COMPOSITIO MATHEMATICA

NORIKO HIRATA-KOHNO

Approximations simultanées sur les groupes algébriques commutatifs

Compositio Mathematica, tome 86, n° 1 (1993), p. 69-96

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1993__86_1_69_0>

Compositio Mathematica **86**: 69–96, 1993.

Approximations simultanées sur les groupes algébriques commutatifs

NORIKO HIRATA-KOHNO
Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology, Oh-Okayama, Meguro, Tokyo 152 Japan

Received 18 July 1991; accepted in revised form 12 March 1992

On établit dans ce travail des estimations pour les formes linéaires simultanées à coefficients algébriques en des points algébriques sur un groupe algébrique commutatif. Nos résultats sont des généralisations aux approximations simultanées des travaux antérieurs de [H2]: il est important de considérer les approximations simultanées au point de vue des applications aux équations diophantiennes (cf. [H4], [L]). Nous présentons aussi un raffinement pour des combinaisons linéaires de périodes de l'application exponentielle du groupe. Notre énoncé principal améliore des résultats précédents dans cette direction, par exemple celui dû à Philippon et Waldschmidt (voir Section 1(4)). Remarquons que notre astuce de raffinement est un peu différente de celle pour les formes linéaires ordinaires de [H2], car on a besoin d'introduire un nouveau point qui est valide pour toutes les formes linéaires simultanément (voir Section 2(4)).

On énonce les résultats au paragraphe 1 en comparant avec des résultats antérieurs. Le paragraphe 2 donne des préparatifs, et on démontre le théorème 1.1 dans le paragraphe 3. Le paragraphe 4 contient les idées de démonstration du théorème 1.7 et des remarques pour les articles [H2] et [P-W1].

1. Enoncés

1. *Notations*

Soient k un entier $\geqslant 0$ et t un entier $\geqslant 1$. Considérons des groupes algébriques commutatifs connexes définis sur la clôture algébrique $\bar{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$. On les note $G_0, G_1, \dots, G_k$ avec $G_0 = \mathbf{G}_a$, $G_1 = \cdots = G_{d_1} = \mathbf{G}_m$ $(0 \leqslant d_1 \leqslant k)$. Posons $\mathscr{G} = G_0 \times \cdots \times G_k$. Soient δ_i la dimension de G_i $(0 \leqslant i \leqslant k)$ et $d+1$ celle de $\mathscr{G}$; on a $\delta_0 = \delta_1 = \cdots = \delta_{d_1} = 1$, $\delta_1 + \cdots + \delta_k = d$.

Nous notons $d_2 = d - d_1$, $\rho_1 = \cdots = \rho_{d_1} = 1$, $\rho_{d_1+1} = \cdots = \rho_k = 2$. On note $\exp_{\mathscr{G}}$(resp. $\exp_{G_i}$ pour $0 \leqslant i \leqslant k$) l'application exponentielle de $\mathscr{G}$ (resp. G_i pour

$0 \leqslant i \leqslant k$). Pour chaque entier i, $0 \leqslant i \leqslant k$, on fixe un plongement de G_i dans un espace projectif $\mathbb{P}_{N_i}$, défini sur $\bar{\mathbb{Q}}$, et de plus on fixe aussi une base de l'espace tangent $T_{G_i}(\mathbb{C})$ de $G_i(\mathbb{C})$ en l'origine, qui est définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et qui identifie $T_{G_i}(\mathbb{C})$ avec $\mathbb{C}^{\delta_i}$. Identifions encore $T_{\mathscr{G}}(\mathbb{C})$ avec $T_{G_0}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus T_{G_k}(\mathbb{C})$, donc avec $\mathbb{C}^{d+1}$. Pour n entier $\geqslant 1$ et pour $\mathbf{z}=(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^n$ on note $\|\cdot\|$ la norme définie par $\|\mathbf{z}\|=(|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2)^{1/2}$; notons encore $\|\cdot\|$ la norme induite sur chaque $T_{G_i}(\mathbb{C})$ ($0 \leqslant i \leqslant k$) et sur $T_{\mathscr{G}}(\mathbb{C})$ par les identifications précédentes. On désigne les coordonnées d'un point de $T_{\mathscr{G}}(\mathbb{C})$ par $(z_0, z_1, \ldots, z_d)$. Enfin, soit h la hauteur (de Weil) logarithmique absolue (voir la définition dans [W]).

2. *Théorème principal*

THEOREME 1.1. *Il existe une constante $C_1 > 0$ effectivement calculable ne dépendant que des données et des choix précédents, ayant la propriété suivante. Soit K un corps de nombres sur lequel les objets introduits: G_i, les bases des espaces tangents des G_i, les plongements des G_i dans $\mathbb{P}_{N_i}$ ($0 \leqslant i \leqslant k$) sont tous définis. Pour $1 \leqslant \tau \leqslant t$, soient $\mathscr{L}_\tau(\mathbf{z})=\beta_{0,\tau}z_0+\cdots+\beta_{d,\tau}z_d$ des formes linéaires indépendantes à coefficients dans K, sur l'espace tangent $T_{\mathscr{G}}(\mathbb{C})$. Notons $\mathscr{W}$ l'intersection de leurs noyaux. Pour chaque $1 \leqslant i \leqslant k$, soit $\mathbf{u}_i \in T_{G_i}(\mathbb{C})$ avec $\mathbf{u}_i \neq \mathbf{0}$ tel que $\gamma_i = \exp_{G_i}(\mathbf{u}_i)$ appartienne à $G_i(K)$. Notons $\mathbf{v}=(1,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k)\in T_{\mathscr{G}}(\mathbb{C})$ et $D=[K:\mathbb{Q}]$. Soient B, E, $V_1,\ldots,V_k$, V des nombres réels vérifiant*

$$D \log B \geqslant \log V \quad \text{où} \quad V = \mathrm{Max}\{V_i; 1 \leqslant i \leqslant k\}, \tag{1.2}$$

$$\log B \geqslant \mathrm{Max}(e, h(\beta_{j,\tau})) \quad (0 \leqslant j \leqslant d,\ 1 \leqslant \tau \leqslant t), \tag{1.3}$$

$$\log V_i \geqslant \mathrm{Max}(h(\gamma_i), \|\mathbf{u}_i\|^{\rho_i}/D, 1/D) \quad (1 \leqslant i \leqslant k), \tag{1.4}$$

$$e \leqslant E \leqslant \mathrm{Min}(e\cdot(D \log V_i)^{1/\rho_i}/\|\mathbf{u}_i\|) \quad (1 \leqslant i \leqslant k). \tag{1.5}$$

(1.6) *Si tout sous-groupe algébrique $\mathscr{G}'$ de $\mathscr{G}$ tel que*

$$\mathbf{v}\in T_{\mathscr{G}'}(\mathbb{C}) \quad \textit{vérifie} \quad T_{\mathscr{G}'}(\mathbb{C})+\mathscr{W} = T_{\mathscr{G}}(\mathbb{C}),$$

alors on a

$$\mathop{\mathrm{Max}}_{1\leqslant\tau\leqslant t} \log|\mathscr{L}_\tau(\mathbf{v})| > -C_1 \,\mathrm{Max}\Bigg\{D^2\log(BV),$$
$$D^{(d+d_2+1)/t+1}(\log B+\log(DE))\left(\frac{\log\log B+\log D}{\log E}+1\right)^{(d_2+1)/t}$$
$$\cdot\left(\prod_{i=1}^{k}(\log V_i)^{\delta_i/t}\right)(\log E)^{-d/t}\Bigg\}. \qquad \square$$

D'après le théorème de [Wü], l'hypothèse (1.6) implique $\mathbf{v} \notin \mathscr{W}$. Lorsque $\exp_{\mathscr{G}}(\mathbb{C}\mathbf{v})$ est Zariski dense, le seul sous-groupe $\mathscr{G}'$ dont l'espace tangent contienne le point $\mathbf{v}$ est $\mathscr{G}$, par conséquent, l'hypothèse (1.6) est immédiatement satisfaite dans ce cas.

La condition (1.2) permet de simplifier notre minoration; on peut supprimer cette hypothèse (1.2) à condition de remplacer d'une part le terme $\log B + \log(DE)$ par $\log B + \log(DE \log V)$ et d'autre part le terme

$$\{\log \log B + \log D)/(\log E)\} + 1$$

par

$$\{(\log \log B + \log(D \log V))/(\log E)\} + 1.$$

Un exemple d'application de notre théorème 1.1 peut être obtenu de la manière suivante. Soient d_1, d_2, d des entiers $\geqslant 0$ tels que $d = d_1 + d_2$. Pour chaque $1 \leqslant i \leqslant d_2$, soit $\wp_i$ une fonction elliptique de Weierstrass d'invariants g_{2_i}, g_{3_i} algébriques, respectivement. Soit $\alpha_i \neq 0$, $\neq 1$ $(1 \leqslant i \leqslant d_1)$ des nombres algébriques et pour chaque $1 \leqslant i \leqslant d_1$, soit $\log \alpha_i$ une détermination du logarithme de α_i. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant d_2$, soit u_i un nombre complexe non nul. On suppose que pour $1 \leqslant i \leqslant d_2$, ou bien u_i est pôle de $\wp_i$, ou bien $\wp_i(u_i)$ est algébrique. En considérant la courbe elliptique E_i associée à $\wp_i$ et le groupe algébrique $\mathscr{G} = \mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_m^{d_1} \times E_1 \times \cdots \times E_{d_2}$, alors le théorème 1.1 entraîne une minoration pour les formes linéaires simultanées en des nombres $\log \alpha_i$ et u_j $(1 \leqslant i \leqslant d_1,\ 1 \leqslant j \leqslant d_2)$.

Dans le théorème 1.1, la constante C_1 ne dépend que du groupe $\mathscr{G}$, du plongement de $\mathscr{G}$ dans l'espace projectif que l'on prend et de la base de l'espace tangent de $\mathscr{G}$ que l'on fixe, c'est-à-dire des coefficients des équations différentielles que vérifie l'application méromorphe (2.1) définie dans le Section 2(2). Nous pouvons théoriquement expliciter cette constante grâce aux travaux de [D]. On va démontrer nos énoncés pour un choix du plongement et un choix de la base de l'espace tangent, mais quitte à modifier les constantes C_1, $C_2, \ldots, c_1, c_2, \ldots$, on obtient les énoncés pour tous les choix de plongements et de bases de l'espace tangent.

3. *Formes linéaires de périodes*

On peut raffiner le théorème 1.1. quand on considère des combinaisons linéaires de périodes de $\exp_{\mathscr{G}}$.

THEOREME 1.7. *Il existe une constante $C_2 > 0$ effectivement calculable ne dépendant que des données et des choix précédents, ayant la propriété suivante.*

Soit K un corps de nombres sur lequel les objets introduits: G_i, les bases des espaces tangents des G_i, les plongements des G_i dans $\mathbb{P}_{N_i}$ $(0 \leqslant i \leqslant k)$ sont tous définis. Pour $1 \leqslant \tau \leqslant t$, soient $\mathscr{L}_\tau(\mathbf{z}) = \beta_{0,\tau} z_0 + \cdots + \beta_{d,\tau} z_d$ des formes linéaires indépendantes à coefficients dans K, sur l'espace tangent $T_{\mathscr{G}}(\mathbb{C})$. Notons $\mathscr{W}$ l'intersection de leurs noyaux. Pour chaque $1 \leqslant i \leqslant k$, soit $\mathbf{u}_i \in T_{G_i}(\mathbb{C})$ avec $\mathbf{u}_i \neq \mathbf{0}$ tel que $\mathbf{u}_i \in \operatorname{Ker} \exp_{G_i}$. Notons

$$\mathbf{v} = (0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k) \in T_{\mathscr{G}}(\mathbb{C}) \quad et \quad D = [K : \mathbb{Q}].$$

Soit B un nombre réel vérifiant

$$\log B \geqslant \operatorname{Max}(e, h(\beta_{j,\tau})) \quad (0 \leqslant j \leqslant d,\ 1 \leqslant \tau \leqslant t). \tag{1.8}$$

Posons $A_i = \operatorname{Max}(\|\mathbf{u}_i\|^{\rho_i}, 1)$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ *et* $A = \operatorname{Max}\{A_i; 1 \leqslant i \leqslant k\}$.

(1.9) *Si tout sous-groupe algébrique $\mathscr{G}'$ de $\mathscr{G}$ tel que*

$$\mathbf{v} \in T_{\mathscr{G}'}(\mathbb{C}) \text{ vérifie } T_{\mathscr{G}'}(\mathbb{C}) + \mathscr{W} = T_{\mathscr{G}}(\mathbb{C}),$$

alors on a

$$\operatorname*{Max}_{1 \leqslant \tau \leqslant t} \log|\mathscr{L}_\tau(\mathbf{v})| > -C_2 \operatorname{Max}\Big\{D^2 \log B + DA,$$
$$D^{d_2/t+1}(\log B + \log A)(\log\log B + \log A)^{d_2/t}\Big(\prod_{i=1}^{k} (A_i)^{\delta_i/t}\Big)\Big\}. \qquad \square$$

4. *Les résultats antérieurs*

La meilleure minoration précédemment connue dans notre situation est le théorème de [P-W1]. En supposant $B \geqslant D \log V_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ au lieu de notre condition (1.2), et $V_i \geqslant e$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ au lieu de notre hypothèse $\log V_i \geqslant 1/D$ dans (1.4), le théorème 1.3 de [P-W1] donne, en mettant le terme $D^2 \log(BV)$ pour la correction (voir notre §4(2)(c));

$$\operatorname*{Max}_{1 \leqslant \tau \leqslant t} \log|\mathscr{L}_\tau(\mathbf{v})| > -C_3 \operatorname{Max}\Big\{D^2(\log BV),$$
$$D^{(d+d_2+1)/t+1}(\log B)^{d_2/t+1}(\log(D^+E))^{1/t}\Big(\prod_{i=1}^{k} (\log V_i)^{\delta_i/t}\Big)(\log E)^{-(d+d_2+1)/t}\Big\}.$$

où $D^+ = \operatorname{Max}\{D, e\}$. On voit que notre théorème 1.1 raffine l'exposant de $\log B$ dans cette minoration si $d_2 \geqslant 1$ (remarquons que nos estimations ne raffinent pas les résultats de [P-W1] dans le cas $d_2=0$). Nos résultats améliorent aussi les énoncés dans [Bi], [F].

2. Préparatifs

1. *Modifications du groupe algébrique*

Nous allons modifier notre groupe algébrique $\mathcal{G}$ en le multipliant par un groupe algébrique G_{-1} défini sur K, qui est produit de t copies du groupe additif: $G_{-1}=\mathbf{G}_a^t$. On pose $G=G_{-1}\times G_0\times\cdots\times G_k=G_{-1}\times\mathcal{G}$. Soit $\delta_{-1}=t$ la dimension de G_{-1}; notons $\exp_G$ (resp. $\exp_{G_{-1}}$) l'application exponentielle de G (resp. G_{-1}). On fixe un plongement de G_{-1} dans un espace projectif $\mathbb{P}_{N_{-1}}$, défini sur K et de plus une base de l'espace tangent $T_{G_{-1}}(\mathbb{C})$ de $G_{-1}(\mathbb{C})$ en l'origine, qui est défini sur K et qui identifie $T_{G_{-1}}(\mathbb{C})$ avec $\mathbb{C}^t$. Identifions $T_G(\mathbb{C})$ avec $T_{G_{-1}}(\mathbb{C})\oplus\cdots\oplus T_{G_k}(\mathbb{C})$ donc avec $\mathbb{C}^{d+t+1}$. On considère la norme $\|\cdot\|$ induite sur chaque $T_{G_i}(\mathbb{C})$ $(-1\leqslant i\leqslant k)$ et sur $T_G(\mathbb{C})$ par les identifications via les bases des espaces tangents comme au Section 1(1). On note $c_1, c_2,\ldots$ des nombres réels positifs qui ne dépendent que des données dans chacun des paragraphes suivants, indépendants des paramètres $D, B, E, V_1,\ldots, V_k$, et que nous pouvons théoriquement expliciter.

2. *L'application exponentielle du groupe*

On plonge $\mathbf{G}_a$ et $\mathbf{G}_m$ dans l'espace affine $\mathbb{A}_1$ et les groupes G_i $(d_i<i\leqslant k)$ dans $\mathbb{P}_{N_i}$ de la manière indiquée au Section 3(b) de [P-W2]. Pour $d_1<i\leqslant k$, considérons l'exponentielle du groupe G_i, composée à droite avec ce plongement et à gauche avec l'isomorphisme entre $T_{G_i}(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}^{\delta_i}$ ce qui s'écrit

$$\phi_i(\mathbf{z}_i)=(\phi_{i,0},\ldots,\phi_{i,N_i})\colon \mathbb{C}^{\delta_i}\to\mathbb{C}^{N_i+1}$$

où $\phi_{i,j}$ sont des fonctions entières non identiquement nulles d'ordre strict inférieur ou égal à 2. Posons pour $\mathbf{z}_{-1}=(z_{-t},\ldots,z_{-1})$; $\phi_{-1}(\mathbf{z}_{-1})=(z_{-t},\ldots,z_{-1})$, $\phi_0(z_0)=z_0$, et pour $1\leqslant j\leqslant d_1$, $\phi_j(z_j)=\exp(z_j)$. On désigne par $\mathbb{P}$ le produit $\mathbb{A}^{d_1+t+1}\times\mathbb{P}_{N_{d_1+1}}\times\cdots\times\mathbb{P}_{N_k}$ et on plonge G dans $\mathbb{P}$ de manière naturelle. Pour

$$\mathbf{z}=(\mathbf{z}_{-1},\ldots,\mathbf{z}_k)\in\mathbb{C}^{d+t+1}\quad\text{et}\quad N=t+1+k+N_{d_1+1}+\cdots+N_k,$$

on pose $\Phi(\mathbf{z})=(\phi_{-1}(\mathbf{z}_{-1}),\ldots,\phi_k(\mathbf{z}_k))$ alors l'application $\Phi\colon\mathbb{C}^{d+t+1}\to\mathbb{C}^N$ représente l'application exponentielle du groupe G. On considère encore une application méromorphe; pour $d_1 < i \leqslant k$ et $\mathbf{z}_i \in \mathbb{C}^{\delta_i}$, il existe un indice v_i vérifiant $0 \leqslant v_i \leqslant N_i$ et

$$|\phi_{i,v_i}(\mathbf{z}_i)| \geqslant \exp\{-c_1(\|\mathbf{z}_i\|+1)^{\rho_i}\} \quad \text{(cf. (3.1) de [H2])}.$$

Pour cette indice, posons

$$\psi_{i,v_i} = \left(\frac{\phi_{i,0}}{\phi_{i,v_i}}, \ldots, 1, \ldots, \frac{\phi_{i,N_i}}{\phi_{i,v_i}}\right) : \mathbb{C}^{\delta_i} \to \mathbb{C}^{N_i+1}$$

qui est une application méromorphe ($d_1 < i \leqslant k$).

Notons $\psi_{-1}(\mathbf{z}_{-1}) = (z_{-t}, \ldots, z_{-1})$, $\psi_0(z_0) = z_0$ et pour $1 \leqslant j \leqslant d_1$, $\psi_j(z_j) = \exp(z_j)$. Pour

$$\mathbf{v} = (v_{d_1+1}, \ldots, v_k) \in \mathbb{Z}^{k-d_1} \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant v_i \leqslant N_i,$$

on définit une application méromorphe de $\mathbb{C}^{d+t+1}$ dans $\mathbb{C}^N$ par

$$\Psi_{\mathbf{v}}(\mathbf{z}) = (\psi_{-1}(\mathbf{z}_{-1}), \ldots, \psi_{k,v_k}(\mathbf{z}_k)). \tag{2.1}$$

Étant donné un corps R, nous notons $R[\mathbb{P}]$ l'algèbre des coordonnées de $\mathbb{P}$ sur R, qui est formée des polynômes à coefficients dans R, en N variables $X_{-t}, \ldots, X_{-1}, X_0, X_1, \ldots, X_{d_1}, \mathbf{X}_{d_1+1}, \ldots, \mathbf{X}_k$ avec $\mathbf{X}_i = (X_{i,0}, \ldots, X_{i,N_i})$, homogènes en les N_i+1 variables pour $d_1 < i \leqslant k$. Notons $\mathbf{X}_{-1} = (X_{-t}, \ldots, X_{-1})$. Ainsi un tel polynôme P a des degrés partiels $L_{-1}, \ldots, L_k$, le paramètre L_{-1} désignant le degré maximum par rapport aux t variables $X_{-t}, \ldots, X_{-1}$. On associe à P une fonction $F = P(\Phi)$ de $\mathbb{C}^{d+t+1}$ dans $\mathbb{C}$.

3. *Majorations analytiques*

Nous utilisons le symbole de dérivations $D_{\mathbf{x}}$ pour l'espace de dimension $d+t+1$, et la notation $D_{\mathbf{x}}^{\mathbf{t}}$ avec $h = d+1$, définis dans le Section 3(3) de [H2]. Pour une fonction analytique au voisinage d'un point $\mathbf{z}$ de $\mathbb{C}^n$, la notion de zéro en $\mathbf{z}$ d'ordre $\geqslant T$ (ou d'ordre exact T) le long d'un sous-espace de $\mathbb{C}^n$ est aussi définie dans le Section 3(3) de [H2].

Pour la fonction Φ que l'on a définie, nous avons l'estimation analytique suivante.

LEMME 2.2. *Il existe un nombre réel $c_2 > 0$ ne dépendant que de d, t, des plongements des G_i, des bases des espaces tangents des G_i $(-1 \leqslant i \leqslant k)$ et de l'application Φ ayant la propriété suivante. Soient $L_{-1}, L_0, \ldots, L_k$ des nombres réels $\geqslant 0$. Soit $P \in \mathbb{C}[\mathbb{P}]$ un élément non nul de degrés $\leqslant (L_{-1}, \ldots, L_k)$ dont les* *coefficients complexes sont de modules $\leqslant H$ avec $H \geqslant e$. Pour $1 \leqslant i \leqslant d+1$, soient*

$$\mathbf{x}_i = (\mathbf{x}_{i,-1}, \mathbf{x}_{i,0}, \ldots, \mathbf{x}_{i,k}) = (x_{i,-t}, \ldots, x_{i,d_1}, \mathbf{x}_{i,d_1+1}, \ldots, \mathbf{x}_{i,k})$$

des éléments de $T_G(\mathbb{C})$ identifié à $\mathbb{C}^{d+t+1}$. Soit

$$\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_{d+1}) \in \mathbb{Z}^{d+1} \quad avec \quad t_1, \ldots, t_{d+1} \geqslant 0.$$

Posons

$$D_{\mathbf{x}}^{\mathbf{t}} = D_{\mathbf{x}_1}^{t_1} \circ \cdots \circ D_{\mathbf{x}_{d+1}}^{t_{d+1}},$$
$$\xi = \operatorname*{Max}_{1 \leqslant i \leqslant d+1, -1 \leqslant j \leqslant k} (1, \|\mathbf{x}_{i,j}\|).$$

Soient $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_{-1}, \ldots, \mathbf{v}_k) = (v_{-t}, \ldots, v_d)$ avec $\mathbf{v}_i \in \mathbb{C}^{\delta_i}$ $(-1 \leqslant i \leqslant k)$ et T un entier $\geqslant 1$. Notons $|\mathbf{t}| = t_1 + \cdots + t_{d+1}$ et $F = P(\Phi)$. Alors pour $|\mathbf{t}| = T$, on a;

$$\log |D_{\mathbf{x}}^{t} F(\mathbf{v})| \leqslant c_2 \left\{ \log H + \sum_{j=-1}^{0} L_j \log \operatorname{Max}(1, \|\mathbf{v}_j\|) \right.$$
$$\left. + T \log(\xi T) + \sum_{i=1}^{k} L_i (\|\mathbf{v}_i\| + 1)^{\rho_i} \right\}.$$

DEMONSTRATION DU LEMME 2. L'énoncé vient du lemme 3.4 de [H2]. □

4. *Modifications du point et des formes linéaires*

Le lemme suivant est le lemme clef pour notre raffinement. Ce lemme est un peu différent du lemme 4.1 dans [H2] car on est obligé de choisir un même nouveau point pour toutes les formes linéaires simultanément.

LEMME 2.3. *Pour démontrer le théorème* 1.1, *on peut supposer $d \geqslant 1$ donc $k \geqslant 1$. De plus, pour $1 \leqslant \tau \leqslant t$, il existe des formes linéaires L_τ sur $T_G(\mathbb{C})$ et un point $\mathbf{u} \in T_G(\mathbb{C})$ ayant les propriétés suivantes.*

(i) $L_\tau(\mathbf{z}) = -z_{\tau-1-t} + \sum_{i=0}^{d} \beta'_{i,\tau} z_i$ $\quad (1 \leqslant \tau \leqslant t)$ $\quad$ *avec* $\beta'_{i,\tau} \in K$, $\quad |\beta'_{i,\tau}| \leqslant 1$ $\quad$ *et* $h(\beta'_{i,\tau}) \leqslant 2 \log B (1 \leqslant \tau \leqslant t, 0 \leqslant i \leqslant d)$.

(ii) *Pour tout $1 \leqslant \tau \leqslant t$, les coefficients $\beta'_{1,\tau}, \ldots, \beta'_{d,\tau}$ ne sont pas tous nuls.*

(iii) *Pour tout $1 \leqslant \tau \leqslant t$, on a $|L_\tau(\mathbf{u})| \neq 0$ si et seulement si $|\mathscr{L}_\tau(\mathbf{v})| \neq 0$ et on se ramène à minorer $\operatorname{Max}_{1 \leqslant \tau \leqslant t} |L_\tau(\mathbf{u})|$ au lieu de $\operatorname{Max}_{1 \leqslant \tau \leqslant t} |\mathscr{L}_\tau(\mathbf{v})|$ pour démontrer le théorème.*

(iv) *En notant* $W = \bigcap_\tau \operatorname{Ker} L_\tau \subset T_G(\mathbb{C})$, *pour tout sous-groupe algébrique* G' *de* G *tel que* $\mathbf{u} \in T_{G'}(\mathbb{C})$, *on a* $T_{G'}(\mathbb{C}) + W = T_G(\mathbb{C})$.

(v) *Aucun des deux espaces* $T_{G_{-1}}(\mathbb{C})$ *et* $T_{G_1 \times \cdots \times G_k}(\mathbb{C})$ *n'est contenu dans* W, *par conséquent,* $W \neq T_G(\mathbb{C})$.

DEMONSTRATION DU LEMME 2.3. Pour chaque τ avec $1 \leqslant \tau \leqslant t$, les coefficients des $\mathscr{L}_\tau$ appartenant à K ne sont pas tous nuls par hypothèse. Le point $\mathbf{v} = (1, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ a été défini dans les hypothèses du théorème 1.1 et on a posé

$$\mathscr{L}_\tau(\mathbf{v}) = \beta_{0,\tau} + \beta_{1,\tau} u_1 + \cdots + \beta_{d,\tau} u_d.$$

S'il existe un indice τ, $1 \leqslant \tau \leqslant t$ tel que les nombres $\beta_{1,\tau}, \ldots, \beta_{d,\tau}$ soient tous nuls, alors l'énoncé du théorème 1.1 est banal à cause de l'inégalité de Liouville (cf. par exemple le lemme 3 de [M-W]) qui montre:

$$\log |\beta_{0,\tau}| > -c_3 D \log B, \quad \text{quand } \beta_{0,\tau} \neq 0.$$

Ainsi on peut supposer que pour tout $1 \leqslant \tau \leqslant t$ les coefficients $\beta_{1,\tau}, \ldots, \beta_{d,\tau}$ ne sont pas tous nuls. De même, si $d = 0$, alors le théorème est banal; ainsi on se ramène à supposer $d \geqslant 1$ donc $k \geqslant 1$.

Posons

$$\mathbf{u}_{-1} = (u_{-t}, \ldots, u_{-1}) = (0, \ldots, 0) \in T_{G_{-1}}(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_0 = (1) \in T_{G_0}(\mathbb{C}).$$

On définit un point $\mathbf{u} \in T_G(\mathbb{C})$ par $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_{-1}, \mathbf{v})$. Ainsi on a $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_{-1}, \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$.

Pour $1 \leqslant \tau \leqslant t$, choisissons un indice $m = m(\tau)$, $0 \leqslant m \leqslant d$ tel que $|\beta_{m,\tau}| = \operatorname{Max}\{|\beta_{i,\tau}|; 0 \leqslant i \leqslant d\}$. Grâce aux hypothèses du théorème, on a

$$\begin{aligned} \beta_{m,\tau} \neq 0 \quad \text{et} \quad & |\mathscr{L}_\tau(\mathbf{v})| \\ & = |\beta_{m,\tau}| \cdot \left| 0 + \frac{\beta_{0,\tau}}{\beta_{m,\tau}} + \frac{\beta_{1,\tau}}{\beta_{m,\tau}} u_1 + \cdots + \frac{\beta_{d,\tau}}{\beta_{m,\tau}} u_d \right|. \end{aligned}$$

On note $\beta'_{i,\tau} = \beta_{i,\tau}/\beta_{m,\tau}$ $(0 \leqslant i \leqslant d)$. Maintenant, nous définissons t formes linéaires $L_1, \ldots, L_t$ sur $T_G(\mathbb{C})$ en posant

$$L_\tau(\mathbf{z}) = -z_{\tau-1-t} + \sum_{i=0}^{d} \beta'_{i,\tau} z_i \quad (1 \leqslant \tau \leqslant t)$$

pour

$$\mathbf{z} = (\mathbf{z}_{-1}, \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_k) = (z_{-t}, \ldots, z_d) \in T_G(\mathbb{C});$$

ainsi nous avons

$$L_\tau(\mathbf{u}) = \mathscr{L}_\tau(\mathbf{v})/\beta_{m,\tau} \quad (1 \leqslant \tau \leqslant t).$$

Par conséquent, on obtient $|\beta'_{i,\tau}| \leqslant 1$ et $h(\beta'_{i,\tau}) \leqslant 2 \log B$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant d$, en utilisant les propriétés de la hauteur logarithmique absolue (voir par exemple la page 7 de [Y]). Les propriétés (i), (ii) et (v) du lemme sont donc démontrées. Par définition de la nouvelle forme linéaire $L_\tau(\mathbf{z})$, nous avons, pour $1 \leqslant \tau \leqslant t$, $L_\tau(\mathbf{u}) \neq 0$ si et seulement si $\mathscr{L}_\tau(\mathbf{v}) \neq 0$. L'inégalité de Liouville appliquée à $\beta_{m,\tau} \neq 0$ donne

$$\operatorname*{Max}_{1\leqslant\tau\leqslant t} \log|\mathscr{L}_\tau(\mathbf{v})| \geqslant -c_4 D \log B + \operatorname*{Max}_{1\leqslant\tau\leqslant t} \log|L_\tau(\mathbf{u})|,$$

d'où la propriété (iii).

Nous allons démontrer (iv). Quand G' est un sous-groupe algébrique de G tel que $\mathbf{u} \in T_{G'}$, posons

$$G'_1 = \exp_G\{T_{G'} \cap (\{\mathbf{0}\} \oplus T_{\mathscr{G}}\} \quad \text{avec} \quad \mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in T_{G_{-1}}.$$

On a $G'_1 = G' \cap (\{\mathbf{0}\} \times \mathscr{G})$ car l'application exponentielle est surjective (voir par exemple [S]). Il existe alors un sous-groupe algébrique $\mathscr{G}'$ de $\mathscr{G}$ tel que $G'_1 = \{\mathbf{0}\} \times \mathscr{G}'$. Nous obtenons $\mathbf{v} \in T_{\mathscr{G}'}$ car $\mathbf{u} = (\mathbf{0}, \mathbf{v})$, donc l'hypothèse (1.6) montre $T_{\mathscr{G}'} + \mathscr{W} = T_{\mathscr{G}}$ ce qui implique $T_{\mathscr{G}}/\mathscr{W} \simeq T_{\mathscr{G}'}/(T_{\mathscr{G}'} \cap \mathscr{W})$. Nous en déduisons

$$\dim T_{\mathscr{G}'} - \dim T_{\mathscr{G}'} \cap \mathscr{W} = t. \tag{2.4}$$

D'autre part, par définition de W, on vérifie

$$\{\mathbf{0}\} \oplus \mathscr{W} = W \cap (\{\mathbf{0}\} \oplus T_{\mathscr{G}}),$$

alors

$$(T_{G'} \cap W) \cap (\{\mathbf{0}\} \oplus T_{\mathscr{G}'}) = \{\mathbf{0}\} \oplus (T_{\mathscr{G}'} \cap \mathscr{W}),$$

d'où

$$\{(T_{G'} \cap W) + (\{\mathbf{0}\} \oplus T_{\mathscr{G}'})\}/(T_{G'} \cap W) \simeq T_{\mathscr{G}'}/(T_{\mathscr{G}'} \cap \mathscr{W}). \tag{2.5}$$

Les relations (2.4), (2.5) fournissent

$$\dim\{(T_{G'} \cap W) + (\{\mathbf{0}\} \oplus T_{\mathscr{G}'})\} = \dim(T_{G'} \cap W) + t,$$

en conséquence,

$$\dim T_{G'} \geqslant \dim(T_{G'} \cap W) + t. \tag{2.6}$$

On combine l'inégalité (2.6) avec l'isomorphisme $(T_{G'} + W)/W \simeq T_{G'}/(T_{G'} \cap W)$ pour obtenir $\dim(T_{G'} + W) \geqslant \dim W + t$, c'est-à-dire $\dim(T_{G'} + W) \geqslant \dim T_G$ ce qui achève d'établir la démonstration de propriété (iv). $\square$

REMARQUE 2.7. On explique ici la motivation de la modification du groupe dans le Section 2(1). Le lemme 2.3 permettra de choisir la base e définie dans le Section 3(3), dont les modules des coordonnées sont $\leqslant 1$. La fonction $F(\mathbf{z})$ est polynomiale en $z_{-t}, \ldots, z_{-1}$, donc toute dérivée par rapport à ces variables d'ordre supérieur au degré L_{-1} est nulle; par conséquent, dans la dérivation

$$D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}} F(s\mathbf{u}) = \left(\beta'_{0,1} \frac{\partial}{\partial z_{-t}} + \cdots + \beta'_{0,t} \frac{\partial}{\partial z_{-1}} + \frac{\partial}{\partial z_0}\right)^{t_1} \circ \cdots$$
$$\circ \left(\beta'_{d,1} \frac{\partial}{\partial z_{-t}} + \cdots + \beta'_{d,t} \frac{\partial}{\partial z_{-1}} + \frac{\partial}{\partial z_d}\right)^{t_{d+1}} F(\mathbf{z})\,|_{\mathbf{z} = s\mathbf{u}}$$

le degré total de tous $\beta'_{i,\tau}$ $(0 \leqslant i \leqslant d,\ 1 \leqslant \tau \leqslant t)$ est inférieur ou égal à $c_5 L_{-1}$. Cette astuce avec le fait $|\beta'_{i,\tau}| \leqslant 1$ nous apporte le raffinement de ce papier. Les vecteurs $\mathbf{e}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant d+1-t)$ de la base de W définie dans la page 323 de [P-W1] possèdent t coordonnées qui font intervenir les $\beta_{i,\tau}$, donc pour utiliser l'astuce dessus, d'abord il faut mettre au moins t facteurs $\mathbf{G}_a$ au groupe $\mathscr{G}$, ensuite, on doit ajouter un autre facteur $\mathbf{G}_a$ pour avoir $|\beta'_{i,\tau}| \leqslant 1$ $(0 \leqslant i \leqslant d,\ 1 \leqslant \tau \leqslant t)$. Même si nous ajoutons plus de $t+1$ facteurs $\mathbf{G}_a$, la minoration reste la même que le cas pour $\mathbf{G}_a^{t+1} \times \mathscr{G}$, ainsi la modification du Section 2(1) est celle qui est la plus convenable.

Le point $\mathbf{u}$ doit être défini de sorte qu'il vérifie le lemme 2.3(iii) et (iv). On prend ici $\mathbf{u}$ qui est le plus simple satisfaisant ces conditions.

3. Démonstration du théorème 1.1

À partir de maintenant, on travaille sur le point, les formes linéaires et le groupe G de dimension $d+t+1$, avec $d \geqslant 1$, introduits dans le Section 2(1) et lemme 2.3. Pour simplifier les notations, on écrira $\beta_{i,\tau}$ au lieu de $\beta'_{i,\tau}$ $(0 \leqslant i \leqslant d,\ 1 \leqslant \tau \leqslant t)$,

$$\beta_{\tau-1-t,\tau} = -1$$

et

$$\beta_{-t,\tau} = \cdots = \beta_{\tau-2-t,\tau} = \beta_{\tau-t,\tau} = \cdots = \beta_{-1,\tau} = 0$$

dans la définition de $L_\tau(\mathbf{z})$; ainsi

$$L_\tau(\mathbf{z}) = \sum_{i=-t}^{d} \beta_{i,\tau} z_i = -z_{\tau-1-t} + \sum_{i=0}^{d} \beta_{i,\tau} z_i \quad (1 \leqslant \tau \leqslant t).$$

On choisit un nombre réel $C_0 > 0$ assez grand, beaucoup plus grand que tous les autres nombres réels $c_1, c_2, \ldots,$ mais indépendant des paramètres D, B, $V_1, \ldots, V_k$, E. Notons $V_0 = \mathrm{Min}\{V_i; 1 \leqslant i \leqslant k\}$.

1. *Choix de paramètres*

CHOIX 3.1. En notant [ ] la partie entière, on pose,

$$S = [C_0^5 D(\log\log B + \log(DE))/(\log E)]$$

$$S_0 = [S/(C_0^2)]$$

$$U_0 = \mathrm{Max}\left\{ C_0^{(4d+5d_2+8)/t+5} D^{(d+d_2+1)/t+1} (\log B + \log(DE)) \right.$$
$$\left. \cdot \left(\frac{\log\log B + \log D}{\log E} + 1 \right)^{(d_2+1)/t} \left(\prod_{i=1}^{k} (\log V_i)^{\delta_i/t} \right) (\log E)^{-d/t},\ C_0^5 D^2 (\log(BV)) \right\}.$$

Soit $U > 0$ un nombre réel; posons encore

$$L_{-1} = [L_{-1}^\#] \quad \text{et} \quad L_{-1}^\# = U/(C_0^5 D(\log B + \log(DE)))$$

$$L_0 = [L_0^\#] \quad \text{et} \quad L_0^\# = U/(S \log E)$$

$$L_i = [L_i^\#] \quad \text{et} \quad L_i^\# = U/(DS^{\rho_i} \log V_i) \quad (1 \leqslant i \leqslant k).$$

Pour $U' = \mathrm{Max}\{U, U_0\}$, posons

$$T = [T^\#] \quad \text{et} \quad T^\# = U'/(C_0 D(\log\log B + \log(DE)))$$

$$T_0 = [T/(C_0^2)].$$

Ce choix est très différent de celui de [P-W1]. Pour $t = 1$, on retrouve [H2] sauf le paramètre U_0.

Notons $\Gamma(S) = \{\exp_G(s\mathbf{u});\ s \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant s < S\}$. Pour exprimer le dégré d'un sous-groupe, nous utilisons la notation du polynôme d'Hilbert-Samuel expliquée dans [P].

PROPOSITION 3.2. *Il existe un nombre réel $U > 0$ pour le choix* 3.1 *ayant les propriétés suivantes*:

$$U \leqslant U_0 \quad donc \quad U' = U_0. \tag{3.3}$$

(3.4) *Pour tout sous-groupe algébrique connexe G' de G vérifiant $T_{G'} + W \neq T_G$, en notant $\sigma = \dim W/W \cap T_{G'}$, on a*;

$$(T^{\#})^{\sigma} \operatorname{card}((\Gamma(S) + G')/G') \cdot H(G'; L^{\#}_{-1}, \ldots, L^{\#}_{k}) \geqslant C_0 H(G; L^{\#}_{-1}, \ldots, L^{\#}_{k}).$$

(3.5) *Il existe un sous-groupe algébrique connexe $\tilde{G}$ de G vérifiant $T_{\tilde{G}} + W \neq T_G$, tel que, en notant $\tilde{\sigma} = \dim W/W \cap T_{\tilde{G}}$, on ait*;

$$(T^{\#})^{\tilde{\sigma}} \operatorname{card}((\Gamma(S) + \tilde{G})/\tilde{G}) \cdot H(\tilde{G}; L^{\#}_{-1}, \ldots, L^{\#}_{k}) = C_0 H(G; L^{\#}_{-1}, \ldots, L^{\#}_{k}).$$

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.2. Quand G' est un sous-groupe algébrique connexe de G tel que $T_{G'} + W \neq T_G$, on note $r = \dim(G/G')$ et $\sigma = \dim W/W \cap T_{G'}$; on remarque que l'on a $r > \sigma$ et on pose

$$A(G') = \left\{ C_0^{-1} (T^{\#}/U')^{\sigma} \operatorname{card}((\Gamma(S) + G')/G') \cdot \frac{H(G'; L^{\#}_{-1}/U, \ldots, L^{\#}_{k}/U)}{H(G; L^{\#}_{-1}/U, \ldots, L^{\#}_{k}/U)} \right\}^{1/(r-\sigma)}$$

et

$$B(G') = A(G')^{(r-\sigma)/r} \cdot \operatorname{Max}\{A(G'), U_0\}^{\sigma/r}.$$

On voit que $A(G')$ dépend de G' mais est indépendant de U. Parmi tous les sous-groupes algébriques connexes G' de G vérifiant $T_{G'} + W \neq T_G$, on en choisit un $\tilde{G}$ tel que la quantité $B(\tilde{G})$ soit minimale, c'est-à-dire $B(\tilde{G}) \leqslant B(G')$. On pose $U = B(\tilde{G})$. Par définition de $A(G')$ et de U_0, on a

$$A(0) \leqslant \left\{ \frac{(T^{\#}/U')^{d+1} \cdot S}{C_0 (L^{\#}_{-1}/U)^{\delta_{-1}} \cdots (L^{\#}_{k}/U)^{\delta_k}} \right\}^{1/t} \leqslant U_0,$$

donc on en déduit $B(0) \leqslant U_0$. Comme $U \leqslant B(0)$, on obtient la propriété (3.3).

Dans la définition de $A(G')$, le quotient des deux fonctions H est homogène (voir la propriété 4.4 de [H2]), ainsi (3.3) fournit

$$A(G')^{r-\sigma}\cdot U_0^{\sigma}/U^r=\frac{(T^{\#})^{\sigma}\ \mathrm{card}((\Gamma(S)+G')/G')\cdot H(G';\ L_{-1}^{\#},\dots,L_k^{\#})}{C_0H(G;\ L_{-1}^{\#},\dots,L_k^{\#})}.$$

Nous allons démontrer (3.4) et (3.5) en utilisant cette égalité. Si $A(G')\geqslant U_0$ alors $A(G')^{r-\sigma}\cdot U_0^{\sigma}\geqslant U_0^{r}\geqslant U^r$ d'après (3.3), et si $A(G')<U_0$ alors on a $U^r\leqslant B(G')^r=A(G')^{r-\sigma}\cdot U_0^{\sigma}$, ainsi on a toujours $U^r\leqslant A(G')^{r-\sigma}\cdot U_0^{\sigma}$, ce qui établit (3.4). La définition de U et (3.3) impliquent pour $\tilde r=\dim(G/\tilde G)$;

$$A(\tilde G)^{\tilde r-\tilde\sigma}\cdot \mathrm{Max}\{A(\tilde G),\,U_0\}^{\tilde\sigma}=U^{\tilde r}\leqslant U_0^{\tilde r},\quad \text{d'où}\quad A(\tilde G)\leqslant U_0,$$

donc

$$U^{\tilde r}=B(\tilde G)^{\tilde r}=A(\tilde G)^{\tilde r-\tilde\sigma}\cdot U_0^{\tilde\sigma}.$$

Nous en déduisons alors (3.5) □

PROPRIETE 3.6. *On a les relations suivantes:*

(i) $DL_{-1}\log \mathrm{Max}\{B,\,L_{-1},\,S\}\leqslant C_0^{-1}U$
(ii) $DL_0\log \mathrm{Max}\{L_0,\,S\}\leqslant C_0^{-1}U$
(iii) $DL_iS^{\rho_i}\log V_i\leqslant c_6U\quad (1\leqslant i\leqslant k)$
(iv) $DT\log T\leqslant C_0^{-4/5}U_0$
(v) $L_i\leqslant L_i^{\#}\leqslant c_7U/(S\log E)\quad (-1\leqslant i\leqslant k)$
(vi) $C_0^2U_0/c_8\leqslant T_0S\log E\leqslant c_8C_0^2U_0$
$C_0^2U_0/c_8\leqslant TS_0\log E\leqslant c_8C_0^2U_0$
(vii) $T^{\#}\geqslant C_0L_i^{\#}\quad (-1\leqslant i\leqslant k)$
(viii) $S_0\geqslant C_0^2$
(ix) $T_0\geqslant C_0$
(x) $L_{-1}^{\#}\leqslant L_0^{\#}$
(xi) $\mathbf{u}\notin T_{\tilde G}(\mathbb{C})$.

DEMONSTRATION DE LA PROPRIETE 3.6. Le choix 3.1 joint à l'hypothèse (1.2) entraîne les estimations (i), (ii) et (iv). Le choix 3.1 et la propriété 4.2 de [H2] impliquent les inégalités (v) et (vii). Grâce au lemme 2.3(iv) avec le choix de $\tilde G$ vérifiant $T_{\tilde G}+W\neq T_G$, on obtient (xi). Les autres relations sont immédiates □

2. *Les deux cas*

Notons $\Omega = \operatorname{Ker} \exp_G$. Pour tout $s \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant s < S$, si l'on a $s\mathbf{u} \notin \Omega + T_{\tilde{G}}$ alors on dit que *l'on est dans le cas non périodique.* S'il existe un $s_0 \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant s_0 < S$ tel que $s_0 \mathbf{u} \in \Omega + T_{\tilde{G}}$ alors on dit que *l'on est dans le cas périodique.* On note aussi

$$\Xi = \{(\mathbf{t}, s) \in \mathbb{Z}^{d+2},\ 0 \leqslant t_i < 2T\ (1 \leqslant i \leqslant d+1),\ 0 \leqslant s < S_0\},$$
$$S_1 = S_0, \qquad T_1 = T$$

pour le cas non périodique et

$$\Xi = \{(\mathbf{t}, s) \in \mathbb{Z}^{d+2},\ 0 \leqslant t_i < T\ (1 \leqslant i \leqslant d),\ 0 \leqslant t_{d+1} < T_0,\ 0 \leqslant s < S\},$$
$$S_1 = S, \qquad T_1 = T_0$$

pour le cas périodique. Notons encore $\delta = \dim(T_{\tilde{G}} \cap W) = d + 1 - \tilde{\sigma}$.

3. *Base du sous-espace W*

On munit W de la base, pour $0 \leqslant i \leqslant d$;

$$\mathbf{e}_{i+1} = (\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \ldots, \beta_{i,t}, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

où 1 est la $(i+t+1)$-ième coordonnée dans $\mathbb{C}^{d+t+1}$. Remarquons que grâce au lemme 2.3(i), on a $\|\mathbf{e}_i\| \leqslant \sqrt{4t+1}$ $(1 \leqslant i \leqslant d+1)$. Posons

$$\mathbf{w} = \left(\sum_{j=0}^{d} \beta_{j,1} u_j, \ldots, \sum_{j=0}^{d} \beta_{j,t} u_j, u_0, \ldots, u_d\right).$$

Nous en déduisons

$$\mathbf{w} \in W \quad \text{et} \quad \|\mathbf{w} - \mathbf{u}\| = \left(\sum_{1 \leqslant \tau \leqslant t} |L_\tau(\mathbf{u})|^2\right)^{1/2}.$$

On peut estimer les coordonnées de $\mathbf{w}$:

$$\left|\sum_{0 \leqslant j \leqslant d} \beta_{j,\tau} u_j\right| = |L_\tau(\mathbf{u})| \quad (1 \leqslant \tau \leqslant t) \tag{3.7}$$

grâce au lemme 2.3, et

$$|u_i| \leqslant c_9 D \log V \ (-t \leqslant i \leqslant d)$$

par hypothèse (1.4).

On note ι l'isomorphisme entre W et $\mathbb{C}^{d+1}$ associé à la base $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{d+1})$:

$$\iota: a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_{d+1}\mathbf{e}_{d+1} \mapsto (a_1, \dots, a_{d+1}).$$

Notons aussi $(\cdot, \cdot)$ le produit hermitien canonique sur $\mathbb{C}^{d+1}$ et $|\cdot| = (\cdot, \bar{\cdot})^{1/2}$ la norme associée. Nous allons choisir une autre base de W. Soit $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_{d+1})$ une base de $\iota(W)$ orthonormée par rapport à $|\cdot|$ de telle sorte que $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_\delta)$ soit une base de $\iota(T_{\tilde{G}} \cap W)$. Posons $\tilde{\mathbf{e}}_i = \iota^{-1}(\mathbf{e}'_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant d+1$. On voit que $\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_\delta$ forment une base de $T_{\tilde{G}} \cap W$, $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_{d+1})$ forme une base de W.

PROPRIETE 3.8. *Les coordonnées des matrices de passage entre*

$$\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{d+1}) \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{e}} = (\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_{d+1})$$

sont de modules $\leqslant 1$.

DEMONSTRATION DE LA PROPRIETE 3.8. La matrice de passage entre $\iota(\mathbf{e})$ et $\mathbf{e}'$ est unitaire. □

Désormais, on identifie W à $\mathbb{C}^{d+1}$ par ι; on ne distingue donc plus $\mathbf{e}'$ et $\tilde{\mathbf{e}}$.

Dorénavant, pour démontrer notre théorème par l'absurde, on suppose;

HYPOTHESE 3.9. $\mathrm{Max}_{1 \leqslant \tau \leqslant t} |L_\tau(\mathbf{u})| < \exp(-C_0^3 U_0)$.

PROPRIETE 3.10. *Pour le sous-groupe $\tilde{G}$ dans* (3.5), *on a les propriétés suivantes.*

(i) $H(\tilde{G}; 1, \dots, 1) \leqslant c_{10} C_0 U_0^{d+t+1}$.

(ii) *Notons*

$$d(\mathbf{u}, T_{\tilde{G}} \cap W) = \mathrm{Min}\{\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|; \mathbf{x} \in T_{\tilde{G}} \cap W\}.$$

Supposons que nous sommes dans le cas périodique. Alors

$$d(\mathbf{u}, T_{\tilde{G}} \cap W) \geqslant c_{11}/(C_0 S U_0^{d+t+1}).$$

DEMONSTRATION DE LA PROPRIETE 3.10. La propriété 4.4 de [H2] avec (3.3) montre l'estimation (i) de la même manière que la propriété 5.16 de [P-W2]. On va montrer (ii). En utilisant les notations de [P], on a $\deg \tilde{G} \leqslant c_{12} H(\tilde{G}; 1, \dots, 1)$. D'autre part, comme on est dans le cas périodique, il existe une période $\omega \in \Omega$, vérifiant $\omega \notin T_{\tilde{G}}$ grâce à la propriété 3.6(xi), telle que $d(s_0\mathbf{u}, T_{\tilde{G}}) = d(\omega, T_{\tilde{G}})$. Le corollaire 2 de [B-P] (cf. (5.2) de [P-W2]) entraîne donc

$d(\omega, T_{\tilde{G}}) \geqslant c_{13}/(\deg \tilde{G})$. Ainsi on en déduit

$$d(\mathbf{u}, T_{\tilde{G}} \cap W) \geqslant d(\mathbf{u}, T_{\tilde{G}}) \geqslant c_{14}/(S \cdot H(\tilde{G}; 1, \ldots, 1)).$$

L'estimation (i) fournit l'énoncé (ii). □

Ensuite, on a l'énoncé suivant.

PROPRIETE 3.11. *Dans le cas périodique, on a*

$$\mathbf{w} \notin T_{\tilde{G}} \cap W$$

donc on a $T_{\tilde{G}} \cap W \neq W$ *et* $\tilde{\sigma} \geqslant 1$.

DEMONSTRATION DE LA PROPRIETE 3.11. Grâce à l'égalité

$$\|\mathbf{w}-\mathbf{u}\| = \left(\sum_{1 \leqslant \tau \leqslant t} |L_\tau(\mathbf{u})|^2 \right)^{1/2},$$

il suffit de reprendre la démonstration de la propriété 4.15 de [H2]. □

Dans le cas périodique, on renumérote $\tilde{\mathbf{e}}_{\delta+1}, \ldots, \tilde{\mathbf{e}}_{d+1}$, de telle sorte que, en écrivant $\mathbf{w} = w_1\tilde{\mathbf{e}}_1 + \cdots + w_{d+1}\tilde{\mathbf{e}}_{d+1}$, on ait $|w_{d+1}| \geqslant \operatorname{Max}\{|w_i|; \delta+1 \leqslant i \leqslant d\}$; alors la propriété 3.11 montre $w_{d+1} \neq 0$; elle montre aussi que les éléments $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{e}}_d, \mathbf{w})$ forment une base de W. Notons

$$\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{d+1}) = (\tilde{\mathbf{e}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{e}}_d, \mathbf{w})$$

dans le cas périodique.

Considérons la norme $|\cdot|$ que l'on a définie avant la propriété 3.8, alors;

LEMME 3.12. *Pour tout* $\mathbf{x} \in W$, *nous avons*

$$|\mathbf{x}| \leqslant \|\mathbf{x}\| \leqslant (4t(d+1)+1)^{1/2}.$$

DEMONSTRATION DU LEMME 3.12. En rappelant les définitions des $\mathbf{e}_i$ et des normes $|\cdot|$, $\|\cdot\|$, on obtient pour

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{d+1} a_i \mathbf{e}_i,$$

les égalités

$$|\mathbf{x}| = \left(\sum_{i=1}^{d+1} |a_i|^2 \right)^{1/2}$$

et

$$\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{1 \leqslant \tau \leqslant t} \left| \sum_{i=1}^{d+1} a_i \cdot \beta_{i-1,\tau} \right|^2 + \sum_{i=1}^{d+1} |a_i|^2 \right)^{1/2}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne pour tout $1 \leqslant \tau \leqslant t$,

$$\left| \sum_{i=1}^{d+1} a_i \cdot \beta_{i-1,\tau} \right|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{d+1} |a_i|^2 \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{d} |\beta_{j,\tau}|^2 \right).$$

Le lemme 2.3(i) fournit donc l'énoncé. □

PROPOSITION 3.13. *Dans le cas périodique, nous avons*

$$|w_{d+1}| \geqslant c_{15}/(C_0 S U_0^{d+t+1}).$$

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.13. Pour la norme $|\cdot|$, on note

$$\delta(\mathbf{w}, T_{\tilde{G}} \cap W) = \operatorname{Min}\{|\mathbf{w} - \mathbf{x}| : \mathbf{x} \in T_{\tilde{G}} \cap W\}$$

qui est strictement positif par la propriété 3.11. L'hypothèse 3.9 et la proposition 3.10 fournissent

$$\|\mathbf{w} - \mathbf{x}\| \geqslant \|\mathbf{u} - \mathbf{x}\| - \|\mathbf{w} - \mathbf{u}\| \geqslant c_{16}/(C_0 S U_0^{d+t+1})$$

pour tout $\mathbf{x} \in T_{\tilde{G}} \cap W$. Le lemme 3.12 implique avec $\mathbf{w} - \mathbf{x} \in W$;

$$\delta(\mathbf{w}, T_{\tilde{G}} \cap W) \geqslant c_{17}/(C_0 S U_0^{d+t+1}).$$

Par définition de w_{d+1}, on obtient l'énoncé. □

Dans le cas non périodique, on pose aussi

$$\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{d+1}) = (\tilde{\mathbf{e}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{e}}_{d+1}).$$

PROPOSITION 3.14. *Soient $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{d+t+1}$ et f une fonction complexe analytique au voisinage de $\mathbf{z}$. Dans chacun des deux cas, non périodique et périodique, on a les deux majorations suivantes:*

$$\log \operatorname*{Max}_{|\mathbf{t}| \leqslant T} |D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{t}} f(\mathbf{z})| \leqslant \log \operatorname*{Max}_{|\boldsymbol{\tau}| \leqslant T} |D_{\mathbf{e}}^{\boldsymbol{\tau}} f(\mathbf{z})| + c_{18} C_0^{-4/5} U_0,$$

$$\log \operatorname*{Max}_{|\mathbf{t}| \leqslant T} |D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}} f(\mathbf{z})| \leqslant \log \operatorname*{Max}_{|\boldsymbol{\tau}| \leqslant T} |D_{\mathbf{f}}^{\boldsymbol{\tau}} f(\mathbf{z})| + c_{18} C_0^{-4/5} U_0.$$

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.14. Dans le cas non périodique, l'énoncé est immédiat par le lemme 3.1 de [P-W2] grâce à la propriété 3.8. Dans le cas périodique, les coefficients des matrices de passage entre $\mathbf{f}$ et $\tilde{\mathbf{e}}$ sont

$$w_i \ (1 \leqslant i \leqslant d+1), \ 1, \ -w_i/w_{d+1} \ (1 \leqslant i \leqslant d+1).$$

Pour tout $1 \leqslant i \leqslant d+1$, on a

$$|w_i| \leqslant c_{19}(\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{w}-\mathbf{u}\|).$$

Par définition de $\mathbf{u}$ dans le lemme 2.3 avec la deuxième estimation de (3.7), on obtient, en utilisant l'hypothèse 3.9, que $|w_i|$ est majoré par $c_{20}D \log V$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant d+1$. Nous avons donc, avec le choix 3.1, l'estimation (3.3), l'hypothèse (1.2) et la proposition 3.13:

$$T \log \max_{1 \leqslant i \leqslant d+1} (|w_i|, |w_i/w_{d+1}|, |1/w_{d+1}|) \leqslant c_{21} C_0^{-4/5} U_0.$$

Pour passer de la base $\tilde{\mathbf{e}}$ à la base $\mathbf{e}$, on utilise la propriété 3.8. Le lemme 3.1 de [P-W2] permet d'achever la démonstration. □

4. *Base du corps de nombres K*

Par hypothèse, le groupe G_i, la base de T_{G_i}, le plongement de G_i dans $\mathbb{P}_{N_i}$ et les coordonnées projectives du point $\exp_{G_i}(\mathbf{u}_i)$ sont définis sur le corps K pour tout $-1 \leqslant i \leqslant k$. Soit $\{\beta_1, \ldots, \beta_M\}$ un système de générateurs de K sur $\mathbb{Q}$ qui contient tous les coefficients de nos formes linéaires. On prend maintenant une base de K sur $\mathbb{Q}$; $\{\xi_1 = 1, \xi_2, \ldots, \xi_D\}$ formée d'éléments de l'ensemble

$$\left\{ \prod_{i=1}^{M} \beta_i^{a_i}; \ 0 \leqslant a_i < [\mathbb{Q}(\beta_i) \colon \mathbb{Q}], \ 1 \leqslant i \leqslant M, \ a_1 + \cdots + a_M < D \right\}$$

(cf. le Section 4.2 de [M-W]).

PROPRIETE 3.15. *Pour la base $\{\xi_1, \ldots, \xi_D\}$ ainsi définie, on a*

$$h(1, \xi_1, \ldots, \xi_D) \leqslant C_0^{-3} U_0/D \quad et \quad \operatorname{Max}\{\log |\xi_i|; \ 1 \leqslant i \leqslant D\} \leqslant C_0^{-3} U_0.$$

DEMONSTRATION DE LA PROPRIETE 3.15. La définition de U_0 implique

$$h(1, \xi_1, \ldots, \xi_D) \leqslant C_0 D \log(BV) \leqslant C_0^{-4} U_0/D,$$

d'où la première inégalité. On en déduit la deuxième estimation en utilisant la relation (1.1.11) de [W]. □

REMARQUE 3.16. Comme on a besoin de la propriété 3.15 dans l'estimation (3.20) donc dans le lemme 3.24 pour avoir la proposition 3.25, on doit mettre le terme $C_0^5 D^2 \log(BV)$ dans la définition de U_0 (voir aussi le Section 4(2)(c) ci-dessous).

5. *Construction de la fonction auxiliaire*

Notons $L_i^\flat = \mathrm{Max}(1, L_i)$ pour $-1 \leqslant i \leqslant k$.

PROPRIETE 3.17. *À chaque polynôme P dans $K[\mathbb{P}]$, ayant des degrés $\leqslant (L_{-1}, \ldots, L_k)$, on associe la fonction $F = P(\Phi)$. Considérons le système d'equations linéaires;*

$$D_{\mathfrak{f}}^{\mathbf{t}} F(s\mathbf{u}) = 0, \quad (\mathbf{t}, s) \in \Xi, \tag{3.18}$$

où les coefficients de P sont des inconnues. Notons ρ le rang de ce système et v le nombre d'inconnues dans $\mathbb{Z}$. Alors on a

$$\rho \leqslant c_{22} C_0^{-1} H(G; L_{-1}^\flat, \ldots, L_k^\flat) \quad et \quad v \geqslant c_{23} D \cdot H(G; L_{-1}^\flat, \ldots, L_k^\flat).$$

DEMONSTRATION DE LA PROPRIETE 3.17. Le lemme 6.7 de [P-W2] implique que le système (3.18) est de rang majoré par

$$c_{24} T^{\tilde{\sigma}} \operatorname{card}((\Gamma(S_0) + \tilde{G})/\tilde{G}) \cdot H(\tilde{G}; L_{-1}^\flat, \ldots, L_k^\flat)$$

dans le cas non périodique, et par

$$c_{25} T^{\tilde{\sigma}-1} T_0 \operatorname{card}((\Gamma(S) + \tilde{G})/\tilde{G}) \cdot H(\tilde{G}; L_{-1}^\flat, \ldots, L_k^\flat)$$

dans le cas périodique, car $\mathbf{w} \notin T_{\tilde{G}}$ d'après la propriété 3.11. La propriété 4.4 de [H2] avec $L_i^\flat \geqslant L_i^\sharp/2$ et notre propriété (3.5) montrent que chacune des quantités ci-dessus est majorée par $c_{26} C_0^{-1} H(G; L_{-1}^\flat, \ldots, L_k^\flat)$ (dans le cas non périodique, remarquons que ceci provient de la propriété 3.6(xi)). D'où on a l'estimation de ρ.

L'argument de la ligne -3 de [P-W2] fournit la minoration de v. □

Nous allons utiliser cette propriété 3.17 pour construire un polynôme $P \in K[\mathbb{P}]$. Si $p_1, \ldots, p_h \in K$ désignent les coefficients non nuls d'un polynôme P, alors on définit $h(P)$ comme la hauteur logarithmique absolue du point $(1, p_1, \ldots, p_h) \in \mathbb{P}_h(K)$.

PROPOSITION 3.19. *Il existe une constante $c_{27} > 0$ indépendante des paramètres D, B, $V_1, \ldots, V_k$, E et il existe un polynôme $P \in K[\mathbb{P}]$ ne s'annulant pas identiquement sur G, de degrés $\leqslant (L_{-1}, \ldots, L_k)$ tels que*

$$h(P) \leqslant c_{27} C_0^{3/2} U_0 / D \tag{3.20}$$

et tels que la fonction $F = P(\Phi)$ satisfasse pour tout $(\mathbf{t}, s) \in \Xi$;

$$\log |D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{t}} F(s\mathbf{u})| < -C_0^{5/2} U_0 / c_{27}. \tag{3.21}$$

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.19. On écrit les coefficients de P que nous allons déterminer, dans la base définie dans le Section 3(4). Considérons le système d'inéquations (3.21) dont les inconnues sont dans $\mathbf{Z}$. Le lemme 2.2 pour $\mathbf{v} = s\mathbf{u}$, P monomial, $\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant d+1)$, la propriété 3.15, la proposition 3.14, le lemme 2.3(i), la propriété 3.6 et l'inégalité (3.3) montrent que la valeur absolue des coefficients de ce système est majorée par $\exp(c_{28} U_0)$. Notons ρ le rang et ν le nombre d'inconnues dans $\mathbf{Z}$ de (3.21). Alors la propriété 3.17 montre que $\nu/(2\rho) \geqslant c_{29} C_0 D$, ce qui nous permet d'utiliser le lemme 6.1 de [P-W2]. Avec les notations de ce lemme, on a

$$\mu \leqslant C_0^3 U_0^{d+1}$$

par le choix 3.1. Alors on peut appliquer le lemme 6.1 de [P-W2] avec $m = p = C_0^{5/2} U_0 / c_{27}$, $\delta = C_0^{3/2} U_0 / D$ et $c_{27} \geqslant 2$, pour établir (3.21). Lorsque P est un polynôme dont les coefficients p_λ sont des combinaisons linéaires $\Sigma_{i=1}^{D} p_{\lambda,i} \xi_i$ avec la base définie dans le Section 3(4), on a

$$h(P) \leqslant h(1, \xi_1, \ldots, \xi_D) + \log D + \log \operatorname*{Max}_{\lambda,i} \{|p_{\lambda,i}|\}.$$

On obtient (3.20) par la propriété 3.15 et choix de δ. □

6. *Extrapolation*

PROPOSITION 3.22. *On a pour*

$$(\mathbf{t}, s) \in \mathbb{Z}^{d+2},\ 0 \leqslant s < S \quad et \quad 0 \leqslant t_i < 2T\ (1 \leqslant i \leqslant d+1);$$

$$|D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{t}} F(s\mathbf{u}) - D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{t}} F(s\mathbf{w})| < \exp(-c_{30} C_0^{5/2} U_0).$$

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.22. Pour la fonction d'une variable

$$f(z) = D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{t}} F(s\mathbf{u} + sz(\mathbf{w} - \mathbf{u}))$$

avec

$$(\mathbf{t}, s) \in \mathbb{Z}^{d+2},\ 0 \leqslant s < S,\ 0 \leqslant t_i < 2T\ (1 \leqslant i \leqslant d+1),$$

on applique la majoration

$$|f(0) - f(1)| \leqslant \operatorname*{Max}_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f'(x)|.$$

Donc le lemme 2.2, le lemme 2.3(i), la propriété 3.6, les estimations (3.3), (3.20) et la proposition 3.14 montrent que l'on a

$$\log \operatorname*{Max}_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f'(x)| \leqslant c_{31}(\log \|\mathbf{w} - \mathbf{u}\| + C_0^{3/2} U_0).$$

On obtient l'énoncé en utilisant l'hypothèse 3.9. □

PROPOSITION 3.23. *Il existe un nombre réel* $c_{32} > 0$ *tel que pour* $(\mathbf{t}, s) \in \mathbb{Z}^{d+2}$, $|\mathbf{t}| < T$ *et* $0 \leqslant s < S$, *on air*

$$\log |D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{t}} F(s\mathbf{u})| < -c_{32} C_0^2 U_0.$$

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.23. On déduit de (3.21) et de la proposition 3.22,

$$\log |D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{t}} F(s\mathbf{w})| < -c_{33} C_0^{5/2} U_0$$

pour tout $(\mathbf{t}, s) \in \Xi$.

Pour le cas non périodique, on fixe t_i avec $t_i < T$ $(1 \leqslant i \leqslant d+1)$ et on pose

$$f(z) = D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{t}} F(z\mathbf{w}).$$

Pour le cas périodique, on fixe t_i avec $t_i < T (1 \leqslant i \leqslant d)$ et on pose

$$f(z) = D_{\mathbf{f}_1}^{t_1} \circ \cdots \circ D_{\mathbf{f}_d}^{t_d} F(z\mathbf{w}).$$

On a dans les deux cas, $\log |f^{(t)}(s)| < -c_{34} C_0^{5/2} U_0$ pour $t \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant t < T_1$ et $0 \leqslant s < S_1$. Nous allons appliquer le lemme 3.5 de [H2] avec $r = S$, $R = 16ES$. D'abord, l'hypothèse 3.9 jointe à (3.7) entraîne $|\Sigma_{0 \leqslant j \leqslant d} \beta_{j,\tau} u_j| \leqslant 1$ pour tout $1 \leqslant \tau \leqslant t$, donc grâce à la propriété 3.6(vi), on en déduit avec le lemme 2.2, le lemme 2.3(i), la proposition 3.14, la propriéte 3.6, les majorations (3.3), (3.20) et les hypothèses (1.4), (1.5); $\log |f|_R \leqslant c_{35} C_0^{3/2} U_0$. Ainsi le lemme 3.5 de [H2] fournit; $\log|f|_{2r} \leqslant -c_{36}C_0^2U_0$. En remarquant que l'on a $|f(s)| \leqslant |f|_{2r}$ pour $0 \leqslant s < S$, on obtient l'énoncé dans le cas non périodique. Pour le cas périodique, on utilise les inégalités de Cauchy pour avoir

$$\begin{aligned}\log|D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{t}}F(s\mathbf{w})| &= \log|f^{(t_{d+1})}(s)| \\ &\leqslant c_{37}(T\log T + \log|f|_{2r}) \leqslant -c_{38}C_0^2U_0,\end{aligned}$$

en utilisant la propriété 3.6. On obtient l'énoncé. □

7. *Estimations arithmétiques*

Nous présentons l'inégalité de la taille.

LEMME 3.24. *Il existe un nombre réel $c_{39} > 0$ indépendant des paramètres D, B, $V_1, \ldots, V_k$, E ayant la propriété suivante. Soit $P \in K[\mapsto]$ de degrés $\leqslant (L_{-1}, L_0, \ldots, L_k)$ et $h(P) \leqslant \log H$, $H \geqslant e$. On prend $\mathbf{e}, \mathbf{u}, W$ comme précédemment. Soient T, S des entiers > 0, $t_1, \ldots, t_{d+1}$, s des entiers $\geqslant 0$ avec $|\mathbf{t}| = t_1 + \cdots + t_{d+1} = T$, $0 \leqslant s < S$. On suppose que la fonction $F = P(\Phi)$ a un zéro en $s\mathbf{u}$ d'ordre exact T le long de W avec $D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}}F(s\mathbf{u}) \neq 0$. Alors on a*

$$\begin{aligned}&\log|D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}}F(s\mathbf{u})| \\ &\quad \geqslant -c_{39}D\Bigg\{\log H + L_{-1}\log B + L_{-1}\log L_{-1}^{\flat} + \sum_{j=-1}^{0} L_j \log S \\ &\qquad + T\log T + T\log \operatorname{Max}(L_0^{\flat}, L_1^{\flat}, \ldots, L_k^{\flat}) + \sum_{i=1}^{k} L_i S^{\rho_i} \log V_i\Bigg\}.\end{aligned}$$

DEMONSTRATION DU LEMME 3.24. On obtient l'énoncé par le même argument que celui du lemme 4.31 de [H2]. □

PROPOSITION 3.25. *La fonction F que l'on a construite vérifie*

$$D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}}F(s\mathbf{u}) = 0 \quad pour \quad (\mathbf{t}, s) \in \mathbb{Z}^{d+2},\ |\mathbf{t}| < T,\ 0 \leqslant s < S.$$

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.25. On change la base de W avec les propositions 3.14 et 3.23 pour obtenir

$$\log|D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}}F(s\mathbf{u})| < c_{40}C_0^2U_0 \quad \text{pour} \quad |\mathbf{t}| < T,\ 0 \leqslant s < S.$$

On utilise le lemme 3.24 avec (3.20) et la propriété 3.6 jointe à l'inégalité $U \leqslant U_0$ dans (3.3) pour avoir le résultat suivant: si $D_e^{\mathbf{t}}F(s\mathbf{u}) \neq 0$ alors $\log|D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}}F(s\mathbf{u})| > -c_{41}C_0^{3/2}U_0$. On en déduit $C_0 < c_{42}$ d'où une contradiction. Ceci démontre la proposition 3.25. □

8. *Lemme de zéros et conclusion*

Le lemme suivant est une conséquence d'un théorème de [P].

LEMME 3.26. *S'il existe un polynôme de $\mathbb{C}[\mathbb{P}]$ de degrés $\leqslant L_{-1}^{\flat}, L_0^{\flat}, \ldots, L_k^{\flat}$ s'annulant sur $\Gamma(S)$ avec multiplicité $\geqslant T$ le long de W mais ne s'annulant pas identiquement sur G, alors il existe un sous-groupe algébrique connexe G' de G, vérifiant $T_{G'} + W \neq T_G$ tel que l'on ait, en notant $\sigma = \dim W/W \cap T_{G'}$:*

$$T^{\sigma} \operatorname{card}((\Gamma(S/(d+t+1)) + G')/G') \cdot H(G'; L_{-1}^{\flat}, \ldots, L_k^{\flat})$$
$$\leqslant c_{43} H(G; L_{-1}^{\flat}, \ldots, L_k^{\flat}).$$

DEMONSTRATION DU LEMME 3.26. Par le théorème 2.1 de [P], il nous reste à montrer $T_{G'} + W \neq T_G$. Supposons $T_{G'} + W = T_G$. Nous avons alors $\sigma = r \geqslant 1$ en posant $r = \dim(G/G')$, ainsi ce théorème montre

$$((T-1)/(d+t+1))^r \operatorname{card}((\Gamma(S/(d+t+1)) + G')/G')$$
$$\cdot H(G'; L_{-1}^{\flat}, \ldots, L_k^{\flat}) \leqslant c_{44} H(G; L_{-1}^{\flat}, \ldots, L_k^{\flat}).$$

Par ailleurs, la propriété 3.6 avec (3.3) entraîne

$$\frac{H(G; L_{-1}^{\flat}, \ldots, L_k^{\flat})}{H(G'; L_{-1}^{\flat}, \ldots, L_k^{\flat})} \leqslant c_{45} \left(\operatorname{Max} \left(1, \frac{U_0}{S \log E} \right) \right)^r.$$

Comme $\operatorname{card}((\Gamma(S/(d+t+1)) + G')/G') \geqslant 1$, on obtient

$$T - 1 \leqslant c_{46} \operatorname{Max}(1, U_0/(S \log E)),$$

d'où une contradiction avec la propriété 3.6(vi) ou (ix), en rappelant la définition de C_0. □

LEMME 3.27. *Pour tout $-1 \leqslant i \leqslant k$, on a $L_i \geqslant 1$ c'est-à-dire $L_i^{\flat} = L_i$.*

DEMONSTRATION DU LEMME 3.27. D'après la proposition 3.25, il existe un polynôme P non nul dans $K[\mathbb{P}]$ de degrés $\leqslant (L_{-1}, \ldots, L_k)$ tel que la fonction $F = P(\Phi)$ vérifie

$$D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}} F(s\mathbf{u}) = 0 \quad \text{pour} \quad (\mathbf{t}, s) \in \mathbb{Z}^{d+2}, |\mathbf{t}| < T \quad \text{et} \quad 0 \leqslant s < S. \tag{3.28}$$

D'abord, on va montrer $L_{-1} \geqslant 1$. Par définition de nos formes linéaires dans le lemme 2.3, on a $T_{G_{-1}} \cap W = \{0\}$. Ainsi on obtient $T_{G_{-1}} + W = T_G$ car $\dim T_{G_{-1}} = t$ et $\dim W = d+1$. Par conséquent, on peut compléter la base $\mathbf{e}$ de W

en une base

$$\mathbf{e}' = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{d+1}, \mathbf{e}_{d+2}, \ldots, \mathbf{e}_{d+t+1})$$

de T_G par des éléments indépendants $\mathbf{e}_{d+2}, \ldots, \mathbf{e}_{d+t+1} \in T_{G_{-1}}$. Supposons $L_{-1} = 0$. Alors le polynôme P ne dépend pas des variables associées à G_{-1}. Ainsi la fonction F s'annule à l'ordre T en $s\mathbf{u}$ ($0 \leqslant s < S$) le long de T_G d'après (3.28), en considérant la base $\mathbf{e}'$ au lieu de $\mathbf{e}$. Le théorème 2.1 de [P] fournit donc qu'un sous-groupe algébrique connexe G'' de G vérifie que

$$T^r \operatorname{card}((\Gamma(S/(d+t+1)) + G'')/G'')H(G''; L_{-1}^\flat, \ldots, L_k^\flat)$$
$$\leqslant c_{47} H(G; L_{-1}^\flat, \ldots, L_k^\flat) \quad \text{avec} \quad r = \dim(G/G'').$$

D'autre part, la propriété 3.6(v) avec (3.3) montre

$$\frac{H(G; L_{-1}^\flat, \ldots, L_k^\flat)}{H(G''; L_{-1}^\flat, \ldots, L_k^\flat)} \leqslant c_{48}\left(\operatorname{Max}\left(1, \frac{U_0}{S \log E}\right)\right)^r.$$

De l'inégalité $\operatorname{card}((\Gamma(S/(d+t+1)) + G'')/G'') \geqslant 1$, on déduit

$$T - 1 \leqslant c_{49} \operatorname{Max}\left(1, \frac{U_0}{S \log E}\right)$$

qui contredit la propriété 3.6(vi) ou (ix), d'où $L_{-1} \geqslant 1$.

La propriété 3.6(x) entraîne $L_0 \geqslant 1$.

Ensuite, nous allons montrer $L_j \geqslant 1$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant k$. Supposons $L_{m+1} = \cdots = L_k = 0$ et $L_1 \geqslant 1, \ldots, L_m \geqslant 1$ ($0 \leqslant m \leqslant k-1$). Considérons le groupe $G[m] = G_{-1} \times \cdots \times G_m$ et notons $d[m] = \dim G[m]$, $W[m]$ (resp. $\Gamma[m]$) la projection de W (resp. Γ) sur $T_{G[m]}$. Comme le polynôme P ne dépend pas des variables associées à $G_{m+1}, \ldots, G_k$, la fonction F s'annule à l'ordre T en $s\mathbf{u}$ ($0 \leqslant s < S$) le long de $W[m]$ par (3.28). De nouveau le théorème 2.1 de [P] entraîne qu'il existe un sous-groupe algébrique connexe $G'[m]$ de $G[m]$, distinct de $G[m]$ tel que

$$T^q \operatorname{card}((\Gamma[m](S/(d[m]+1)) + G'[m])/G'[m])H(G'[m]; L_{-1}^\flat, \ldots, L_m^\flat)$$
$$\leqslant c_{50} H(G[m]; L_{-1}^\flat, \ldots, L_m^\flat) \quad \text{où} \quad q = \dim W[m]/W[m] \cap T_{G'[m]}.$$

La propriété 3.6(v) et (3.3) entrainent comme en haut;

$$T^q \leqslant c_{51}\left(\operatorname{Max}\left(1, \frac{U_0}{S \log E}\right)\right)^{\dim(G[m]/G'[m])}$$

Ainsi la propriété 3.6(vi) ou (ix) implique $q < \dim(G[m]/G'[m])$, d'où $T_{G'[m]} + W[m] \neq T_{G[m]}$. Posons

$$G' = G'[m] \times G_{m+1} \times \cdots \times G_k;$$

alors on a $T_{G'} + W \neq T_G$. De plus comme $W \simeq W[m] \oplus (W \cap V)$ en notant $V = T_{G_{m+1}} \oplus \cdots \oplus T_{G_k}$, on a

$$(T_{G'} + W)/T_{G'} \simeq (T_{G'[m]} + W[m])/T_{G'[m]}.$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned} &T^{\sigma} \operatorname{card}((\Gamma(S/(d+t+1)) + G')/G')H(G'; L^{\flat}_{-1}, \ldots, L^{\flat}_k) \\ &\leqslant c_{52} H(G; L^{\flat}_{-1}, \ldots, L^{\flat}_k) \quad \text{où} \quad \sigma = \dim W/W \cap T_{G'}, \end{aligned} \tag{3.29}$$

d'après l'égalité $\sigma = q$ et grâce à la définition du symbole $H(\cdots)$ (cf. p. 362 de [P]). Remarquons que le nombre

$$\frac{H(G; L^{\flat}_{-1}, \ldots, L^{\flat}_k)}{H(G'; L^{\flat}_{-1}, \ldots, L^{\flat}_k)}$$

ne dépend pas de $L^{\flat}_{m+1}, \ldots, L^{\flat}_k$. Alors on a

$$\frac{H(G; L^{\flat}_{-1}, \ldots, L^{\flat}_k)}{H(G'; L^{\flat}_{-1}, \ldots, L^{\flat}_k)} = c_{53} \frac{H(G; L^{\flat}_{-1}, \ldots, L^{\flat}_m, L^{\sharp}_{m+1}, \ldots, L^{\sharp}_k)}{H(G'; L^{\flat}_{-1}, \ldots, L^{\flat}_m, L^{\sharp}_{m+1}, \ldots, L^{\sharp}_k)}. \tag{3.30}$$

Pour $-1 \leqslant i \leqslant m$, nous avons $L^{\flat}_i \leqslant L^{\sharp}_i$ et cette inégalité jointe à la propriété 4.4 de [H2] implique

$$\frac{H(G; L^{\sharp}_{-1}, \ldots, L^{\sharp}_k)}{H(G'; L^{\sharp}_{-1}, \ldots, L^{\sharp}_k)} \geqslant c_{54} \frac{H(G; L^{\flat}_{-1}, \ldots, L^{\flat}_m, L^{\sharp}_{m+1}, \ldots, L^{\sharp}_k)}{H(G'; L^{\flat}_{-1}, \ldots, L^{\flat}_m, L^{\sharp}_{m+1}, \ldots, L^{\sharp}_k)} \tag{3.31}$$

En combinant les estimations (3.29), (3.30), nous obtenons une contradiction avec la propriété (3.4) jointe à l'inégalité (3.31). Par conséquent, on a $L_i \geqslant 1$ pour tout $-1 \leqslant i \leqslant k$. □

Nous allons compléter la démonstration du théorème 1.1. La proposition 3.25 permet de vérifier les hypothèses du lemme 3.26. Grâce au lemme 3.27, on a $L^{\flat}_i \leqslant L^{\sharp}_i$ $(-1 \leqslant i \leqslant k)$. La propriété 4.4 de [H2] avec $L^{\flat}_i \leqslant L^{\sharp}_i$ implique

$$\frac{H(G; L^{\sharp}_{-1}, \ldots, L^{\sharp}_k)}{H(G'; L^{\sharp}_{-1}, \ldots, L^{\sharp}_k)} \geqslant \frac{H(G; L^{\flat}_{-1}, \ldots, L^{\flat}_k)}{H(G'; L^{\flat}_{-1}, \ldots, L^{\flat}_k)}. \tag{3.32}$$

Le lemme 3.26 fournit

$$T^{\sigma}\ \mathrm{card}((\Gamma(S)+G')/G') \leqslant c_{55}\frac{H(G;\ L_{-1}^{\flat},\ldots,L_k^{\flat})}{H(G';\ L_{-1}^{\flat},\ldots,L_k^{\flat})} \tag{3.33}$$

pour un sous-groupe algébrique connexe G' de G, vérifiant $T_{G'}+W \neq T_G$ alors on combine (3.32) et (3.33) pour avoir

$$T^{\sigma}\ \mathrm{card}((\Gamma(S)+G')/G') \leqslant c_{56}\frac{H(G;\ L_{-1}^{\sharp},\ldots,L_k^{\sharp})}{H(G';\ L_{-1}^{\sharp},\ldots,L_k^{\sharp})}. \tag{3.34}$$

D'autre part, d'après (3.4), on a

$$T^{\sigma}\ \mathrm{card}((\Gamma(S)+G')/G') \geqslant c_{57}C_0\,\frac{H(G;\ L_{-1}^{\sharp},\ldots,L_k^{\sharp})}{H(G';\ L_{-1}^{\sharp},\ldots,L_k^{\sharp})}$$

qui entraîne avec (3.34); $C_0 \leqslant c_{58}$, d'où une contradiction avec la définition de C_0. Ceci termine la démonstration du théorème 1.1.

4. Démonstration du théorème 1.7 et remarques

1. *Démonstration du théorème* 1.7

La démonstration de ce théorème est la même que celle du théorème 1.1 sauf le point suivant. Dans la démonstration de la proposition 3.2, on remplace les majorations

$$A(0) \leqslant \left\{\frac{(T^{\sharp}/U')^{d+1}\cdot S}{C_0(L_{-1}^{\sharp}/U)^{\delta_{-1}}\cdots(L_k^{\sharp}/U)^{\delta_k}}\right\}^{1/t} \leqslant U_0$$

par

$$A(0) \leqslant \left\{\frac{(T^{\sharp}/U')^{d+1}}{C_0(L_{-1}^{\sharp}/U)^{\delta_{-1}}\cdots(L_k^{\sharp}/U)^{\delta_k}}\right\}^{1/t} \leqslant U_0$$

car $\Gamma(S)=\{0\}$, ce qui donne la différence d'un facteur S, et donc avec le choix $D\log V_i = A_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, on raffine le nombre U_0.

2. *Remarques pour les articles* [H2] *et* [P-W1]

D'abord, on corrige ici des erreurs de [H2].

(a) Page 404, ligne $6 \sim 7$, il faut enlever "grâce à l'hypothèse $D \log V_i \geqslant 1$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ dans (2.4)", et on doit écrire pour l'estimation de la ligne 8:

$$\log|\mathscr{L}(\mathbf{v})| > -C_2 D^{d+d_2+2}(\log B + \log D)(\log\log B + \log D)^{d_2+1}.$$

(b) Page 417, ligne—10, il faut enlever "par définition du cas périodique" dans la démonstration de la propriété 4.14.

Ensuite, on ajoute des corrections de [P-W1].

(c) La remarque 3.16 du Section 3 montre qu'il faut avoir $U_0 \geqslant D^2 \log(BV)$. Ainsi il faut prendre le maximum de $C \cdot D^2 \log(BV)$ et des estimations énoncées dans tous les théorèmes de [P-W1].

(d) En notant β un des coefficients des formes linéaires, on doit mettre $|\beta| \leqslant B^D$ au lieu de $|\beta| \leqslant BD$ dan les plusieurs endroits dans la démonstration de [P-W1], pour la raison qui est expliquée au Section 6(2) de [H2].

(e) Dans la définition de $\tilde{\delta}(\mathbf{w}, T_{\tilde{G}})$ de la page 328 de [P-W1], il faut écrire $\mathbf{u} \in W \cap T_{\tilde{G}}$ au lieu de $\mathbf{u} \in T_{\tilde{G}}$. D'ailleurs la norme $|\cdot|$ n'est définie que sur W.

Remerciements

L'auteur voudrait remercier Professeur M. Waldschmidt et Professeur P. Philippon pour les remarques diverses.

Références

[B-P] Bertrand, D., Philippon, P.: Sous-groupes algébriques de groupes algébriques commutatifs, *Ill. J. Math.* 32 (1988), 263–280.

[B] Bijlsma, A.: Simultaneous approximation of the coordinates of algebraic points of abelian functions, *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.* 44(3) (1982), 265–275.

[D] David, S.: Théorie de Baker pour des familles de groupes algébriques commutatifs, *Thèse, Univ. Paris VI*, 1989, pp. 32–63.

[F] Fel'dman, N. I.: Simultaneous approximation of the periods of an elliptic function by algebraic numbers (en anglais), *Amer. Math. Soc. Transl.*, Ser. 2 59 (1966), 271–284.

[H1] Hirata-Kohno, N.: Formes linéaires d'intégrales elliptiques, *Sém. de Théorie des Nombres, Paris 1988/89,* Progr. Math., Birkhäuser, Boston, 1990, pp. 1–23.

[H2] Hirata-Kohno, N.: Formes linéaires de logarithmes de points algébriques sur les groupes algébriques, *Invent. Math.* 104 (1991), 401–433.

[H3] Hirata-Kohno, N.: Nouvelles mesures de transcendance liées aux groupes algébriques commutatifs, dans: *Approximations Diophantiennes et Nombres Transcendants*, Luminy 1990, éd. P. Philippon, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1992, pp. 165–172.

[H4] Hirata-Kohno, N.: Les points entiers sur une courbe algébrique ayant la jacobienne simple preprint.

[L] Loxton, J. H.: Some problems involving powers of integers, *Acta Arithm* 46 (1986), 113–123.

[M-W] Mignotte, M., Waldschmidt, M.: Linear forms in two logarithms and Schneider's method, *Math. Ann.* 231 (1978), 241–267.

[P] Philippon, P.: Lemme de zéros dans les groupes algébriques commutatifs, *Bull. Soc. Math. Fr.* 114 (1986), 355–383, Errata et addenda, *ibidem* 115 (1987), 393–395.

[P-W1] Philippon, P., Waldschmidt, M.: Formes linéaires de logarithmes simultanées sur les groupes algébriques commutatifs, *Sém. de Théorie des Nombres, Paris 1986/87,* Progr. Math., Birkhäuser, Boston, 1988, pp. 313–347.

[P-W2] Philippon, P., Waldschmidt, M.: Formes linéaires de logarithmes sur les groupes algébriques commutatifs, *Ill. J. Math.* 32 (1988), 281–314.

[S] Serre, J.-P.: Quelques propriétés des groupes algébriques commutatifs, dans: *Nombres transcendants et groupes algébriques*, *Astérisque* 69/70 (1979), 191–202.

[W] Waldschmidt, M.: Nombres transcendants et groupes algébriques, *Astérisque* 69/70 (1979).

[Wü] Wüstholz, G.: Algebraische Punkte auf analytischen Untergruppen algebraischer Gruppen, *Annals of Math.* 129 (1989), 501–517.

[Y] Yu, Kunrui: Linear forms in elliptic logarithms, *J. Number Theory* 20 (1985), 1–69.