COMPOSITIO MATHEMATICA

AHMAD EL SOUFI

Applications harmoniques, immersions minimales et transformations conformes de la sphère

Compositio Mathematica, tome 85, nº 3 (1993), p. 281-298

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1993__85_3_281_0>

Compositio Mathematica **85**: 281–298, 1993.

Applications harmoniques, immersions minimales et transformations conformes de la sphère

AHMAD EL SOUFI
Université de Tours, Département de Mathématiques, Parc de Grandmont, 37200 Tours, France

Received 9 January 1991; accepted 21 January 1992

I. Introduction

Dans cet article, nous nous intéressons aux applications d'une variété compacte M dans la sphère standard $\mathbb{S}^n$ de dimension n qui sont des points critiques de la fonctionnelle volume, i.e. des immersions minimales, ou de la fonctionnelle énergie associée à une métrique riemannienne g sur M, i.e. des applications harmoniques.

L'étude des variations de ces fonctionnelles dans la direction des champs conformes de $\mathbb{S}^n$ a été à la base de plusieurs résultats importants à commencer par ceux de Simons [12] concernant les immersions minimales, ou ceux de Smith [13] concernant les applications harmoniques.

Les résultats que contient le présent article reposent dans leur majorité sur cette même idée. Nous avons regroupé au paragraphe 2 ceux qui portent sur l'indice de Morse. Cet invariant, noté $\mathrm{Ind}_V(\phi)$ pour ϕ minimale et $\mathrm{Ind}_E(\phi)$ pour ϕ harmonique, représente la dimension des espaces maximaux de variations pour lesquelles ϕ correspond à un maximum local strict de la fonctionnelle concernée.

Dans [12], Simons montre que toute immersion minimale ϕ d'une variété compacte M de dimension m dans $\mathbb{S}^n$ vérifie: $\mathrm{Ind}_V(\phi) \geqslant n-m$ et que l'égalité $\mathrm{Ind}_V(\phi)=n-m$ n'a lieu que pour les plongements totalement géodésiques de $\mathbb{S}^m$ dans $\mathbb{S}^n$. Les résultats que nous obtenons dans la Section 2.A révèlent l'existence d'une seconde "zone interdite" pour l'indice des immersions minimales sphériques (la première zone interdite étant $[0, n-m[$ d'après le résultat de Simons). En effet, nous montrons (théorème 2.1) qu'il n'existe aucune immersion minimale ϕ d'une variété compacte M de dimension m dans $\mathbb{S}^n$ vérifiant: $n-m < \mathrm{Ind}_V(\phi) < n+1$.

Nous ne connaissons aucun exemple d'immersion minimale ϕ vérifiant:

Ce travail a été partiellement soutenu par le contrat CEE GADGET no. SC1 0105-C.

$\mathrm{Ind}_V(\phi)=n+1$. Cependant, dans le cas des immersions minimales de codimension 1, nous montrons (théorème 2.2) que la seconde zone interdite pour $\mathrm{Ind}_V(\phi)$ est exactement $]1,n+2[$ et que $n+2$ est exactement l'indice de l'injection canonique de $\mathbb{S}^p(\sqrt{p/(n-1)})\times\mathbb{S}^q(\sqrt{q/(n-1)})$ dans $\mathbb{S}^n$, où $p+q=n-1$ et où $\mathbb{S}^p(r)$ est la sphère euclidienne de dimension p et de rayon r. Dans le cas particulier de surfaces minimales de $\mathbb{S}^3$, ce résultat a été obtenu de manière indépendante par Urbano [14].

Les premiers résultats portant sur l'indice des applications harmoniques dans les sphères ont été obtenus par Smith [13] où il calcule en particulier l'indice de l'identité de $\mathbb{S}^n$. Ce calcul a été ensuite étendu par Sealey [11] aux injections canoniques $j_{m,n}$ de $\mathbb{S}^m$ dans $\mathbb{S}^n$. La formule qu'ils obtiennent pour ces applications est la suivante:

$$\mathrm{Ind}_E(j_{m,n}) = \begin{cases} n-2 & \text{si} \quad m=2 \\ n+1 & \text{si} \quad m\geqslant 3. \end{cases}$$

Par ailleurs, Leung avait montré dans [8] que toute application harmonique non constante ϕ d'une variété compacte (M,g) dans une sphère $\mathbb{S}^n$ de dimension $n\geqslant 3$ vérifie: $\mathrm{Ind}_E(\phi)\geqslant 1$.

Notre contribution dans ce domaine consiste en des résultats qui améliorent celui de Leung et qui "généralisent faiblement" celui de Smith-Sealey à d'autres applications harmoniques. En effet, nous montrons (théorème 2.4) que toute application harmonique non constante ϕ d'une variété compacte (M,g) dans $\mathbb{S}^n$ vérifie: $\mathrm{Ind}_E(\phi)\geqslant n-2$ et que l'égalité $\mathrm{Ind}_E(\phi)=n-2$ entraîne que $\phi(M)$ est contenu dans une 2-sphère totalement géodésique de $\mathbb{S}^n$. Ensuite, nous montrons qu'on a $\mathrm{Ind}_E(\phi)\geqslant n+1$ dans chacun des cas suivants (cf. 2.5 et 2.7):

(i) Le tenseur d'énergie-impulsion $S_g(\phi)$ de ϕ est positif en tout point et défini positif en au moins un point de M,
(ii) $S_g(\phi)$ est positif en tout point de M, ϕ est une immersion et $\phi(M)$ ne coïncide pas avec une sphère totalement géodésique de $\mathbb{S}^n$,
(iii) (M,g) est homogène et ϕ est une application harmonique standard de (M,g) dans $\mathbb{S}^n$ avec $n\geqslant 3$.

Notons que la classe des applications harmoniques à tenseur d'énergie-impulsion positif contient celle des immersions minimales isométriques, ainsi que celle des morphismes harmoniques (cf. 2.6).

Pour obtenir les résultats précédents sur $\mathrm{Ind}_E(\phi)$ nous montrons en fait (au moyen de la variation seconde) que, sous chacune des hypothèses (i), (ii) ou (iii), on a $E_g(\phi)>E_g(\gamma\circ\phi)$ pour les difféomorphismes conformes non isométriques γ de $\mathbb{S}^n$ qui sont proches de l'identité, où $E_g(\phi)$ désigne l'énergie de ϕ pour la métrique g sur M (cf. 2.6). Le but principal du paragraphe 3 est de savoir sous quelles conditions l'inégalité $E_g(\phi)\geqslant E_g(\gamma\circ\phi)$ est-elle valable pour *tout* difféomorphisme conforme γ de $\mathbb{S}^n$. Une réponse à cette question est fournie par le théorème 3.1 dans lequel nous montrons que la propriété en question est vérifiée par toutes les applications harmoniques à tenseur d'énergie-impulsion positif de (M, g) dans $\mathbb{S}^n$.

Ce dernier résultat nous a permis d'obtenir un résultat du type "Liouville" pour les applications harmoniques à tenseur d'énergie-impulsion positif. En effet, nous montrons (Proposition 3.3) que, si l'énergie $E_g(\phi)$ d'une telle application ϕ est strictement inférieure à $\lambda_1(\Delta_g)V(M, g)/2$, alors ϕ est constante. Ici, $\lambda_1(\Delta_g)$ et $V(M, g)$ désignent respectivement la plus petite valeur propre non nulle du Laplacien et le volume de (M, g).

Enfin, dans la dernière partie de cet article, nous introduisons la notion d'application λ_1-harmonique. Cette notion englobe une classe assez large d'applications harmoniques (cf. 4.2). Nous donnons, en utilisant les résultats précédents, une série de propriétés de ces applications. En particulier, nous montrons (corollaire 4.6) que, parmi toutes les applications harmoniques à tenseur d'énergie-impulsion positif d'une variété compacte (M, g) dans les sphères, les applications λ_1-harmoniques sont (quand elles existent) celles qui possèdent l'énergie la plus basse.

II. Résultats sur l'indice

Dans toute la suite, on désignera par M une variété différentiable compacte de dimension $m \geqslant 2$ et par $\mathbb{S}^n$ la sphère unité de dimension $n \geqslant 2$. On notera $\langle\, ,\rangle$ le produit scalaire Euclidien de $\mathbb{R}^{n+1}$ et can la métrique riemannienne induite sur $\mathbb{S}^n$ par ce produit. Pour toute application différentiable ϕ de M dans $\mathbb{S}^n$ on désigne par $\Gamma(\phi)$ l'espace des champs de vecteurs le long de ϕ, i.e. les sections du fibré image réciproque $\phi^{-1}T\mathbb{S}^n$ induit sur M par ϕ à partir du fibré tangent de $\mathbb{S}^n$. Dans la suite, nous nous intéresserons essentiellement au sous-espace $\mathscr{E}(\phi)$ de $\Gamma(\phi)$ défini comme suit: pour tout $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ on note $\bar{a}$ le champ de vecteurs sur $\mathbb{S}^n$ obtenu en projetant orthogonalement a sur $T\mathbb{S}^n$(i.e. $\bar{a}(y) = a - \langle a, y\rangle y$ pour tout $y \in \mathbb{S}^n$) et on pose:

$$\mathscr{E}(\phi) = \{\bar{a} \circ \phi;\ a \in \mathbb{R}^{n+1}\}.$$

Il est clair que si ϕ est non constante alors $\dim \mathscr{E}(\phi) = n + 1$.

A. Cas des immersions minimales

Le volume, noté $V(\phi)$, d'une immersion ϕ de M dans $\mathbb{S}^n$ est défini comme étant le volume riemannien de la variété M pour la métrique ϕ^* can induite sur M par ϕ. Pour tout champ $v \in \Gamma(\phi)$ on pose

$$(\delta V)_\phi(v) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(\phi_t^v)|_{t=0}$$

où $(\phi_t^v)_t$ est une famille différentiable d'immersions telle que

$$\phi_0^v = \phi \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_t^v(x)|_{t=0} = v(x)$$

pour tout $x \in M$. L'immersion ϕ sera dite *minimale* si on a $(\delta V)_\phi(v) = 0$ pour tout $v \in \Gamma(\phi)$.

A une immersion minimale ϕ de M dans $\mathbb{S}^n$ on associe la forme quadratique suivante définie sur $\Gamma(\phi)$:

$$Q_\phi(v) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} V(\phi_t^v)|_{t=0}.$$

Or, il est bien connu que la variation seconde $Q_\phi(v)$ du volume dans la direction d'un champ v ne dépend en fait que de la projection v^N de v sur le sous-espace $\Gamma^N(\phi) = \{v \in \Gamma(\phi);\ v(x) \perp \mathrm{d}\phi(T_xM)\ \forall x \in M\}$ parallèlement à $\Gamma^T(\phi) = \{v \in \Gamma(\phi);\ v(x) \in \mathrm{d}\phi(T_xM)\ \forall x \in M\}$. Il est donc naturel de ne considérer que la restriction de Q_ϕ au sous-espace $\Gamma^N(\phi)$. L'*indice* de ϕ est alors défini comme étant la dimension des sous-espaces maximaux de $\Gamma^N(\phi)$ sur lesquels la forme Q_ϕ est définie négative, i.e.

$\mathrm{Ind}_V(\phi) = \mathrm{Sup}\{\dim F;\ F \subset \Gamma^N(\phi)$ t.q. Q_ϕ soit définie négative sur $F\}$.

Dans [12], Simons montre que l'indice du plongement canonique de $\mathbb{S}^m$ dans $\mathbb{S}^n$ est égal à $n-m$ et que ce plongement est, à un difféomorphisme de $\mathbb{S}^m$ ou à une isométrie de $\mathbb{S}^n$ près, l'unique immersion minimale d'indice inférieur ou égal à $n-m$ d'une variété compacte de dimension m dans $\mathbb{S}^n$. La preuve donnée par Simons de ce résultat utilise les champs conformes de $\mathbb{S}^n$. Nous nous basons sur cette même méthode pour obtenir le

2.1. THEOREME. *Soit ϕ une immersion minimale d'une variété compacte M de dimension m dans $\mathbb{S}^n$. Deux cas seulement sont possibles*:

(i) $\mathrm{Ind}_V(\phi) = n-m$ *et donc $\phi(M)$ est une sphère totalement géodésique de $\mathbb{S}^n$*,
(ii) $\mathrm{Ind}_V(\phi) \geqslant n+1$.

Dans le cas des immersions minimales de codimension 1 nous obtenons le résultat optimal suivant:

2.2. THEOREME. *Soit ϕ une immersion minimale d'une variété compacte orientable M comme hypersurface de $\mathbb{S}^n$ (i.e. $m = n-1$). Deux cas seulement sont possibles*:

(i) $\mathrm{Ind}_V(\phi) = 1$ *et donc $\phi(M)$ est une hypersphère totalement géodésique de $\mathbb{S}^n$*,
(ii) $\mathrm{Ind}_V(\phi) \geqslant n+2$.

De plus, $n+2$ *est exactement l'indice du plongement standard de* $\mathbb{S}^p(\sqrt{p/(p+q)})\times\mathbb{S}^q(\sqrt{q/(p+q)})$ *dans* $\mathbb{S}^n$, *où* $p+q=n-1$.

Preuve de 2.1. Posons $\mathscr{E}^N(\phi)=\{A^N; A\in\mathscr{E}(\phi)\}\subset\Gamma^N(\phi)$, où $\mathscr{E}(\phi)$ est le sous-espace de $\Gamma(\phi)$ défini ci-dessus. Le lemme 5.1.4 de [12] montre que, pour toute immersion minimale ϕ dans $\mathbb{S}^n$, la forme Q_ϕ est définie négative sur $\mathscr{E}^N(\phi)$ et donc qu'on a:

$$\mathrm{Ind}_V(\phi)\geqslant\dim\mathscr{E}^N(\phi)=\dim\mathscr{E}(\phi)-\dim\mathscr{E}^T(\phi)$$

où $\mathscr{E}^T(\phi)=\{A\in\mathscr{E}(\phi); A^N=0\}$. Or, dans la preuve du théorème 1.1 de [5] nous montrons que, s'il existe un champ non nul $A\in\mathscr{E}(\phi)$ tel qu'on ait $A^N(x)=0$ pour tout $x\in M$, alors M est difféomorphe à $\mathbb{S}^m$ et $\phi(M)$ est une sphère équatoriale de $\mathbb{S}^n$. Par suite, hormis le cas totalement géodésique on a $\mathscr{E}^T(\phi)=\{0\}$ et donc $\dim\mathscr{E}^N(\phi)=\dim\mathscr{E}(\phi)=n+1$. □

2.3. REMARQUE. Nous venons de montrer en fait que, si ϕ est une immersion minimale non totalement géodésique de M dans $\mathbb{S}^n$, alors la forme Q_ϕ est définie négative sur $\mathscr{E}(\phi)$. Autrement dit, si pour tout $a\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$, on note $(\gamma_t^a)_t$ le flot du champ $\bar{a}$ sur $\mathbb{S}^n$, alors on a $\mathrm{d}^2/(\mathrm{d}t^2)V(\gamma_t^a\circ\phi)<0$ et la fonction $t\to V(\gamma_t^a\circ\phi)$ admet un maximum local en $t=0$. Or, le groupe noté $G(n)$ des difféomorphismes conformes de $\mathbb{S}^n$ s'écrit (cf. [5]): $G(n)=\{r\gamma_t^a; r\in 0(n+1), t\geqslant 0 \text{ et } a\in\mathbb{R}^{n+1}\}$. Par conséquent, le résultat du théorème 2.1 peut s'interpréter aussi de la manière suivante: "Pour toute immersion minimale non totalement géodésique ϕ de M dans $\mathbb{S}^n$, la fonction qui à tout $[\gamma]\in G(n)/0(n+1)$ associe $V(\gamma\circ\phi)$ admet un maximum local (strict) en l'identité". Notons que dans [5], théorème 1.1, nous avions donné une version globale de ce résultat. □

Preuve de 2.2. Comme M est orientable et ϕ de codimension 1, le fibré normal de ϕ est trivial. Soit $v\in\Gamma^N(\phi)$ un champ normal unitaire. On a alors: $\Gamma^N(\phi)=\{fv; f\in C^\infty(M)\}$ et la forme Q_ϕ est donnée dans ce cas par (cf. [12]):

$$Q_\phi(fv)=\int_M(f\,\Delta_g f-(m+|\sigma(\phi)|^2)f^2)\,\mathrm{d}v_g$$

où $g=\phi^*\,\mathrm{can}$, Δ_g le laplacien de (M,g) et où $|\sigma(\phi)|$ est la norme de la seconde forme fondamentale de ϕ.

On note $(\lambda_k(\Delta_g))_{k\geqslant 0}$ la suite strictement croissante de valeurs propres de Δ_g et $(F_k(\Delta_g))_{k\geqslant 0}$ la suite des espaces propres correspondants. Soit F la somme directe des espaces propres associés aux valeurs propres inférieures ou égales à m (i.e. $F=\bigoplus_{\lambda_k\leqslant m}F_k(\Delta_g)$). Il est alors facile de voir qu'on a pour tout $f\in F$:

$$\int_M f\,\Delta_g f\,\mathrm{d}v_g\leqslant m\int_M f^2\,\mathrm{d}v_g$$

où l'égalité a lieu si et seulement si f est une fonction propre de Δ_g pour la valeur propre m. On en déduit que, pour tout $f \in F$, on a:

$$Q_\phi(fv) \leqslant -\int_M |\sigma(\phi)|^2 f^2 \, \mathrm{d}v_g \leqslant 0$$

et que l'égalité $Q_\phi(fv) = 0$ a lieu si et seulement si $\Delta_g f = mf$ et si f est nul en tout point de l'ouvert $W = \{x \in M; |\sigma(\phi)(x)| > 0\}$. Or, il est bien connu qu'une fonction propre de Δ_g ne peut pas s'annuler en tout point d'un ouvert non vide de M. Par suite, si $\phi(M)$ n'est pas une sphère totalement géodésique (i.e. $W \neq \emptyset$), alors la forme Q_ϕ est définie négative sur l'espace $\mathbf{F} = \{fv; f \in F\} \subset \Gamma^N(\phi)$ et on a $\mathrm{Ind}_V(\phi) \geqslant \dim \mathbf{F} = \dim F$.

D'autre part, il est bien connu (théorème de Takahashi) que la minimalité de ϕ équivaut à dire que les $n+1$ composantes canoniques $\phi_1, \ldots, \phi_{n+1}$ de ϕ sont des fonctions propres de Δ_g pour la valeur propre m. L'espace F contient donc en particulier les $n+2$ fonctions $1, \phi_1, \ldots, \phi_{n+1}$. De plus, si $\phi(M)$ n'est pas une sphère totalement géodésique, alors ces fonctions sont linéairement indépendantes et on a donc $\dim F \geqslant n+2$. En conclusion, on a bien $\mathrm{Ind}_V(\phi) \geqslant n+2$ dès que ϕ n'est pas totalement géodésique.

Considérons maintenant le cas $M = \mathbb{S}^p(\sqrt{p/(p+q)}) \times \mathbb{S}^q(\sqrt{q/(p+q)}) \subset \mathbb{S}^n$ où $p+q = n-1$. L'injection canonique j de M dans $\mathbb{S}^n$ est une immersion minimale qui vérifie $|\sigma(j)|^2 = n-1$. L'indice de j est donc exactement égal à la somme des dimensions des espaces propres de Δ_g correspondants aux valeurs propres strictement inférieures à $2(n-1)$. Or, on a (cf. [2]) $\lambda_0(\Delta_g) = 0$ avec $\dim F_0(\Delta_g) = 1$, $\lambda_1(\Delta_g) = n-1$ avec $\dim F_1(\Delta_g) = n+1$ et $\lambda_2(\Delta_g) = 2(n-1)$. Par suite, on a bien $\mathrm{Ind}_V(j) = n+2$. □

B. Cas des applications harmoniques

Soit g une métrique riemannienne sur M. Pour toute application $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_{n+1})$ de M dans $\mathbb{S}^n$ on note $e_g(\phi) = \frac{1}{2}\Sigma_i |\mathrm{d}\phi_i|^2$ la *densité d'énergie* de ϕ pour les métriques g et can et on appelle *énergie* de ϕ la quantité

$$E_g(\phi) = \int_M e_g(\phi) \, \mathrm{d}v_g$$

où $\mathrm{d}v_g$ est l'élément de volume riemannien associé à g. Pour tout $v \in \Gamma(\phi)$ on pose

$$(\delta E_g)_\phi(v) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_g(\phi_t^v)|_{t=0}$$

où (ϕ_t^v) est une famille différentiable d'applications telle que

$$\phi_0^v = \phi \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \phi_t^v|_{t=0} = v.$$

L'application ϕ sera dite harmonique si on a $(\delta E_g)_\phi(v) = 0$ pour tout $v \in \Gamma(\phi)$.

A une application harmonique ϕ d'une variété riemannienne (M, g) dans $\mathbb{S}^n$ on associe la forme quadratique suivante définie sur $\Gamma(\phi)$:

$$H_\phi(v) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\, E_g(\phi_t^v)|_{t=0}$$

et on appelle *indice* de ϕ l'entier

$$\mathrm{Ind}_E(\phi) = \mathrm{Sup}\{\dim F;\ F \subset \Gamma(\phi) \text{ t.q. } H_\phi \text{ soit définie négative sur } F\}.$$

Dans [8], Leung montre que $\mathrm{Ind}_E(\phi)$ est supérieur ou égal à 1 pour toute application harmonique non constante ϕ de (M, g) dans $\mathbb{S}^n$ avec $n \geqslant 3$. Nous commençons par donner une version améliorée de ce résultat:

2.4. THEOREME. *Pour toute application harmonique non constante ϕ d'une variété riemannienne compacte (M, g) dans $\mathbb{S}^n$ on a*: $\mathrm{Ind}_E(\phi) \geqslant n-2$. *De plus, si $\phi(M)$ n'est pas contenue dans une 2-sphère totalement géodésique de $\mathbb{S}^n$, alors on a*: $\mathrm{Ind}_E(\phi) \geqslant n-1$.

Notons que l'indice de l'injection canonique de $\mathbb{S}^2$ dans $\mathbb{S}^n$ est exactement égal à $n-2$ (cf. [11]). Ceci montre l'optimalité en dimension $m = 2$ du théorème 2.4. Cependant, nous ne connaissons aucun exemple en dimension $m \geqslant 3$ pour lequel l'un ou l'autre des minorants donnés dans ce théorème soit atteint. Nous sommes donc amenés à mettre des hypothèses supplémentaires pour avoir un résultat optimal en toute dimension. Ces hypothèses porteront sur le tenseur d'énergie-impulsion de l'application ϕ. Ce tenseur, noté $S_g(\phi)$, a été introduit par Baird et Eells dans [1]; il est donné par la formule:

$$S_g(\phi) = e_g(\phi)g - \phi^* \,\mathrm{can}.$$

Pour tout $x \in M$ on pose

$$S_g^0(\phi)(x) = \mathrm{Inf}\{S_g(\phi)(X, X);\ X \in T_xM \text{ et } g(X, X) = 1\}$$

Le tenseur $S_g(\phi)$ sera dit *positif* (resp. *défini positif*) en x si on a $S_g^0(\phi)(x) \geqslant 0$ (resp. $S_g^0(\phi)(x) > 0$).

2.5. THEOREME. *Soit ϕ une application harmonique d'une variété riemannienne* *compacte* (M,g) *dans* $\mathbb{S}^n$. *Si l'une au moins des deux conditions suivantes est vérifiée*:

(i) $S_g(\phi)$ *est positif en tout point et est défini positif en au moins un point de* M,
(ii) $S_g(\phi)$ *est positif en tout point de* M, ϕ *est une immersion et* $\phi(M)$ *n'est pas une sphère totalement géodésique de* $\mathbb{S}^n$,
alors on a: $\mathrm{Ind}_E(\phi) \geqslant n+1$.

Notons que, pour tout $m \geqslant 3$ et tout $n \geqslant m$, l'injection canonique $j_{m,n}$ de $\mathbb{S}^m$ dans $\mathbb{S}^n$ vérifie:

$$S_g^0(j_{m,n}) = (m-2)/2 > 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Ind}_E(j_{m,n}) = n+1$$

(cf. [11]). Le résultat du théorème 2.5 est donc bien optimal.

2.6. REMARQUES. (1) Le théorème 2.5 concerne en particulier le cas où ϕ est

(i) une immersion minimale conforme (notons cependant que, si la dimension de M est supérieure ou égale à 3, alors toute immersion minimale conforme de (M,g) dans $\mathbb{S}^n$ est en fait homothétique, cf. [3]),
(ii) un morphisme harmonique (i.e. tel que, pour toute fonction harmonique f définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{S}^n$, la fonction $f \circ \phi$ est harmonique dans l'ouvert $\phi^{-1}(\Omega)$ de (M,g)).

En effet, chacune des propriétés (i) et (ii) entraîne que ϕ est harmonique à tenseur d'énergie-impulsion positif (même défini positif si M et $\mathbb{S}^n$ sont tous les deux de dimension supérieure ou égale à 3, cf. [3]).

(2) Pour prouver 2.5 nous montrerons en fait que, sous chacune des hypothèses (i) et (ii), la forme H_ϕ est définie négative sur $\mathscr{E}(\phi)$. Comme on l'a vu dans la remarque 2.3, ceci équivaut à dire que l'application qui à $[\gamma] \in G(n)/0(n+1)$ associe $E_g(\gamma \circ \phi)$ admet un maximum local strict en l'identité. Une version globale de ce résultat sera donnée au paragraphe 3. □

Dans le cas où (M,g) est un espace homogène riemannien compact, une méthode classique permet de construire une famille d'applications harmoniques de (M,g) dans des sphères. Ces applications, dites "standards", sont définies comme suit: Soit $\lambda > 0$ une valeur propre du Laplacien Δ_g de (M,g) et soit $\{f_1, \ldots, f_l\}$ une base orthonormée (pour la norme de $L^2(M,g)$) de l'espace propre F associé à λ. Un argument classique permet alors de voir que l'application $\phi = \sqrt{V(M,g)/l}\,(f_1, \ldots, f_l)$, où $V(M,g)$ est le volume riemannien de (M,g), est en fait une application harmonique de (M,g) dans $\mathbb{S}^{l-1}$ ayant une densité d'énergie constante égale à $\lambda/2$. Pour ce type d'applications on a la

2.7. PROPOSITION. *Soit* (M,g) *un espace homogène riemannien compact. Si* ϕ *est une application harmonique standard de* (M,g) *dans la sphère* $\mathbb{S}^n$ *de dimension* $n \geqslant 3$, *alors on a*: $\mathrm{Ind}_E(\phi) \geqslant n+1$.

Preuves. Soit ϕ une application harmonique non constante de (M, g) dans $\mathbb{S}^n$. Pour tout $A = \bar{a} \circ \phi \in \mathscr{E}(\phi)$ on a:

$$H_\phi(A) = 2 \int_M (|\mathrm{d}\phi_a|^2 - e_g(\phi)|A|^2)\, \mathrm{d}v_g$$

où $\phi_a = \langle \phi, a \rangle$. Cette formule, qui découle directement du lemme 3.4, peut être obtenue aussi à partir de la formule générale de la variation seconde (cf. [13]).

Preuve de 2.4. Soit $\hat{H}_\phi$ la forme quadratique sur $\mathbb{R}^{n+1}$ définie pour tout $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ par: $\hat{H}_\phi(a) = H_\phi(\bar{a} \circ \phi)$. Soit $\{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^{n+1}$ qui diagonalise $\hat{H}_\phi$ et telle que $\hat{H}_\phi(a_1) \leqslant \hat{H}_\phi(a_2) \leqslant \cdots \leqslant \hat{H}_\phi(a_{n+1})$. Il est alors clair qu'on a $\mathrm{Ind}_E(\phi) \geqslant k = \mathrm{Sup}\{i; \hat{H}_\phi(a_i) < 0\}$ (en effet, H_ϕ est définie négative sur le sous-espace de $\mathscr{E}(\phi)$ engendré par $A_1 = \bar{a}_1 \circ \phi, \ldots, A_k = \bar{a}_k \circ \phi$). Or, pour tout $i \geqslant k+1$, on a

$$\int_M |\mathrm{d}\phi_{a_i}|^2\, \mathrm{d}v_g \geqslant \int_M e_g(\phi)|A_i|^2\, \mathrm{d}v_g = E_g(\phi) - \int_M e_g(\phi)\phi_{a_i}^2\, \mathrm{d}v_g,$$

où la dernière égalité provient du fait qu'on a $|A|^2 = |a|^2 - \phi_a^2$ pour tout $A = \bar{a} \circ \phi \in \mathscr{E}(\phi)$. En sommant par rapport à i on obtient (comme $\Sigma_i |\mathrm{d}\phi_{a_i}|^2 = 2e_g(\phi)$ et $\Sigma_i \phi_{a_i}^2 = 1$):

$$\begin{aligned} 2E_g(\phi) \geqslant \sum_{i \geqslant k+1} \int_M |\mathrm{d}\phi_{a_i}|^2\, \mathrm{d}v_g &\geqslant (n-k+1)E_g(\phi) \\ - \sum_{i \geqslant k+1} \int_M e_g(\phi)\phi_{a_i}^2\, \mathrm{d}v_g &\geqslant (n-k)E_g(\phi). \end{aligned}$$

Comme ϕ est non constante, on en déduit que k est au moins égal à $n-2$ et que l'égalité $k = n-2$ entraîne qu'on a $\phi_{a_1} = \cdots = \phi_{a_k} = 0$ et donc que $\phi(M)$ est contenu dans la 2-sphère obtenue comme intersection de $\mathbb{S}^n$ avec le sous-espace engendré par $\{a_{n-1}, a_n, a_{n+1}\}$.

Preuve de 2.5. Soit $A = \bar{a} \circ \phi \in \mathscr{E}(\phi)$. En tout point x de M on note respectivement $A^T(x)$ et $A^N(x)$ les projections orthogonales de $A(x)$ sur $\mathrm{d}\phi(T_xM)$ et $\mathrm{d}\phi(T_xM)^\perp$. Soit $\{e_1, \ldots, e_m\}$ une base orthonormée de T_xM qui diagonalise ϕ^* can et telle que $\{\mathrm{d}\phi(e_1), \ldots, \mathrm{d}\phi(e_k)\}$ soit une base de $\mathrm{d}\phi(T_xM)$. Si $e_g(\phi)(x) \neq 0$, alors on a au point x:

$$|A^T(x)|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\mathrm{d}\phi(e_i)|^{-2} \langle A(x), \mathrm{d}\phi(e_i) \rangle^2.$$

Or, pour tout $i \leqslant m$, on a:

$$|d\phi(e_i)|^2 = e_g(\phi)(x) - S_g(\phi)(e_i, e_i) \leqslant e_g(\phi)(x) - S_g^0(\phi)(x).$$

On en déduit

$$(e_g(\phi) - S_g^0(\phi))(x)|A^T(x)|^2 \geqslant \sum_{i=1}^{k} \langle A(x), d\phi(e_i)\rangle^2 = |d\phi_a(x)|^2.$$

Par suite, on a en tout point de M

$$|d\phi_a|^2 - e_g(\phi)|A|^2 \leqslant -e_g(\phi)|A^N|^2 - S_g^0(\phi)|A^T|^2 \leqslant -S_g^0(\phi)|A|^2,$$

où la dernière inégalité provient du fait qu'on a toujours $e_g(\phi) \leqslant S_g^0(\phi)$.

La positivité de $S_g(\phi)$ entraîne donc que la forme H_ϕ est négative sur $\mathscr{E}(\phi)$ et que l'égalité $H_\phi(A) = 0$ ne peut avoir lieu, pour un champ non nul $A = \bar{a} \circ \phi \in \mathscr{E}(\phi)$, que si A^N est nul sur l'ouvert $\Omega = \{x; e_g(\phi)(x) > 0\}$ et si A est nul sur l'ouvert $U = \{x; S_g^0(\phi)(x) > 0\}$. Cette dernière condition entraîne que le champ $\bar{a}$ est nul sur $\phi(U)$ et donc que ϕ est localement constante sur U (en effet, $\bar{a}$ ne s'annule sur $\mathbb{S}^n$ qu'en les points $\pm a/|a|$). Or, une application harmonique constante sur un ouvert non vide de M est partout constante sur M. On en déduit que, sous les hypothèses de (i), la forme H_ϕ est définie négative sur $\mathscr{E}(\phi)$ et donc qu'on a $\mathrm{Ind}_E(\phi) \geqslant n+1$. D'autre part, comme nous l'avons vu dans la preuve du théorème 1.1, l'existence, pour une immersion ϕ, d'un champ non nul $A \in \mathscr{E}(\phi)$ tel que A^N soit identiquement nul sur M n'a lieu que si $\phi(M)$ est une sphère équatoriale de $\mathbb{S}^n$. Par suite, les hypothèses de (ii) entraînent elles aussi que la forme H_ϕ est définie négative sur $\mathscr{E}(\phi)$ et donc qu'on a $\mathrm{Ind}_E(\phi) \geqslant n+1$. □

Preuve de 2.7. Sous les hypothèses de 2.7 on a: $e_g(\phi) = \lambda/2$, $\Delta_g \phi_a = \lambda \phi_a$ et donc

$$\int_M |d\phi_a|^2 \, dv_g = \lambda \int_M \phi_a^2 \, dv_g$$

pour tout $a \in \mathbb{R}^{n+1}$. D'où, pour tout $A = \bar{a} \circ \phi \in \mathscr{E}(\phi)$ on a:

$$H_\phi(A) = 2 \int_M (|d\phi_a|^2 - e_g(\phi)|A|^2) \, dv_g = \lambda \int_M (3\phi_a^2 - |a|^2) \, dv_g.$$

Or, la famille $\{\phi_i\}$ est orthogonale (dans $L^2(M, g)$) et on a

$$\int_M \phi_i^2 \, dv_g = V(M, g)/(n+1)$$

pour tout $i \leqslant n+1$. Par suite pour tout $a=(\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}$, on a:

$$\int_M \phi_a^2 \, dv_g = \int_M \left(\sum_i \alpha_i\phi_i\right)^2 dv_g = \sum_i \alpha_i^2 V(M,g)/(n+1)$$
$$= |a|^2 V(M,g)/(n+1).$$

On en déduit:

$$H_\phi(A) = -\lambda |a|^2 V(M,g)(n-2)/(n+1).$$

La forme H_ϕ est donc définie négative sur $\mathscr{E}(\phi)$ si et seulement si n est supérieur ou égal à 3. D'où le résultat. □

III. Effet d'une transformation de möbius sur l'énergie d'une application harmonique

Nous venons de voir au paragraphe précédent que, sous certaines hypothèses, la restriction de la fonctionnelle énergie E_g à l'orbite $G_n(\phi)=\{\gamma\circ\phi;\gamma\in G(n)\}$ d'une application harmonique ϕ de (M,g) dans $\mathbb{S}^n$ sous l'action du groupe $G(n)$ des transformations conformes de $\mathbb{S}^n$, admettait un maximum local en ϕ. Nous allons examiner à présent le problème de savoir sous quelles conditions l'application ϕ correspond-t-elle à un maximum global de E_g restreint à $G_n(\phi)$. Le résultat que nous obtenons dans cette direction est le suivant:

3.1. THEOREME. *Soit ϕ une application harmonique d'une variété riemannienne compacte (M,g) dans $\mathbb{S}^n$. Si le tenseur d'énergie-impulsion $S_g(\phi)$ de ϕ est positif en tout point de M, alors, pour tout difféomorphisme conforme γ de $\mathbb{S}^n$, on a:*

$$E_g(\gamma\circ\phi) \leqslant E_g(\phi).$$

Si, de plus, $S_g(\phi)$ est défini positif en au moins un point de M ou si ϕ est une immersion telle que $\phi(M)$ ne soit pas une sphère totalement géodésique de $\mathbb{S}^n$, alors l'égalité $E_g(\gamma\circ\phi)=E_g(\phi)$ a lieu si et seulement si γ est une isométrie de $\mathbb{S}^n$.

3.2. REMARQUE. Soit ϕ une application harmonique à tenseur d'énergie-impulsion positif d'une variété compacte (M,g) dans $\mathbb{S}^n$. Il découle du théorème 3.1 que, si γ est un difféomorphisme conforme de $\mathbb{S}^n$ tel que $\gamma\circ\phi$ soit harmonique, alors on a nécessairement $E_g(\gamma\circ\phi)=E_g(\phi)$ (en effet, on a $S_g^0(\gamma\circ\phi)=(\alpha\circ\phi)S_g^0(\phi)\geqslant 0$ où α est la fonction positive sur $\mathbb{S}^n$ tel que

$\gamma^*\mathrm{can} = \alpha\,\mathrm{can}$. L'harmonicité de $\gamma \circ \phi$ entraînerait donc d'après 3.1:

$$E_g(\phi) \geqslant E_g(\gamma \circ \phi) \geqslant E_g(\gamma^{-1} \circ \gamma \circ \phi) = E_g(\phi).$$

On en déduit que, si, en plus de l'hypothèse "$S_g(\phi)$ positif", $S_g(\phi)$ est défini positif quelque part ou si ϕ est une immersion telle que $\phi(M)$ ne soit pas un équateur, alors il n'existe aucun difféomorphisme conforme non isométrique γ de $\mathbb{S}^n$ tel que $\gamma \circ \phi$ soit harmonique. □

Comme application du théorème 3.1 nous obtenons la:

3.3. PROPOSITION. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte. On note $\lambda_1(\Delta_g)$ la plus petite valeur propre non nulle du Laplacien de (M, g). Alors, pour toute application harmonique non constante ϕ à tenseur d'énergie-impulsion positif de (M, g) dans $\mathbb{S}^n$, on a*:

$$E_g(\phi) \geqslant \lambda_1(\Delta_g) V(M, g)/2$$

où l'égalité a lieu si et seulement s'il existe un difféomorphisme conforme γ de $\mathbb{S}^n$ tel que $\gamma \circ \phi$ soit harmonique et $e_g(\gamma \circ \phi)$ soit constante égale à $\lambda_1(\Delta_g)/2$.

Pour tout $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ on note $(\gamma_t^a)_{t\in R}$ le groupe à un paramètre de difféomorphismes conformes de $\mathbb{S}^n$ engendré par le champ $\bar{a}$ obtenu en projetant a sur $T\mathbb{S}^n$. La preuve du théorème 3.1 est alors fondée sur le calcul explicite, pour tout $a \in \mathbb{R}^{n+1}$, de la dérivée de la fonction réelle $t \to E_g(\gamma_t^a \circ \phi)$:

3.4. LEMME. *Soit ϕ une application harmonique d'une variété riemannienne compacte (M, g) dans $\mathbb{S}^n$. Pour tout $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ et tout $t_0 \in \mathbb{R}$, on a*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_g(\gamma_t^a \circ \phi)|_{t=t_0} = 2|a|^2 \operatorname{sh} t_0 \int_M \frac{|\mathrm{d}\phi_a|^2 - e_g(\phi)|A|^2}{(\operatorname{sh} t_0 \phi_a + |a| \operatorname{ch} t_0)^3} \mathrm{d}v_g$$

où $A = \bar{a} \circ \phi$ et $\phi_a = \langle \phi, a \rangle$.

Preuve. Posons $\psi = \gamma_{t_0}^a \circ \phi$. On a alors (cf. [3]):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_g(\gamma_t^a \circ \phi)|_{t=t_0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_g(\gamma_t^a \circ \psi)|_{t=0} = -\int_M \langle \tau_g(\psi), \bar{a} \circ \psi \rangle \,\mathrm{d}v_g$$

où $\tau_g(\psi)$ est la tension de ψ i.e., pour tout $x \in M$

$$\tau_g(\psi)(x) = \sum_1^m (\nabla_{e_i}^{\psi} \mathrm{d}\psi(e_i) - \mathrm{d}\psi(D_{e_i} e_i))$$

où D, ∇ et ∇^{ψ} sont respectivement les connexions canoniques des fibrés TM, $T\mathbb{S}^n$ et $\psi^{-1}T\mathbb{S}^n$ et où $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ est une repère orthonormé local au voisinage de x.

On a:

$$\tau_g(\psi) = \tau_g(\gamma^a_{t0} \circ \phi) = d\gamma^a_{t0}(\tau_g(\phi)) + \sum_i \text{Hess } \gamma^a_t(d\phi(e_i), d\phi(e_i))$$

où

$$\text{Hess } \gamma^a_{t0}(X, Y) = \nabla_{d\gamma^a_{t0}(X)} d\gamma^a_{t0}(Y) - d\gamma^a_{t0}(\nabla_X Y).$$

L'harmonicité de ϕ équivaut à: $\tau_g(\phi) = 0$ (cf. [3]). De plus, on a

$$\nabla_{d\gamma^a_{t0}(X)} d\gamma^a_{t0}(Y) = d\gamma^a_{t0}(\tilde{\nabla}_X Y)$$

où $\tilde{\nabla}$ est la connexion de Levi-Civita de $(\mathbb{S}^n, (\gamma^a_{t0})^* \text{can})$. Or, γ^a_{t0} est un difféomorphisme conforme de $\mathbb{S}^n$ et on a (cf. [7]):

$$(\gamma^a_{t0})^* \text{can} = |a|^2 (\text{sh } t_0 X_a + |a| \text{ ch } t_0)^{-2} \text{can}$$

où $X_a(y) = \langle y, a \rangle$ pour tout $y \in \mathbb{S}^n$. La formule de changement conforme pour les connexions donne:

$$\tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = \frac{\text{sh } t_0}{\text{sh } t_0 X_a + |a| \text{ ch } t_0} (\langle X, Y \rangle \bar{a} - \langle X, \bar{a} \rangle Y - \langle Y, \bar{a} \rangle X),$$

D'où:

$$\begin{aligned}
\tau_g(\psi) &= \sum_i \text{Hess } \gamma^a_{t0}(d\phi(e_i), d\phi(e_i)) \\
&= \frac{\text{sh } t_0}{\text{sh } t_0 \phi_a + |a| \text{ ch } t_0} \sum_i d\gamma^a_{t0}(|d\phi(e_i)|^2 A - 2\langle d\phi(e_i), A \rangle \, d\phi(e_i)) \\
&= \frac{2 \text{ sh } t_0}{\text{sh } t_0 \phi_a + |a| \text{ ch } t_0} d\gamma^a_{t0}(e_g(\phi) A - \sum_i d\phi_a(e_i) \, d\phi(e_i)).
\end{aligned}$$

D'autre part, on a pour tout $y \in \mathbb{S}^n$: $\bar{a}(\gamma^a_{t0}(y)) = d\gamma^a_{t0}(\bar{a}(y))$. D'où, $\bar{a} \circ \psi = d\gamma^a_{t0}(A)$. En conclusion, on a:

$$\langle \tau_g(\psi), \bar{a} \circ \psi \rangle = \frac{2 \operatorname{sh} t_0}{\operatorname{sh} t_0 \phi_a + |a| \operatorname{ch} t_0} \times \left\langle \mathrm{d}\gamma^a_{t_0}\left(e_g(\phi)A - \sum_i \mathrm{d}\phi_a(e_i)\, \mathrm{d}\phi(e_i)\right), \mathrm{d}\gamma^a_{t_0}(A) \right\rangle$$

$$= \frac{2|a|^2 \operatorname{sh} t_0}{(\operatorname{sh} t_0 \phi_a + |a| \operatorname{ch} t_0)^3} \left(e_g(\phi)|A|^2 - \sum_i \mathrm{d}\phi_a(e_i)^2 \right)$$

$$= \frac{2|a|^2 \operatorname{sh} t_0}{(\operatorname{sh} t_0 \phi_a + |a| \operatorname{ch} t_0)^3} \,(e_g(\phi)|A|^2 - |\mathrm{d}\phi_a|^2). \qquad \square$$

Preuve de 3.1. Rappelons que, pour tout difféomorphisme conforme γ de $\mathbb{S}^n$, il existe une isométrie $r \in \mathrm{O}(n+1)$, un réel $t \geqslant 0$ et un vecteur $a \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ tels qu'on ait: $\gamma = r \circ \gamma^a_t$ (cf. [5]). Par suite, il suffit de montrer le résultat pour les γ^a_t avec $t \in \mathbb{R}^+$ et $a \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$. Or, dans la preuve du théorème 2.5, nous avons montré que, pour tout $A = \bar{a} \circ \phi \in \mathscr{E}(\phi)$, on a:

$$|\mathrm{d}\phi_a|^2 - e_g(\phi)|A|^2 \leqslant -S^0_g(\phi)|A|^2.$$

La positivité de $S_g(\phi)$ entraîne donc, d'après le lemme 3.4, que la fonction $t \to E_g(\gamma^a_t \circ \phi)$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et donc qu'on a $E_g(\gamma^a_t \circ \phi) \leqslant E_g(\phi)$ pour tout $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ et tout $t \in \mathbb{R}^+$. Ceci démontre la première partie de 3.1.

Les arguments que nous avons utilisés dans la preuve de 2.5 montrent que, si, en plus de l'hypothèse "$S_g(\phi)$ partout positif", $S_g(\phi)$ est défini positif quelque part ou si ϕ est une immersion telle que $\phi(M)$ ne soit pas une sphère équatoriale, alors, pour tout $a \neq 0$, la fonction $|\mathrm{d}\phi_a|^2 - e_g(\phi)|A|^2$ est partout négative et est strictement négative en au moins un point de M. Ce dernier fait entraîne (lemme 3.4) que, la fonction $t \to E_g(\gamma^a_t \circ \phi)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et donc qu'on a $E_g(\gamma^a_t \circ \phi) < E_g(\phi)$ pour tout $a \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ et tout $t > 0$. On en déduit la seconde partie de 3.1. $\square$

Preuve de 3.3. Par un argument identique à celui utilisé dans [9] (cf. aussi [4]), nous pouvons montrer l'existence, pour toute application non constante ϕ de M dans $\mathbb{S}^n$, d'un difféomorphisme conforme γ tel que l'application $\phi' = \gamma \circ \phi = (\phi'_1, \ldots, \phi'_{n+1})$ vérifie: $\int_M \phi'_i \,\mathrm{d}v_g = 0$ pour tout $i \leqslant n+1$. Le principe du minimax nous donne alors pour tout $i \leqslant n+1$:

$$\lambda_1(\Delta_g) \int_M \phi'^2_i \,\mathrm{d}v_g \leqslant \int_M |\mathrm{d}\phi'_i|^2 \,\mathrm{d}v_g.$$

En sommant par rapport à i et en utilisant le théorème 3.1 on obtient:

$$\lambda_1(\Delta_g)V(M, g) \leqslant 2E_g(\phi') \leqslant 2E_g(\phi).$$

L'égalité $E_g(\phi) = \lambda_1(\Delta_g)V(M, g)/2$ entraîne qu'on a pour tout $i \leqslant n+1$:

$$\lambda_1(\Delta_g) \int_M \phi_i'^2 \, dv_g = \int_M |d\phi_i'|^2 \, dv_g$$

et donc que $\phi_1', \ldots, \phi_{n+1}'$ sont des fonctions propres de Δ_g pour la valeur propre $\lambda_1(\Delta_g)$. Or, ceci équivaut à dire (cf. Section 4) que ϕ' est harmonique avec $e_g(\phi') = \lambda_1(\Delta_g)/2$. Réciproquement, s'il existe un difféomorphisme conforme γ de $\mathbb{S}^n$ tel que $\gamma \circ \phi$ soit harmonique et $e_g(\gamma \circ \phi)$ constant égal à $\lambda_1(\Delta_g)/2$, on a alors (remarque 3.2): $E_g(\phi) = E_g(\gamma \circ \phi) = \lambda_1(\Delta_g)V(M, g)/2$. $\square$

IV. Applications λ_1-harmoniques

Pour tout opérateur du type $\Delta_g + q$ agissant sur $C^\infty(M)$, où q est une fonction différentiable sur M, on note $(\lambda_k(\Delta_g + q))_{k \geqslant 0}$ la suite strictement croissante de valeurs propres de cet opérateur et $(F_k(\Delta_g + q))_{k \geqslant 0}$ la suite des espaces propres correspondants.

Il est bien connu qu'une application $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_{n+1})$ d'une variété compacte (M, g) dans $\mathbb{S}^n$ est harmonique si et seulement si elle vérifie, pour tout $i \leqslant n+1$,

$$(\Delta_g - 2e_g(\phi))\phi_i = 0.$$

Autrement dit, l'harmonicité de ϕ équivaut à l'existence d'un entier $k_0 \geqslant 0$ tel qu'on ait:

$$\lambda_{k_0}(\Delta_g - 2e_g(\phi)) = 0 \quad \text{et} \quad \phi_i \in F_{k_0}(\Delta_g - 2e_g(\phi))$$

pour tout $i \leqslant n+1$. Or, la première valeur propre $\lambda_0(\Delta_g + q)$ de $\Delta_g + q$ est toujours simple, i.e. $\dim F_0(\Delta_g + q) = 1$. Par suite, on a $k_0 \geqslant 1$ dès que ϕ n'est pas constante. Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser aux applications harmoniques pour lesquelles l'entier k_0 est exactement égal à 1.

4.1. DEFINITION. *Une application ϕ de (M, g) dans $\mathbb{S}^n$ est dite λ_1-harmonique si elle est harmonique et si zéro est exactement la seconde valeur propre de* $\Delta_g - 2e_g(\phi)$, i.e. $\lambda_1(\Delta_g - 2e_g(\phi)) = 0$.

4.2. EXEMPLES. (i) Les applications harmoniques standards (cf. Section 2B) associées à la valeur propre $\lambda_1(\Delta_g)$ d'un espace homogène compact sont λ_1-harmoniques.

(ii) Toute immersion isométrique minimale $\phi=(\phi_1,\ldots,\phi_{n+1})$ de (M,g) dans $\mathbb{S}^n$ dont les fonctions composantes $\phi_1,\ldots,\phi_{n+1}$ sont des premières fonctions propres de Δ_g (i.e. $\phi_i\in F_1(\Delta_g)$ pour tout i), est une application λ_1-harmonique.

Le cas le plus classique concerné par (i) et (ii) est celui des plongements standards des espaces symétriques de rang 1 (sphère et espaces projectifs) dans des sphères. $\square$

Une manière équivalente de définir les applications λ_1-harmoniques est donnée par le:

4.3. LEMME. *Soit $\phi=(\phi_1,\ldots,\phi_{n+1})$ une application différentiable d'une variété riemannienne (M,g) dans $\mathbb{S}^n$. S'il existe une fonction $q\in C^\infty(M)$ telle qu'on ait $\phi_i\in F_1(\Delta_g+q)$ pour tout $i\leqslant n+1$, alors ϕ est λ_1-harmonique et on a: $e_g(\phi)=(\lambda_1(\Delta_g+q)-q)/2$.*

Preuve. Il suffit en fait de montrer l'égalité $e_g(\phi)=(\lambda_1(\Delta_g+q)-q)/2$. Or, on a

$$0=\frac{1}{2}\Delta_g\left(\sum_i \phi_i^2\right)=\sum_i \phi_i\Delta_g\phi_i-\sum_i |\mathrm{d}\phi_i|^2=\lambda_1(\Delta_g+q)-q-2e_g(\phi). \qquad \square$$

Il est bien connu que, lorsque la variété M est de dimension 2, alors l'énergie $E_g(\phi)$ d'une application ϕ de M dans $\mathbb{S}^n$ par rapport à une métrique g ne dépend que de la classe conforme de cette métrique (i.e. $E_{g'}(\phi)=E_g(\phi)$ pour toute métrique g' de la forme $g'=\alpha g$, où $\alpha\in C^\infty(M)$) et donc, par conséquent, que l'harmonicité est une propriété conforme. Nous allons tout de suite voir que la λ_1-harmonicité est elle aussi une propriété conforme en dimension 2. En effet, on a la

4.4. PROPOSITION. *Soit ϕ une application d'une surface M dans $\mathbb{S}^n$. Si ϕ est λ_1-harmonique pour une métrique g sur M, alors elle est λ_1-harmonique pour toute métrique g' conforme à g.*

Preuve. Soient g et $g'=\alpha g$ deux métriques conformes sur M et supposons que l'application ϕ soit λ_1-harmonique pour g. Pour montrer que ϕ est λ_1-harmonique pour g' il suffit en fait de montrer qu'on a $\lambda_1(\Delta_{g'}-2e_{g'}(\phi))=0$ (en effet, comme M est de dimension 2, ϕ est harmonique pour toute métrique conforme à g). Or, puisque M est de dimension 2 on a:

$$\Delta_{g'}-2e_{g'}(\phi)=\alpha^{-1}(\Delta_g-2e_g(\phi)) \quad \text{et} \quad \mathrm{d}v_{g'}=\alpha\,\mathrm{d}v_g.$$

Par suite, les formes quadratiques T et T' associées respectivement aux opérateurs $\Delta_g-2e_g(\phi)$ et $\Delta_{g'}-2e_{g'}(\phi)$ sont identiques, i.e. pour tout $f\in C^\infty(M)$

on a:

$$T(f)=\int_M f(\Delta_g-2e_g(\phi))(f)\,dv_g=\int_M f(\Delta_{g'}-2e_{g'}(\phi))(f)\,dv_{g'}=T'(f).$$

Le résultat découle alors immédiatement de la caractérisation variationnelle des valeurs propres de $\Delta_g-2e_g(\phi)$ et $\Delta_{g'}-2e_{g'}(\phi)$ (en effet, bien que les produits scalaires de référence dans $L^2(M,g)$ et $L^2(M,g')$ soient différents, le signe des valeurs propres de T relativement à ces deux produits scalaires est le même et on a donc $\lambda_1(\Delta_{g'}-2e_{g'}(\phi))=\lambda_1(\Delta_g-2e_g(\phi))=0$). □

La propriété fondamentale que nous démontrons dans ce paragraphe pour les applications λ_1-harmoniques est la suivante:

4.5. PROPOSITION. *Soit ϕ une application λ_1-harmonique d'une variété riemannienne compacte (M,g) dans $\mathbb{S}^n$. Pour toute application non constante ψ de M dans $\mathbb{S}^{n'}$, il existe un difféomorphisme conforme γ de $\mathbb{S}^{n'}$ tel qu'on ait*:

$$E_g(\gamma\circ\psi)\geqslant E_g(\phi).$$

Preuve. L'argument évoqué dans la preuve de 3.3 permet aussi (cf. [6]) de montrer l'existence, pour toute application non constante ϕ de M dans $\mathbb{S}^{n'}$, d'un difféomorphisme conforme γ de $\mathbb{S}^{n'}$ tel que l'application $\psi'=\gamma\circ\psi=(\psi'_1,\ldots,\psi'_{n+1})$ vérifie $\int_M\psi'_iu\,dv_g=0$ pour tout $i\leqslant n'+1$, où $\{u\}$ est une base de $F_0(\Delta_g-2e_g(\phi))$. Le principe du minimax nous donne alors, pour tout $i\leqslant n'+1$,

$$0=\lambda_1(\Delta_g-2e_g(\phi))\int_M\psi_i'^2\,dv_g\leqslant\int_M(|d\psi'_i|^2-2e_g(\phi)\psi_i'^2)\,dv_g.$$

En sommant par rapport à i on obtient le résultat. □

Une conséquence du théorème 3.1 et de la proposition 4.5 est le:

4.6. COROLLAIRE. *Soit ϕ une application λ_1-harmonique d'une variété riemannienne compacte (M,g) dans $\mathbb{S}^n$. Pour toute application harmonique non constante ψ à tenseur d'énergie-impulsion positif de (M,g) dans $\mathbb{S}^{n'}$ on a*:

$$E_g(\psi)\geqslant E_g(\phi).$$

De plus, l'égalité a lieu si et seulement s'il existe un difféomorphisme conforme γ de $\mathbb{S}^{n'}$ tel que $\gamma\circ\psi$ soit λ_1-harmonique et $e_g(\gamma\circ\psi)=e_g(\phi)$.

Preuve. L'inégalité découle directement de 3.1 et 4.5. Il nous reste donc à examiner le cas d'égalité. Or, celle-ci a bien lieu sous les conditions de l'énoncé (voir 3.2). Réciproquement, supposons qu'on ait $E_g(\psi)=E_g(\phi)$ et soit γ un difféomorphisme conforme de $\mathbb{S}^{n'}$ choisi comme dans la preuve de 4.5. On a alors, en posant $\psi'=\gamma\circ\psi$, $E_g(\psi)=E_g(\psi')=E_g(\phi)$. Or, cette dernière égalité entraîne qu'on a, pour tout $i\leqslant n'+1$ (cf. Preuve de 4.5):

$$0=\lambda_1(\Delta_g-2e_g(\phi))\int_M \psi_i'^2\,\mathrm{d}v_g=\int_M(|\mathrm{d}\psi_i'|^2-2e_g(\phi)\psi_i'^2)\,\mathrm{d}v_g$$

et donc que les ψ_i' appartiennent à $F_1(\Delta_g-2e_g(\phi))$. On en déduit (lemma 4.3) que ψ' est λ_1-harmonique et qu'on a $e_g(\psi')=e_g(\phi)$.

4.7. REMARQUE. Il découle de ce qui précède que toutes les applications λ_1-harmoniques à tenseur d'énergie-impulsion positif d'une variété compacte (M,g) dans des sphères ont même énergie. De plus, si ϕ est une application λ_1-harmonique à tenseur d'énergie-impulsion $S_g(\phi)$ positif de (M,g) dans $\mathbb{S}^n$ telle que $S_g(\phi)$ soit défini positif en au moins un point de M ou telle que ϕ soit une immersion dont l'image $\phi(M)$ ne soit pas une sphère équatoriale, alors toute autre application λ_1-harmonique ψ à tenseur d'énergie-impulsion positif de (M,g) dans $\mathbb{S}^{n'}$ vérifie: $e_g(\psi)=e_g(\phi)$. □

Bibliographie

[1] Baird, P. and Eells, J.: A conservation law for harmonic maps, Lecture Notes in Math. 894 (1981), 1–25.

[2] Berger, M., Gauduchon, P. and Mazet, E.: *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lecture Notes in Math. 194 (1971).

[3] Eells, J. and Lemaire, L.: *Selected topics in harmonic maps*, C.B.M.S. Regional Conf. Series 50, A.M.S. Providence (1983).

[4] El Soufi, A. and Ilias, S.: Le volume conforme et ses applications d'après Li et Yau. *Séminaire théorie spectrale et géométrie de l'Institut Fourier*, exposé no. VII (1984).

[5] El Soufi, A. and Ilias, S.: Immersions minimales, première valeur propre du Laplacien et volume conforme, *Math. Ann.* 275 (1986), 257–267.

[6] El Soufi, A. and Ilias, S.: Majoration de la seconde valeur propre d'un opérateur de Schrödinger sur une variété compacte et applications, *J. Func. Analysis* 103(2) (1992), 294–316.

[7] El Soufi, A. and Ilias, S.: Une inégalité du type "Reilly" pour les sous-variétés de l'espace hyperbolique, *Comment. Math. Helv.* (1992), Aparaître.

[8] Leung, P. F.: On the stability of harmonic maps, Lecture Notes in Math. 949 (1982), 122–129.

[9] Li, P. and Yau, S. T.: A new conformal invariant and its applications, etc., *Invent. Math.* 69 (1982), 269–291.

[10] Montiel, S., Ros, A.: Minimal immersions of surfaces by the first eigenfunctions and conformal area, *Invent. Math.* 83 (1986), 153–166.

[11] Sealey, H. C.: *Some properties of harmonic mappings*, Thèse de l'Université de Warwick (1980).

[12] Simons, J.: Minimal varieties in Riemannian manifolds, *Ann. of Math.* 88(2) (1968), 62–105.

[13] Smith, R. T.: The second variation formula for harmonic mappings, *Proc. Amer. Math. Soc.* 47 (1975), 229–236.

[14] Urbano, F.: Minimal surfaces with low index in the three-dimensional sphere, *Proc. Amer. Math. Soc.* 108 (1990), 989–992.