbe spectrale dans [2] (les matrices y ont des coefficients fractions rationnelles plutôt que polynômiaux, ce qui n'est pas très grave) mais ses coefficients sont non réels. Nous remercions P. van Moerbeke pour cette précision.

#### 4.4. Relation entre $X$ et $\mathcal{E}'$ : la jacobienne de $X$ comme variété de Prym

Explicitons maintenant, en termes de variétés abéliennes, les relations entre la courbe  $X$  et la courbe elliptique  $\mathcal{E}'$  utilisées par Kowalevski.

Avec les notations de 4.3, les équations de ces deux courbes sont

$$u^2 = \varphi(x)$$

pour  $\mathcal{E}'$  et

$$y^2 = -2(x-b)(x-c)\varphi(x)$$

pour  $X$ , où l'on a posé pour abrégé  $b, c = H \pm \sqrt{K}$ .

La courbe elliptique  $\mathcal{E}'$  est revêtement double de  $\mathbf{P}^1$  par  $x$ , ramifié en les trois racines  $e_1, e_2, e_3$  de  $\varphi$  et en  $\infty$ . La fonction  $u$  a pour diviseur

$$(u) = e_1 + e_2 + e_3 - 3\infty$$

Soit  $f: \mathcal{E}' \rightarrow \mathbf{P}^1$  la fonction méromorphe

$$f(x, u) = -2u^2(x-b)(x-c)$$

Son diviseur est

$$(f) = 2e_1 + 2e_2 + 2e_3 + b_+ + b_- + c_+ + c_- - 10\infty$$

où  $e_i$  (resp.  $\infty$ ) désigne l'unique point de  $\mathcal{E}'$  au dessus de  $e_i \in \mathbf{P}^1$  (resp. de  $\infty$ ) et  $b_{\pm}, c_{\pm}$  sont les points au dessus de  $b, c \in \mathbf{P}^1$ .

Soit maintenant  $\tilde{X}$  la normalisée de la courbe

$$X_0 = \{(x, u, y) \in \mathcal{E}' \times \mathbf{P}^1 \mid y^2 = f(x, u)\}$$

La courbe  $\tilde{X}$  est munie de deux involutions:

- (a)  $\sigma_1(x, u, y) = (x, u, -y)$ , qui donne  $\mathcal{E}'$  comme quotient. Les points fixes de  $\sigma_1$  (et donc la ramification de  $\tilde{X} \rightarrow \mathcal{E}'$ ) sont les quatre points  $b_+, b_-, c_+, c_-$ : les autres points qui apparaissent dans le diviseur de  $f$  ont un coefficient pair et donnent donc lieu à des points doubles ordinaires dans  $X_0$ , dans la normalisation on sépare les deux branches et il n'y a donc pas de ramification en ces points. Notons qu'en particulier le genre de  $\tilde{X}$  est 3.
- (b)  $\sigma_2(x, u, y) = (x, -u, y)$ , qui donne  $X$  au quotient. A cause du calcul du genre, le revêtement  $\tilde{X} \rightarrow X$  doit être étale, ce qu'on vérifie aisément comme ci-dessus.

Considérons maintenant la jacobienne de  $\tilde{X}$ . Une chose très facile à comprendre est  $H^0(\tilde{X}, \Omega_{\tilde{X}}^1)$ , qui est engendré par les éléments provenant de  $H^0(\mathcal{E}', \Omega_{\mathcal{E}'}^1)$  et de  $H^0(X, \Omega_X^1)$ . Il est clair que  $\left\{ \frac{dx}{u} \right\}$  est une base du premier, de même que  $\left\{ \frac{i\sqrt{2} dx}{y}, \frac{i\sqrt{2}x dx}{y} \right\}$  est une base du second. Il est non moins clair que, dans  $H^0(\tilde{X}, \Omega_{\tilde{X}}^1)$ , on a

$$\sigma_1^* \frac{dx}{u} = \frac{dx}{u}, \quad \sigma_1^* \frac{dx}{y} = -\frac{dx}{y}, \quad \sigma_1^* \frac{x dx}{y} = -\frac{x dx}{y}$$

de même d'ailleurs que

$$\sigma_2^* \frac{dx}{u} = -\frac{dx}{u}, \quad \sigma_2^* \frac{dx}{y} = \frac{dx}{y}, \quad \sigma_2^* \frac{x dx}{y} = \frac{x dx}{y}$$

de sorte qu'on a des isogénies

$$\text{Jac}(X) \sim \text{Prym}(\tilde{X} | \mathcal{E}'), \quad \text{Jac}(\mathcal{E}') \sim \text{Prym}(\tilde{X} | X)$$

## 5. Forme de Lax et courbes spectrales

### 5.1. Forme de Lax

Dans [7], une forme de Lax

$$\dot{\tilde{L}}(\lambda) = [L(\lambda), M(\lambda)]$$

très naturelle est exhibée. L'algèbre de Lie de matrices considérée est  $\mathfrak{so}(3, 2)$  et dans la décomposition par blocs usuelle, on a :

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & F \\ {}^tF & 0 \end{pmatrix} \lambda^{-1} + \begin{pmatrix} -M & 0 \\ 0 & PMP \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & E \\ {}^tE & 0 \end{pmatrix} \lambda$$

(nous n'aurons pas besoin de la forme explicite de  $M(\lambda)$ ).

Dans cette écriture,  $F = (\Gamma, 0)$  et  $E$  est la matrice des deux premiers vecteurs de la base canonique de  $\mathbf{R}^3$ , alors que  $PMP$  désigne le coin supérieur gauche de la matrice  $M$ .

Si  $I_{3,2}$  désigne la matrice

$$\begin{pmatrix} Id_3 & 0 \\ 0 & -Id_2 \end{pmatrix}$$

(matrice de la forme quadratique standard de signature  $(3, 2)$ ), le fait que  $L(\lambda)$  est dans  $\mathfrak{so}(3, 2)$  se traduit par

$$I_{3,2} {}^tL(\lambda) = -L(\lambda)I_{3,2} \tag{11}$$

Il y a aussi une symétrie particulière dans la dépendance en  $\lambda$  :

$$L(-\lambda) = -\begin{pmatrix} 0 & F \\ {}^tF & 0 \end{pmatrix} \lambda^{-1} + \begin{pmatrix} -M & 0 \\ 0 & PMP \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & E \\ {}^tE & 0 \end{pmatrix} \lambda$$

$$\begin{aligned}
&= -\left[ \begin{pmatrix} 0 & F \\ {}^tF & 0 \end{pmatrix} \lambda^{-1} + \begin{pmatrix} -{}^tM & 0 \\ 0 & {}^t(PMP) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & E \\ {}^tE & 0 \end{pmatrix} \lambda \right] \\
&= -{}^tL(\lambda)
\end{aligned}$$

(les blocs diagonaux étant des matrices antisymétriques), en résumé:

$$L(-\lambda) = -{}^tL(\lambda) \quad (12)$$

La *courbe spectrale* est la courbe d'équation  $\det(L(\lambda) - \mu I) = 0$ . Elle est donc munie de deux involutions  $\tau_1$  et  $\tau_2$  reflétant ces relations:  $\tau_1(\lambda, \mu) = (-\lambda, \mu)$  et  $\tau_2(\lambda, \mu) = (\lambda, -\mu)$ . Nous aurons l'occasion de revenir assez longuement sur ces involutions.

De l'équation (11) et comme  $5 = 2 + 3$  est impair, on déduit immédiatement que  $L(\lambda)$  a toujours la valeur propre 0. Si l'équation de Lax exhibée est introduite de façon très naturelle dans [7], les auteurs de cet article remarquent aussi qu'on peut utiliser l'isomorphisme  $\mathfrak{so}(3, 2) \cong \mathfrak{sp}(4, \mathbf{R})$  pour remplacer  $L(\lambda)$  par la matrice

$$\begin{aligned}
L'(\lambda) &= \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 0 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 & 0 & -\gamma_3 \\ \gamma_3 & 0 & -\gamma_1 & \gamma_2 \\ 0 & -\gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_1 \end{bmatrix} \lambda^{-1} \\
&+ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -v & -u \\ & u & -v \\ v & -u & 0 & -2w \\ u & v & 2w & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & \\ \mathbf{0} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \lambda
\end{aligned}$$

et l'équation de Lax par une équation de même forme vérifiée par  $L'(\lambda)$ . Le polynôme caractéristique de  $L'(\lambda)$  est  $\mu \det(L'(\lambda) - \mu I)$ . Les relations (11) et (12) deviennent

$$L'(-\lambda) = \eta L'(\lambda) \eta \quad (14)$$

et

$${}^tL'(\lambda) = -\eta L'(\lambda) \eta \quad (15)$$

où

$$\eta = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}$$

### 5.2. Les courbes spectrales

Après élimination du facteur  $\mu = 0$ , la courbe spectrale  $Y: \det(L'(\lambda) - \mu I) = 0$  a pour équation

$$\mu^4 - 2(\lambda^{-2} - 2H + 2\lambda^2)\mu^2 + \lambda^{-4} + 4(2l^2 - H)\lambda^{-2} + 4K = 0 \quad (16)$$

C'est un revêtement double (étale) de la courbe  $C = Y/\tau_1$  d'équation

$$\mu^4 - 2(z^{-1} - 2H + 2z)\mu^2 + z^{-2} + 4(2l^2 - H)z^{-1} + 4K = 0 \quad (17)$$

laquelle est elle-même un revêtement double ramifié de la courbe  $E = C/\tau_2$  d'équation

$$y^2 - 2(z^{-1} - 2H + 2z)y + z^{-2} + 4(2l^2 - H)z^{-1} + 4K = 0 \quad (18)$$

Il est entendu que les lettres  $Y, C, E$  désignent les complétées normalisées à l'infini et en zéro des courbes définies par ces équations là où elles ont un sens.

**PROPOSITION 5.2.1.** *Si  $l \neq 0$ , la courbe  $E$  est une courbe elliptique, revêtement double de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$  ramifié en 0 et en les trois racines du polynôme  $\varphi$  de Kowalevski. La courbe  $C$  est de genre 3, et  $Y$  de genre 5. Les courbes  $Y$  et  $C$  sont lisses exactement quand la courbe  $X$  est lisse.*

En particulier,  $Y$  ou  $C$  d'une part et  $X$  de l'autre, ont même discriminant.

**DEMONSTRATION.** On va considérer les équations (16), (17) et (18) comme définissant des courbes complètes dans  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$  (qu'il faut éventuellement normaliser à l'infini et en 0 pour obtenir les courbes  $Y, C, E$  qui nous intéressent). Autrement dit, les deux variables sont considérées comme vivant indépendamment dans  $\mathbf{C} \cup \infty$ . Dans chacune de ces courbes, nous appellerons  $\mathcal{U}_+$  (respectivement  $\mathcal{U}_-$ ) l'ouvert formé des points où  $z \neq \infty$  (respectivement  $z \neq 0$ ).

La courbe  $E$  est revêtement double de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$  par la fonction  $z$ , elle est ramifiée, au dessus de  $\mathcal{U}_+ \cap \mathcal{U}_-$ , en les racines du discriminant du polynôme du second

degré en  $y$  qui est le premier membre de (18):

$$(z^{-1} - 2H + 2z)^2 - (z^{-2} + 4(2l^2 - H)z^{-1} + 4K) = 4z^{-1}\varphi(z)$$

Donc les trois racines de  $\varphi$  sont des points de ramification. Il reste à déterminer si  $0$  ou  $\infty$  est un point de ramification.

Dans  $\mathcal{U}_-$  en posant  $t = z^{-1}$ , on voit que  $E$  a pour équation

$$y^2t - 2(t^2 - 2Ht + 2)y + (t^2 + 4(2l^2 - H)t + 4K) = 0$$

ce qui donne, pour  $t = 0$ ,  $-4y = 0$ , et donc les points  $y = 0$  et  $y = \infty$ . En particulier le revêtement  $z$  n'est pas ramifié à l'infini, il l'est donc certainement en  $0$ . Et en effet, sur  $\mathcal{U}_+$  et en  $z = 0$ , l'équation devient  $1 = 0$  autrement dit les deux racines sont parties à l'infini. Les points de ramification de  $z$  sont donc bien  $0$  et les trois racines de  $\varphi$ .

On en conclut naturellement que le genre de  $E$  est  $1$  (notons que pour  $l = 0$ ,  $\varphi(0) = 0$ , alors le revêtement  $z$  ramifie en deux points seulement,  $E$  est de genre  $0$ ).

Puisque  $\tau_1$  n'a pas de point fixe,  $Y$  et  $C$  sont lisses en même temps. Pour que  $C$  soit lisse, il faut et il suffit, d'une part que  $E$  le soit, c'est à dire que les 3 racines de  $\varphi$  soient distinctes, et d'autre part que les points de ramification de  $C \rightarrow E$  soient distincts.

Les points de ramification de  $C \rightarrow E$  sont les deux points de  $E$  au dessus de  $z = \infty$ , c'est à dire avec les notations de [7]

$$(z, y) = \infty_- = (\infty, 0)$$

$$(z, y) = \infty_+ = (\infty, \infty)$$

ainsi que les deux points de  $\mathcal{U}_+$  où  $y$  s'annule, c'est à dire les deux points  $p_1 = (\alpha, 0)$  et  $p_2 = (\beta, 0)$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont les deux racines de

$$4Kz^2 + 4(2l^2 - H)z + 1 = 0$$

Ainsi  $C$  est revêtement double de  $E$  ramifié en 4 points, on en déduit son genre par la formule d'Hurwitz, et de même celui de  $Y$ .

Les quatre points  $p_1, p_2, \infty_+$  et  $\infty_-$  sont distincts sauf quand  $\alpha = \beta$ , c'est à dire  $K = (2l^2 - H)^2$  ou  $\alpha$  ou  $\beta = \infty$  c'est à dire  $K = 0$ . On a bien retrouvé ainsi les conditions de lissité de la courbe  $X$  (voir 4.3).  $\square$

**REMARQUE.** La courbe  $C$ , de genre 3 et possédant une fonction  $y$  de degré 3 (c'est à dire inférieur ou égal au genre mais impair) n'est certainement pas hyperelliptique (voir [9] p. 102 par exemple).

5.3. *Description des courbes réelles  $E$  et  $C$*

Commençons par représenter la partie réelle de la courbe  $E$  dans les différents cas à considérer (figure 8).

Dans le cas où  $V$  est une courbe réelle projective et lisse, on sait depuis Hurwitz et Klein que les structures réelles sur  $V$  sont déterminées à homéomorphisme près par deux invariants, le nombre de composantes connexes de la partie fixe sous  $\sigma$  (la partie réelle) et le nombre de composantes du complémentaire de la partie fixe (qui peut être 1 ou 2). Nous dirons que ces invariants sont les invariants de la structure réelle sur la courbe  $V$ . Notons qu'ils déterminent la forme de la matrice des périodes et les propriétés réelles de la jacobienne (cf. [16] ou [24] pour plus de détails).

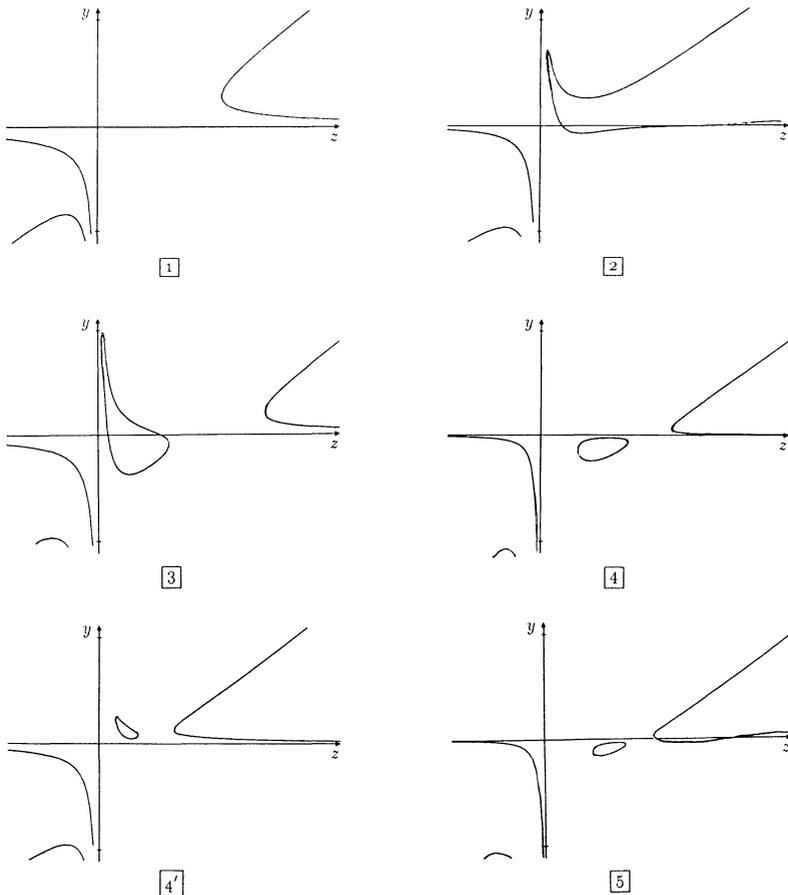


Fig. 8.

Pour pouvoir calculer les structures réelles de  $C$  en fonction des paramètres,  $H$ ,  $K$  et  $l$ , nous aurons besoin des remarques suivantes:

## REMARQUES

1. Topologiquement une structure réelle  $(V, \sigma)$  sur une courbe peut toujours être représentée par un modèle de la forme suivante:

- (a)  $V$  par une surface (compacte, connexe, orientable, sans bord) symétrique par rapport à un plan  $P$ ,
- (b)  $\sigma$  par une symétrie par rapport à  $P$  composée avec des demi-twists de Dehn (voir ci-dessous) le long de cycles globalement invariants par la symétrie (i.e. invariants ou anti-invariants) ou de paires de cycles échangés par la symétrie.

2. Un demi-twist de Dehn le long d'un cycle  $\gamma$  peut se décrire ainsi: identifier un voisinage tubulaire de  $\gamma$  au cylindre de  $\mathbf{R}^3$  d'axe  $z$ ,  $z \in [-1, 1]$  et de circonférence le cercle  $x^2 + y^2 = 1$  (identifié à  $\gamma$ ), le demi-twist de Dehn est alors la transformation,

$$(x, y, z) \mapsto (x \cos \pi(z-1) + y \sin \pi(z-1), y \cos \pi(z-1) - x \sin \pi(z-1), z).$$

3. Dans la pratique nous aurons besoin d'une variante de la construction décrite cidessus. Pour cela on remarquera que si l'on part d'un modèle topologique de structure réelle  $(V, \sigma)_{\text{top}}$  (ceux décrit au point 1 par exemple) et que l'on compose l'involution  $\sigma$  avec un demi-twist de Dehn le long d'un cycle globalement invariant par  $\sigma$  on obtient à nouveau une symétrie (i.e. une involution qui renverse l'orientation) et donc un nouveau modèle de structure réelle.

4. Les résultats de Hurwitz et Klein peuvent s'interpréter en disant que le type topologique d'une structure réelle  $(V, \sigma)$ , dans le cas où  $V$  est une courbe, est déterminé par l'action de  $\sigma$  sur  $H_1(V, \mathbf{Z})$ . Pour pouvoir utiliser ceci dans le cadre de la construction décrite en 3 on fait la remarque suivante. Soit  $\sigma$  une symétrie sur  $V_{\text{top}}$  et soit  $\sigma'$  une autre symétrie obtenue en composant  $\sigma$  avec un demi-twist de Dehn le long d'un cycle  $\gamma$  globalement invariant sous  $\sigma$ . Alors si  $M$  est la matrice pour l'action de  $\sigma$  dans une base symplectique  $(\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g)$  de  $H_1(V, \mathbf{Z})$  où  $\gamma = \alpha_k$  (resp.  $= \beta_k$ ) alors la matrice de  $\sigma'$  est  $BM$  où  $B = (b_{ij})$  avec  $b_{ii} = 1$ ,  $b_{k,g+k} = 1$  (resp.  $b_{g+k,k} = 1$ ) et  $b_{ij} = 0$  dans les autres cas.

5. La correspondance entre le type topologique de  $(V, \sigma)$  et l'action de  $\sigma$  sur  $H_1(V, \mathbf{Z})$  s'exprime de la manière suivante (cf. [24]). On peut toujours trouver une base symplectique de  $H_1(V, \mathbf{Z})$  telle que la matrice de  $\sigma$  soit de la forme,

$$\begin{pmatrix} -1_g & 0 \\ M & 1_g \end{pmatrix}$$

avec  $M$  symétrique.

Dans ce cas on a, si  $r$  est le nombre de composantes de  $C(\mathbf{R})$  et  $r \neq 0$ ,

$$g + 1 - r = rg_{\mathbf{Z}/2}(M \bmod 2)$$

De plus  $C(\mathbf{C}) - C(\mathbf{R})$  est non connexe si et seulement si la  $\mathbf{Z}$ -forme bilinéaire associée à  $M$  est paire (ou de type II, ou orthosymétrique...).

Ces remarques faites nous allons pouvoir décrire les structures réelles de  $C$  dans les différents cas.

Sur  $C$  nous noterons  $\tau$  l'involution du revêtement  $C \rightarrow E$ ,  $(z, \mu) \mapsto (z, -\mu)$ . L'existence de  $\tau$  permet de définir deux structures réelles sur  $C$ . L'une définie par  $(z, \mu) \mapsto (\bar{z}, \bar{\mu})$  l'autre par  $(z, \mu) \mapsto (\bar{z}, -\bar{\mu})$ . La première sera notée  $\sigma$  la seconde,  $\sigma'$  ( $= \sigma\tau = \tau\sigma$ ).

REMARQUE. L'équation réelle de  $(C, \sigma')$  est simplement

$$\mu^4 + 2(z^{-1} - 2H + 2z)\mu^2 + z^{-2} + 4(2l^2 - H)z^{-1} + 4K = 0 \tag{19}$$

Nous allons décrire simultanément ces deux structures en fonctions des paramètres  $l, H$  et  $K$ . En fait, pour des raisons pratiques, nous allons décrire  $\sigma'$  et en déduire  $\sigma$  en utilisant le fait que  $\sigma = \sigma'\tau$  (sauf dans le cas [4] où il sera plus simple de décrire directement  $\sigma$ ).

Nous utiliserons pour  $C_{\text{top}}$  et  $\tau$ , le modèle fixe décrit par la figure 9.

On remarquera que la base  $(a_i, b_i)_{1 \leq i \leq 3}$  de  $H_1(C, \mathbf{Z})$  choisie est symplectique (ou standard) pour la forme d'intersection. On notera aussi que cette base est la même que celle utilisée dans [7].

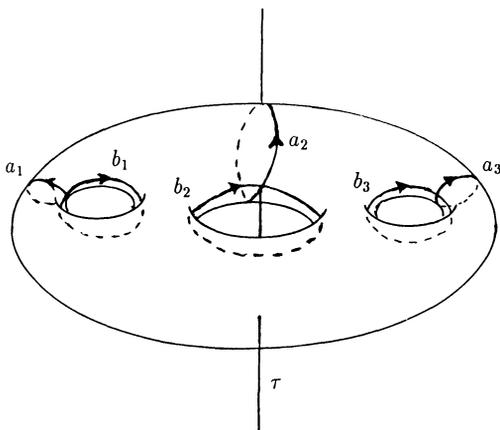


Fig. 9.

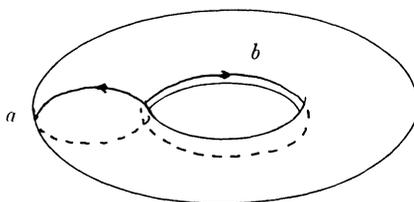


Fig. 10.

Nous utiliserons aussi pour  $E$  le modèle décrit dans la figure 10.

Dans le cas [5],  $C$  a, pour la structure définie par  $\sigma'$ , 4 composantes réelles. Cette situation est facile à décrire dans le cadre du modèle fixé ci-dessus:  $\sigma'$  est simplement la symétrie par rapport au plan horizontal  $P$ . On notera que  $\sigma$  est alors la symétrie par rapport au plan orthogonal à  $P$  passant par l'axe de  $\tau$  et que dans ce cas  $(C, \sigma)$  a 2 composantes réelles (ce que l'on peut aussi constater immédiatement par un calcul direct). On notera aussi que le fait de remplacer  $\sigma'$  par  $\sigma$  revient sur  $E$  à remplacer les coupures par leur complémentaire dans la composante réelle qui les porte.

La matrice pour l'action de  $\sigma'$  sur  $H_1(C, \mathbb{Z})$  dans la base  $(a_i, b_i)$  est donc, dans ce cas,

$$\begin{pmatrix} -1_3 & 0 \\ 0 & 1_3 \end{pmatrix}$$

Pour passer de [5] à [2] il y a deux possibilités. La première (situation “avant cusp” de 4.3.1) consiste à contracter le cycle  $b$  de  $E$  (et donc les cycles  $b_1$  et  $b_3$  de  $C$ ) puis, pour passer en [2], à redilater  $b$  en composant avec un demi-twist de Dehn le long de  $b$  dans  $E$  (resp. le long de  $b_1$  et  $b_3$  dans  $C$ ). Ceci donne immédiatement pour la matrice de  $\sigma'$  sur  $C$ , toujours dans la base  $(a_i, b_i)$ :

$$\begin{bmatrix} & & & 0 & 0 & 0 \\ & -1_3 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1_3 & & \\ 0 & 0 & -1 & & & \end{bmatrix}$$

La deuxième (situation “après cusp”) consiste à contracter  $a$  dans  $E$  puis redilater et composer avec un demi-twist le long de  $a$ . Pour  $C$  on a le choix, soit faire l'opération le long de  $a_1$  et  $a_3$ , soit la faire le long de  $a_1 - a_2$  et  $a_3 - a_2$ . Pour

des raisons de cohérence, justifiées dans la suite, nous ferons le second choix. La matrice de  $\sigma'$ , dans la base  $(a_i, b_i)$  est alors

$$\begin{bmatrix} & & & 1 & -1 & 0 \\ & -1_3 & & -1 & 2 & -1 \\ & & & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1_3 & \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{bmatrix}.$$

On remarquera que cette description est homéomorphe à celle décrite dans la situation “avant cusp”. On remarquera aussi que dans les deux cas (“avant et après cusp”) les constructions ne changent pas la partie réelle de  $(C, \sigma)$  (ce qui correspond bien à ce que l’on constate en regardant l’allure de la courbe). Nous avons représenté les parties réelles de  $(C, \sigma)$  et  $(C, \sigma')$  pour ce cas dans la figure 11.

Pour passer de [5] à [4]. Une analyse de l’allure de  $E$  lors de ce passage montre que l’opération correspond à contracter un cycle réel pour  $(C, \sigma')$  puis à le redilater en composant avec un demi-twist. Comme il faut de plus que ce cycle soit stable par  $\tau$ , il est facile de constater que pour le modèle que nous avons fixé pour [5] il ne peut s’agir que de  $b_2$ . La matrice de  $\sigma'$  est alors

$$\begin{bmatrix} & & & 0 & 0 & 0 \\ & -1_3 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & -1 & 0 & & 1_3 & \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{bmatrix}$$

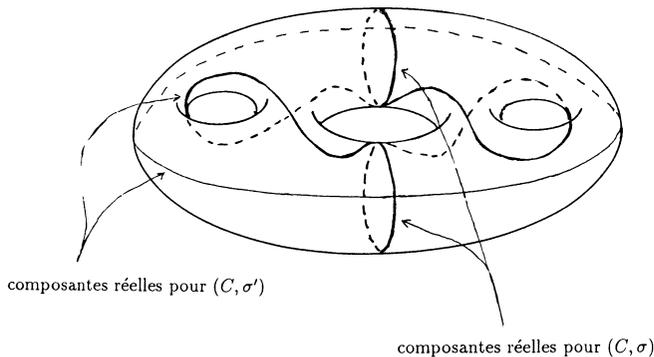


Fig. 11.

Pour passer de [2] à [1]. Ce cas se traite de la même manière que pour passer de [5] à [4]. On en déduit la matrice de  $\sigma'$

$$\begin{pmatrix} -1_3 & 0 \\ -1_3 & 1_3 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Pour passer de [4] à [1]. La situation est similaire dans les deux cas possibles (les cas A:  $l \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$  et B:  $l \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ) et se traite de la même manière que le passage de [5] à [2] dans le cas "avant cusp". Ceci donne pour la matrice de  $\sigma'$ , la même matrice que celle décrite en (20).

Pour passer de [2] à [3]. Pour décrire ce cas nous aurons besoin d'une analyse précise des parties réelles de  $(C, \sigma)$  et  $(C, \sigma')$ . Les allures de  $(C, \sigma)$  et  $(C, \sigma')$  dans [2] sont décrites dans la figure 12, deux de  $(C, \sigma)$  et  $(C, \sigma')$  dans [3] dans la figure 13, et les situations intermédiaires dans la figure 14.

On en déduit que pour passer de [2] à [3] il faut contracter, puis redilater et composer avec des demi-twists deux cycles qui ne coupent pas la partie réelle de  $(C, \sigma')$  mais intersectent chacun les deux composantes réelles de  $(C, \sigma)$ . Deux tels cycles sont  $a_1 - a_2 - b_2$  et  $a_3 - a_2 - b_2$  (voir la Fig. 15 et aussi la Fig. 11). Ceci donne en utilisant la remarque 4 et la matrice de  $\sigma'$  du cas [2] "après cusp"

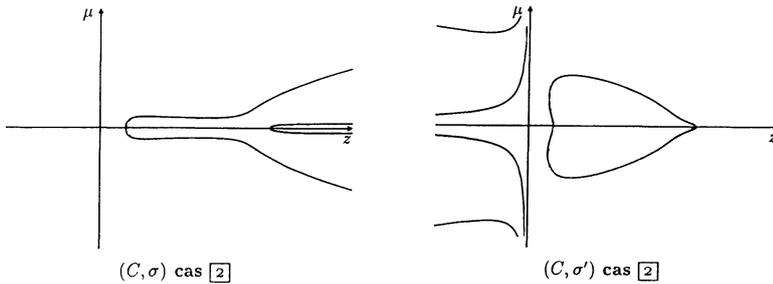


Fig. 12.

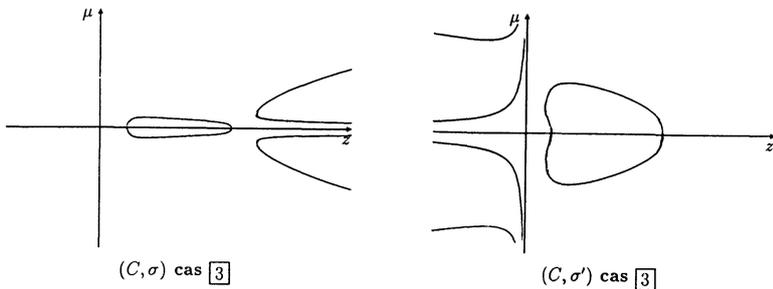


Fig. 13.

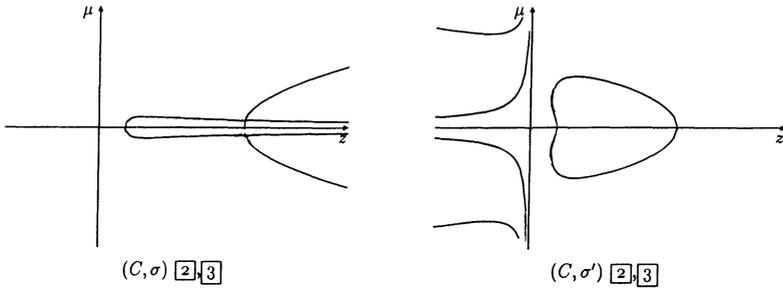


Fig. 14.

donnée ci-dessus, la matrice

$$\begin{bmatrix}
 -1 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\
 0 & -3 & 0 & -2 & 4 & -2 \\
 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & -2 & 0 & -1 & 3 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix} \tag{21}$$

(toujours dans la base  $(a_i, b_i)$ ).

Pour passer de [4] à [3]. Une analyse similaire à celle faite pour passer de [2] à [3] montre que le passage se fait en contractant le cycle  $a_1 + a_3 - b_2 - 2a_2$  (voir sur la Fig. 16 les composantes réelles de  $(C, \sigma')$ ).

En utilisant une fois de plus la remarque 4, ceci donne pour la matrice de  $\sigma'$ , à nouveau la matrice (21).

Dans la suite nous aurons besoin du résultat suivant:

LEMME 5.3.1. Dans le cas [1] (resp. [3]) les deux structures réelles  $(C, \sigma)$  et  $(C, \sigma')$  sont homéomorphes. Dans le cas [1] il n'y a qu'une composante réelle pour  $\sigma$  et  $\sigma'$ . Dans le cas [3] la partie réelle, pour  $\sigma$  et pour  $\sigma'$ , a deux composantes et ne sépare pas la partie complexe.

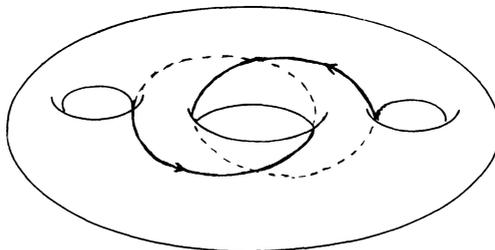


Fig. 15.

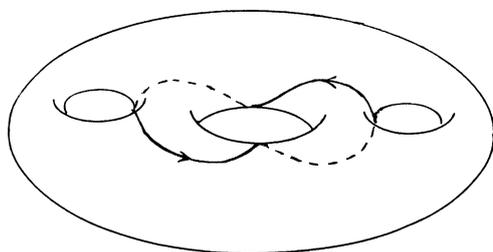


Fig. 16.

L'affirmation est facile à vérifier dans le cas [1]. Dans le cas [3] ceci peut aussi se déduire des constructions. Pour  $\sigma'$ , il suffit de remarquer que la structure réelle est homéomorphe à celle obtenue dans le cas [2] (la partie réelle correspond aux cycles  $b_1 + b_2 + b_3$  et  $a_1 - 2a_2 + a_3 + b_1 - b_2 + b_3$ , voir la Fig. 11).

Pour  $\sigma$ , c'est un peu plus délicat mais l'on peut montrer, en suivant la construction faite pour passer de [4] en [3], que la partie réelle correspond aux cycles  $2a_2 + b_2$  et  $a_1 + a_3 - 2a_2 - b_2$ .

Un autre argument, plus brutal, consiste à remarquer que dans la base

$$a_1 - a_2 + b_1 + b_3, a_2 - b_3, a_1 - 2a_2 + a_3 + b_1 - b_2, b_1 - b_3, b_1 + b_2 + b_3, \\ a_1 - 2a_2 + a_3 + b_1 - b_2 + b_3,$$

la matrice de  $\sigma'$  est

$$\begin{bmatrix} & & & 0 & 0 & 0 \\ & -1_3 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & & & \\ 1 & -1 & 0 & 1_3 & & \\ 1 & 0 & 1 & & & \end{bmatrix}$$

et que dans la base  $-b_1, a_2, a_3, a_1 + a_3, 2a_2 + b_2, b_3 - b_1$  la matrice de  $\sigma$  est

$$\begin{bmatrix} & & & 0 & 0 & 0 \\ & -1_3 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & & & \\ -1 & 2 & 0 & 1_3 & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \end{bmatrix}$$

et utiliser la remarque 5 dans les deux cas.

Pour passer de  $\boxed{4}$  à  $\boxed{1}$ . Remarquons tout d'abord que dans le cas  $\boxed{4}$   $(C, \sigma)$  (resp.  $(C, \sigma')$ ) a 3 (resp. 1) composantes réelles. Ceci implique que  $(C, \sigma)$  (resp.  $(C, \sigma')$ ) dans le cas  $\boxed{4}$  est homéomorphe à  $(C, \sigma')$  (resp.  $(C, \sigma)$ ) dans le cas  $\boxed{4}$ . On en déduit que l'on peut prendre comme matrice de  $\sigma$  la matrice

$$\begin{bmatrix} & & 0 & 0 & 0 \\ & -1_3 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & -1 & 0 & 1_3 & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{bmatrix}$$

Pour passer en  $\boxed{1}$  il y a deux façons de procéder. La première, qui correspond à la situation "avant cusp", consiste à contracter  $b_1$  et  $b_3$  et donne comme matrice pour  $\sigma$

$$\begin{bmatrix} & & 0 & 0 & 0 \\ & -1_3 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & & \\ 0 & -1 & 0 & 1_3 & \\ 0 & 0 & -1 & & \end{bmatrix}$$

La seconde, qui correspond à la situation "après cusp", consiste à contracter  $a_1$  et  $a_3$ . On obtient alors pour  $\sigma$  la matrice

$$\begin{bmatrix} & & 1 & 0 & 0 \\ & -1_3 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & -1 & 0 & 1_3 & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{bmatrix}$$

Pour passer de  $\boxed{4}$  à  $\boxed{3}$ . Nous avons déjà constaté que le cas  $\boxed{4}$  pour  $\sigma$  est similaire au cas  $\boxed{4}$  pour  $\sigma'$  et que les deux structures réelles sont homéomorphes pour  $\boxed{3}$ . On en déduit que ce passage est identique pour  $\sigma$  au passage  $\boxed{4}$ ,  $\boxed{3}$  pour  $\sigma'$ .

## 6. Fibré et diviseur des vecteurs propres

Nous allons utiliser abondamment les diviseurs de  $C$  et  $E$ . Il est donc nécessaire de commencer par comprendre un peu précisément ceux des fonctions sur ces courbes.

### 6.1. Quelques fonctions méromorphes sur $C$ et $E$

On se place toujours dans  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ , la première coordonnée est  $z$ . Les points remarquables sont  $\infty_- = (\infty, 0)$ ,  $\infty_+ = (\infty, \infty)$ ,  $p_1 = (\alpha, 0)$ ,  $p_2 = (\beta, 0)$  et  $a = (0, \infty)$ . De la discussion précédente, il ressort que sur  $E$ , le diviseur de  $z$  est

$$(z) = 2a - \infty_+ - \infty_-$$

et celui de  $y$

$$(y) = p_1 + p_2 + \infty_- - \infty_+ - 2a$$

Appelons  $a_+$  et  $a_-$  les deux points de  $C$  au dessus de  $a$ . Sur  $C$ , le diviseur de la fonction  $z$  est

$$(z) = 2a_+ + 2a_- - 2\infty_+ - 2\infty_-$$

et celui de  $\mu$

$$(\mu) = p_1 + p_2 + \infty_- - \infty_+ - a_+ - a_-$$

remarquons au passage que  $\frac{1}{2}(z) = a_+ + a_- - \infty_+ - \infty_-$  est un élément de  $\text{Pic}^0(C)$  d'ordre 2 (il est non trivial puisqu'il n'y a pas de fonction de degré 2 sur  $C$ ).

Nous allons être amenés à travailler dans un groupe  $\text{Pic}^d(C)$ , dont l'espace tangent en chaque point s'identifie canoniquement à  $H^1(C, \mathcal{O}_C)$ . Chacun des ouverts  $\mathcal{U}_\pm$  dans  $C$  est une courbe affine (les courbes non complètes sont affines d'après un théorème de Serre) et donc le recouvrement  $C = \mathcal{U}_+ \cup \mathcal{U}_-$  de  $C$  est acyclique pour  $\mathcal{O}_C$ . Ainsi  $H^1(C, \mathcal{O}_C)$  est le  $H^1$  associé à ce recouvrement.

**PROPOSITION 6.1.1.** *Les 1-cocycles définis par les fonctions  $\mu$ ,  $\mu^2$ ,  $\mu^3$ , holomorphes sur  $\mathcal{U}_+ \cap \mathcal{U}_-$  ont des classes de cohomologie indépendantes dans  $H^1(C, \mathcal{O}_C)$ .*

**DEMONSTRATION.** Remarquons d'abord que  $\mu^2$  est invariante par  $\tau_2^*$  alors que  $\mu$  et  $\mu^3$  sont anti-invariantes. Il suffit donc de démontrer les deux lemmes suivants:

LEMME 6.1.2. *Le cocycle  $y$  définit un élément non trivial de  $H^1(E, \mathcal{O}_E)$ .*

LEMME 6.1.3. *Les deux cocycles  $\mu$  et  $\mu^3$  définissent des éléments indépendants dans  $H^1(C, \mathcal{O}_C)$ .*

REMARQUE. Ainsi ces deux éléments de l'espace tangent à la jacobienne formeront une base de l'espace tangent à la sous-variété abélienne Prym  $(C|E)$ , alors que  $\mu^2$  engendrera la partie provenant de  $\text{Pic}(E)$ .

DEMONSTRATION DU LEMME 6.1.2. Appelons toujours  $\mathcal{U}_\pm$  les ouverts *ad hoc* sur la courbe  $E$ . On a vu qu'il suffit de montrer que l'élément considéré est non trivial dans la cohomologie du recouvrement. Supposons donc qu'il le soit, c'est à dire qu'il existe  $f_+$  holomorphe sur  $\mathcal{U}_+$  et  $f_-$  holomorphe sur  $\mathcal{U}_-$  telles que, sur  $\mathcal{U}_+ \cap \mathcal{U}_-$ ,  $y = f_+ - f_-$ . Alors  $f_+$  va avoir, comme  $y$ , un pôle simple pour  $z = \infty$ . Comme elle n'en a pas ailleurs, c'est une fonction de degré 1 à valeurs dans  $\mathbf{P}^1$ , ce qui est absurde.  $\square$

DEMONSTRATION DU LEMME 6.1.3. De même, la fonction  $\mu$  a un pôle simple pour  $z = \infty$  et elle représente donc un élément non trivial de  $H^1(C, \mathcal{O}_C)$ . Montrons qu'il n'existe aucun scalaire  $\alpha$  tel que  $\mu^3 - \alpha\mu \sim 0$ . Comme dans la démonstration de 3.3.1, on montre que, pour une 1-forme holomorphe  $\omega$  bien choisie,

$$\text{Res}_{\lambda=\infty}((\mu^3 - \alpha\mu)\omega) \neq 0$$

Posons  $\delta(z) = z^{-1} - 2H + 2z$  de sorte que l'équation de  $C$  s'écrit

$$(\mu^2 - \delta(z))^2 = 4z^{-1}\varphi(z)$$

et de sorte qu'il est clair que

$$\omega = \frac{dz}{\mu z(\mu^2 - \delta(z))}$$

est une forme holomorphe sur  $C$ . On calcule sans difficulté la somme des résidus cherchée, elle vaut  $-2$ , ce qui finit la démonstration.  $\square$

## 6.2. Application de vecteurs propres

Considérons une orbite  $\mathcal{O}_{2l}$  ( $l \neq 0$ ) fixée, et sur cette orbite un niveau commun  $\mathcal{T}_{H,K}$  des intégrales premières  $H$  et  $K$ . Ces valeurs indexent aussi une courbe spectrale  $Y$ . A tout élément  $(\Gamma, M) \in \mathcal{O}_{2l}$  on associe un fibré en droites complexes  $F$  sur  $Y$ : celui dont la fibre au point  $(\lambda, \mu)$  est le dual de la droite propre de  $L(\lambda)$  pour la valeur propre  $\mu$ .

Le degré de ce fibré se calcule facilement. On utilise la forme (13) pour constater que  $\lambda_* F \rightarrow \mathbf{P}^1$  est le fibré trivial  $\mathbf{R}^4 \otimes_{\mathbf{R}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}$  de rang 4: la fibre en  $\lambda \in \mathbf{P}^1$  est la somme des (deux des) sous-espaces propres de  $L(\lambda)$  soit tout l'espace  $\mathbf{C}^4$ . Le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch donne

$$ch(\lambda_* F)td(\mathbf{P}^1) = \lambda_*(ch(F)td(Y))$$

soit

$$4(1+t) = \lambda_*((1+du)(1+(1-g)u))$$

où  $t \in H^2(\mathbf{P}^1)$ ,  $u \in H^2(Y)$  sont les générateurs canoniques,  $d$  est le degré cherché et  $g$ , le genre de  $Y$ , vaut 5. Bien sûr,  $\lambda_* u = t$  et  $\lambda_* 1 = 4$  puisque  $\lambda$  est de degré 4. On trouve donc que  $d = 8$ .

On définit ainsi l'application

$$f_{H,K}: \mathcal{F}_{H,K} \rightarrow \text{Pic}^8(Y)$$

REMARQUE. La même jacobienne reçoit aussi le niveau correspondant aux mêmes valeurs de  $H$  et  $K$  mais cette fois dans  $\mathcal{O}_{-2l}$ : seul  $l^2$  apparaît dans l'équation de  $Y$ . D'ailleurs il est clair que les deux niveaux en question sont isomorphes par

$$((p, q, r), (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)) \mapsto ((-p, -q, r), (\gamma_1, \gamma_2, -\gamma_3))$$

La relation (14) implique que, si  $v$  est un vecteur propre de  $L(\lambda)$  pour la valeur propre  $\mu$ , alors  $\eta v$  est un vecteur propre de  $L(\lambda)$  pour la même valeur propre. En particulier,  $\tau_1^* F$  est isomorphe à  $F$ , et  $f_{H,K}$  est à valeurs dans l'image de l'application

$$\pi^*: \text{Pic}^4(C) \rightarrow \text{Pic}^8(Y)$$

induite par le revêtement  $\pi: Y \rightarrow C$ .

REMARQUE.  $\pi^*$  est un revêtement double de son image et non pas une inclusion comme l'affirment les auteurs de [7]. En termes de groupes, le noyau de son avatar

$$\pi^*: \text{Pic}^0(C) \rightarrow \text{Pic}^0(Y)$$

est engendré par un élément d'ordre 2, ici celui représenté par  $\frac{1}{2}(z)$ . En termes topologiques, le groupe des éléments d'ordre 2 dans  $\text{Pic}^0(C)$  s'identifie naturelle-

ment à  $H^1(C; \mathbf{Z}/2)$  et l'image de  $\frac{1}{2}(z)$  est la classe correspondant au revêtement  $Y \rightarrow C$ .

**PROPOSITION 6.2.1.** *Il existe une application  $\tilde{f}_{H,K}: \mathcal{T}_{H,K} \rightarrow \text{Pic}^4(C)$  relevant  $f_{H,K}$  (de sorte que  $f_{H,K} = \pi^* \tilde{f}_{H,K}$ ).*

**DEMONSTRATION.** Fixons un point de  $\mathcal{T}_{H,K}$ , autrement dit un polynôme  $L(\lambda)$ . Considérons une section holomorphe  $\psi$  du fibré  $F$  associé, dualement une section méromorphe sans zéro  $(\lambda, \mu) \mapsto v(\lambda, \mu)$  du fibré des vecteurs propres. A cause de la propriété d'invariance sous  $\tau_1$  et quitte à multiplier  $v$  par une fonction ad hoc, on peut supposer que le diviseur des pôles de  $v$  s'écrit  $A + \pi^{-1}(\infty_+)$  où  $A$  est effectif de degré 6 et vérifie  $\tau_1^* A = A$ , de sorte que  $A = \pi^* D$ , avec  $D$  un diviseur effectif de degré 3 sur  $C$ .

**REMARQUE.** Bien que les auteurs de [7] aient été un peu imprudents sur la question traitée ici, cette construction est reprise de leur article.

Les deux éléments de  $\text{Pic}^4(C)$  qui s'envoient sur  $f_{H,K}(L(\lambda))$  sont donc les classes des diviseurs  $D + \infty_+$  et  $D + a_+ + a_- - \infty_-$ . Pour démontrer la proposition, il suffit donc de vérifier que  $D + a_+ + a_- - \infty_-$  n'est pas équivalent à un diviseur effectif de la forme  $D' + \infty_+$ : on pourra alors définir  $\tilde{f}_{H,K}(L(\lambda))$  comme la classe de  $D + \infty_+$  (par exemple).

Supposons donc que

$$D + a_+ + a_- - \infty_- \sim D' + \infty_+$$

ou que

$$D + a_+ + a_- \sim D' + \infty_+ + \infty_-$$

Soit  $g$  une fonction méromorphe sur  $C$  telle que  $(g) = D' + \infty_+ + \infty_- - D - a_+ - a_-$ . Alors  $\tilde{g} = g \circ \pi$  est une fonction sur  $Y$  et  $\tilde{g}\psi$  une section méromorphe de  $F$ . Son diviseur est

$$\pi^*(D') + 2\pi^{-1}\infty_+ + \pi^{-1}\infty_- - \pi^{-1}(a_+) - \pi^{-1}(a_-)$$

Comme  $D'$  est effectif,  $\tilde{g}\psi$  s'annule en tous les points au dessus de  $\lambda = \infty$ . C'est dire que  $\tilde{g}\psi$  annule tous les vecteurs propres de  $L'_1$ . Or cette matrice est diagonale (dans la base canonique). La section  $\tilde{g}\psi$  serait donc nulle, ce qui est absurde. □

Le but des deux paragraphes suivants est de démontrer

**THEOREME 6.2.2.** *Si  $C$  est lisse, le niveau  $\mathcal{T}_{H,K}$  correspondant est régulier et  $\tilde{f}: \mathcal{T}_{H,K} \rightarrow \text{Pic}^4(C)$  est un isomorphisme de variétés algébriques (complexes munies*

d'une structure réelle) sur son image. Celle-ci est isomorphe à un ouvert de  $\text{Prym}(C|E)$ .

**COROLLAIRE 6.2.3.** Si  $C$  est lisse, le niveau (réel)  $\mathcal{T}_{H,K}$  est difféomorphe à la partie réelle de  $\text{Prym}(C|E)$ . En particulier, le nombre de tores de Liouville constituant ce niveau est le nombre de composantes de  $\text{Prym}(C|E)(\mathbf{R})$ .

En effet,  $\mathcal{T}_{H,K}$  étant compacte, toute la partie réelle de  $\text{Prym}(C|E)$  est dans l'image.  $\square$

**REMARQUE.** L'essentiel des aspects complexes de ce résultat est énoncé dans [7] à la suite de la détermination des solutions explicites des équations d'Euler. Nous l'obtenons ici indépendamment de ces solutions.

Compte-tenu de ce qui précède, et pour montrer le théorème, il suffit de vérifier:

- (a) que l'application tangente à  $f_{H,K}$  est à valeurs dans le sous-espace vectoriel des éléments invariants par  $T_1^*$  et anti-invariants par  $\tau_2^*$  dans  $H^1(Y, \mathcal{O}_Y) -$  c'est l'espace tangent de  $\text{Prym}(C|E)$ .
- (b) qu'elle induit un isomorphisme de l'espace tangent à  $\mathcal{T}_{H,K}$  sur ce sous-espace.

Ainsi nous saurons que  $f_{H,K}$  (et donc aussi  $\tilde{f}_{H,K}$ ) est un revêtement de son image. Ensuite il n'y aura plus qu'à montrer que  $\tilde{f}$  est injective en un point générique, ou, compte-tenu de la factorisation (Proposition 6.2.1), que  $f$  est de degré 2 en un point générique.

### 6.3. Application tangente à $f$

Nous allons utiliser ici la méthode de Reiman 1.1.1 deux fois: essentiellement une fois pour la fonction  $H$  et une autre fois pour la fonction  $2(H^2 + 1) - K$ .

#### 6.3.1. Invariants spectraux et intégrales premières

Les coefficients des puissances de  $\lambda$  dans l'équation (16) de la courbe spectrale  $Y$  sont des intégrales premières de l'équation différentielle: c'est la première des vertus de la forme de Lax que de fournir des intégrales premières.

En utilisant les relations entre fonctions symétriques élémentaires et polynômes de Newton (sommes de puissances), on calcule facilement:

$$\text{tr } L(\lambda)^2 = -4(\lambda^{-2} - 2H + 2\lambda^2)$$

et

$$\begin{aligned} \text{tr } L(\lambda)^4 &= 2\{2(\lambda^{-2} - 2H + 2\lambda^2)\}^2 - 4\{\lambda^{-4} + 4(2I^2 - H)\lambda^{-2} + 4K\} \\ &= 4\lambda^{-4} - 16(H + 2I^2)\lambda^{-2} + 16[2(H^2 + 1) - K] - 64H\lambda^2 + 32\lambda^4 \end{aligned}$$

de sorte que  $8H = \text{Res}(\text{tr } L(\lambda)^2 \lambda^{-1} d\lambda)$  et  $16[2(H^2 + 1) - K] = \text{Res}(\text{tr } L(\lambda)^4 \lambda^{-1} d\lambda)$ .

Naturellement, ces deux fonctions sont indépendantes et en involution si et seulement si  $H$  et  $K$  le sont.

6.3.2. Commençons donc par regarder le cas de  $H$  (qui est traité dans [7]). A un coefficient constant près,  $H$  est le terme constant dans  $\text{tr}(L(\lambda)^2)$ . On applique la méthode de Reiman 1.1.1 avec  $g(A) = \text{tr } A^2$ , c'est d'ailleurs ce qui permet de trouver le second membre de l'équation de Lax pour la toupie de Kowalevski que nous n'avons pas explicitement écrit. A un coefficient constant près, on trouve que  $dh(L(\lambda)) = L(\lambda)$  et donc que  $\psi(\lambda, \mu) = \mu$ .

6.3.3. Pour ce qui est de  $2(H^2 + 1) - K$ , c'est le terme constant dans  $\text{tr}(A)^4$  (ce qui permettrait aussi de mettre l'équation différentielle du flot de  $K$  sous forme de Lax mais nous n'en avons pas besoin ici). Toujours à un facteur constant près, on trouve que  $dh(L(\lambda)) = L(\lambda)^3$  et donc que  $\psi(\lambda, \mu) = \mu^3$ .

Des calculs de 6.1, on déduit alors immédiatement:

**PROPOSITION 6.3.4.** *Si  $C$  est lisse, le niveau  $\mathcal{T}_{H,K}$  est régulier.*

En effet les champs de vecteurs hamiltoniens de  $H$  et  $K$  sont alors envoyés sur des vecteurs indépendants de  $H^1(C, \mathcal{O}_C)$  et donc ces deux vecteurs étaient indépendants. □

En supposant  $(H, K)$  tel que  $C$  soit lisse, on a aussi

**PROPOSITION 6.3.5.** *L'application de vecteurs propres  $\tilde{f}_{H,K}: \mathcal{T}_{H,K} \rightarrow \text{Pic}^4(C)$  est un revêtement (étale) de son image, laquelle est une sous-variété abélienne de même direction que (et donc isomorphe à)  $\text{Prym}(C | E)$ .*

#### 6.4. Injectivité de $\tilde{f}$

Pour finir de démontrer le théorème 6.2.2, il reste à montrer que  $f$  est de degré 2 (considérée à valeurs dans son image). La base de la technique vient encore de Reiman [23]. Il commence par montrer que si  $F$  est dans l'image, alors  $\mathcal{L}(F(-P^+)) = 0$  où pour simplifier, on a appelé  $P^+$  le diviseur des zéros de  $\lambda$  (de même  $P^-$  sera son diviseur des pôles).

**REMARQUE.** Reiman fait l'hypothèse que le coefficient de  $\lambda$  dans  $L(\lambda)$  a un spectre simple, ce qui n'est pas vrai pour nous: dans la forme (13) ce coefficient a 0 pour valeur propre double. Quoiqu'il en soit, sa démonstration utilise exclusivement le fait que cette matrice est diagonalisable, ce qui est vrai ici où elle est diagonale.

Il considère ensuite la courbe  $Y$ , munie de ses fonctions  $\lambda$  et  $\mu$  (et en particulier de  $(\lambda) = P^+ - P^-$ ) et un fibré  $F$  de degré 8 sur  $Y$  qui vérifie  $\mathcal{L}(F(-P^+)) = 0$ . Soit  $V = \mathcal{L}(F)$  l'espace de ses sections holomorphes.

LEMME 6.4.1.  $\dim_{\mathbf{C}} V = 4$ .

Soit  $Y_0 = \mathcal{U}_+ \cap \mathcal{U}_- = Y - (P^+ \cup P^-)$  et soit  $R = \mathbf{C}[\lambda, \lambda^{-1}]$ . On considère l'application naturelle

$$\iota: V \otimes R \rightarrow \mathcal{L}(Y_0, F)$$

LEMME 6.4.2. L'application  $\iota$  est un isomorphisme de  $R$ -modules.

En particulier, la multiplication par  $\mu$ , endomorphisme de  $\mathcal{L}(Y_0, F)$  correspond, via  $\iota$  à une application  $R$ -linéaire de  $V \otimes R$  dans lui-même, c'est à dire à un polynôme de Laurent à coefficients dans les endomorphismes de  $V$ .

Comme on a donné les fonctions  $\lambda$  et  $\mu$  sur  $Y$ , on sait en plus que  $\lambda\mu$  n'a pas de pôle en les points de  $P^+$ , et de même que  $\lambda^{-1}\mu$  n'a pas de pôle en les points de  $P^-$ , ainsi, notre polynôme d'endomorphismes est

$$a\lambda^{-1} + b + c\lambda$$

On a ainsi, à conjugaison près, une matrice  $L(\lambda)$  (qui n'a a priori aucune raison d'être dans  $\mathfrak{sp}(4, \mathbf{R})[\lambda, \lambda^{-1}]$ ).

Il n'est pas difficile maintenant, une matrice  $L(\lambda)$  du type (13) étant fixée, d'étudier sa classe de conjugaison sous  $GL(4, \mathbf{C})$  ou, ce qui revient au même, sous  $SL(4, \mathbf{C})$ : c'est un calcul ni très long, ni très difficile, ni très intéressant. On cherche les  $g \in SL(4, \mathbf{C})$  tels que  $gL(\lambda)g^{-1}$  soit de la forme  $L(\lambda)$ . Comme le coefficient de  $\lambda$  est une matrice diagonale indépendante des paramètres,

$$g = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

On considère ensuite le terme constant et enfin le terme en  $\lambda$  pour montrer, avec des hypothèses de généralité ad hoc sur  $L(\lambda)$  (précisément  $(u, v) \neq 0$ ,  $w \neq 0$ ,  $(\gamma_1, \gamma_2) \neq 0$ ,  $(\gamma_3 \neq 0)$ ), que

$$g = \begin{bmatrix} a & 0 & & \\ 0 & \varepsilon a & & \\ & & \alpha & 0 \\ 0 & & 0 & \varepsilon \alpha \end{bmatrix}$$

où  $a^2 = \alpha^2 = \varepsilon$  et  $\varepsilon^2 = 1$ .

Cette conjugaison correspond à

$$\Gamma' = \begin{bmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \\ \gamma'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \varepsilon\gamma_2 \\ \eta\gamma_3 \end{bmatrix}, \quad M' = \begin{bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon\eta u \\ \eta v \\ \varepsilon w \end{bmatrix}$$

avec  $\eta^2 = 1$ . En fait, si on est bien sur l'orbite  $\mathcal{O}_{2l}$ , on a  $\eta = \varepsilon$ .

Les deux éléments de  $\mathcal{T}_{H,K}$

$$(\Gamma, M) = \left( \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \right) \quad \text{et} \quad (\Gamma', M') = \left( \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ -\gamma_2 \\ -\gamma_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ -v \\ -w \end{bmatrix} \right)$$

ont donc la même image, ainsi  $f$  est de degré 2 et  $\tilde{f}$  de degré 1. □

## 7. Tores de Liouville

### 7.1. L'image de l'application moment et les niveaux critiques

Nous avons vu dans 6.1 que lorsque  $C$  est lisse, alors le niveau  $\mathcal{T}$  correspondant est régulier: l'ensemble des valeurs critiques de l'application moment  $(K, H)$  est contenu dans le discriminant de la famille de courbes  $C$ . Nous allons montrer ici la réciproque, en vérifiant que les valeurs de  $H$  et  $K$  figurant sur le discriminant sont effectivement critiques. Nous allons limiter les calculs (voir [19]).

#### 7.1.1. Image du moment

Déterminons l'image réelle de l'application moment  $(K, H)$ . Il suffit de considérer chacune des régions du plan des  $(K, H)$  limitées par la partie réelle du discriminant et de décider si oui ou non elle est atteinte. Il est clair que les régions hachurées sur la figure 17 ne sont pas atteintes: elles contiennent soit des points avec  $K < 0$ , soit des points avec  $H < -1$ .

Toutes les autres régions (numérotées sur la Fig. 17) sont atteintes: faisons  $q = 0$  et  $\gamma_2 = 0$ , alors

$$H = p^2 + \frac{1}{2}r^2 - \gamma_1$$

$$K = (p^2 + \gamma_1)^2$$

$$2l = 2p\gamma_1 + r\gamma_3$$

Si  $\gamma_1$  est très proche de 0, alors  $\gamma_2$  est très proche de  $\pm 1$  et  $r$  de  $\pm 2l$ . Si on . it

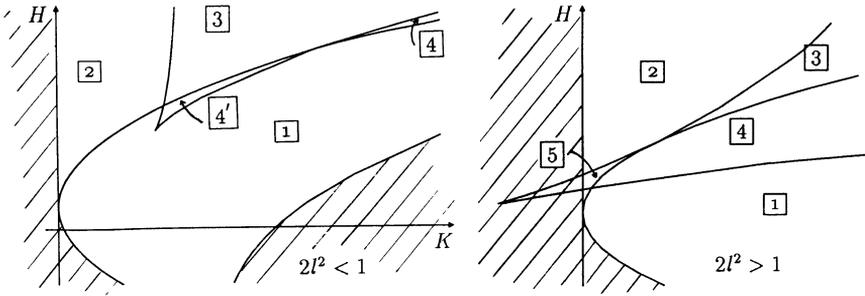


Fig. 17.

brutalement  $\gamma_1 = 0$ , on obtient  $K = p^4$ ,  $H = p^2 + 2l^2$  et ainsi tous les points de la branche supérieure de la parabole. En gardant  $\gamma_1 \neq 0$  mais très petit, on obtient des points de toutes les régions limitées par cette branche supérieure, c'est à dire en fait de toutes les régions non hachurées et numérotées sur la figure 17.

REMARQUE. Evidemment toutes les branches de courbes qui contribuent à la frontière de l'image du moment sont formées de valeurs critiques correspondant à des points critiques réels.

7.1.2. La matrice jacobienne

Etudions maintenant les valeurs critiques de l'application moment. Les gradients de  $\|\Gamma\|^2$ ,  $M \cdot \Gamma$  et  $H$  pour la forme bilinéaire définie à la Section 1.3 sont respectivement  $\varepsilon\Gamma$ ,  $\Gamma + \varepsilon M$  et  $\Omega + \varepsilon L$ . On calcule facilement celui de  $K$  qui s'écrit  $A + \varepsilon B$ , où

$$B = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2(p\eta_1 + q\eta_2) \\ 2(p\eta_2 - q\eta_1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\eta_1 = p^2 - q^2 + \gamma_1, \quad \eta_2 = 2pq + \gamma_2$$

Les différentielles des deux fonctions  $H$  et  $K$  sont donc liées sur l'orbite  $O_{2l}$  si et seulement si les 4 vecteurs de  $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$  qui sont les colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \Gamma & \Omega & A \\ \Gamma & M & L & B \end{pmatrix}$$

sont liés.

Ecrivons donc qu'il existe une relation linéaire entre les colonnes de cette

matrice:

$$\exists s, t, u, v (\in \mathbf{R}) \text{ tels que } \begin{cases} t\Gamma + u\Omega + vA = 0 \\ s\Gamma + tM + uL + vB = 0 \end{cases}$$

On a  $M = 2\Omega + C$  où  $C = (0, 0 - r)$ . Posons  $y = \gamma_1 + i\gamma_2$  et comme toujours  $x = p + iq$ ,  $\xi = \eta_1 + i\eta_2$  et regroupons en une seule équation (complexe) les équations reliant les deux premières composantes dans chaque vecteur, on obtient un système de 4 équations à 4 inconnues:

$$\begin{cases} ty + ux + vx\bar{\xi} = 0 \\ t\gamma_3 + ur = 0 \\ sy + 2tx - u + v\xi = 0 \\ s\gamma_3 + tr = 0 \end{cases}$$

Bien sûr, ce n'est pas vraiment un système linéaire de 4 équations à 4 inconnues:  $s, t, u$  et  $v$  doivent être réels. En tout état de cause, nous cherchons simplement à montrer que les courbes composant le discriminant sont effectivement des courbes de valeurs critiques. Un cas particulièrement simple s'impose à nous: celui où les équations elles-mêmes sont réelles, c'est à dire où  $\gamma_2 = 0$  et  $q = 0$  (ainsi  $\gamma$  et  $x$ , mais aussi  $\xi$ , sont réels).

Dans ce cas on a des valeurs critiques si et seulement si le déterminant  $4 \times 4$  du système est nul. On calcule assez facilement:

$$\begin{vmatrix} 0 & \gamma_1 & p & p(p^2 + \gamma_1) \\ 0 & \gamma_3 & r & 0 \\ \gamma_1 & 2p & -1 & p^2 + \gamma_1 \\ \gamma_3 & r & 0 & 0 \end{vmatrix} = (p^2 + \gamma_1) \begin{vmatrix} 0 & \gamma_1 & 2p & p \\ 0 & \gamma_3 & r & 0 \\ \gamma_1 & 2p & 0 & 1 \\ \gamma_3 & r & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ = (p^2 + \gamma_1)(pr + \gamma_3)(2p\gamma_3 - r\gamma_1)$$

Chacun de ces trois facteurs correspond à une des composantes du discriminant.

### 7.1.3. La droite $K = 0$

Supposons que  $p^2 + \gamma_1 = 0$ . Comme  $q = \gamma_2 = 0$ , on arrive bien sur la droite  $K = 0$ . Grâce à 7.1.1, on sait que tous les points de la demi-droite  $K = 0$  et  $H \geq 2l^2$  sont des valeurs critiques correspondant à des points critiques réels.

## 7.1.4. La courbe à cusp

Supposons  $pr + \gamma_3 = 0$ . Fixons une valeur de  $p$  et un point

$$K = 1 + 2lp + p^4$$

$$H = p^2 - \frac{l}{p}$$

de la courbe à cusp ( $p$  est la valeur de la racine multiple de  $R$  pour ces valeurs de  $H$  et  $K$ ). Posons encore

$$\gamma_1 = \frac{l}{p} + \frac{r^2}{2}$$

Alors  $K = (p^2 + \gamma_1)^2$ , ce qui n'est possible que si

$$\frac{p^2}{4} r^4 + p(p^3 + l)r^2 + (l^2 - p^2) = 0$$

Si l'on suppose  $l > 0$  pour simplifier, cette équation en  $r$  a des solutions réelles pour  $p \leq -l$  et  $-\sqrt[3]{l} \leq p \leq 0$  (ce qui correspond à l'intersection de la branche contenant le point de rebroussement avec le demi-plan  $K \geq 0$ ) et aussi pour  $p \geq l$  ce qui correspond à la partie de l'autre branche qui est dans la zone non hachurée (dont nous savons déjà qu'elle reçoit des points critiques réels grâce à 7.1.1).

Toute la partie de la courbe à cusp qui se trouve dans la zone non hachurée est donc bien formée de valeurs critiques correspondant à des points critiques réels.

## 7.1.5. La parabole

Si le troisième facteur  $2p\gamma_3 \div r\gamma_1$  est nul, avec  $q = 0$  et  $\gamma_2 = 0$ , les équations donnent

$$H - 2l^2 = -(p^2 + \gamma_1)$$

$$K = (p^2 + \gamma_1)^2$$

On atteint ainsi des points de la branche inférieure de la parabole, dont nous savons déjà qu'ils reçoivent des points critiques réels grâce à 7.1.1, et aussi des points critiques réels qui s'envoient dans la branche supérieure. Remarquons que, si toute cette parabole est formée de valeurs critiques (complexes), nous n'avons pas exhibé ici de point critique réel qui s'envoie sur la partie de la branche supérieure située au delà du point de tangence avec la courbe à cusp.

Un peu plus de calculs (ceux que fait Kharlamov dans [19]) montrerait qu'il n'y en a effectivement pas. Nous le retrouverons dans 7.4.

7.2. La méthode classique

Elle est due à Kharlamov [19], et est basée sur l'étude des "mouvements réels" d'Appelrot [4]. Celui-ci a étudié quelles valeurs de  $(p, q)$  (projection de  $\Omega$  ou de  $\frac{1}{2}M$  sur le plan équatorial de la toupie) étaient effectivement atteintes. Cette étude utilise les fonctions  $s_1$  et  $s_2$  et leur position par rapport aux racines réelles du polynôme  $T$  (voir la Section 4 pour les notations). Avec le petit changement linéaire de variables de 4.3 et en appelant toujours  $s_1$  et  $s_2$  les variables modifiées, on remarque d'abord qu'on a toujours

$$s_2 < H - \sqrt{K} < s_1 < H + \sqrt{K}$$

et, d'autre part, si  $e_1, e_2, e_3$  (resp.  $e_1$ ) désignent les (resp. la) racine(s) réelle(s) de  $\varphi$ , que

$$s_2 < e_3 < e_2 < e_1 < s_1 \text{ resp. } s_2 < e_1 < s_1$$

On dessine alors les courbes  $s_1 = \text{cste}$ ,  $s_2 = \text{cste}$  dans le plan des  $(p, q)$ . Les régions des mouvements réels sont celles autorisées par ces inégalités. On conçoit aisément que la position du point  $(K, H)$  considéré par rapport au discriminant a son importance: elle détermine le nombre des racines réelles de  $\varphi$  et leurs positions par rapport à  $H \pm \sqrt{K}$ .

La figure 18 représente la forme des régions obtenues suivant que  $(K, H)$

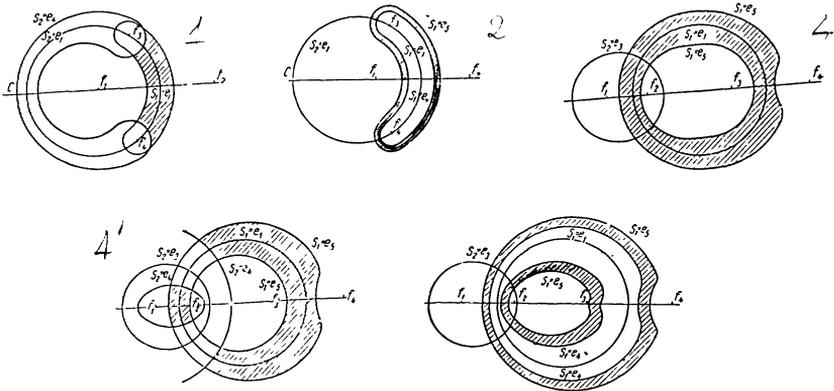


Fig. 18.

est dans la région numérotée respectivement [1], [2], [3] ou [4], [4'] et [5] sur la figure 17.

Ensuite, on compte combien de points  $(\Gamma, M)$  s'envoient sur chaque point de la région considérée. Avec un peu de soin, on peut en déduire le nombre de tores de Liouville correspondant à chaque région du complémentaire du discriminant.

On peut même étudier leurs bifurcations à l'aide de celles des régions de mouvements réels correspondantes, mais l'article [19] ne contient pas de démonstration des résultats annoncés sur les bifurcations.

### 7.3. Tores de Liouville et variétés de Prym réelles

**PROPOSITION 7.3.1.** *Le nombre de tores de Liouville du niveau régulier  $(H, K) \in \mathbb{R}^2$  est celui indiqué sur la figure 19.*

C'est le résultat de Kharlamov [19]. Pour le démontrer, il nous suffit maintenant de compter, dans chaque cas, les composantes de  $\text{Prym}(C|E)$ , ce que nous faisons dans la suite de ce paragraphe.

Soit  $(a_i, b_i)$  la base de  $H_1(C, \mathbb{Z})$  fixée dans 5.3 et soit  $(\omega_i)_i$  une base l'espace des 1-formes holomorphes  $H^0(C, \Omega_C^1)$ , normalisée, c'est à dire telle que,  $\int_{b_j} \omega_i = \delta_{ij}$ .

La jacobienne  $\text{Jac}(C)$  est le quotient  $\mathbb{C}^3 / [Z, 1_3]$  où  $Z = (\int_{a_j} \omega_i)_{i,j}$  et  $[Z, 1_3]$  est le réseau de  $\mathbb{C}^3$  engendré par les colonnes de la  $g \times 2g$  matrice  $(Z, 1_3)$ .

Soit  $\varphi$  un automorphisme de  $C$ . Si  $\varphi_*$  opère sur  $H_1(C, \mathbb{Z})$  par la matrice  $\Phi$  et si

$${}^t\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(où  $a, b, c$  et  $d \in M_g(\mathbb{Z})$ ) alors l'action de  $\varphi$  sur  $\text{Jac}(C)$  est induite par l'application

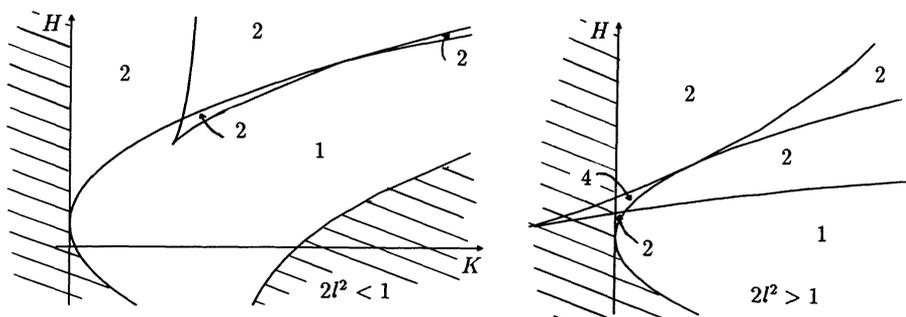


Fig. 19.

$\mathbf{C}^3 \rightarrow \mathbf{C}^3: z \mapsto (cZ + d)^{-1}z$ . Appliqué à  $\tau$ , qui opère sur  $H_1(C, \mathbf{Z})$  par la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & & & \\ 0 & -1 & 0 & & \mathbf{0} & \\ -1 & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & 0 & -1 \\ & \mathbf{0} & & 0 & -1 & 0 \\ & & & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

on trouve que l'action de  $\tau$  sur  $\text{Jac}(C)$  est induite par  $(z_1, z_2, z_3) \mapsto -(z_3, z_2, z_1)$ .

On remarquera que l'existence de  $\tau$  entraîne des relations non triviales entre les  $z_{ij}$  (où  $Z = (z_{ij})_{i,j}$ ). Explicitement on a  $z_{11} = z_{33}$  et  $z_{12} = z_{23}$  en plus des relations habituelles de symétrie  $z_{ij} = z_{ji}$ .

Nous noterons encore  $\tau$  cet automorphisme de  $\text{Jac}(C)$ .  $\text{Prym}(C|E)$  est par définition la composante connexe à l'origine de la partie fixe sous  $-\tau$  ou, pour reformuler les choses autrement,

$$\text{Prym}(C|E) = \frac{(H^0(C, \Omega_C^1)^-)^*}{H_1(C, \mathbf{Z})^-}$$

où l'exposant  $-$  désigne la partie fixe sous  $-\tau$  et  $*$  le dual.

Ici, vue la simplicité de l'expression de  $\tau$ , il est facile de voir que c'est l'image dans  $\text{Jac}(C)$  du sous-espace  $\{(z_1, z_2, z_1)\}$  de  $\mathbf{C}^3$  et que l'on peut prendre  $a_2, a_1 + a_3, b_2, b_1 + b_3$  comme base de  $H_1(C, \mathbf{Z})^-$  et  $\omega_2, \omega_1 + \omega_3$  comme base de  $H^0(C, \Omega_C^1)^-$ . De là on peut déduire que  $\text{Prym}(C|E) = \mathbf{C}^2/[W, B]$ , où compte tenu des relations satisfaites par les  $z_{ij}$ ,

$$W = \begin{pmatrix} z_{22} & 2z_{21} \\ 2z_{21} & 2(z_{11} + z_{13}) \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Les structures réelles sur  $\text{Prym}(C|E)$  correspondant aux structures de  $C$  sont induites par  $\sigma$  et  $\sigma'$ . Remarquons que, comme  $\tau$  opère comme  $-Id$  sur  $\text{Prym}(C|E)$ , on a

$$\sigma'|_{\text{Prym}(C|E)} = -\sigma|_{\text{Prym}(C|E)}$$

On pourra donc utiliser  $\sigma, \sigma', -\sigma$  ou  $-\sigma'$  pour calculer le nombre de composantes réelles de  $\text{Prym}(C|E)$ . Nous noterons encore  $\sigma$  et  $-\sigma$  ces structures réelles.

Pour faire ce calcul on dispose de plusieurs méthodes. La plus simple

consiste à compter le nombre de points réels d'ordre 2 (il y en a  $2^g$ , soit ici 4, par composantes). On peut aussi normaliser la matrice pour l'action de  $\sigma$  (resp.  $-\sigma$ ) sur  $H_1(C, \mathbf{Z})^-$  de façon à ce qu'elle soit de la forme

$$\begin{pmatrix} -1_2 & 0 \\ M & 1_2 \end{pmatrix}$$

auquel cas le nombre de composantes connexes sera  $2^{2-r}$ , où

$$r = \text{rg}_{\mathbf{Z}/2}(M \bmod 2)$$

(ceci se démontre de la même manière que le résultat correspondant de la remarque 5 de 5.3).

Les calculs faits précédemment montrent que pour  $-\sigma$  on a déjà cette forme dans les cas [5], [4], [2] et [1] avec respectivement,

$$M = 0, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour  $\sigma$  on a cette forme dans les cas [5] et [4] avec respectivement

$$M = 0 \text{ et } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que  $\text{Prym}(C|E)$  a:

- (a) 4 composantes réelles dans le cas [5],
- (b) 2 composantes dans les cas [4], [4] et [2],
- (c) 1 composante dans le cas [1].

Il nous reste le cas [3], où il faut normaliser. Pour ce faire on peut prendre la base  $a_2 + b_2$ ,  $2a_2 - (a_1 + a_3) + 2b_2 + (b_1 + b_3)$ ,  $b_2 + (b_1 + b_3)$ ,  $2a_2 - (a_1 + a_3) + 2b_2$  de  $H_1(C, \mathbf{Z})^-$  (dont on constatera qu'elle est symplectique pour la forme (1, 2)). Dans cette base, la matrice de  $-\sigma$  est

$$\begin{bmatrix} & 0 & 0 \\ -1_2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \\ 1 & 0 & 1_2 \end{bmatrix}$$

et donc

- (a)  $\text{Prym}(C|E)$  a 2 composantes réelles dans le cas [3].

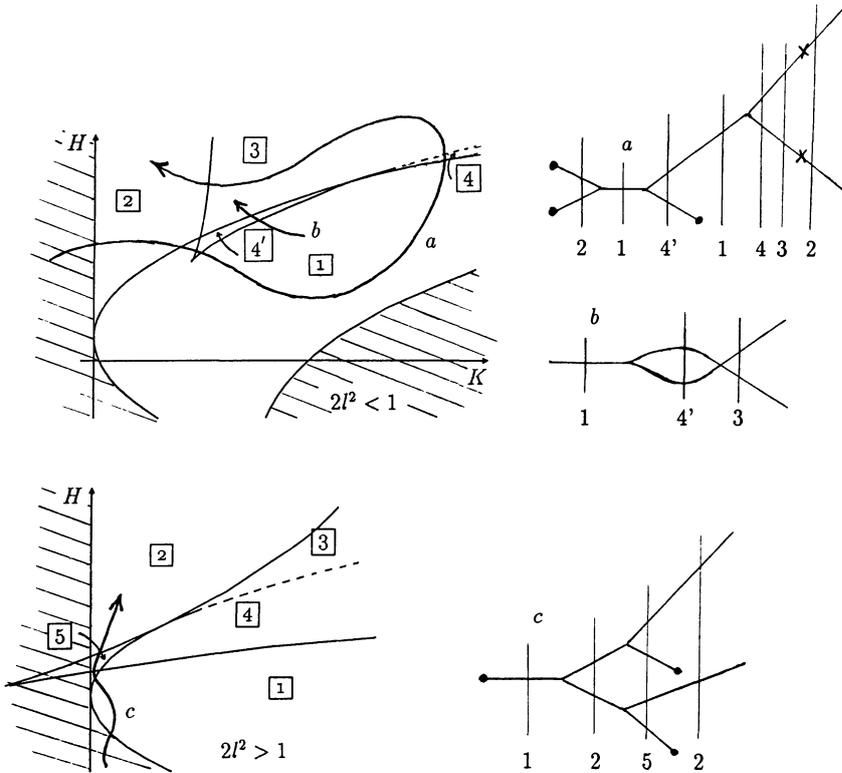


Fig. 20.

7.4. Bifurcations des tores de Liouville

**PROPOSITION 7.4.1.** *Les bifurcations des tores de Liouville pour la toupie de Kowalevski sont celles représentées par la figure 20.*

On trouve effectivement les bifurcations annoncées par Kharlamov. Remarquons que la branche de la parabole située au-delà du point de tangence ne donne pas de fibre singulière (au sens de la topologie cette fois!) et donc pas de bifurcation.

Pour démontrer la proposition, on commence par remarquer que la fibration par les tores de Liouville est minimale: la variété symplectique est lisse, et les fibres singulières correspondant à des points réguliers du discriminant sont munies de champs de vecteurs non nuls; elles sont des réunions de cercles, tores ou bouteilles de Klein immergées et ne peuvent être obtenues par éclatement. Ensuite on décrit les modèles minimaux stables des dégénérescences des variétés de Prym le long du discriminant.

Nous allons utiliser [27], et pour contourner la difficulté liée au fait que les

variétés de Prym qui nous intéressent ici ne sont pas principalement polarisées (l'article cité ne traitant que le cas des variétés abéliennes principalement polarisées) nous allons d'abord travailler dans  $\text{Jac}(C)$ .

Soit  $p$  un point (réel) du discriminant et soit  $D$  un petit disque complexe centré en  $p$ , globalement invariant par conjugaison complexe et d'intersection transverse avec le discriminant. On peut utiliser les équations définissant  $C$  et  $E$  pour définir des courbes au dessus de  $D$ . On définit de cette façon des fibrations en courbes au dessus de  $D$ . De la même manière que dans 2.5 on peut supposer que les surfaces topologiques  $C_{\text{top}}$  et  $E_{\text{top}}$  sont fixes et que ce sont les structures complexes qui varient. On peut aussi choisir des formes holomorphes  $(\omega_i(t))_i$ ,  $t \in D - \{p\} = D^*$ , telles que  $\int_{b_j} \omega_i(t) = \delta_{ij}$  ( $(a_j, b_j)$  la base de  $H_1(C, \mathbf{Z})$  fixée précédemment). Dans ces conditions si l'on note  $z_{ij}(t) = \int_{a_j} \omega_i(t)$  on obtient une fibration par les  $\text{Jac}(C)$  définie par

$$(\mathbf{C}^3 \times D^*)/\mathbf{Z}^6$$

où  $\mathbf{Z}^6$  opère par

$$(n_1, \dots, n_6) \cdot \left( \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}, t \right) = \left( \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \sum n_j \begin{bmatrix} z_{1j}(t) \\ z_{2j}(t) \\ z_{3j}(t) \end{bmatrix}, t \right)$$

et où les  $(z_{ij}(t))_i$  sont les colonnes de la matrice  $((z_{ij}(t))_{ij}, 1_3)$ . On peut aussi définir une fibration par les Prym( $C|E$ ) par

$$(\mathbf{C}^2 \times D^*)/\mathbf{Z}^4$$

où  $\mathbf{Z}^4$  opère par les colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} z_{22}(t) & 2z_{21}(t) & 1 & 0 \\ 2z_{21}(t) & 2(z_{11}(t) + z_{13}(t)) & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour illustrer la méthode que nous voulons utiliser nous allons commencer par traiter en détail un des cas les plus simples.

Soit  $p$  un point réel de la courbe à cusp du discriminant (voir 4.3.1) situé sur l'arc entre les zones [5] et [4] (voir la Fig. 7). Nous avons montré que le passage de [5] à [4] se fait par contraction du cycle  $b_2$ , réel pour  $\sigma'$ . Mais ceci implique que nous sommes exactement dans la situation étudiée par Fay, dans [10] p. 50–60 et aussi étudiée dans [27] Lemma 10.7 (voir en particulier le point (ii) a) de la preuve). On en déduit que la fibration par les  $\text{Jac}(C)$  (ou pour être plus précis, par les  $(\text{Jac}(C), \sigma')$ ) se prolonge holomorphiquement en une fibration au dessus

de  $D$  en prenant comme fibre au dessus de  $p$

$$\mathbf{C}^3/[Z_0, 1_2]$$

où

$$Z_0 = \begin{bmatrix} z_{11} & 0 & z_{13} \\ z_{21} & 0 & z_{23} \\ z_{31} & 0 & z_{33} \end{bmatrix} \text{ avec } z_{ij} = \lim_{t \rightarrow p} z_{ij}(t)$$

REMARQUE. On fera attention que la limite de  $z_{12}(t)$ ,  $z_{22}(t)$  et  $z_{32}(t)$  n'est pas 0. Au contraire  $\lim_{t \rightarrow p} z_{22}(t) = \infty$ . En d'autres termes la période correspondant à la deuxième colonne n'opère plus ou, si l'on préfère, ce n'est plus  $Z^6$  qui opère mais  $Z^5$ . Comme on veut quand même faire opérer  $Z^6$  il est nécessaire de remplacer la colonne correspondante par des zéros.

L'action  $((z_1, z_2, z_3), t) \mapsto (-z_1, z_2, z_3), t$  sur  $\mathbf{C}^3 \times D^*$  induit  $\tau$  sur chaque fibre et cette action se prolonge évidemment en une opération sur  $\mathbf{C}^3 \times D$ . Du coup on peut, en procédant exactement comme dans le cas lisse, prolonger la fibration par les Prym( $C|E$ ) en une fibration au dessus de  $D$  avec comme fibre au dessus de  $p$ , le quotient de  $\mathbf{C}^2$  par le réseau engendré par les colonnes de

$$\begin{pmatrix} 0 & 2z_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 2(z_{11} + z_{13}) & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{22}$$

REMARQUE. Il est peut être utile, pour expliciter ce point de remarquer que si l'on ne tient pas compte des relations entre les  $z_{ij}$ , la matrice des périodes de Prym( $C_t|E_t$ ) est

$$\begin{pmatrix} z_{22}(t) & z_{23}(t) + z_{21}(t) & 1 & 0 \\ z_{32}(t) + z_{12}(t) & z_{11}(t) + z_{13}(t) + z_{31}(t) + z_{33}(t) & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(puisque les coefficients sont  $\int_{\alpha_2} \omega_2, \int_{\alpha_1 + \alpha_3} \omega_2 \dots$  etc.). D'où quand on passe à la limite la matrice (22).

Cette fibre est assez simple à étudier, il s'agit d'une extension par  $\mathbf{C}^*$  de la courbe elliptique de période  $z_{11} + z_{13}$ . De plus la classe de congruence de cette extension est donnée par l'image dans cette courbe du point  $z_{21}$  (voir [10] ou [25] pour plus de détails).

On peut aussi décrire, en utilisant les méthodes de [27], la structure réelle de la fibre.

Nous sommes partis de  $\sigma'$  sur  $C$  (i.e. de  $-\sigma$  sur Prym( $C|E$ )). Le fait d'avoir contracté un cycle réel implique que la structure réelle sur  $\mathbf{C}^*$  est celle définie par  $z \mapsto 1/\bar{z}$ . D'un autre côté vu les structures réelles de  $C$  dans les cas [5] et [4],  $z_{11}$ ,

$z_{13}$  et  $z_{21}$  sont imaginaires purs (en effet par construction

$$\bar{z}_{11} = \int_{a_1}^{\overline{\int_{a_1}}} \omega_1 = \int_{\sigma(a_1)} \omega_1 = - \int_{a_1} \omega_1$$

et similairement pour  $z_{13}$  et  $z_{21}$ ). De ce dernier point on déduit deux choses

1. La courbe elliptique a deux composantes réelles et ceci pour les deux structures réelles  $S$  et  $-S$  induites par  $\sigma$  et  $-\sigma$ .
2.  $z_{21}$  appartient à la composante connexe de l'origine pour la structure  $-S$ .

Ceci décrit la situation pour  $-\sigma$ . Pour obtenir celle qui correspond à  $\sigma$ , il suffit de prendre la structure  $-S$  sur la courbe elliptique et de prendre sur  $\mathbf{C}^*$  la structure définie par  $z \mapsto \bar{z}$  (voir [27] pour le passage de  $\sigma$  à  $-\sigma$ ).

La limite que nous avons décrite est la limite pour les structures de groupes algébriques et non pas la limite pour les structures de variétés topologiques. Pour obtenir celle-ci remarquons que le point 2 ci-dessus implique de plus que l'extension est quasitriviale (c'est à dire peut être déformée continument, en respectant la structure réelle, en une extension triviale, voir [27] pour plus de détails et aussi plus bas une autre approche). En d'autres termes la fibre limite (au sens des groupes algébriques) est homéomorphe au produit de  $\mathbf{C}^*$ , muni de la structure  $z \mapsto \bar{z}$ , et d'une courbe elliptique à deux composantes réelles (la partie réelle de cette fibre est donc homéomorphe au produit de demi-droites par deux cercles).

En fait on peut être beaucoup plus explicite en analysant de façon un peu plus précise le comportement de la partie réelle des fibres.

Dans le cas [5],  $-\sigma$ , les 4 composantes sont les images des parties suivantes de  $\mathbf{C}^2$  (et de leurs translatés par les éléments du réseau)

1.  $\mathbf{R}^2$ .
2.  $\mathbf{R}^2 + \begin{pmatrix} iy_{22}/2 \\ iy_{12} \end{pmatrix}$ .
3.  $\mathbf{R}^2 + \begin{pmatrix} iy_{12} \\ i(y_{11} + y_{13}) \end{pmatrix}$ .
4.  $\mathbf{R}^2 + \begin{pmatrix} i(y_{22}/2 + y_{12}) \\ iy_{12} + i(y_{11} + y_{13}) \end{pmatrix}$ .

où  $y_{ij} = \text{Im } z_{ij}$ .

Comme  $-\sigma$  est induit par la conjugaison complexe,  $\sigma$  est induit par  $z \mapsto -\bar{z}$  dans  $\mathbf{C}^2$ . On en déduit que les 4 composantes sont les images respectivement de  $i\mathbf{R}^2$  et de ses translatés par  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Pour  $\square$  on utilise la même méthode en remarquant que comme  $\Re z_{22} = \frac{1}{2}$  on n'a plus que deux composantes, les images de

1.  $\mathbf{R}^2$  et de  $\begin{pmatrix} iy_{12} \\ i(y_{11} + y_{13}) \end{pmatrix} + \mathbf{R}^2$  pour  $-\sigma$ .

2. Et pour  $\sigma$ :

(a) l'image de  $i\mathbf{R}^2$  et de  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + i\mathbf{R}^2$  pour une composante;

(b) l'image de  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i\mathbf{R}^2$  et de  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + i\mathbf{R}^2$  pour l'autre.

Mais on peut encore utiliser la même méthode pour la fibre limite. On trouve qu'elle a deux composantes pour  $-\sigma$ , les images de  $\mathbf{R}^2$  et de  $\begin{pmatrix} iy_{12} \\ i(y_{11} + y_{13}) \end{pmatrix} + \mathbf{R}^2$ .

Et on obtient deux tores (puisque l'on prend le quotient par  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ). Et 4

composantes pour  $\sigma$ , les images de  $i\mathbf{R}^2$ ,  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + i\mathbf{R}^2$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i\mathbf{R}^2$  et  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + i\mathbf{R}^2$ . Mais

cette fois comme on ne prend le quotient que par l'action de  $\begin{pmatrix} iy_{12} \\ i(y_{11} + y_{13}) \end{pmatrix}$

chacune de ces composantes est homéomorphe à un cylindre ou mieux un demi-tore. Il est facile de voir que pour compactifier la variété fibrée de dimension 3 il faut rajouter deux cercles qui seront disjoints des deux tores si la structure est  $-\sigma$  et qui recolleront deux par deux les demi-tores si la structure est  $\sigma$ . On obtient donc l'union de deux tores et deux cercles pour  $-\sigma$  et le produit d'un huit par l'union de deux cercles pour  $\sigma$ .

Il y a une autre façon de trouver ce résultat qui peut être utile pour d'autres applications. On remarque que l'on peut déformer la fibration en faisant tendre  $z_{12} = iy_{12}$  vers 0. Mais pour  $iy_{12} = 0$  la matrice est la matrice des périodes du produit de deux courbes elliptiques. Comme la déformation respecte la structure réelle la fibration est homéomorphe à celle obtenue en considérant le produit d'une courbe elliptique à deux composantes réelles et d'une courbe elliptique qui dégénère en la courbe

$$y^2 = 4x^3 - 3x - 1 \text{ pour } -\sigma$$

$$y^2 = 4x^3 - 3x + 1 \text{ pour } \sigma$$

Pour la première la structure de groupe sous jacente à la partie régulière est celle de  $\mathbf{C}^*$  muni de la structure réelle définie par  $z \mapsto 1/\bar{z}$  et la partie réelle est homéomorphe à l'union d'un cercle et d'un point. Pour la seconde la structure

de groupe est  $\mathbf{C}^*$  muni de la structure définie par  $z \mapsto \bar{z}$  et la partie réelle est homéomorphe à un huit.

On en déduit à nouveau, en utilisant [27] Section 5, que le complété naturel de la fibre limite (pour  $\sigma$ ) est homéomorphe au produit d'un huit par 2 cercles.

La méthode que nous venons de décrire s'applique à quelques adaptations près à tout les autres cas comme nous allons le constater.

*p* situé sur l'arc entre [5] et [2] "avant" le cusp. Ici on contracte deux cycles réels pour  $\sigma'$  ( $b_1$  et  $b_3$ ). Le raisonnement utilisé dans le cas précédent permet de prolonger la fibration en Prym, pour la structure  $-\sigma$ , en prenant comme fibre au-dessus de *p* le quotient de  $\mathbf{C}^2$  par

$$\begin{pmatrix} z_{22} & 0 & 1 & 0 \\ 2z_{12} & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (23)$$

On en déduit que la limite, au sens des groupes algébriques, est une extension de la courbe elliptique de période  $z_{22}$  par  $\mathbf{C}^*$ , et que la classe de cette extension est déterminée par l'image dans la courbe de  $z_{12}$ . Comme ici aussi les parties réelles de  $z_{11}$  et  $z_{12}$  sont nulles, on est dans une situation tout à fait similaire à celle rencontrée dans le cas précédent et on retrouve comme fibre limite topologique une fibre homéomorphe au produit d'un huit par deux cercles.

*p* situé sur l'arc entre [2] et [1]. La première partie des calculs est identique à ceux faits pour *p* entre [5] et [4], puisque le passage se fait par contraction de  $b_2$  qui est réel pour  $\sigma'$  dans les deux cas.

On peut donc à nouveau utiliser pour décrire la fibre limite la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2z_{12} & 1 & 0 \\ 0 & 2(z_{11} + z_{13}) & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Il y a cependant une différence ici, la partie réelle de  $z_{11}$  est égale à  $-\frac{1}{2}$ . En effet vue la forme de la matrice de  $\sigma'$ ,

$$\bar{z}_{11} = \overline{\int_{a_1} \omega_1} = - \int_{a_1} \omega_1 - \int_{b_1} \omega_1 = -z_{11} - 1$$

Ceci signifie que la courbe elliptique intervenant dans la fibre limite n'a qu'une composante réelle. Cependant comme on a encore  $\Re e z_{12} = 0$  le reste du raisonnement fait dans les deux cas précédents s'applique en tenant compte de cette modification. On trouve donc que la fibre limite est homéomorphe au produit d'un huit par un cercle.

*p* situé sur l'arc entre [4] et [1]. Ce cas est en quelque sorte une combinaison

des passages de [5] à [2] et de [2] à [1]. Le passage se fait par contraction de  $b_1$  et  $b_3$ , qui sont réels pour  $\sigma'$ . On a comme matrice limite une matrice de la forme décrite par (23). Mais cette fois  $\Re e z_{22} = \frac{1}{2}$  et la courbe elliptique n'a qu'une composante réelle. On est dans une situation similaire à celle du cas précédent et on retrouve le produit d'un huit par un cercle.

$p$  situé sur l'arc entre [5] et [2] "après" le cusp. Dans ce cas il sera plus simple de travailler avec  $-\sigma'$  et donc directement avec  $\sigma$  sur  $\text{Prym}(C|E)$ . Toujours pour simplifier, nous pouvons décrire ce passage par contraction de  $a_1$  et  $a_3$  (voir la remarque faite à ce sujet dans 5.3). Les matrices de  $-\sigma'$  dans la base  $(b_1, b_2, b_3, -a_1, -a_2, -a_3)$  sont respectivement

$$\begin{pmatrix} -1_3 & 0 \\ 0 & 1_3 \end{pmatrix} \text{ pour [5] et } \begin{bmatrix} & & & 0 & 0 & 0 \\ & -1_3 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1_3 & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{bmatrix} \text{ pour [2].}$$

On est donc dans le même situation que celle décrite pour  $p$  sur l'arc entre [5] et [2] "avant cusp", mais pour  $-\sigma'$  cette fois et donc pour  $\sigma$  au niveau des Prym. Il faut donc modifier la dernière partie du raisonnement. La fibre limite (limite prise au sens des groupes algébriques) est une extension d'une courbe elliptique à deux composantes réelles (pour les mêmes raisons que précédemment) par  $C^*$  muni de la structure réelle  $z \mapsto 1/\bar{z}$ , qui correspond à la structure de groupe de la partie régulière de la courbe

$$y^2 = 4x^3 - 3x - 1$$

dont la partie réelle est homéomorphe à l'union d'un point et d'un cercle.

On a encore  $\Re e z_{12} = 0$  et ici encore l'extension est quasi-triviale (pour des raisons symétriques de celles rencontrées dans les cas précédents). En utilisant à nouveau le raisonnement fait plus haut, on trouve que la limite est homéomorphe au produit de deux cercles par l'union d'un point et d'un cercle.

$p$  situé sur l'arc entre [4] et [1] "avant" le cusp. D'après 5.3 la fibration  $(\text{Prym}(C_t|E_t), \sigma)$  est ici de même nature que la fibration  $(\text{Prym}(C_t|E_t), -\sigma)$  lors du passage de [4] à [1].

Il faut donc pour décrire ce cas utiliser la même modification que dans le cas

précédent. On trouve alors que la fibre limite est homéomorphe au produit d'un cercle par l'union d'un point et d'un cercle.

$p$  situé sur l'arc entre [4] et [1] "après" le cusp. La relation entre ce cas et le précédent est la même qu'entre les cas "passage de [5] à [2] 'avant cusp'" et "passage de [5] à [2] "après cusp'" que nous avons décrits. En suivant la même méthode on trouve le produit d'un huit par un cercle.

Pour pouvoir appliquer les raisonnements qui précèdent aux trois cas restants il va nous falloir effectuer des changements de base pour  $H_1(C_{10p}, \mathbf{Z})$  de façon à ce que les cycles contractés apparaissent dans la deuxième moitié de la nouvelle base.

$p$  situé sur l'arc entre [2] et [3]. On pourra prendre la base que nous avons donnée pour [3]  $\sigma$  dans notre argument "brutal" pour la preuve du Lemme 5.3.1 mais il est peut être préférable, pour rester plus près des hypothèses de Fay, d'utiliser par exemple la base

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = (a_2 - a_1 + b_2 + b_1, a_2 + b_2, a_2 - a_3 + b_2 + b_3, \\ a_2 - a_1 + b_2, b_1 + b_2 + b_3, a_2 - a_3 + b_2).$$

Ce choix change la forme de la matrice pour  $\sigma'$ , mais comme on va le voir sous peu, ce n'est pas important.

On choisira à nouveau des formes holomorphes  $(\eta_i(t))_{1 \leq i \leq 3}$  telles que  $\int_{\beta_j} \eta_i(t) = \delta_{ij}$ . On pose  $\zeta_{ij}(t) = \int_{\alpha_j} \eta_i(t)$ . La méthode de Fay donne alors comme fibre limite pour la fibration en  $\text{Jac}(C_t)$ , le quotient de  $C^3$  par le réseau engendré par les colonnes de

$$\begin{bmatrix} 0 & \zeta_{12} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_{22} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \zeta_{32} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ où } \zeta_{ij} = \lim_{t \rightarrow p} \zeta_{ij}(t)$$

A présent on remarque que la matrice de  $\tau$  dans la base  $(\alpha_j, \beta_j)$  est la même que dans la base  $(a_j, b_j)$  et qu'on peut prendre comme base de  $H_1(C_t, \mathbf{Z})^-$  la base

$$(\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3, \beta_2, \beta_1 + \beta_3)$$

La forme de  $\tau$  induisant les mêmes relations entre les  $\zeta_{ij}$  que celles que nous avons entre les  $z_{ij}$  on trouve comme matrice des périodes pour  $\text{Prym}(C_t | E_t)$ ,

$$\begin{pmatrix} \zeta_{22}(t) & 2\zeta_{21}(t) & 1 & 0 \\ 2\zeta_{21}(t) & 2(\zeta_{11}(t) + \zeta_{13}(t)) & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ou, si nous n'utilisons pas ces relations, ce qui vaut peut être mieux ici,

$$\begin{pmatrix} \zeta_{22}(t) & \zeta_{23}(t) + \zeta_{21}(t) & 1 & 0 \\ \zeta_{32}(t) + \zeta_{12}(t) & \zeta_{11}(t) + \zeta_{13}(t) + \zeta_{31}(t) + \zeta_{33}(t) & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et pour la fibre limite

$$\begin{pmatrix} \zeta_{22} & 0 & 1 & 1 \\ \zeta_{32} + \zeta_{12} & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_{22} & 0 & 1 & 0 \\ 2\zeta_{21} & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

compte tenu des relations entre les  $\zeta_{ij}$ .

On remarquera aussi que la matrice de  $\sigma'|_{H_1(C_t, \mathbf{Z})}$  est

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ pour } \boxed{2} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ pour } \boxed{3}$$

De ceci on déduit deux choses, d'une part que les 1-formes  $\eta_2$  et  $\eta_1 + \eta_3$  sont réelles pour  $\sigma'$  (i.e. pour tout cycle  $\gamma$ ,  $\int_\gamma \eta = \int_{\sigma'(\gamma)} \eta$ ) et d'autre part que  $\Re e \zeta_{22}(t) = 0$  et  $\Re e \zeta_{21}(t) = \frac{1}{2}$  (pour  $\boxed{2}$  et  $\boxed{3}$ ).

En procédant de la même manière que dans les cas précédents on trouve que la fibre limite, au sens des groupes algébriques, pour la fibration  $(\text{Prym}(C_t|E_t), \sigma)$ , est une extension d'une courbe elliptique à 2 composantes réelles par  $\mathbf{C}^*$  muni de la structure réelle  $z \mapsto \bar{z}$ . Mais comme  $\Re e \zeta_{21}(t) = \frac{1}{2}$  l'extension n'est pas quasi-triviale et ceci va tordre la structure.

Pour voir exactement comment cette structure est tordue, nous allons reprendre la démarche du début de cette section. Dans le cas  $\boxed{3}$  la fibre complexe est le quotient de  $\mathbf{C}^2$  par

$$\begin{pmatrix} iy_{22} & 1 + 2iy_{12} & 1 & 0 \\ 1 + 2iy_{12} & 2i(y_{11} + y_{13}) & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(où pour simplifier nous avons noté  $y_{ij}$  la partie imaginaire de  $\zeta_{ij}(t)$ ). La structure  $-\sigma$  est induite par la conjugaison complexe de  $\mathbf{C}^2$ . Donc les composantes de la partie réelle sont les images de  $\mathbf{R}^2$  pour l'une et de  $\mathbf{R}^2 + \begin{pmatrix} iy_{12} \\ i(y_{11} + y_{13}) \end{pmatrix}$  pour l'autre. On en déduit que pour  $\sigma$  les composantes sont les images de  $i\mathbf{R}^2$  et  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i\mathbf{R}^2$  pour l'une et de  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + i\mathbf{R}^2$  et  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + i\mathbf{R}^2$  pour l'autre.

Dans le cas [2] la fibre est le quotient de  $\mathbf{C}^2$  par

$$\begin{pmatrix} iy_{22} & 1+2iy_{12} & 1 & 0 \\ 1+2iy_{12} & 1+2i(y_{11}+y_{13}) & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi les composantes de la partie réelle pour  $\sigma$  sont encore les images de  $i\mathbf{R}^2$  et  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i\mathbf{R}^2$  pour l'une et de  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + i\mathbf{R}^2$  et  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + i\mathbf{R}^2$  pour l'autre.

La fibre limite est le quotient de  $\mathbf{C}^2$  par

$$\begin{pmatrix} iy_{22} & 0 & 1 & 0 \\ 1+2iy_{12} & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et la partie réelle (pour  $\sigma$ ) est l'image de  $i\mathbf{R}^2$  et de  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + i\mathbf{R}^2$ . Comme pour passer au quotient on opère par  $\begin{pmatrix} 2iy_{22} \\ 4iy_{12} \end{pmatrix}$ , la partie réelle est formée de deux demi-tores.

Pour obtenir la fibre topologique il faut à nouveau compléter. Pour voir comment, il suffit de suivre l'évolution des différentes composantes: un tore de [2] se transforme en un tore de [3] et la limite est un demi-tore. On en déduit qu'il faut recoller le long d'un cercle chaque demi-tore sur lui-même et que la fibre limite est formée de deux "bouteilles de Klein immergées" (cf. Fig. 21).

$p$  situé sur l'arc entre [4] et [3]. On prend comme base de  $H_1(C_{\text{top}}, \mathbf{Z})$  la base

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

$$= (a_2 - b_1 - a_1, -a_2 + a_1 + a_3 - b_2, a_2 - b_3 - a_3, a_1, 2a_2 - a_1 - a_3 + b_2, a_3)$$

on pourra constater que cette fois les matrices de  $-\sigma'$  sont sous forme standard

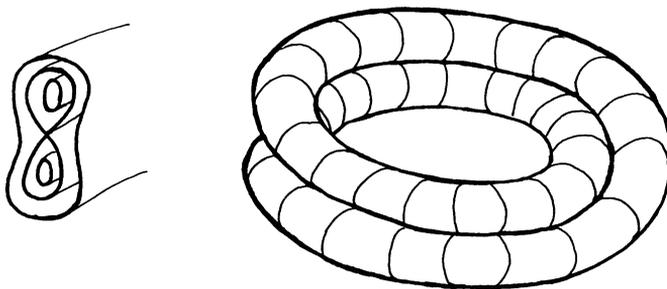


Fig. 21

dans les cas [4] et [3]. Explicitement on a

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ pour [3]}$$

et

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ pour [4]} \tag{24}$$

La matrice de  $\tau$  est encore de la même forme et on en déduit à nouveau que

$$(\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3, \beta_2, \beta_1 + \beta_3)$$

est une base de  $H_1(C_{\text{top}}, \mathbf{Z})^-$ .

Les matrices de la restriction de  $-\sigma'$  à ce dernier groupe sont

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ pour [3]} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ pour [4]} \tag{25}$$

Comme le passage de [4] à [3] se fait par contraction de  $2a_2 - (a_1 + a_3) + b_2 = \beta_2$  (qui est réel pour  $-\sigma'$  dans les deux cas), on peut à nouveau appliquer la méthode de Fay, ce qui finalement donne comme fibre limite pour la fibration  $(\text{Prym}(C_t|E_t), \sigma)$  (se rappeler que  $-\sigma'$  induit  $\sigma$ ) le quotient de  $\mathbf{C}^2$  par le réseau engendré par les colonnes de

$$\begin{pmatrix} 0 & 2\zeta_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 2(\zeta_{11} + \zeta_{13}) & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(où  $\zeta_{ij} = \int_{\alpha_j} \eta_i$  pour un choix normalisé de 1-formes  $\eta_i$ ).

En utilisant (24) ou (25) il est facile de montrer que  $\Re e \zeta_{11} = -\frac{1}{2}$ ,  $\Re e \zeta_{13} = \frac{1}{2}$  et  $\Re e \zeta_{21} = \frac{1}{2}$ . La fibre limite est l'extension d'une courbe à deux composantes réelles par  $\mathbf{C}^*$  muni de la structure  $z \mapsto 1/\bar{z}$  (se rappeler qu'on travaille avec  $-\sigma'$  et donc directement avec  $\sigma$ ). Ici encore l'extension n'est pas quasi-triviale et nous allons utiliser la même méthode que ci-dessus.

Pour [3] la matrice de  $\sigma$  étant de la même forme que celle de  $-\sigma$  dans le cas précédent les composantes réelles sont les images de  $\mathbf{R}^2$  pour l'une et de  $\mathbf{R}^2 + \begin{pmatrix} iy_{12} \\ i(y_{11} + y_{13}) \end{pmatrix}$  pour l'autre.

Pour [4] et  $\sigma$  la matrice des périodes est de la forme

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + iy_{22} & 1 + 2iy_{12} & 1 & 0 \\ 1 + 2y_{12} & 2i(y_{11} + y_{13}) & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Les composantes réelles sont ici aussi les images de  $\mathbf{R}^2$  et de  $\mathbf{R}^2 + \begin{pmatrix} iy_{12} \\ i(y_{11} + y_{13}) \end{pmatrix}$ .

La fibre limite étant le quotient de  $\mathbf{C}^2$  par l'action de

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 + 2iy_{12} & 1 & 0 \\ 0 & 2i(y_{11} + y_{13}) & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

la partie réelle est à nouveau l'image de  $\mathbf{R}^2$  et de  $\mathbf{R}^2 + \begin{pmatrix} iy_{12} \\ i(y_{11} + y_{13}) \end{pmatrix}$ . Les composantes étant obtenues par passage au quotient sous l'action de  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , on trouve 2 tores (au sens de la topologie, c'est une fibre lisse).

$p$  situé sur l'arc entre [4] et [3]. Comme on l'a remarqué dans 5.3 ce cas se déduit du précédent en échangeant  $\sigma'$  et  $\sigma$  et donc au niveau des Prym en échangeant  $\sigma$  et  $-\sigma$ .

Pour [3] nous avons déjà décrit les composantes, ce sont les images de  $i\mathbf{R}^2$  et  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i\mathbf{R}^2$  pour l'une et de  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + i\mathbf{R}^2$  et  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + i\mathbf{R}^2$  pour l'autre.

Pour [4], le même type de calculs montre que les composantes de la partie réelle sont les images de  $i\mathbf{R}^2$  et  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + i\mathbf{R}^2$  d'un côté et  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + i\mathbf{R}^2$  et  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i\mathbf{R}^2$  de l'autre.

A la limite ce sont les images de  $i\mathbf{R}^2$ ,  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + i\mathbf{R}^2$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i\mathbf{R}^2$  et  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + i\mathbf{R}^2$  et on a 4 demi-tores. La façon de les recoller est dictée par l'évolution des composantes

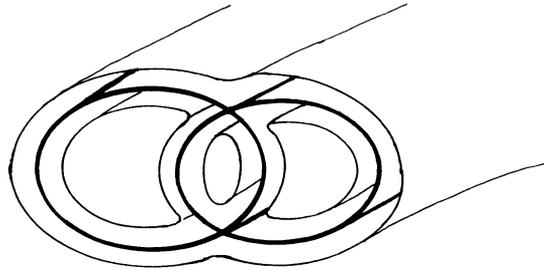


Fig. 22.

entre  $\square_4$  et  $\square_3$  (voir la Fig. 22). La fibre est homéomorphe au produit de deux cercles qui se coupent en deux points par un cercle.

## Références

- [1] M. Adler, P. van Moerbeke: Completely integrable systems, euclidian Lie algebras and curves, et Linearization of hamiltonian systems, Jacobi varieties and representation theory, *Advances in Math.* 38 (1980), 267–317 et 318–379.
- [2] M. Adler and P. van Moerbeke: The Kowalevski and Hénon-Heiles motions as Manakov geodesic flows on  $SO(4)$  – a two-dimensional family of Lax pairs, *Comm. Math. Phys.* 113 (1988), 659–700.
- [3] P. Appell: *Traité de mécanique rationnelle*, vol. II, Gauthier-Villars, Paris, 1931.
- [4] G. G. Appelrot, *Non Totally Symmetric Gyroscopes*, Moscow 1940.
- [5] V. I. Arnold: *Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique*, MIR, Moscou, 1974.
- [6] M. Audin: *The Topology of Torus Actions on Symplectic Manifolds*, Progress in Math. 93, Birkhäuser, 1991.
- [7] A. I. Bobenko, A. G. Reyman, M. A. Semenov-Tian-Shansky: The Kowalevski top 99 years later: A Lax pair, generalizations and explicit solutions, *Commun. Math. Phys.* 122 (1989), 321–354.
- [8] A. Comessatti: Sulle varietà abeliane reale I e II, *Ann. Mat. Puro Appl.* 2 (1924), 67–106 et 4 (1926), 27–71.
- [9] H. Farkas and I. Kra: *Riemann Surfaces*, Graduate texts in Math. 71, Springer, 1980.
- [10] J. D. Fay: Theta functions on Riemann surfaces, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer, 392, 1973.
- [11] A. T. Fomenko: The topology of surfaces of constant energy in integrable hamiltonian systems and obstructions to integrability, *Math. USSR Izvestya* 29 (1987), 629–658.
- [12] A. T. Fomenko: *Integrability and Nonintegrability in Geometry and Mechanics*, Math. and its Applications, Kluwer, 1988.
- [13] J.-P. Francoise and R. Silhol: Real abelian varieties and the singularities of an integrable hamiltonian system, Real analytic and algebraic geometry, *Lecture Notes in Mathematics*, 1420, 1990.
- [14] V. V. Golubev: *Lectures on Integration of the Equations of Motion of a Rigid Body about a Fixed Point*, Israel program for scientific translations, Haifa, 1960.
- [15] P. A. Griffiths: Linearizing flows and a cohomological interpretation of Lax equations, *Amer. J. Math.* 107 (1985), 1445–1483.
- [16] B. Gross and J. Harris: Real algebraic curves, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.* 14 (1981), 157–182.
- [17] L. Haine: Geodesic flow on  $SO(4)$  and abelian surfaces, *Math. Ann.* 263 (1983), 435–472.

- [18] E. Horozov and P. van Moerbeke: The full geometry of Kowalevski's top and (1,2)-abelian surfaces, *Comm. Pure and Appl. Math.* 42 (1989), 357–407.
- [19] M. P. Kharlamov: Bifurcation of common levels of first integrals of the Kowalevskaya problem, *PMN U.S.S.R.* 47 (1983), 737–743.
- [20] S. Kowalevski: Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, *Acta Math.* 12 (1889), 177–232.
- [21] S. V. Manakov: Note on the integration of Euler's equations of the dynamics of an  $n$ -dimensional rigid body, *Funct. Anal. Appl.* 11 (1976), 328–329.
- [22] T. Ratiu and P. van Moerbeke: The Lagrange rigid body motion, *Ann. Institut Fourier* 33 (1982), 211–234.
- [23] A. G. Reiman: Integrable hamiltonian systems connected with graded Lie algebras, *J. Soviet Math.* 19 (1982), 1507–1545.
- [24] M. Seppala and R. Silhol: Moduli spaces for real algebraic curves and real abelian varieties, *Math. Z.* 201 (1989), 151–165.
- [25] J.-P. Serre: *Groupes Algébriques et Corps de Classes*, Hermann, Paris, 1959.
- [26] R. Silhol: Real algebraic surfaces, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer, 1392, 1989.
- [27] R. Silhol: Compactifications of real moduli spaces in real algebraic geometry, *Invent. Math.* 107 (1992), 151–202.
- [28] J.-L. Verdier: Algèbres de Lie, systèmes hamiltoniens, courbes algébriques, Séminaire Bourbaki, Springer (1980), 85–94.
- [29] A. Weil: Euler and the Jacobians of elliptic curves, arithmetic and geometry, papers dedicated to Shafarevich, *Progress in Math.*, Birkhäuser, 1983.